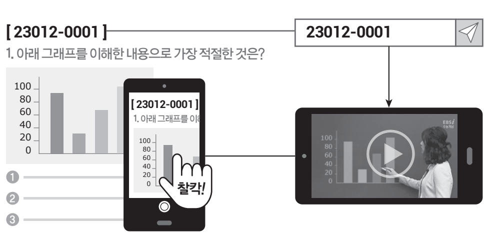
수능특강

수학영역 | 기하

이 책의 차례 Contents

학생 EBS 교재 문제 검색

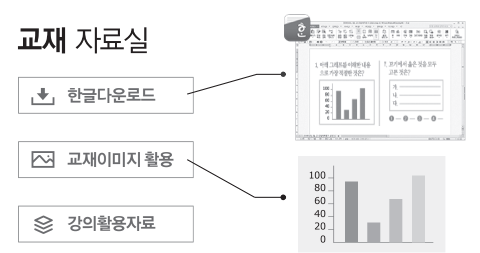
EBS 단추에서 문항코드나 사진으로
문제를 검색하면 푸리봇이 해설 영상을 제공합니다.



※ EBSi 사이트 및 모바일에서 이용이 가능합니다.
※ 사진 검색은 EBSi 고교강의 앱에서만 이용하실 수 있습니다.

교사 교사지원센터 교재 자료실

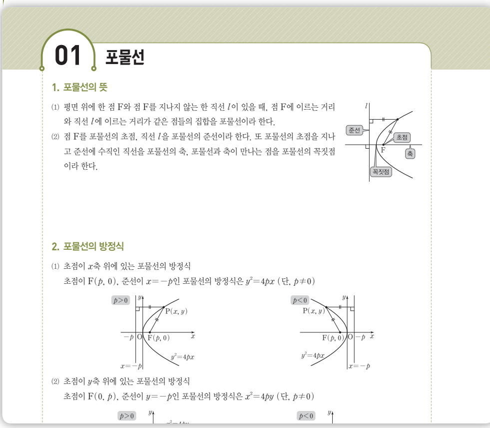
교재 문항 한글 문서(HWP)와
교재의 이미지 파일을 무료로 제공합니다.



※ 교사지원센터(http://teacher.ebsi.co.kr) 접속 후 '교사인증'을 통해 이용 가능

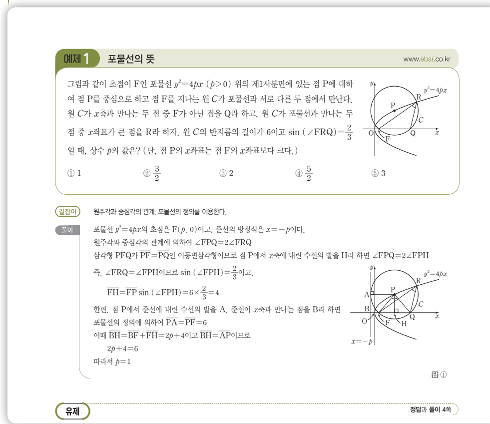
이 책의 구성과 특징 Structure

개념 정리



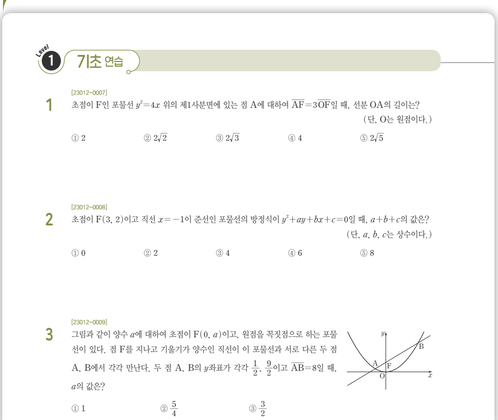
여러 종의 교과서를 통합하여 핵심 개념만을 체계적으로 정리하였고 설명, 참고, 예 를 제시하여 개념에 대한 이해와 적용에 도움이 되게 하였다.

예제 & 유제



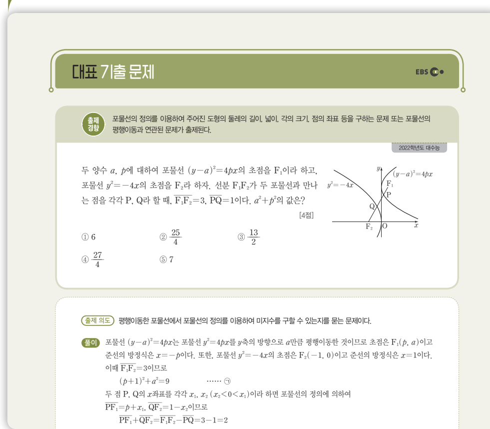
예제는 개념을 적용한 대표 문항으로 문제를 해결하는 데 필요한 주요 개념 및 풀이 전략을 길잡이로 제시하여 풀이 과정의 이해를 돕도록 하였고, 유제는 예제와 유사한 내용의 문제나 일반화된 문제를 제시하여 학습 내용과 문제에 대한 연관성을 익히도록 구성하였다.

Level 1-Level 2-Level 3



Level 1 기초 연습은 기초 개념을 제대로 숙지했는지 확인할 수 있는 문항을 제시하였으며, Level 2 기본 연습은 기본 응용 문항을, 그리고 Level 3 실력 완성은 수학적 사고력과 문제 해결 능력을 함양할 수 있는 문항을 제시하여 대학수학능력시험 실전에 대비할 수 있도록 구성하였다.

대표 기출 문제



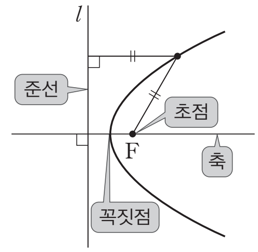
대학수학능력시험과 모의평가 기출 문항으로 구성하였으며 기존 출제 유형을 파악할 수 있도록 출제 경향과 출제 의도를 제시하였다.

01 포물선

1. 포물선의 뜻

(1) 평면 위에 한 점 F와 점 F를 지나지 않는 한 직선 l이 있을 때, 점 F에 이르는 거리와 직선 l에 이르는 거리가 같은 점들의 집합을 포물선이라 한다.

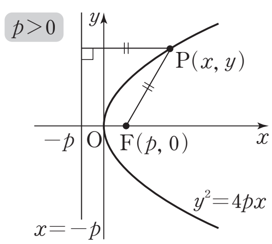
(2) 점 F를 포물선의 초점, 직선 l을 포물선의 준선이라 한다. 또 포물선의 초점을 지나고 준선에 수직인 직선을 포물선의 축, 포물선과 축이 만나는 점을 포물선의 꼭짓점이라 한다.

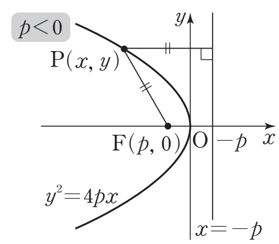


2. 포물선의 방정식

(1) 초점이 x축 위에 있는 포물선의 방정식

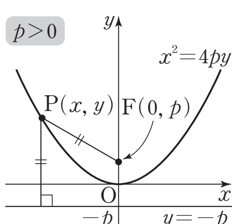
초점이 $\mathrm{F}(p, 0)$, 준선이 $x=-p$인 포물선의 방정식은 $y^2=4px$ (단, $p\neq0$)

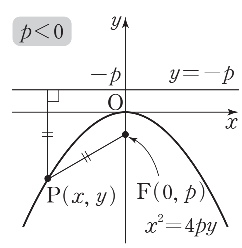




(2) 초점이 y축 위에 있는 포물선의 방정식

초점이 $\mathrm{F}(0, p)$, 준선이 $y=-p$인 포물선의 방정식은 $x^2=4py$ (단, $p\neq0$)





설명 0이 아닌 실수 p에 대하여 점 $\mathrm{F}(p, 0)$을 초점으로 하고 직선 $x=-p$를 준선으로 하는 포물선의 방정식을 구해 보자.

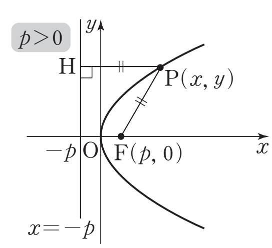
그림과 같이 포물선 위의 점 $\mathrm{P}(x, y)$에서 준선에 내린 수선의 발을 H라 하면 점 H의 좌표는 $(-p, y)$이다.

포물선의 정의에 의하여 $\overline{\mathrm{PF}}=\overline{\mathrm{PH}}$이므로

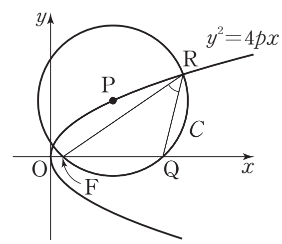
$$\sqrt{(x-p)^2+y^2}=|x+p|$$

이고, 이 식의 양변을 제곱하여 정리하면

$$y^2=4px$$



그림과 같이 초점이 F인 포물선 $y^2=4px$ $(p>0)$ 위의 제1사분면에 있는 점 P에 대하여 점 P를 중심으로 하고 점 F를 지나는 원 C가 포물선과 서로 다른 두 점에서 만난다. 원 C가 x축과 만나는 두 점 중 F가 아닌 점을 Q라 하고, 원 C가 포물선과 만나는 두 점 중 x좌표가 큰 점을 R라 하자. 원 C의 반지름의 길이가 6이고 $\sin(\angle\mathrm{FRQ})=\dfrac{2}{3}$일 때, 상수 p의 값은? (단, 점 P의 x좌표는 점 F의 x좌표보다 크다.)



① 1　② $\dfrac{3}{2}$　③ 2　④ $\dfrac{5}{2}$　⑤ 3

길잡이 원주각과 중심각의 관계, 포물선의 정의를 이용한다.

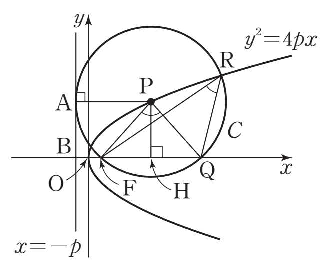
풀이 포물선 $y^2=4px$의 초점은 $\mathrm{F}(p,\ 0)$이고, 준선의 방정식은 $x=-p$이다.

원주각과 중심각의 관계에 의하여 $\angle\mathrm{FPQ}=2\angle\mathrm{FRQ}$

삼각형 PFQ가 $\overline{\mathrm{PF}}=\overline{\mathrm{PQ}}$인 이등변삼각형이므로 점 P에서 x축에 내린 수선의 발을 H라 하면 $\angle\mathrm{FPQ}=2\angle\mathrm{FPH}$

즉, $\angle\mathrm{FRQ}=\angle\mathrm{FPH}$이므로 $\sin(\angle\mathrm{FPH})=\dfrac{2}{3}$이고,

$$\overline{\mathrm{FH}}=\overline{\mathrm{FP}}\sin(\angle\mathrm{FPH})=6\times\frac{2}{3}=4$$



한편, 점 P에서 준선에 내린 수선의 발을 A, 준선이 x축과 만나는 점을 B라 하면

포물선의 정의에 의하여 $\overline{\mathrm{PA}}=\overline{\mathrm{PF}}=6$

이때 $\overline{\mathrm{BH}}=\overline{\mathrm{BF}}+\overline{\mathrm{FH}}=2p+4$이고 $\overline{\mathrm{BH}}=\overline{\mathrm{AP}}$이므로

$$2p+4=6$$

따라서 $p=1$

답 ①

유제

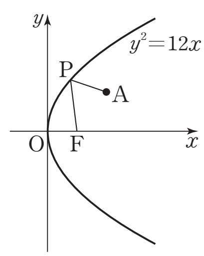
정답과 풀이 4쪽

1 [23012-0001]

초점이 $\mathrm{F}(2,\ 0)$이고 원점을 꼭짓점으로 하는 포물선 위의 제1사분면에 있는 점 A에 대하여 $\overline{\mathrm{AF}}=10$일 때, 직선 AF의 기울기는 k이다. $30k$의 값을 구하시오.

2 [23012-0002]

그림과 같이 초점이 F인 포물선 $y^2=12x$ 위의 점 P와 점 $\mathrm{A}(6,\ 4)$에 대하여 $\overline{\mathrm{PF}}+\overline{\mathrm{PA}}$의 값이 최소가 되도록 하는 점 P를 P′이라 할 때, 삼각형 AP′F의 넓이는?



① $\dfrac{22}{3}$　② 8　③ $\dfrac{26}{3}$

④ $\dfrac{28}{3}$　⑤ 10

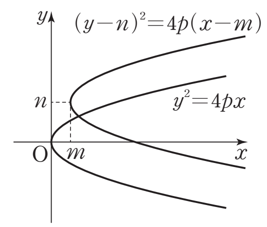
3. 포물선의 평행이동

(1) 포물선 $y^2=4px$를 x축의 방향으로 m만큼, y축의 방향으로 n만큼 평행이동한 포물선의 방정식은

$$(y-n)^2=4p(x-m)$$

이다. 이때 두 포물선 $y^2=4px$, $(y-n)^2=4p(x-m)$의 초점, 준선, 꼭짓점은 다음과 같다.

방정식	$y^2=4px$	$(y-n)^2=4p(x-m)$
초점	$(p, 0)$	$(p+m, n)$
준선	$x=-p$	$x=-p+m$
꼭짓점	$(0, 0)$	(m, n)

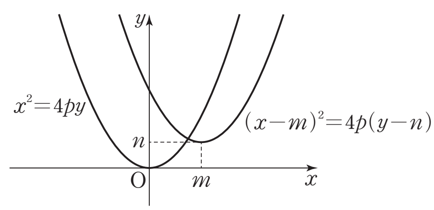


(2) 포물선 $x^2=4py$를 x축의 방향으로 m만큼, y축의 방향으로 n만큼 평행이동한 포물선의 방정식은

$$(x-m)^2=4p(y-n)$$

이다. 이때 두 포물선 $x^2=4py$, $(x-m)^2=4p(y-n)$의 초점, 준선, 꼭짓점은 다음과 같다.

방정식	$x^2=4py$	$(x-m)^2=4p(y-n)$
초점	$(0, p)$	$(m, p+n)$
준선	$y=-p$	$y=-p+n$
꼭짓점	$(0, 0)$	(m, n)



4. 포물선과 직선의 위치 관계

포물선과 직선의 방정식을 각각 $y^2=4px$, $y=mx+n$ $(m\neq 0)$이라 할 때, $y=mx+n$을 $y^2=4px$에 대입하여 정리하면

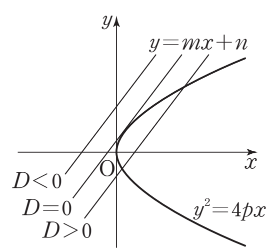
$$m^2x^2+2(mn-2p)x+n^2=0 \quad \cdots\cdots ㉠$$

포물선 $y^2=4px$와 직선 $y=mx+n$의 교점의 개수는 x에 대한 이차방정식 ㉠의 서로 다른 실근의 개수와 같으므로 방정식 ㉠의 판별식을 D라 하면 포물선과 직선의 위치 관계는 다음과 같다.

(1) $D>0 \Longleftrightarrow$ 서로 다른 두 점에서 만난다.

(2) $D=0 \Longleftrightarrow$ 한 점에서 만난다. (접한다.)

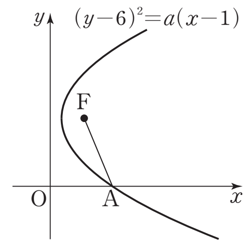
(3) $D<0 \Longleftrightarrow$ 만나지 않는다.



예제 2 포물선의 평행이동

그림과 같이 양수 a에 대하여 초점이 F인 포물선 $(y-6)^2=a(x-1)$과 x축이 만나는 점을 A라 하자. $\overline{\mathrm{AF}}=\overline{\mathrm{OA}}+1$일 때, $\cos(\angle\mathrm{OAF})=\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오.

(단, O는 원점이고, p와 q는 서로소인 자연수이다.)



길잡이 포물선 $(y-6)^2=a(x-1)$은 포물선 $y^2=ax$를 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 6만큼 평행이동한 것임을 이용한다.

풀이 포물선 $(y-6)^2=a(x-1)$은 포물선 $y^2=ax$를 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 6만큼 평행이동한 것이다.

이때 포물선 $y^2=ax$의 초점의 좌표가 $\left(\frac{a}{4},\ 0\right)$이고 준선의 방정식이 $x=-\frac{a}{4}$이므로 포물선 $(y-6)^2=a(x-1)$의 초점 F의 좌표는 $\left(\frac{a}{4}+1,\ 6\right)$이고 준선의 방정식은 $x=-\frac{a}{4}+1$이다.

$\overline{\mathrm{AF}}=\overline{\mathrm{OA}}+1$이므로 포물선 $(y-6)^2=a(x-1)$의 준선의 방정식은 $x=-1$임을 알 수 있다. 즉,

$$-\frac{a}{4}+1=-1,\ a=8$$

그러므로 주어진 포물선의 방정식은 $(y-6)^2=8(x-1)$이고, $\mathrm{F}(3,\ 6)$이다.

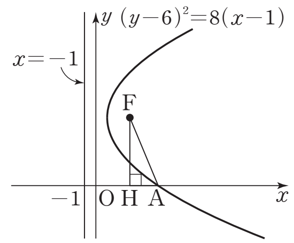
한편, 점 A의 x좌표를 k라 하면 점 $\mathrm{A}(k,\ 0)$이 포물선 위의 점이므로

$$(-6)^2=8(k-1),\ k-1=\frac{9}{2},\ k=\frac{11}{2}$$

즉, $\mathrm{A}\left(\frac{11}{2},\ 0\right)$이고 $\overline{\mathrm{AF}}=\overline{\mathrm{OA}}+1=\frac{13}{2}$

점 F에서 x축에 내린 수선의 발을 H라 하면

$$\cos(\angle\mathrm{OAF})=\frac{\overline{\mathrm{AH}}}{\overline{\mathrm{AF}}}=\frac{\frac{11}{2}-3}{\frac{13}{2}}=\frac{5}{13}$$



따라서 $p=13,\ q=5$이므로 $p+q=13+5=18$

답 18

유제

정답과 풀이 4쪽

3 [23012-0003]

포물선 $x^2-8x=4y$의 초점을 F라 할 때, 선분 OF의 길이는? (단, O는 원점이다.)

① $2\sqrt{6}$ ② 5 ③ $\sqrt{26}$ ④ $3\sqrt{3}$ ⑤ $2\sqrt{7}$

4 [23012-0004]

자연수 k에 대하여 포물선 $y^2=8x$와 직선 $y=\frac{1}{2}x+k$가 만나는 서로 다른 점의 개수를 $f(k)$라 할 때, $\sum_{k=1}^{10} f(k)$의 값은?

① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

01 포물선

5. 포물선의 접선

(1) 기울기가 주어진 포물선의 접선의 방정식

포물선 $y^2=4px$에 접하고 기울기가 m인 직선의 방정식은 $y=mx+\dfrac{p}{m}$ (단, $m\neq0$)

설명 포물선 $y^2=4px$에 접하고 기울기가 m인 직선의 방정식을 구해 보자.

포물선 $y^2=4px$에 접하고 기울기가 m $(m\neq0)$인 직선의 방정식을 $y=mx+n$이라 하고, 이를 포물선의 방정식 $y^2=4px$에 대입하여 얻은 x에 대한 이차방정식

$$m^2x^2+2(mn-2p)x+n^2=0$$

의 판별식을 D라 하면

$$\frac{D}{4}=(mn-2p)^2-m^2n^2=4p(p-mn)=0$$

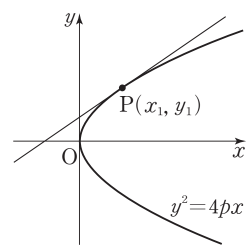
이다. 이때 $p\neq0$이므로 $p-mn=0$, 즉 $n=\dfrac{p}{m}$

따라서 구하는 접선의 방정식은 $y=mx+\dfrac{p}{m}$이다.

(2) 포물선 위의 점에서의 접선의 방정식

포물선 $y^2=4px$ 위의 점 $(x_1,\ y_1)$에서의 접선의 방정식은 $y_1y=2p(x+x_1)$

설명 포물선 $y^2=4px$ 위의 점 $\mathrm{P}(x_1,\ y_1)$에서의 접선의 방정식을 구해 보자.



$x_1\neq0$일 때 접선의 기울기를 m $(m\neq0)$이라 하면 직선의 방정식은

$$y-y_1=m(x-x_1) \quad \cdots\cdots ㉠$$

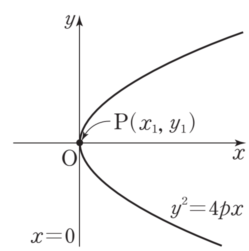
또 포물선 $y^2=4px$에 접하고 기울기가 m인 직선의 방정식은

$$y=mx+\frac{p}{m} \quad \cdots\cdots ㉡$$

㉠과 ㉡은 같은 직선이므로 $-mx_1+y_1=\dfrac{p}{m}$

양변에 m을 곱해 얻은 m에 대한 이차방정식 $x_1m^2-y_1m+p=0$에서 $m=\dfrac{y_1\pm\sqrt{(-y_1)^2-4px_1}}{2x_1}$

이때 ${y_1}^2=4px_1$, 즉 $x_1=\dfrac{{y_1}^2}{4p}$이므로 $m=\dfrac{y_1}{2x_1}=\dfrac{2p}{y_1}$ $(y_1\neq0)$



이것을 ㉠에 대입하면 $y=\dfrac{2p}{y_1}x-\dfrac{2p}{y_1}x_1+y_1$이고, ${y_1}^2=4px_1$이므로 정리하면

$$y_1y=2p(x+x_1)$$

$x_1=0$일 때 $y_1=0$이므로 이 식에 대입하면 접선의 방정식은 $x=0$이고, 그림과 같이 포물선 $y^2=4px$ 위의 점 $(0,\ 0)$에서의 접선이 y축 $(x=0)$이므로 $x_1=0$일 때에도 이 식은 성립한다.

예제 3 포물선의 접선

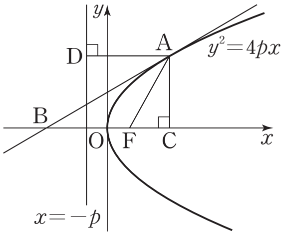
초점이 F인 포물선 $y^2=4px$ $(p>0)$ 위의 제1사분면에 있는 점 A에서의 접선이 x축과 만나는 점을 B라 하자. $\overline{AF}=6$, $\angle AFB=\frac{2}{3}\pi$일 때, 직선 AB의 방정식은 $ax+by+9=0$이다. a^2+b^2의 값을 구하시오.

(단, p, a, b는 상수이다.)

길잡이 포물선의 정의를 이용하여 점 A의 좌표를 구하고, 포물선 위의 점 A에서의 접선의 방정식을 구한다.

풀이 포물선 $y^2=4px$의 초점은 $F(p, 0)$이고, 준선의 방정식은 $x=-p$이다.

점 A에서 x축과 준선에 내린 수선의 발을 각각 C, D라 하자.



$\angle AFC=\pi-\angle AFB=\frac{\pi}{3}$이므로 직각삼각형 AFC에서

$$\overline{FC}=\overline{AF}\cos\frac{\pi}{3}=6\times\frac{1}{2}=3,\ \overline{AC}=\overline{AF}\sin\frac{\pi}{3}=6\times\frac{\sqrt{3}}{2}=3\sqrt{3}$$

포물선의 정의에 의하여 $\overline{AD}=\overline{AF}=6$이므로 원점을 O라 하면

$$\overline{AD}=2\overline{OF}+\overline{FC}=2p+3=6,\ p=\frac{3}{2}$$

그러므로 포물선의 방정식은 $y^2=6x$이고 점 A의 좌표는 $\left(\frac{9}{2}, 3\sqrt{3}\right)$이다.

따라서 포물선 $y^2=6x$ 위의 점 A에서의 접선의 방정식은

$$3\sqrt{3}y=2\times\frac{3}{2}\times\left(x+\frac{9}{2}\right),\ 2x-2\sqrt{3}y+9=0$$

즉, $a=2$, $b=-2\sqrt{3}$이므로

$$a^2+b^2=2^2+(-2\sqrt{3})^2=4+12=16$$

답 16

유제

정답과 풀이 5쪽

5 [23012-0005]

초점이 F인 포물선 $y^2=4x$ 위의 제1사분면에 있는 점 A에서의 접선이 x축과 만나는 점을 B라 하자. 점 B의 x좌표가 -3일 때, 삼각형 ABF의 넓이는?

① $4\sqrt{3}$ ② $2\sqrt{13}$ ③ $2\sqrt{14}$ ④ $2\sqrt{15}$ ⑤ 8

6 [23012-0006]

포물선 $y^2=ax$ $(a>0)$ 위의 제1사분면에 있는 점 A에서의 접선과 포물선 $y^2=-4x$ 위의 제2사분면에 있는 점 B에서의 접선이 점 $C(0, 4)$에서 만난다. 직선 AC와 직선 BC의 기울기의 곱이 $-\frac{1}{8}$일 때, 상수 a의 값은?

① 8 ② 10 ③ 12 ④ 14 ⑤ 16

Level 1 기초 연습

[23012-0007]

1 초점이 F인 포물선 $y^2=4x$ 위의 제1사분면에 있는 점 A에 대하여 $\overline{\mathrm{AF}}=3\overline{\mathrm{OF}}$일 때, 선분 OA의 길이는?

(단, O는 원점이다.)

① 2 ② $2\sqrt{2}$ ③ $2\sqrt{3}$ ④ 4 ⑤ $2\sqrt{5}$

[23012-0008]

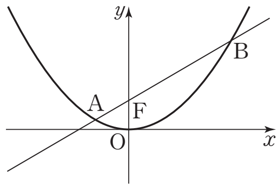
2 초점이 F$(3, 2)$이고 직선 $x=-1$이 준선인 포물선의 방정식이 $y^2+ay+bx+c=0$일 때, $a+b+c$의 값은?

(단, a, b, c는 상수이다.)

① 0 ② 2 ③ 4 ④ 6 ⑤ 8

[23012-0009]

3 그림과 같이 양수 a에 대하여 초점이 F$(0, a)$이고, 원점을 꼭짓점으로 하는 포물선이 있다. 점 F를 지나고 기울기가 양수인 직선이 이 포물선과 서로 다른 두 점 A, B에서 각각 만난다. 두 점 A, B의 y좌표가 각각 $\frac{1}{2}$, $\frac{9}{2}$이고 $\overline{\mathrm{AB}}=8$일 때, a의 값은?



① 1 ② $\frac{5}{4}$ ③ $\frac{3}{2}$

④ $\frac{7}{4}$ ⑤ 2

[23012-0010]

4 양수 a에 대하여 초점이 F_1인 포물선 $y^2=ax$와 초점이 F_2인 포물선 $y^2-8y=ax$가 있다. 점 F_2가 y축 위에 있을 때, $\overline{\mathrm{F}_1\mathrm{F}_2}^2$의 값을 구하시오.

[23012-0011]

5 포물선 $y^2=ax$ $(a>0)$ 위의 점 $(4, b)$에서의 접선의 기울기가 1일 때, $a+b$의 값은? (단, a는 상수이다.)

① 15　② 18　③ 21　④ 24　⑤ 27

[23012-0012]

6 기울기가 $\frac{2}{3}$이고 포물선 $y^2=8(x-k)$에 접하는 직선이 원점을 지날 때, 상수 k의 값은?

① $\frac{1}{2}$　② $\frac{3}{2}$　③ $\frac{5}{2}$　④ $\frac{7}{2}$　⑤ $\frac{9}{2}$

[23012-0013]

7 초점이 F인 포물선 $y^2=ax$ $(a>0)$ 위의 점 A에서의 접선을 l이라 하고, 직선 l이 x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기를 θ라 하자. $\tan\theta=\frac{1}{2}$이고 $\overline{\mathrm{AF}}=\frac{15}{2}$일 때, 상수 a의 값은?

① 4　② 6　③ 8　④ 10　⑤ 12

[23012-0014]

8 초점이 $\mathrm{F}\left(\frac{1}{2}, 0\right)$이고 꼭짓점이 원점인 포물선 위의 제1사분면에 있는 점 A에 대하여 $\overline{\mathrm{AF}}=\frac{5}{2}$일 때, 직선 AF와 평행하고 이 포물선에 접하는 직선의 y절편은?

① $\frac{1}{8}$　② $\frac{1}{4}$　③ $\frac{3}{8}$　④ $\frac{1}{2}$　⑤ $\frac{5}{8}$

[23012-0015]

1 초점이 F인 포물선 $y^2=4x$ 위의 꼭짓점이 아닌 한 점 A에서 포물선의 준선에 내린 수선의 발을 B라 하고, 선분 BF와 포물선이 만나는 점을 C라 하자. $\overline{\mathrm{BC}} : \overline{\mathrm{CF}}=3:1$일 때, 삼각형 ABF의 둘레의 길이는?

① 12 ② 16 ③ 20 ④ 24 ⑤ 28

[23012-0016]

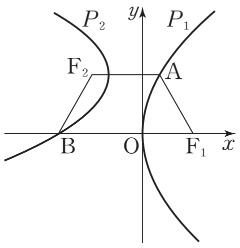
2 4보다 큰 자연수 k에 대하여 초점이 F인 포물선 $x^2-4x-8y+k=0$ 위의 임의의 점 P에서 x축에 내린 수선의 발을 H라 하자. $\overline{\mathrm{PF}}>\overline{\mathrm{PH}}$를 항상 만족시키는 k의 개수는?

① 12 ② 13 ③ 14 ④ 15 ⑤ 16

[23012-0017]

3 그림과 같이 초점이 $\mathrm{F_1}$인 포물선 P_1: $y^2=12x$와 초점이 $\mathrm{F_2}$인 포물선 P_2: $(y-b)^2=4p(x-a)$가 있다. 점 $\mathrm{F_2}$를 지나고 x축에 평행한 직선이 포물선 P_1과 만나는 점을 A라 하고, 포물선 P_2가 x축과 만나는 점을 B라 하자. 사각형 $\mathrm{AF_2BF_1}$이 $\overline{\mathrm{F_1A}}=\overline{\mathrm{AF_2}}=\overline{\mathrm{F_2B}}=4$인 등변사다리꼴일 때, $a^2+b^2+p^2$의 값을 구하시오.

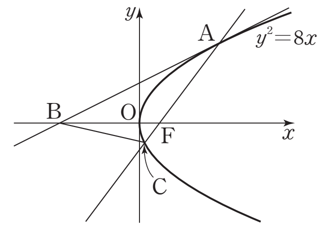
(단, a, b, p는 $a<0$, $b>0$, $p<0$인 상수이다.)



[23012-0018]

4 그림과 같이 초점이 F인 포물선 $y^2=8x$ 위의 제1사분면에 있는 점 A에서의 접선이 x축과 만나는 점을 B라 하고, 직선 AF가 포물선과 만나는 점 중 A가 아닌 점을 C라 하자. $\overline{AF}:\overline{CF}=4:1$일 때, 삼각형 ABC의 넓이는?

(단, 점 A의 x좌표는 점 F의 x좌표보다 크다.)



① 42 ② 44 ③ 46 ④ 48 ⑤ 50

[23012-0019]

5 양수 k에 대하여 직선 $y=k$가 두 포물선 $y^2=4x$, $y^2=12x$와 만나는 점을 각각 P, Q라 하자. 포물선 $y^2=4x$ 위의 점 P에서의 접선을 l_1, 포물선 $y^2=12x$ 위의 점 Q에서의 접선을 l_2라 하고 두 직선 l_1, l_2가 만나는 점을 R라 하자. 삼각형 PQR의 넓이가 9일 때, k의 값을 구하시오.

[23012-0020]

6 포물선 $y^2=4px$ $(p>0)$ 위의 제1사분면에 있는 점 A에서의 접선이 포물선의 준선과 만나는 점을 B라 하고, 점 A를 지나고 직선 AB와 수직인 직선이 준선과 만나는 점을 C라 하자. 세 점 A, B, C가 다음 조건을 만족시킬 때, 점 C의 y좌표는?

(가) $\angle ACB=\theta$라 할 때, $\tan\theta=2$이다.

(나) 삼각형 ABC의 넓이는 $\frac{125}{4}$이다.

① $\frac{11}{2}$ ② $\frac{13}{2}$ ③ $\frac{15}{2}$ ④ $\frac{17}{2}$ ⑤ $\frac{19}{2}$

[23012-0021]

1 0이 아닌 상수 a_1, a_2 $(a_1<a_2)$에 대하여 포물선 $P_1 : y^2=a_1x-8$과 포물선 $P_2 : y^2=a_2x-8$의 초점이 모두 $\mathrm{F}(3,\ 0)$이다. 양수 k에 대하여 직선 $y=k$가 두 포물선 P_1, P_2와 만나는 점을 각각 A, B라 할 때, $\overline{\mathrm{FA}}+\overline{\mathrm{FB}}=12$이다. 삼각형 ABF의 넓이는?

① 8 ② $4\sqrt{5}$ ③ $4\sqrt{6}$ ④ $4\sqrt{7}$ ⑤ $8\sqrt{2}$

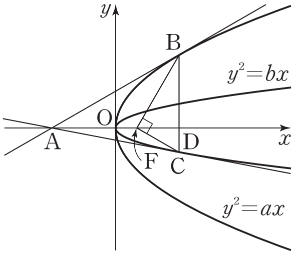
[23012-0022]

2 두 양수 a, b에 대하여 준선이 y축인 포물선 $(y-b)^2=8(x-a)$의 초점을 F라 하고, 직선 OF가 포물선과 만나는 서로 다른 두 점을 각각 A, B라 하자. $\overline{\mathrm{AB}}=10$일 때, $a+b$의 값은? (단, O는 원점이다.)

① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

[23012-0023]

3 그림과 같이 $a>b>0$인 두 상수 a, b에 대하여 포물선 $y^2=ax$와 포물선 $y^2=bx$가 있다. x좌표가 음수인 x축 위의 점 A를 지나고 기울기가 양수인 직선이 포물선 $y^2=ax$와 접하는 점을 B, 점 A를 지나고 기울기가 음수인 직선이 포물선 $y^2=bx$와 접하는 점을 C라 하고, 선분 BC가 x축과 만나는 점을 D라 하자. 포물선 $y^2=ax$의 초점을 F라 할 때, 네 점 A, B, C, F가 다음 조건을 만족시킨다.



(가) $\angle\mathrm{BFC}=\dfrac{\pi}{2}$이고, $\overline{\mathrm{BD}} : \overline{\mathrm{DC}}=3 : 1$이다.

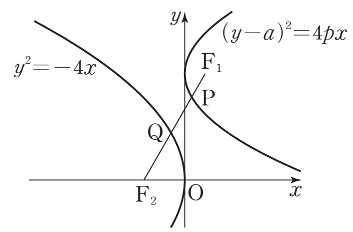
(나) 삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이는 $\dfrac{8\sqrt{7}}{3}$이다.

$9(a+b)$의 값을 구하시오. (단, 점 B의 x좌표는 점 F의 x좌표보다 크다.)

출제 경향 포물선의 정의를 이용하여 주어진 도형의 둘레의 길이, 넓이, 각의 크기, 점의 좌표 등을 구하는 문제 또는 포물선의 평행이동과 연관된 문제가 출제된다.

2022학년도 대수능

두 양수 a, p에 대하여 포물선 $(y-a)^2=4px$의 초점을 F_1이라 하고, 포물선 $y^2=-4x$의 초점을 F_2라 하자. 선분 F_1F_2가 두 포물선과 만나는 점을 각각 P, Q라 할 때, $\overline{F_1F_2}=3$, $\overline{PQ}=1$이다. a^2+p^2의 값은? [4점]



① 6 ② $\frac{25}{4}$ ③ $\frac{13}{2}$ ④ $\frac{27}{4}$ ⑤ 7

출제 의도 평행이동한 포물선에서 포물선의 정의를 이용하여 미지수를 구할 수 있는지를 묻는 문제이다.

풀이 포물선 $(y-a)^2=4px$는 포물선 $y^2=4px$를 y축의 방향으로 a만큼 평행이동한 것이므로 초점은 $F_1(p,\ a)$이고 준선의 방정식은 $x=-p$이다. 또한, 포물선 $y^2=-4x$의 초점은 $F_2(-1,\ 0)$이고 준선의 방정식은 $x=1$이다.
이때 $\overline{F_1F_2}=3$이므로

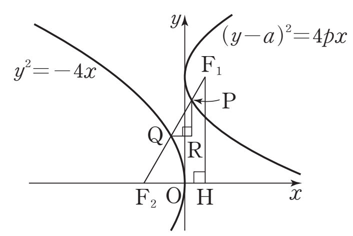
$$(p+1)^2+a^2=9 \qquad \cdots\cdots ㉠$$

두 점 P, Q의 x좌표를 각각 x_1, x_2 $(x_2<0<x_1)$이라 하면 포물선의 정의에 의하여
$\overline{PF_1}=p+x_1$, $\overline{QF_2}=1-x_2$이므로

$$\overline{PF_1}+\overline{QF_2}=\overline{F_1F_2}-\overline{PQ}=3-1=2$$

즉, $(p+x_1)+(1-x_2)=2$에서 $x_1-x_2=1-p$
그림과 같이 점 P를 지나고 x축에 수직인 직선과 점 Q를 지나고 y축에 수직인 직선이 만나는 점을 R라 하고, 점 F_1에서 x축에 내린 수선의 발을 H라 하면 삼각형 F_1F_2H와 삼각형 PQR는 서로 닮음이므로

$$\overline{F_1F_2} : \overline{F_2H}=\overline{PQ} : \overline{QR} \qquad \cdots\cdots ㉡$$



이때 $\overline{F_2H}=p-(-1)=p+1$, $\overline{QR}=x_1-x_2=1-p$이므로 ㉡에서

$$3 : (p+1)=1 : (1-p),\ p+1=3(1-p),\ p=\frac{1}{2}$$

㉠에서 $\left(\frac{1}{2}+1\right)^2+a^2=9$이므로 $a^2=\frac{27}{4}$

따라서 $a^2+p^2=\frac{27}{4}+\frac{1}{4}=7$

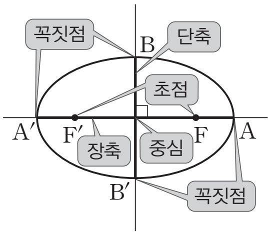
답 ⑤

02 타원

1. 타원의 뜻

(1) 평면 위의 서로 다른 두 점 F, F′으로부터의 거리의 합이 일정한 점들의 집합을 타원이라 한다.

(2) 두 점 F, F′을 타원의 초점이라 한다. 두 초점을 잇는 직선이 타원과 만나는 점을 각각 A, A′이라 하고, 선분 FF′의 수직이등분선이 타원과 만나는 점을 각각 B, B′이라 할 때, 네 점 A, A′, B, B′을 타원의 꼭짓점이라 하고, 선분 AA′을 타원의 장축, 선분 BB′을 타원의 단축이라 하며, 장축과 단축이 만나는 점을 타원의 중심이라 한다.



2. 타원의 방정식

(1) 두 초점 F$(c,\ 0)$, F′$(-c,\ 0)$으로부터의 거리의 합이 $2a$ $(a>c>0)$인 타원의 방정식은

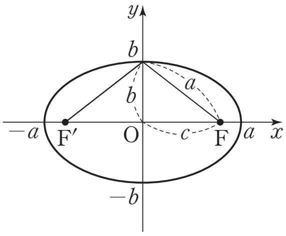
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \ (\text{단, } b^2=a^2-c^2,\ b>0)$$

① 장축의 길이: $2a$, 단축의 길이: $2b$

② 초점의 좌표: F$(\sqrt{a^2-b^2},\ 0)$, F′$(-\sqrt{a^2-b^2},\ 0)$

③ 꼭짓점의 좌표: $(a,\ 0)$, $(-a,\ 0)$, $(0,\ b)$, $(0,\ -b)$

④ 중심의 좌표: $(0,\ 0)$



(2) 두 초점 F$(0,\ c)$, F′$(0,\ -c)$로부터의 거리의 합이 $2b$ $(b>c>0)$인 타원의 방정식은

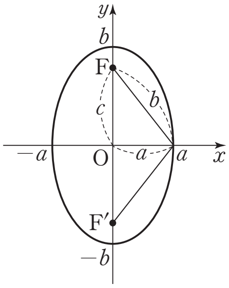
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \ (\text{단, } a^2=b^2-c^2,\ a>0)$$

① 장축의 길이: $2b$, 단축의 길이: $2a$

② 초점의 좌표: F$(0,\ \sqrt{b^2-a^2})$, F′$(0,\ -\sqrt{b^2-a^2})$

③ 꼭짓점의 좌표: $(a,\ 0)$, $(-a,\ 0)$, $(0,\ b)$, $(0,\ -b)$

④ 중심의 좌표: $(0,\ 0)$



설명 두 초점 F$(c,\ 0)$, F′$(-c,\ 0)$으로부터의 거리의 합이 $2a$ $(a>c>0)$인 타원의 방정식을 구해 보자.

타원 위의 임의의 점을 P$(x,\ y)$라 하면

$$\overline{\mathrm{PF}}=\sqrt{(x-c)^2+y^2},\ \overline{\mathrm{PF'}}=\sqrt{(x+c)^2+y^2}$$

이고, $\overline{\mathrm{PF}}+\overline{\mathrm{PF'}}=2a$이므로

$$\sqrt{(x-c)^2+y^2}+\sqrt{(x+c)^2+y^2}=2a$$

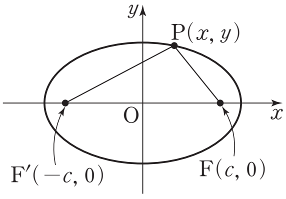
$$\sqrt{(x-c)^2+y^2}=2a-\sqrt{(x+c)^2+y^2}$$

양변을 제곱하여 정리하면 $cx+a^2=a\sqrt{(x+c)^2+y^2}$

다시 양변을 제곱하여 정리하면 $(a^2-c^2)x^2+a^2y^2=a^2(a^2-c^2)$

$a>c>0$이므로 $a^2-c^2=b^2$이라 하면 $b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2$

이 식의 양변을 a^2b^2으로 나누면 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$



예제 1 타원의 뜻

두 초점이 $\mathrm{F}(c,\ 0)$, $\mathrm{F'}(-c,\ 0)$ $(c>0)$인 타원 $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{15}=1$ 위의 제1사분면에 있는 점 P에 대하여 점 F에서 선분 PF′에 내린 수선의 발을 H라 하자. $\overline{\mathrm{FH}}=2$일 때, $\overline{\mathrm{PF'}}-\overline{\mathrm{PF}}$의 값은?

① 3 ② $\frac{7}{2}$ ③ 4 ④ $\frac{9}{2}$ ⑤ 5

길잡이 타원의 정의와 직각삼각형의 성질을 이용하여 두 선분 PF, PF′의 길이를 구한다.

풀이 점 $\mathrm{F}(c,\ 0)$이 타원 $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{15}=1$의 초점이므로 $c=\sqrt{25-15}=\sqrt{10}$

즉, $\overline{\mathrm{FF'}}=2c=2\sqrt{10}$이므로 직각삼각형 FHF′에서

$$\overline{\mathrm{F'H}}=\sqrt{\overline{\mathrm{F'F}}^2-\overline{\mathrm{FH}}^2}=\sqrt{(2\sqrt{10})^2-2^2}=6$$

타원 $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{15}=1$의 장축의 길이는 $2\times5=10$이므로 타원의 정의에 의하여

$$\overline{\mathrm{PF}}+\overline{\mathrm{PF'}}=10$$

이때 $\overline{\mathrm{F'H}}=6$이므로 $\overline{\mathrm{PF}}+\overline{\mathrm{PH}}=10-6=4$

$\overline{\mathrm{PF}}=k$ $(k>0)$이라 하면 $\overline{\mathrm{PH}}=4-k$이므로 직각삼각형 FPH에서

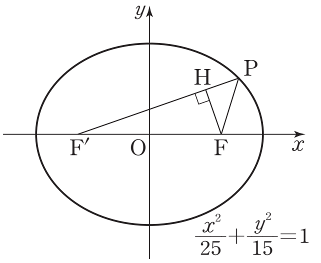
$$\overline{\mathrm{PF}}^2-\overline{\mathrm{PH}}^2=4,\ k^2-(4-k)^2=4,\ 8k=20,\ k=\frac{5}{2}$$

따라서

$$\overline{\mathrm{PF}}=\frac{5}{2},\ \overline{\mathrm{PF'}}=\overline{\mathrm{PH}}+\overline{\mathrm{F'H}}=\left(4-\frac{5}{2}\right)+6=\frac{15}{2}$$

이므로

$$\overline{\mathrm{PF'}}-\overline{\mathrm{PF}}=\frac{15}{2}-\frac{5}{2}=5$$



답 ⑤

유제

정답과 풀이 12쪽

1 [23012-0024]

두 초점이 $\mathrm{F}(c,\ 0)$, $\mathrm{F'}(-c,\ 0)$ $(c>0)$인 타원 $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$ 위의 점 P에 대하여 $\overline{\mathrm{PF'}}-\overline{\mathrm{PF}}=2$일 때, $\cos(\angle\mathrm{FPF'})$의 값은?

① $\frac{1}{6}$ ② $\frac{1}{5}$ ③ $\frac{1}{4}$ ④ $\frac{1}{3}$ ⑤ $\frac{1}{2}$

2 [23012-0025]

두 초점이 $\mathrm{F}(0,\ 3)$, $\mathrm{F'}(0,\ -3)$인 타원이 있다. 점 F를 지나고 y축에 수직인 직선이 타원과 만나는 두 점을 각각 A, B라 하자. 삼각형 ABF′의 둘레의 길이가 20일 때, 삼각형 ABF′의 넓이는?

① $\frac{84}{5}$ ② $\frac{88}{5}$ ③ $\frac{92}{5}$ ④ $\frac{96}{5}$ ⑤ 20

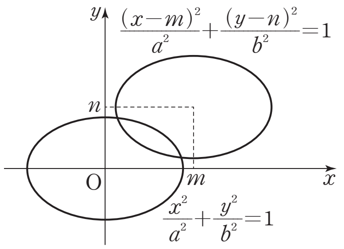
3. 타원의 평행이동

타원 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\ (a>b>0)$을 x축의 방향으로 m만큼, y축의 방향으로 n만큼 평행이동한 타원의 방정식은

$$\frac{(x-m)^2}{a^2}+\frac{(y-n)^2}{b^2}=1$$

이다. 이때 두 타원 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, $\frac{(x-m)^2}{a^2}+\frac{(y-n)^2}{b^2}=1$의 초점, 꼭짓점, 중심의 좌표는 다음과 같다.

방정식	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$	$\frac{(x-m)^2}{a^2}+\frac{(y-n)^2}{b^2}=1$
초점	$(\sqrt{a^2-b^2},\ 0)$, $(-\sqrt{a^2-b^2},\ 0)$	$(\sqrt{a^2-b^2}+m,\ n)$, $(-\sqrt{a^2-b^2}+m,\ n)$
꼭짓점	$(a,\ 0)$, $(-a,\ 0)$, $(0,\ b)$, $(0,\ -b)$	$(a+m,\ n)$, $(-a+m,\ n)$, $(m,\ b+n)$, $(m,\ -b+n)$
중심	$(0,\ 0)$	$(m,\ n)$



참고 (1) 타원 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\ (b>a>0)$을 x축의 방향으로 m만큼, y축의 방향으로 n만큼 평행이동한 타원 $\frac{(x-m)^2}{a^2}+\frac{(y-n)^2}{b^2}=1$의 초점, 꼭짓점, 중심의 좌표도 평행이동을 이용하여 구할 수 있다.

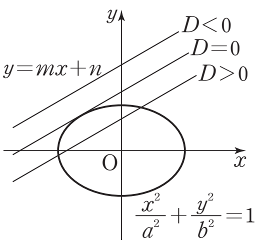
(2) 타원을 평행이동하여도 그 모양과 크기는 변하지 않으므로 장축의 길이, 단축의 길이는 변하지 않는다. 즉, 타원 $\frac{(x-m)^2}{a^2}+\frac{(y-n)^2}{b^2}=1\ (a>b>0)$의 장축의 길이는 $2a$, 단축의 길이는 $2b$이고, 타원 $\frac{(x-m)^2}{a^2}+\frac{(y-n)^2}{b^2}=1\ (b>a>0)$의 장축의 길이는 $2b$, 단축의 길이는 $2a$이다.

4. 타원과 직선의 위치 관계

타원과 직선의 방정식을 각각 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, $y=mx+n$이라 할 때, $y=mx+n$을 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$에 대입하여 정리하면

$$(a^2m^2+b^2)x^2+2a^2mnx+a^2(n^2-b^2)=0 \qquad \cdots\cdots ㉠$$

타원 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$과 직선 $y=mx+n$의 교점의 개수는 x에 대한 이차방정식 ㉠의 서로 다른 실근의 개수와 같으므로 방정식 ㉠의 판별식을 D라 하면 타원과 직선의 위치 관계는 다음과 같다.



(1) $D>0 \Longleftrightarrow$ 서로 다른 두 점에서 만난다.

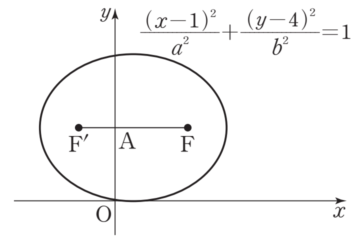
(2) $D=0 \Longleftrightarrow$ 한 점에서 만난다. (접한다.)

(3) $D<0 \Longleftrightarrow$ 만나지 않는다.

예제 2 타원의 평행이동

그림과 같이 두 초점이 F, F′인 타원 $\frac{(x-1)^2}{a^2}+\frac{(y-4)^2}{b^2}=1$ $(a>b>0)$이 x축에 접하고, 선분 FF′이 y축 위의 점 A를 지난다. $\overline{\text{F}'\text{A}}:\overline{\text{FA}}=1:2$일 때, a^2+b^2의 값을 구하시오.

(단, 점 F의 x좌표는 양수이고, 점 F′의 x좌표는 음수이다.)



길잡이 타원의 평행이동과 타원의 정의를 이용한다.

풀이 타원 $\frac{(x-1)^2}{a^2}+\frac{(y-4)^2}{b^2}=1$은 타원 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$을 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 4만큼 평행이동한 것이고, 이때 타원 $\frac{(x-1)^2}{a^2}+\frac{(y-4)^2}{b^2}=1$의 중심이 점 $(1, 4)$이고 이 타원이 x축에 접하므로 $b=4$

또 타원 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$의 두 초점의 좌표를 $(c, 0)$, $(-c, 0)$ $(c>0)$이라 하면 타원 $\frac{(x-1)^2}{a^2}+\frac{(y-4)^2}{b^2}=1$의 두 초점 F, F′의 좌표는 각각 $(c+1, 4)$, $(-c+1, 4)$이다.

이때 $\text{A}(0, 4)$이고, $\overline{\text{F}'\text{A}}:\overline{\text{FA}}=1:2$이므로

$(c-1):(c+1)=1:2$, $c+1=2(c-1)$, $c=3$

즉, $a^2-b^2=c^2$에서

$a^2=b^2+c^2=16+9=25$

따라서

$a^2+b^2=25+16=41$

답 41

유제

정답과 풀이 13쪽

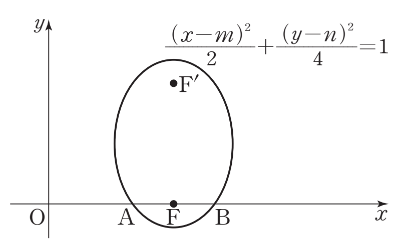
3 [23012-0026]

타원 $3x^2+4y^2-12x-24y=0$의 두 초점을 F, F′이라 할 때, $\overline{\text{OF}}\times\overline{\text{OF}'}$의 값을 구하시오.

(단, O는 원점이다.)

4 [23012-0027]

그림과 같이 타원 $\frac{(x-m)^2}{2}+\frac{(y-n)^2}{4}=1$이 x축과 서로 다른 두 점 A, B에서 만난다. 이 타원의 두 초점이 $\text{F}(3, 0)$, F′일 때, 삼각형 ABF′의 넓이는? (단, m과 n은 양의 상수이다.)



① $\sqrt{2}$ ② $\frac{3\sqrt{2}}{2}$ ③ $2\sqrt{2}$ ④ $\frac{5\sqrt{2}}{2}$ ⑤ $3\sqrt{2}$

5. 타원의 접선

(1) 기울기가 주어진 타원의 접선의 방정식

타원 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$에 접하고 기울기가 m인 직선의 방정식은 $y=mx\pm\sqrt{a^2m^2+b^2}$

설명 타원 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$에 접하고 기울기가 m인 직선의 방정식을 구해 보자.

구하는 접선의 방정식을 $y=mx+n$이라 하고, 타원의 방정식 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$에 대입하여 정리하면

$(a^2m^2+b^2)x^2+2a^2mnx+a^2(n^2-b^2)=0$ …… ㉠

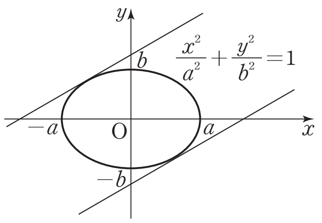
x에 대한 이차방정식 ㉠의 판별식을 D라 하면

$D=4a^2b^2(a^2m^2+b^2-n^2)=0$

이다. 이때 $a\neq0$, $b\neq0$이므로

$a^2m^2+b^2-n^2=0$, 즉 $n^2=a^2m^2+b^2$에서 $n=\pm\sqrt{a^2m^2+b^2}$

따라서 구하는 접선의 방정식은 $y=mx\pm\sqrt{a^2m^2+b^2}$



(2) 타원 위의 점에서의 접선의 방정식

타원 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 위의 점 (x_1, y_1)에서의 접선의 방정식은 $\dfrac{x_1x}{a^2}+\dfrac{y_1y}{b^2}=1$

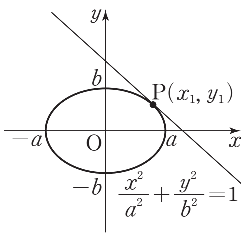
설명 타원 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 위의 점 $\mathrm{P}(x_1, y_1)$에서의 접선의 방정식을 구해 보자.

$y_1\neq0$일 때 접선의 기울기를 m이라 하면 직선의 방정식은

$y-y_1=m(x-x_1)$ …… ㉠

또 기울기가 m인 타원 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$의 접선의 방정식은

$y=mx\pm\sqrt{a^2m^2+b^2}$ …… ㉡



㉡의 2개의 직선 중 하나가 ㉠과 같은 직선이므로 y절편의 제곱이 같다.

즉, $(-mx_1+y_1)^2=a^2m^2+b^2$

$(a^2-{x_1}^2)m^2+2x_1y_1m+b^2-{y_1}^2=0$ …… ㉢

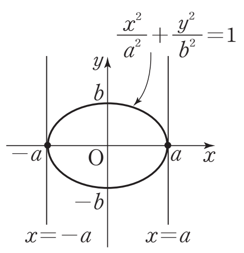
$\dfrac{{x_1}^2}{a^2}+\dfrac{{y_1}^2}{b^2}=1$에서 $a^2-{x_1}^2=\dfrac{a^2{y_1}^2}{b^2}$, $b^2-{y_1}^2=\dfrac{b^2{x_1}^2}{a^2}$이므로 이를 ㉢에 대입하여 정리하면

$\left(\dfrac{a}{b}y_1m+\dfrac{b}{a}x_1\right)^2=0$, 즉 $m=-\dfrac{b^2x_1}{a^2y_1}$

이를 ㉠에 대입하여 정리하면 $y=-\dfrac{b^2x_1}{a^2y_1}x+\dfrac{b^2{x_1}^2}{a^2y_1}+y_1$이고, $\dfrac{{x_1}^2}{a^2}+\dfrac{{y_1}^2}{b^2}=1$이므로

$\dfrac{x_1x}{a^2}+\dfrac{y_1y}{b^2}=1$

한편, $y_1=0$일 때 $x_1=a$, $x_1=-a$이므로 이 식에 대입하면 접선의 방정식은 각각 $x=a$, $x=-a$이고, 그림과 같이 타원 위의 두 점 $(a, 0)$, $(-a, 0)$에서의 접선이 각각 직선 $x=a$, $x=-a$이므로 $y_1=0$일 때에도 이 식은 성립한다.

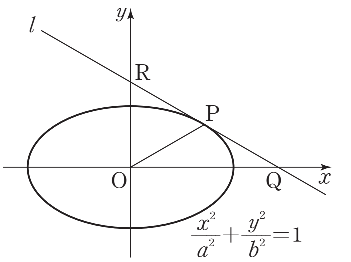


예제 3 타원의 접선

그림과 같이 타원 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 위의 제1사분면에 있는 점 P에서의 접선을 l이라 할 때, 직선 l이 x축, y축과 만나는 점을 각각 Q, R라 하자.

$\overline{PO}=\overline{PQ}=2$, $\angle OPR=\frac{\pi}{3}$일 때, a^2+b^2의 값을 구하시오.

(단, O는 원점이고, a와 b는 상수이다.)



길잡이 타원 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 위의 점 (x_1, y_1)에서의 접선의 방정식은 $\frac{x_1x}{a^2}+\frac{y_1y}{b^2}=1$임을 이용한다.

풀이 삼각형 OPQ는 $\overline{PO}=\overline{PQ}=2$인 이등변삼각형이고, $\angle OPR=\frac{\pi}{3}$이므로 $\angle POQ=\angle PQO=\frac{\pi}{6}$

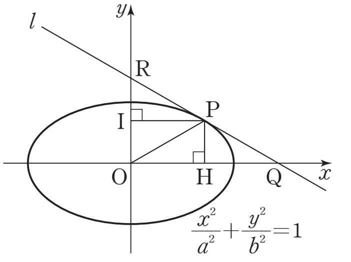
점 P에서 선분 OQ에 내린 수선의 발을 H라 하면

$$\overline{OH}=\overline{PO}\cos\frac{\pi}{6}=2\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3},\ \overline{PH}=\overline{PO}\sin\frac{\pi}{6}=2\times\frac{1}{2}=1$$

즉, 점 P의 좌표는 $(\sqrt{3}, 1)$이고, $\overline{OQ}=2\overline{OH}=2\sqrt{3}$이므로 $Q(2\sqrt{3}, 0)$이다.

또 직각삼각형 OQR에서

$\overline{OR}=\overline{OQ}\tan\frac{\pi}{6}=2\sqrt{3}\times\frac{1}{\sqrt{3}}=2$이므로 $R(0, 2)$



한편, 타원 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 위의 점 $P(\sqrt{3}, 1)$에서의 접선의 방정식은

$$\frac{\sqrt{3}x}{a^2}+\frac{y}{b^2}=1 \quad \cdots\cdots ㉠$$

직선 ㉠이 점 $Q(2\sqrt{3}, 0)$을 지나므로 $\frac{\sqrt{3}\times2\sqrt{3}}{a^2}=1$에서 $a^2=6$

직선 ㉠이 점 $R(0, 2)$를 지나므로 $\frac{2}{b^2}=1$에서 $b^2=2$

따라서 타원의 방정식은 $\frac{x^2}{6}+\frac{y^2}{2}=1$이고, $a^2+b^2=6+2=8$

답 8

유제

정답과 풀이 13쪽

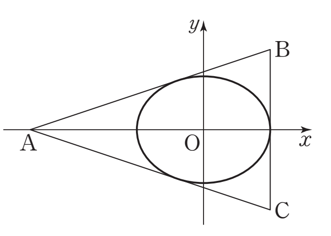
5 [23012-0028]

타원 $x^2+\frac{y^2}{4}=1$ 위의 점 $\left(\frac{1}{2}, \sqrt{3}\right)$에서의 접선의 기울기는?

① $-\frac{5\sqrt{3}}{3}$ ② $-\frac{4\sqrt{3}}{3}$ ③ $-\sqrt{3}$ ④ $-\frac{2\sqrt{3}}{3}$ ⑤ $-\frac{\sqrt{3}}{3}$

6 [23012-0029]

그림과 같이 세 점 $A(-13, 0)$, $B(5, 6)$, $C(5, -6)$을 꼭짓점으로 하는 삼각형 ABC가 있다. 원점을 중심으로 하고 두 초점이 x축 위에 있는 타원이 삼각형 ABC의 세 변에 모두 접할 때, 이 타원의 두 초점 사이의 거리를 구하시오.



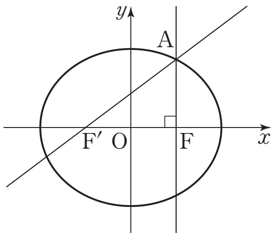
[23012-0030]

1 원점을 중심으로 하고 두 초점 F, F′이 x축 위에 있는 타원이 있다. 이 타원의 장축의 길이가 12이고, 점 A$(2, 2\sqrt{2})$가 타원 위의 점일 때, 선분 FF′의 길이는?

① $3\sqrt{2}$ ② $3\sqrt{3}$ ③ 6 ④ $6\sqrt{2}$ ⑤ $6\sqrt{3}$

[23012-0031]

2 그림과 같이 두 초점이 F$(c, 0)$, F′$(-c, 0)$ $(c>0)$인 타원 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ $(a>b>0)$에 대하여 점 F를 지나고 x축에 수직인 직선이 타원과 만나는 점 중 y좌표가 양수인 점을 A라 하자. 직선 F′A의 방정식이 $y=\frac{3}{4}(x+2)$일 때, a^2+b^2의 값은?



① 20 ② 24 ③ 28
④ 32 ⑤ 36

[23012-0032]

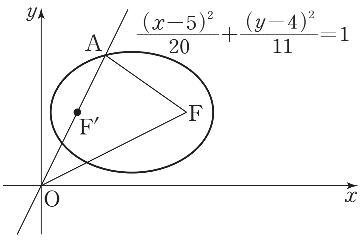
3 두 초점이 F, F′인 타원 $\frac{x^2}{5}+\frac{y^2}{9}=1$ 위의 제1사분면에 있는 점 P에 대하여 $\overline{\text{PF}}:\overline{\text{PF}'}=1:2$일 때, $\sin(\angle\text{FPF}')$의 값은? (단, 점 F의 y좌표는 양수이다.)

① $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ② $\frac{\sqrt{13}}{4}$ ③ $\frac{\sqrt{14}}{4}$ ④ $\frac{\sqrt{15}}{4}$ ⑤ 1

[23012-0033]

4 그림과 같이 타원 $\frac{(x-5)^2}{20}+\frac{(y-4)^2}{11}=1$의 두 초점을 F, F′이라 하고, 직선 OF′이 타원과 만나는 점 중 x좌표가 큰 점을 A라 할 때, 삼각형 OAF의 둘레의 길이는?

(단, 점 F의 x좌표는 점 F′의 x좌표보다 크고, O는 원점이다.)



① $6\sqrt{5}$ ② $7\sqrt{5}$ ③ $8\sqrt{5}$
④ $9\sqrt{5}$ ⑤ $10\sqrt{5}$

[23012-0034]

5 중심이 점 $(4, 2)$이고 직선 $y=r$ 위의 서로 다른 두 점 (p, r), (q, r)를 초점으로 하는 타원이 x축과 y축에 동시에 접할 때, $p\times q\times r$의 값은?

① 8 ② 10 ③ 12 ④ 14 ⑤ 16

[23012-0035]

6 두 타원 E_1: $\frac{x^2}{6}+\frac{y^2}{3}=1$, E_2: $\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{6}=1$이 만나는 점 중 제1사분면의 점을 P라 하자. 두 타원 E_1, E_2 위의 점 P에서의 접선을 각각 l, m이라 할 때, 두 직선 l, m의 기울기의 합은?

① $-\frac{9}{2}$ ② -4 ③ $-\frac{7}{2}$ ④ -3 ⑤ $-\frac{5}{2}$

[23012-0036]

7 점 $\mathrm{A}(k, \sqrt{3})$에서 타원 $\frac{x^2}{15}+\frac{y^2}{3}=1$에 그은 두 접선이 이루는 예각의 크기가 $\frac{\pi}{3}$가 되도록 하는 모든 양수 k의 값의 합을 구하시오.

[23012-0037]

8 타원 $\frac{x^2}{20}+\frac{y^2}{4}=1$의 한 초점을 $\mathrm{F}(c, 0)$ $(c>0)$이라 하고, 이 타원이 y축과 만나는 점 중에서 y좌표가 양수인 점을 A라 하자. 직선 AF와 평행한 직선이 이 타원 위의 제1사분면에 있는 점 P에서 접할 때, 삼각형 PAF의 넓이는?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

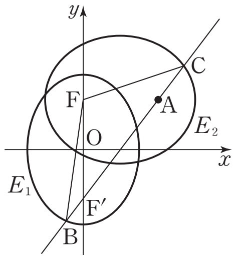
[23012-0038]

1 두 초점이 F, F′인 타원 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ $(a>b>0)$이 y축과 만나는 점 중에서 y좌표가 음수인 점을 A라 하고, 직선 AF가 타원과 만나는 점 중 A가 아닌 점을 B라 하자. $\angle \mathrm{F'AB}=\frac{\pi}{2}$이고 삼각형 ABF′의 넓이가 24일 때, a^2+b^2의 값은? (단, 점 F의 x좌표는 양수이다.)

① 48　② 54　③ 60　④ 66　⑤ 72

[23012-0039]

2 그림과 같이 두 초점이 F$(0, c)$, F′$(0, -c)$ $(c>0)$인 타원 E_1: $\frac{x^2}{5}+\frac{y^2}{9}=1$과 두 초점이 F, A인 타원 E_2: $\frac{(x-m)^2}{9}+\frac{(y-n)^2}{k}=1$ $(0<k<9)$에 대하여 직선 F′A가 타원 E_1과 만나는 점 중 x좌표가 작은 점을 B, 직선 F′A가 타원 E_2와 만나는 점 중 x좌표가 큰 점을 C라 하자. 삼각형 BCF의 둘레의 길이가 17일 때, $m+n+k$의 값은? (단, m, n, k는 상수이고, 점 A는 제1사분면에 있다.)

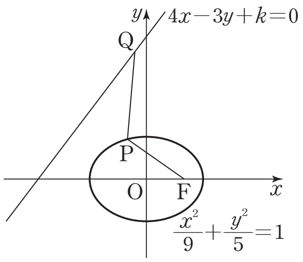


① $\frac{41}{4}$　② $\frac{43}{4}$　③ $\frac{45}{4}$　④ $\frac{47}{4}$　⑤ $\frac{49}{4}$

[23012-0040]

3 그림과 같이 타원 $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{5}=1$ 위를 움직이는 점 P와 직선 $4x-3y+k=0$ 위를 움직이는 점 Q가 있다. 타원 $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{5}=1$의 한 초점을 F라 할 때, $\overline{\mathrm{PF}}-\overline{\mathrm{PQ}}$의 최댓값이 3이다. 상수 k의 값을 구하시오.

(단, 점 F의 x좌표는 양수이고, $k>3\sqrt{21}$이다.)



[23012-0041]

4 $0<k<2$인 상수 k에 대하여 직선 $y=k$가 타원 $x^2+\frac{y^2}{4}=1$과 만나는 두 점을 각각 A, B라 하자. 타원 $x^2+\frac{y^2}{4}=1$ 위의 두 점 A, B에서의 접선의 기울기의 곱이 -3일 때, k^2의 값은?

① $\frac{10}{7}$ ② $\frac{12}{7}$ ③ 2 ④ $\frac{16}{7}$ ⑤ $\frac{18}{7}$

[23012-0042]

5 두 점 F$(3, 0)$, F$'(-3, 0)$을 초점으로 하는 타원 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 위의 제2사분면에 있는 점 P에서의 접선이 x축, y축과 만나는 점을 각각 A, B라 하자. 점 A의 x좌표가 -9이고, 점 B를 지나고 직선 AB에 수직인 직선이 점 F를 지날 때, $\overline{\mathrm{PF}}+\overline{\mathrm{PF'}}$의 값은? (단, a와 b는 상수이다.)

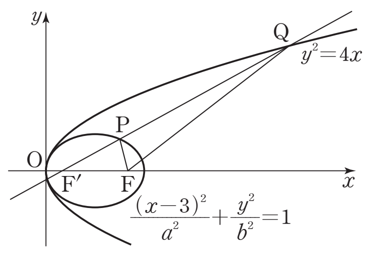
① $6\sqrt{2}$ ② $6\sqrt{3}$ ③ 12 ④ $6\sqrt{5}$ ⑤ $6\sqrt{6}$

[23012-0043]

6 12보다 큰 자연수 k에 대하여 타원 $\frac{x^2}{12}+\frac{y^2}{k}=1$과 직선 $mx-y-6m=0$이 서로 다른 두 점에서 만나도록 하는 정수 m의 개수가 3일 때, 가능한 모든 k의 개수를 구하시오.

[23012-0044]

1 그림과 같이 두 초점이 F, F′이고 y축에 접하는 타원 $\frac{(x-3)^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ $(a>b>0)$과 초점이 F′인 포물선 $y^2=4x$가 있다. 타원 위의 제1사분면에 있는 점 P에 대하여 직선 F′P가 포물선 $y^2=4x$와 만나는 점 중 제1사분면의 점을 Q라 하자. $\overline{\mathrm{PF}}=2$일 때, 선분 FQ의 길이는? (단, 직선 F′P의 기울기는 양수이고, 점 F의 x좌표는 점 F′의 x좌표보다 크다.)

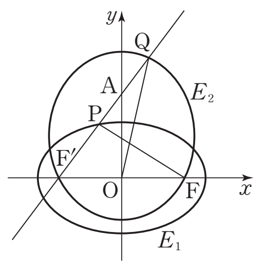


① $4\sqrt{14}$　② $4\sqrt{13}$　③ $8\sqrt{3}$　④ $4\sqrt{11}$　⑤ $4\sqrt{10}$

[23012-0045]

2 그림과 같이 두 점 F$(c,\ 0)$, F′$(-c,\ 0)$ $(c>0)$을 초점으로 하고 장축의 길이가 8인 타원을 E_1, 원점 O와 y축 위의 점 A를 초점으로 하고 장축의 길이가 8인 타원을 E_2라 할 때, 타원 E_2는 두 점 F, F′을 지난다. 직선 F′A가 타원 E_1과 만나는 점 중 제2사분면의 점을 P, 타원 E_2와 만나는 점 중 제1사분면의 점을 Q라 하자. 삼각형 PF′F의 둘레의 길이와 삼각형 QF′O의 둘레의 길이의 차가 2일 때, $\overline{\mathrm{OQ}}-\overline{\mathrm{AQ}}=\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오.

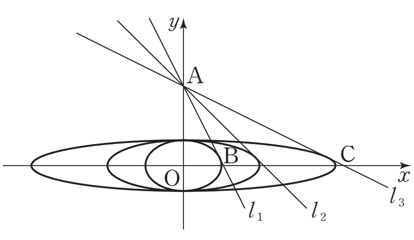
(단, 점 A의 y좌표는 양수이고, p와 q는 서로소인 자연수이다.)



[23012-0046]

3 그림과 같이 점 A$(0,\ \sqrt{10})$에서 세 타원 $\frac{x^2}{a^2}+y^2=1$ $(1<a<3)$, $\frac{x^2}{9}+y^2=1$, $\frac{x^2}{b^2}+y^2=1$ $(b>3)$에 그은 접선 중 기울기가 음수인 직선을 각각 l_1, l_2, l_3이라 할 때, 세 직선 l_1, l_2, l_3의 기울기를 각각 m_1, m_2, m_3이라 하고, 두 직선 l_1, l_3이 x축과 만나는 점을 각각 B, C라 하자. 세 수 m_1, m_2, m_3이 이 순서대로 등비수열을 이루고, 삼각형 ABC의 넓이가 $\frac{15}{2}$일 때, $a^2+b^2=\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오.

(단, p와 q는 서로소인 자연수이다.)

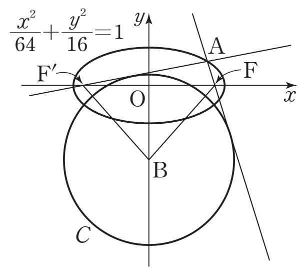


대표 기출 문제

출제 경향 타원의 정의를 이용하여 주어진 도형의 둘레의 길이, 넓이 또는 점의 좌표 등을 구하는 문제가 출제된다. 또한 타원의 접선의 방정식을 구하거나 원, 포물선, 쌍곡선 등과 연관된 문제가 출제된다.

2022학년도 대수능

두 초점이 F, F′인 타원 $\frac{x^2}{64}+\frac{y^2}{16}=1$ 위의 점 중 제1사분면에 있는 점 A가 있다. 두 직선 AF, AF′에 동시에 접하고 중심이 y축 위에 있는 원 중 중심의 y좌표가 음수인 것을 C라 하자. 원 C의 중심을 B라 할 때 사각형 AFBF′의 넓이가 72이다. 원 C의 반지름의 길이는? [3점]



① $\frac{17}{2}$ ② 9 ③ $\frac{19}{2}$

④ 10 ⑤ $\frac{21}{2}$

출제 의도 타원의 정의를 이용하여 조건을 만족시키는 원의 반지름의 길이를 구할 수 있는지를 묻는 문제이다.

풀이 $\overline{AF}=p$, $\overline{AF'}=q$라 하면 타원의 정의에 의하여

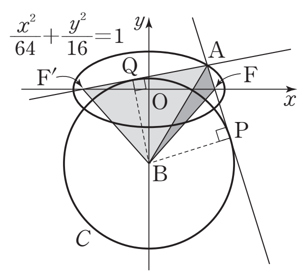
$$p+q=2\times8=16$$

원 C가 두 직선 AF, AF′과 접하는 두 점을 각각 P, Q, 원 C의 반지름의 길이를 r라 하면

$$\overline{BP}=\overline{BQ}=r$$

사각형 AFBF′을 삼각형 ABF와 삼각형 ABF′으로 나누어 생각하면 사각형 AFBF′의 넓이는 삼각형 ABF와 삼각형 ABF′의 넓이의 합이므로

$$\frac{1}{2}\times p\times r+\frac{1}{2}\times q\times r=72,\ \frac{r}{2}(p+q)=72$$



따라서

$$r=72\times\frac{2}{p+q}=72\times\frac{2}{16}=9$$

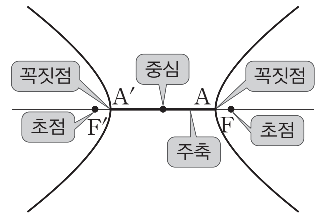
답 ②

03 쌍곡선

1. 쌍곡선의 뜻

(1) 평면 위의 서로 다른 두 점 F, F′으로부터의 거리의 차가 일정한 점들의 집합을 쌍곡선이라 한다.

(2) 두 점 F, F′을 쌍곡선의 초점이라 한다. 두 초점을 잇는 직선이 쌍곡선과 만나는 점을 각각 A, A′이라 할 때, 두 점 A, A′을 쌍곡선의 꼭짓점, 선분 AA′을 쌍곡선의 주축이라 하고, 주축의 중점을 쌍곡선의 중심이라 한다.



2. 쌍곡선의 방정식

(1) 두 초점 $F(c,\ 0)$, $F'(-c,\ 0)$으로부터의 거리의 차가 $2a$인 쌍곡선의 방정식은

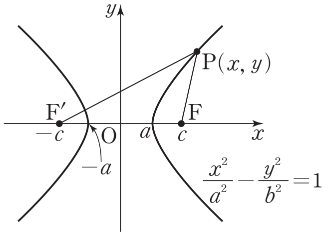
$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \text{ (단, } c>a>0,\ b^2=c^2-a^2\text{)}$$

① 초점의 좌표: $F(\sqrt{a^2+b^2},\ 0)$, $F'(-\sqrt{a^2+b^2},\ 0)$

② 꼭짓점의 좌표: $(a,\ 0)$, $(-a,\ 0)$

③ 주축의 길이: $2a$

④ 중심의 좌표: $(0,\ 0)$



(2) 두 초점 $F(0,\ c)$, $F'(0,\ -c)$로부터의 거리의 차가 $2b$인 쌍곡선의 방정식은

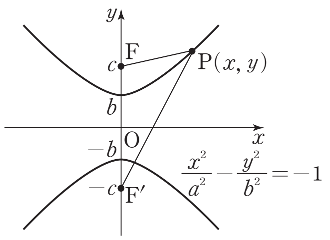
$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=-1 \text{ (단, } c>b>0,\ a^2=c^2-b^2\text{)}$$

① 초점의 좌표: $F(0,\ \sqrt{a^2+b^2})$, $F'(0,\ -\sqrt{a^2+b^2})$

② 꼭짓점의 좌표: $(0,\ b)$, $(0,\ -b)$

③ 주축의 길이: $2b$

④ 중심의 좌표: $(0,\ 0)$



설명 두 점 $F(c,\ 0)$, $F'(-c,\ 0)$으로부터의 거리의 차가 $2a$ $(c>a>0)$인 쌍곡선의 방정식을 구해 보자.

쌍곡선 위의 임의의 점을 $P(x,\ y)$라 하면

$$\overline{PF}=\sqrt{(x-c)^2+y^2},\ \overline{PF'}=\sqrt{(x+c)^2+y^2}$$

쌍곡선의 정의에 의하여 $|\overline{PF'}-\overline{PF}|=2a$이므로

$$\left|\sqrt{(x+c)^2+y^2}-\sqrt{(x-c)^2+y^2}\right|=2a$$

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}-\sqrt{(x-c)^2+y^2}=\pm 2a$$

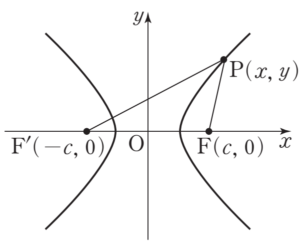
$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}=\sqrt{(x-c)^2+y^2}\pm 2a$$

이 식의 양변을 제곱하여 정리하면 $cx-a^2=\pm a\sqrt{(x-c)^2+y^2}$

다시 양변을 제곱하여 정리하면 $(c^2-a^2)x^2-a^2y^2=a^2(c^2-a^2)$

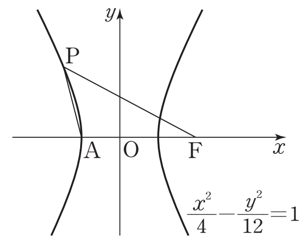
$c>a>0$이므로 $c^2-a^2=b^2$이라 하면 $b^2x^2-a^2y^2=a^2b^2$

이 식의 양변을 a^2b^2으로 나누면 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$



예제 1 쌍곡선의 뜻

그림과 같이 쌍곡선 $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{12}=1$의 한 초점을 F라 하고, 꼭짓점 중 x좌표가 음수인 점을 A라 하자. 이 쌍곡선 위의 제2사분면에 있는 점 P에 대하여 $\overline{\mathrm{PF}}-\overline{\mathrm{PA}}=4$일 때, 삼각형 PAF의 둘레의 길이는? (단, 점 F의 x좌표는 양수이다.)



① 16 ② 18 ③ 20 ④ 22 ⑤ 24

길잡이 쌍곡선의 다른 한 초점을 F′이라 할 때, 쌍곡선의 정의에 의하여 $\overline{\mathrm{PF'}}=\overline{\mathrm{PA}}$임을 이용한다.

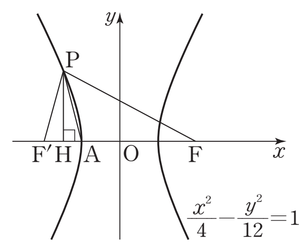
풀이 쌍곡선 $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{12}=1$의 초점 F의 x좌표를 c $(c>0)$이라 하면

$c^2=4+12=16$, $c=4$

그러므로 F$(4, 0)$이고 다른 한 초점을 F′이라 하면 F′$(-4, 0)$

쌍곡선 $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{12}=1$의 주축의 길이가 $2\times2=4$이므로 쌍곡선의 정의에 의하여

$\overline{\mathrm{PF}}-\overline{\mathrm{PF'}}=4$ …… ㉠



한편, A$(-2, 0)$이고 $\overline{\mathrm{PF}}-\overline{\mathrm{PA}}=4$이므로

$\overline{\mathrm{PF}}-\overline{\mathrm{PF'}}=\overline{\mathrm{PF}}-\overline{\mathrm{PA}}$, $\overline{\mathrm{PF'}}=\overline{\mathrm{PA}}$

즉, 삼각형 PF′A가 $\overline{\mathrm{PF'}}=\overline{\mathrm{PA}}$인 이등변삼각형이므로 점 P에서 x축에 내린 수선의 발을 H라 하면 직선 PH는 선분 F′A를 수직이등분한다. 그러므로 점 P의 x좌표는 -3이고 점 P의 y좌표를 k $(k>0)$이라 하면 점 P$(-3, k)$가 쌍곡선 위의 점이므로

$\frac{(-3)^2}{4}-\frac{k^2}{12}=1$, $\frac{k^2}{12}=\frac{5}{4}$, $k^2=15$, $k=\sqrt{15}$

즉, P$(-3, \sqrt{15})$이므로 $\overline{\mathrm{PF}}=\sqrt{\{4-(-3)\}^2+(0-\sqrt{15})^2}=8$이고, ㉠에서 $\overline{\mathrm{PF'}}=\overline{\mathrm{PF}}-4=4$

따라서 삼각형 PAF의 둘레의 길이는

$\overline{\mathrm{PA}}+\overline{\mathrm{AF}}+\overline{\mathrm{FP}}=\overline{\mathrm{PF'}}+\overline{\mathrm{AF}}+\overline{\mathrm{PF}}=4+6+8=18$

답 ②

유제

정답과 풀이 22쪽

1 [23012-0047]

두 초점이 F$(0, c)$, F′$(0, -c)$ $(c>0)$인 쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=-1$의 두 꼭짓점 중 y좌표가 큰 점을 A, y좌표가 작은 점을 B라 하자. $\overline{\mathrm{FA}}=\overline{\mathrm{AB}}=\overline{\mathrm{BF'}}=4$일 때, a^2-b^2의 값을 구하시오.

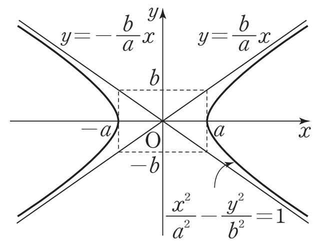
(단, a와 b는 상수이다.)

2 [23012-0048]

두 점 F$(c, 0)$, F′$(-c, 0)$ $(c>0)$을 초점으로 하는 쌍곡선 $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{12}=1$ 위의 제1사분면에 있는 점 P에 대하여 $\angle\mathrm{PFF'}=\frac{\pi}{3}$일 때, 삼각형 PF′F의 넓이는?

① $3\sqrt{3}$ ② $4\sqrt{3}$ ③ $5\sqrt{3}$ ④ $6\sqrt{3}$ ⑤ $7\sqrt{3}$

3. 쌍곡선의 점근선



곡선 위의 점이 한없이 가까워지는 직선을 점근선이라 한다.

(1) 쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$의 점근선의 방정식은 $y=\frac{b}{a}x$, $y=-\frac{b}{a}x$

(2) 쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=-1$의 점근선의 방정식은 $y=\frac{b}{a}x$, $y=-\frac{b}{a}x$

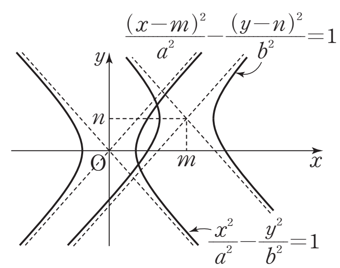
4. 쌍곡선의 평행이동

쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$을 x축의 방향으로 m만큼, y축의 방향으로 n만큼 평행이동한 쌍곡선의 방정식은

$$\frac{(x-m)^2}{a^2}-\frac{(y-n)^2}{b^2}=1$$

이다. 이때 두 쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$, $\frac{(x-m)^2}{a^2}-\frac{(y-n)^2}{b^2}=1$의 초점, 꼭짓점, 중심의 좌표와 점근선의 방정식은 다음과 같다.

방정식	$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$	$\frac{(x-m)^2}{a^2}-\frac{(y-n)^2}{b^2}=1$
초점	$(\sqrt{a^2+b^2}, 0)$, $(-\sqrt{a^2+b^2}, 0)$	$(\sqrt{a^2+b^2}+m, n)$, $(-\sqrt{a^2+b^2}+m, n)$
꼭짓점	$(a, 0)$, $(-a, 0)$	$(a+m, n)$, $(-a+m, n)$
중심	$(0, 0)$	(m, n)
점근선	$y=\frac{b}{a}x$, $y=-\frac{b}{a}x$	$y-n=\frac{b}{a}(x-m)$, $y-n=-\frac{b}{a}(x-m)$



참고 (1) 쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=-1$을 x축의 방향으로 m만큼, y축의 방향으로 n만큼 평행이동한 쌍곡선 $\frac{(x-m)^2}{a^2}-\frac{(y-n)^2}{b^2}=-1$의 초점, 꼭짓점, 중심의 좌표와 점근선의 방정식도 평행이동을 이용하여 구할 수 있다.

(2) 쌍곡선을 평행이동하여도 그 모양과 크기는 변하지 않으므로 주축의 길이는 변하지 않는다. 즉, 쌍곡선 $\frac{(x-m)^2}{a^2}-\frac{(y-n)^2}{b^2}=1$의 주축의 길이는 $2a$이다.

5. 쌍곡선과 직선의 위치 관계

쌍곡선과 직선의 방정식을 각각 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$, $y=mx+n$이라 할 때, $y=mx+n$을 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$에 대입하여 정리하면

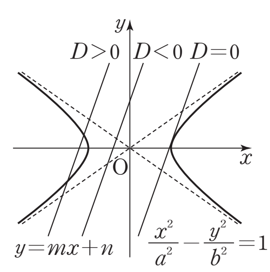
$$(a^2m^2-b^2)x^2+2a^2mnx+a^2(n^2+b^2)=0 \quad \cdots\cdots ㉠$$

따라서 $a^2m^2-b^2\neq0$일 때, x에 대한 이차방정식 ㉠의 판별식을 D라 하면 쌍곡선과 직선의 위치 관계는 다음과 같다.

(1) $D>0 \Longleftrightarrow$ 서로 다른 두 점에서 만난다.

(2) $D=0 \Longleftrightarrow$ 한 점에서 만난다. (접한다.)

(3) $D<0 \Longleftrightarrow$ 만나지 않는다.



예제 2 쌍곡선의 점근선

www.ebs*i*.co.kr

두 점 F(0, 4), F′(0, −4)를 초점으로 하는 쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=-1$의 두 점근선 중 기울기가 양수인 직선을 l, 기울기가 음수인 직선을 m이라 하고, 점 F′을 지나고 x축에 평행한 직선이 두 직선 l, m과 만나는 점을 각각 A, B라 하자. 삼각형 FAB의 넓이가 32일 때, $a^2\times b^2$의 값은? (단, $a>0$, $b>0$)

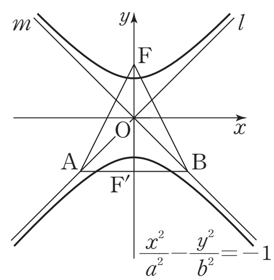
① 48 ② 52 ③ 56 ④ 60 ⑤ 64

길잡이 쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=-1$ ($a>0$, $b>0$)의 두 점근선의 방정식이 $y=\frac{b}{a}x$, $y=-\frac{b}{a}x$임을 이용한다.

풀이 F(0, 4), F′(0, −4)에서 $\overline{\mathrm{FF'}}=8$이고, 삼각형 FAB의 넓이가 32이므로

$\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{AB}}\times\overline{\mathrm{FF'}}=32$, $\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{AB}}\times 8=32$, $\overline{\mathrm{AB}}=8$

두 점 A, B는 y축에 대하여 대칭이므로 $\overline{\mathrm{AF'}}=\overline{\mathrm{BF'}}=4$이고, 원점 O에 대하여 $\overline{\mathrm{AF'}}=\overline{\mathrm{OF'}}=4$이므로 직선 l의 기울기는 1이고, 이때 직선 m의 기울기는 -1임을 알 수 있다.



즉, 쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=-1$의 두 점근선의 방정식이 $y=x$, $y=-x$이므로

$\frac{b}{a}=1$, $a=b$ ······ ㉠

한편, 쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=-1$의 초점 F의 y좌표가 4이므로

$a^2+b^2=16$ ······ ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면 $2a^2=16$, $a^2=8$

따라서 $a^2=b^2=8$이므로

$a^2\times b^2=8\times 8=64$

답 ⑤

유제

정답과 풀이 22쪽

3 [23012-0049]

두 점 F(3, 0), F′(−3, 0)을 초점으로 하는 쌍곡선의 두 점근선의 기울기의 곱이 $-\frac{5}{4}$일 때, 이 쌍곡선의 주축의 길이는?

① 2 ② $\frac{5}{2}$ ③ 3 ④ $\frac{7}{2}$ ⑤ 4

4 [23012-0050]

한 점근선의 방정식이 $y=2x$인 쌍곡선 $\frac{(x-a)^2}{4}-\frac{(y-b)^2}{16}=1$의 두 초점을 F, F′이라 하자. 선분 FF′을 지름으로 하는 원이 원점을 지날 때, 이 쌍곡선의 다른 한 점근선의 y절편은?

(단, $a>0$, $b>0$)

① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

6. 쌍곡선의 접선

(1) 기울기가 주어진 쌍곡선의 접선의 방정식

① 쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$에 접하고 기울기가 m인 직선의 방정식은

$$y=mx\pm\sqrt{a^2m^2-b^2}\ (\text{단, } a^2m^2-b^2>0)$$

② 쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=-1$에 접하고 기울기가 m인 직선의 방정식은

$$y=mx\pm\sqrt{b^2-a^2m^2}\ (\text{단, } b^2-a^2m^2>0)$$

설명 쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$에 접하고 기울기가 m인 직선의 방정식을 구해 보자.

구하는 접선의 방정식을 $y=mx+n$이라 하고, 쌍곡선의 방정식 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$에 대입하여 정리하면

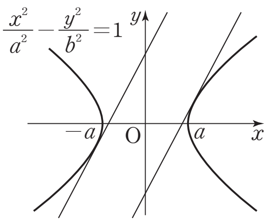
$$(a^2m^2-b^2)x^2+2a^2mnx+a^2(n^2+b^2)=0 \quad \cdots\cdots ㉠$$

x에 대한 이차방정식 ㉠의 판별식을 D라 하면

$$D=4a^2b^2(-a^2m^2+n^2+b^2)=0$$

이때 $a\neq0$, $b\neq0$이므로 $n^2=a^2m^2-b^2$에서 $a^2m^2-b^2>0$이면 $n=\pm\sqrt{a^2m^2-b^2}$

따라서 구하는 접선의 방정식은 $y=mx\pm\sqrt{a^2m^2-b^2}$



(2) 쌍곡선 위의 점에서의 접선의 방정식

① 쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ 위의 점 (x_1, y_1)에서의 접선의 방정식은 $\frac{x_1x}{a^2}-\frac{y_1y}{b^2}=1$

② 쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=-1$ 위의 점 (x_1, y_1)에서의 접선의 방정식은 $\frac{x_1x}{a^2}-\frac{y_1y}{b^2}=-1$

설명 쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ 위의 점 $\mathrm{P}(x_1, y_1)$에서의 접선의 방정식을 구해 보자.

$y_1\neq0$일 때 접선의 기울기를 $m\ (m\neq0)$이라 하면 직선의 방정식은

$$y-y_1=m(x-x_1) \quad \cdots\cdots ㉠$$

또 쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$에 접하고 기울기가 m인 직선의 방정식은

$$y=mx\pm\sqrt{a^2m^2-b^2} \quad \cdots\cdots ㉡$$

㉡의 2개의 직선 중 하나가 ㉠과 같은 직선이므로 y절편의 제곱이 같다.

즉, $(-mx_1+y_1)^2=a^2m^2-b^2$에서 $(x_1{}^2-a^2)m^2-2x_1y_1m+(y_1{}^2+b^2)=0 \quad \cdots\cdots ㉢$

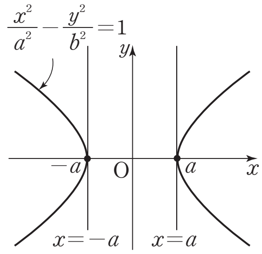
$\frac{x_1{}^2}{a^2}-\frac{y_1{}^2}{b^2}=1$에서 $x_1{}^2-a^2=\frac{a^2y_1{}^2}{b^2}$, $y_1{}^2+b^2=\frac{b^2x_1{}^2}{a^2}$이므로 이를 ㉢에 대입하여 정리하면

$$\left(\frac{a}{b}y_1m-\frac{b}{a}x_1\right)^2=0,\ \text{즉 } m=\frac{b^2x_1}{a^2y_1}$$

이를 ㉠에 대입하고 $\frac{x_1{}^2}{a^2}-\frac{y_1{}^2}{b^2}=1$임을 이용하여 이 직선의 방정식을 정리하면

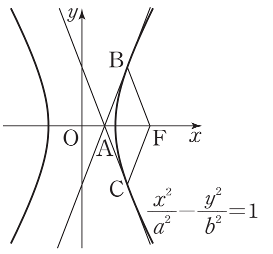
$$\frac{x_1x}{a^2}-\frac{y_1y}{b^2}=1$$

한편, $y_1=0$일 때 $x_1=a$, $x_1=-a$이므로 이 식에 대입하면 접선의 방정식은 각각 $x=a$, $x=-a$이고, 그림과 같이 쌍곡선 위의 두 점 $(a, 0)$, $(-a, 0)$에서의 접선이 각각 직선 $x=a$, $x=-a$이므로 $y_1=0$일 때에도 이 식은 성립한다.



예제 3 쌍곡선의 접선

그림과 같이 점 A(1, 0)에서 한 초점이 F(3, 0)인 쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$에 그은 두 접선이 쌍곡선과 만나는 점을 각각 B, C라 하자. 사각형 ACFB가 마름모일 때, 두 직선 AB, AC의 기울기의 곱은? (단, $a>1$, $b>0$이고, 점 B의 y좌표는 양수이다.)



① -8　② -7　③ -6　④ -5　⑤ -4

길잡이 쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ 위의 점 (x_1, y_1)에서의 접선의 방정식은 $\frac{x_1x}{a^2}-\frac{y_1y}{b^2}=1$임을 이용한다.

풀이 쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$의 초점 F의 x좌표가 3이므로

$a^2+b^2=9$ ······ ㉠

사각형 ACFB가 마름모이므로 직선 BC는 선분 AF를 수직이등분한다. 즉, 점 B의 x좌표가 2이므로 점 B의 좌표를 B$(2, k)$ $(k>0)$으로 놓으면 쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ 위의 점 B$(2, k)$에서의 접선의 방정식은

$$\frac{2x}{a^2}-\frac{ky}{b^2}=1$$

이 직선이 점 A(1, 0)을 지나므로 $\frac{2}{a^2}=1$에서 $a^2=2$

$a^2=2$를 ㉠에 대입하면 $b^2=7$

쌍곡선의 방정식은 $\frac{x^2}{2}-\frac{y^2}{7}=1$이고 점 B$(2, k)$가 이 쌍곡선 위의 점이므로

$$\frac{2^2}{2}-\frac{k^2}{7}=1,\ k^2=7,\ k=\sqrt{7}$$

즉, B$(2, \sqrt{7})$, C$(2, -\sqrt{7})$이므로 직선 AB의 기울기는 $\sqrt{7}$, 직선 AC의 기울기는 $-\sqrt{7}$이다.

따라서 두 직선 AB, AC의 기울기의 곱은

$$\sqrt{7}\times(-\sqrt{7})=-7$$

답 ②

유제

정답과 풀이 23쪽

5 [23012-0051]

한 초점이 F$(c, 0)$ $(c>0)$인 쌍곡선 $\frac{x^2}{5}-\frac{y^2}{4}=1$ 위의 점 P(5, 4)에서의 접선이 x축과 만나는 점을 A라 할 때, 삼각형 PAF의 넓이는?

① 1　② 2　③ 3　④ 4　⑤ 5

6 [23012-0052]

쌍곡선 $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{k}=1$ 위의 점과 직선 $y=2x$ 사이의 거리의 최솟값이 1일 때, 상수 k의 값은? (단, $0<k<16$)

① 11　② 12　③ 13　④ 14　⑤ 15

[23012-0053]

1 주축의 길이가 8인 쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$의 두 초점 사이의 거리가 10일 때, a^2-b^2의 값은?

(단, a와 b는 상수이다.)

① 1 ② 3 ③ 5 ④ 7 ⑤ 9

[23012-0054]

2 두 초점이 F, F′인 쌍곡선 $4x^2-5y^2=-20$ 위의 제1사분면에 있는 점 P에 대하여 $\overline{\mathrm{PF'}}^2-\overline{\mathrm{PF}}^2=48$일 때, $\overline{\mathrm{PF'}}\times\overline{\mathrm{PF}}$의 값은? (단, 점 F의 y좌표는 양수이다.)

① 20 ② 24 ③ 28 ④ 32 ⑤ 36

[23012-0055]

3 쌍곡선 $x^2-\frac{y^2}{k}=1$의 두 초점을 F, F′이라 할 때, 점 F를 지나고 x축에 수직인 직선이 쌍곡선과 만나는 두 점을 각각 A, B라 하자. 삼각형 AF′B의 둘레의 길이가 28일 때, 양수 k의 값을 구하시오.

(단, 점 F의 x좌표는 양수이다.)

[23012-0056]

4 한 점근선이 직선 $y=2x$인 쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$의 한 초점을 F라 하자. 점 F와 직선 $y=2x$ 사이의 거리가 4일 때, 이 쌍곡선의 주축의 길이는? (단, a와 b는 상수이다.)

① 4 ② 5 ③ 6 ④ 7 ⑤ 8

[23012-0057]

5 한 초점이 원점 O인 쌍곡선 $\frac{(x-3)^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$이 y축과 만나는 서로 다른 두 점 사이의 거리가 $4\sqrt{3}$일 때, b^2-a^2의 값은? (단, a와 b는 상수이다.)

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

[23012-0058]

6 쌍곡선 $x^2-2x-4y^2+16y+5=0$의 점근선 중 기울기가 양수인 직선의 y절편은?

① 1 ② $\frac{3}{2}$ ③ 2 ④ $\frac{5}{2}$ ⑤ 3

[23012-0059]

7 두 점 $\mathrm{F}(3, 0)$, $\mathrm{F}'(-3, 0)$을 초점으로 하는 쌍곡선 위의 점 $\mathrm{A}(4, \sqrt{15})$에서의 접선의 x절편은?

① $\frac{1}{2}$ ② 1 ③ $\frac{3}{2}$ ④ 2 ⑤ $\frac{5}{2}$

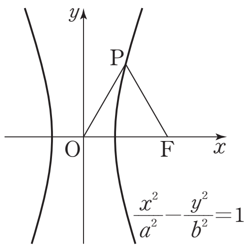
[23012-0060]

8 쌍곡선 $\frac{x^2}{4}-y^2=1$의 점근선 중 기울기가 양수인 직선을 l이라 하자. 직선 l에 수직이고 이 쌍곡선에 접하는 두 직선 사이의 거리는?

① 2 ② $\sqrt{6}$ ③ $2\sqrt{2}$ ④ $\sqrt{10}$ ⑤ $2\sqrt{3}$

[23012-0061]

1 그림과 같이 쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1\ (a>0,\ b>0)$의 한 초점을 F라 하자. 이 쌍곡선 위의 제1사분면에 있는 점 P에 대하여 삼각형 POF가 한 변의 길이가 4인 정삼각형일 때, b^2의 값은? (단, 점 F의 x좌표는 양수이고, O는 원점이다.)

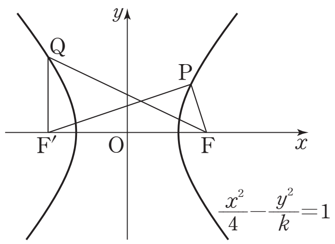


① $4\sqrt{2}$ ② $4\sqrt{3}$ ③ 8
④ $8\sqrt{2}$ ⑤ $8\sqrt{3}$

[23012-0062]

2 그림과 같이 쌍곡선 $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{k}=1$의 두 초점을 F, F′이라 하고, 이 쌍곡선 위의 제1사분면과 제2사분면에 있는 점을 각각 P, Q라 하자. 두 점 P, Q가 다음 조건을 만족시킬 때, 양수 k의 값을 구하시오.

(단, 점 F의 x좌표는 양수이다.)

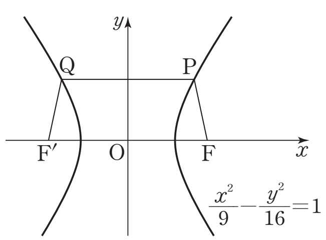


(가) $\angle \mathrm{FPF'}=\angle \mathrm{FF'Q}=\frac{\pi}{2}$

(나) 삼각형 PF′F의 둘레의 길이와 삼각형 QF′F의 둘레의 길이의 차는 2이다.

[23012-0063]

3 그림과 같이 두 초점이 $\mathrm{F}(c,\ 0)$, $\mathrm{F'}(-c,\ 0)\ (c>0)$인 쌍곡선 $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1$ 위의 제1사분면에 있는 점 P를 지나고 x축과 평행한 직선이 쌍곡선과 만나는 점 중 P가 아닌 점을 Q라 하자. $\cos(\angle \mathrm{PFF'})=\frac{1}{5}$일 때, 사각형 PQF′F의 둘레의 길이는?



① $\frac{132}{5}$ ② $\frac{134}{5}$ ③ $\frac{136}{5}$
④ $\frac{138}{5}$ ⑤ 28

[23012-0064]

4 다음 조건을 만족시키는 쌍곡선이 x축과 만나는 서로 다른 두 점 사이의 거리는?

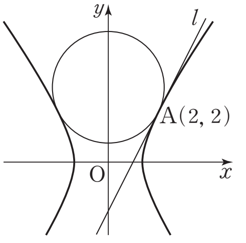
(가) 두 초점은 x축과 평행한 직선 위에 있고, 두 초점 사이의 거리는 $4\sqrt{2}$이다.
(나) 서로 수직인 두 점근선이 점 $(3,\ 3)$에서 만난다.

① $2\sqrt{7}$ ② 6 ③ $2\sqrt{11}$ ④ $2\sqrt{13}$ ⑤ $2\sqrt{15}$

[23012-0065]

5 그림과 같이 쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ 위의 점 $\mathrm{A}(2,\ 2)$에서의 접선 l이 원 $x^2+(y-3)^2=5$와 점 A에서 접할 때, a^2+b^2의 값은?

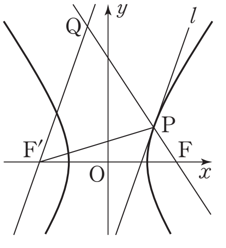
(단, a와 b는 상수이다.)



① 3 ② 6 ③ 9
④ 12 ⑤ 15

[23012-0066]

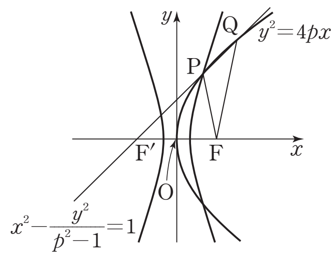
6 그림과 같이 두 점 $\mathrm{F}(3,\ 0)$, $\mathrm{F'}(-3,\ 0)$을 초점으로 하는 쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ 위의 제1사분면에 있는 점 P에서 쌍곡선에 접하는 직선을 l이라 하고, 점 F′을 지나고 직선 l과 평행한 직선이 직선 FP와 만나는 점을 Q라 하자. 직선 l의 기울기가 $2\sqrt{2}$이고, $\overline{\mathrm{PF}}:\overline{\mathrm{PQ}}=1:3$일 때, 삼각형 PQF′의 둘레의 길이는 $p+q\sqrt{3}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 유리수이고, a와 b는 상수이다.)



[23012-0067]

1 그림과 같이 1보다 큰 양수 p에 대하여 점 F를 초점으로 하는 포물선 $y^2=4px$와 두 점 F, F′을 초점으로 하는 쌍곡선 $x^2-\frac{y^2}{p^2-1}=1$이 있다. 쌍곡선과 포물선이 만나는 점 중 제1사분면의 점을 P라 할 때, 직선 F′P가 포물선과 만나는 점 중 P가 아닌 점을 Q라 하자. $\overline{\mathrm{F'P}}:\overline{\mathrm{PQ}}=2:1$이고, 삼각형 PFQ의 둘레의 길이가 16일 때, p의 값은?

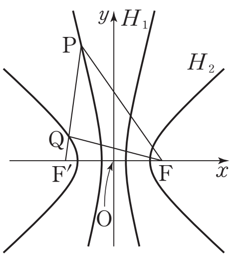
(단, 점 P의 x좌표는 점 F의 x좌표보다 작다.)



① $\frac{3}{2}$　② 2　③ $\frac{5}{2}$　④ 3　⑤ $\frac{7}{2}$

[23012-0068]

2 그림과 같이 두 점 F$(c,\ 0)$, F′$(-c,\ 0)$ $(c>0)$을 초점으로 하는 두 쌍곡선 H_1: $x^2-\frac{y^2}{15}=1$, H_2: $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ $(a>1,\ b>0)$이 있다. 쌍곡선 H_1 위의 제2사분면에 있는 점 P에 대하여 선분 PF′이 쌍곡선 H_2와 만나는 점을 Q라 할 때, 두 점 P, Q가 다음 조건을 만족시킨다. a^2-b^2의 값을 구하시오.

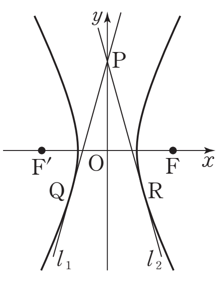


(가) $\overline{\mathrm{FF'}}$, $\overline{\mathrm{PF'}}$, $\overline{\mathrm{PF}}$가 이 순서대로 공차가 양수인 등차수열을 이룬다.
(나) 삼각형 PQF의 둘레의 길이와 삼각형 QF′F의 둘레의 길이의 차가 10이다.

[23012-0069]

3 양의 실수 t에 대하여 그림과 같이 y축 위의 점 P$(0,\ t)$에서 쌍곡선 $x^2-\frac{y^2}{4}=1$에 그은 두 접선 중 기울기가 양수인 직선을 l_1, 기울기가 음수인 직선을 l_2라 하고, 두 직선 l_1, l_2가 쌍곡선과 만나는 점을 각각 Q, R라 하자. 쌍곡선 $x^2-\frac{y^2}{4}=1$의 두 초점을 F, F′이라 할 때, **보기**에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

(단, 점 F의 x좌표는 양수이다.)



보기

ㄱ. $t=1$일 때, 두 직선 l_1, l_2의 기울기의 곱은 -5이다.
ㄴ. $\overline{\mathrm{QR}}^2\le 5$를 만족시키는 t의 최솟값은 4이다.
ㄷ. 삼각형 FF′R가 직각삼각형이 되도록 하는 모든 t의 값을 α, β $(\alpha<\beta)$라 할 때, $\alpha^2+\beta^2=6$이다.

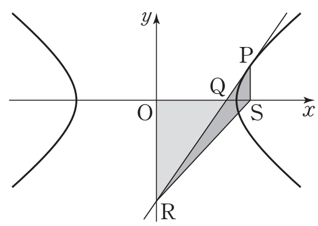
① ㄱ　② ㄱ, ㄴ　③ ㄱ, ㄷ　④ ㄴ, ㄷ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

대표 기출 문제

출제 경향 쌍곡선의 정의, 점근선 등을 이용하여 쌍곡선의 방정식, 도형의 둘레의 길이와 넓이, 각의 크기, 점의 좌표 등을 구하거나 쌍곡선 위의 점에서의 접선의 방정식 또는 기울기가 주어진 쌍곡선의 접선의 방정식 등을 구하는 문제가 다양한 도형 및 포물선, 타원과 같은 이차곡선과 연관되어 출제된다.

2022학년도 대수능 6월 모의평가

그림과 같이 쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ 위의 점 $\mathrm{P}(4,\ k)\ (k>0)$에서의 접선이 x축과 만나는 점을 Q, y축과 만나는 점을 R라 하자. 점 $\mathrm{S}(4,\ 0)$에 대하여 삼각형 QOR의 넓이를 A_1, 삼각형 PRS의 넓이를 A_2라 하자. $A_1 : A_2=9 : 4$일 때, 이 쌍곡선의 주축의 길이는? (단, O는 원점이고, a와 b는 상수이다.) [3점]



① $2\sqrt{10}$ ② $2\sqrt{11}$ ③ $4\sqrt{3}$ ④ $2\sqrt{13}$ ⑤ $2\sqrt{14}$

출제 의도 쌍곡선 위의 점에서의 접선의 방정식을 구하여 쌍곡선의 주축의 길이를 구할 수 있는지를 묻는 문제이다.

풀이 점 $\mathrm{P}(4,\ k)$는 쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ 위의 점이므로

$$\frac{16}{a^2}-\frac{k^2}{b^2}=1 \qquad \cdots\cdots ㉠$$

점 P에서 쌍곡선에 그은 접선의 방정식은 $\frac{4x}{a^2}-\frac{ky}{b^2}=1$이므로 두 점 Q, R의 좌표는 각각

$$\mathrm{Q}\left(\frac{a^2}{4},\ 0\right),\ \mathrm{R}\left(0,\ -\frac{b^2}{k}\right)$$

따라서 삼각형 QOR의 넓이 A_1은

$$A_1=\frac{1}{2}\times\frac{a^2}{4}\times\left|-\frac{b^2}{k}\right|=\frac{a^2b^2}{8k}$$

삼각형 PRS의 넓이 A_2는

$$A_2=\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{PS}}\times\overline{\mathrm{OS}}=\frac{1}{2}\times k\times 4=2k$$

그러므로 $A_1 : A_2=9 : 4$에서 $\frac{a^2b^2}{8k} : 2k=9 : 4,\ 36k^2=a^2b^2,\ \frac{k^2}{b^2}=\frac{a^2}{36}$ $\cdots\cdots$ ㉡

㉡을 ㉠에 대입하여 정리하면

$$\frac{16}{a^2}-\frac{a^2}{36}=1,\ a^4+36a^2-16\times 36=0,\ (a^2-12)(a^2+48)=0,\ a^2=12$$

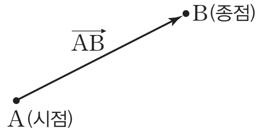
$|a|=2\sqrt{3}$이므로 주어진 쌍곡선의 주축의 길이는 $2|a|=4\sqrt{3}$이다.

답 ③

04 벡터의 연산

1. 벡터의 정의

크기와 방향을 모두 가지는 양을 벡터라 하고, 특히 평면 위의 벡터를 평면벡터라 한다.



방향이 점 A에서 점 B를 향하고, 크기가 선분 AB의 길이인 벡터를 벡터 AB라 하고, 기호로

$$\overrightarrow{AB}$$

와 같이 나타낸다. 이때 점 A를 벡터 $\overrightarrow{AB}$의 시점, 점 B를 벡터 $\overrightarrow{AB}$의 종점이라 한다. 또 벡터 $\overrightarrow{AB}$의 크기를 기호로

$$|\overrightarrow{AB}|$$

와 같이 나타낸다.

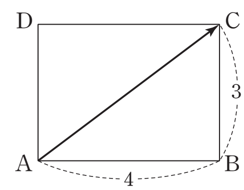
한편, 벡터를 한 문자로 나타낼 때에는 $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, …와 같이 나타내고 벡터의 크기는 $|\vec{a}|$, $|\vec{b}|$, $|\vec{c}|$, …와 같이 나타낸다.

참고 속도, 가속도, 물체에 작용하는 힘 등은 크기와 방향을 함께 표시해야 바르게 나타낼 수 있는 양으로 이는 벡터를 이용하여 나타낼 수 있다.

예 그림과 같이 $\overline{AB}=4$, $\overline{BC}=3$인 직사각형 ABCD에서
벡터 $\overrightarrow{AC}$는 시점이 A, 종점이 C인 벡터이고 벡터 $\overrightarrow{AC}$의 크기는

$$|\overrightarrow{AC}|=5$$

이다.



2. 서로 같은 벡터

두 벡터 $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$의 크기와 방향이 모두 같을 때, 두 벡터는 서로 같다고 하고 기호로

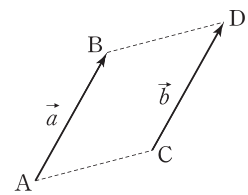
$$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$$

와 같이 나타낸다.

특히, $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$를 한 문자로 각각 $\vec{a}$, $\vec{b}$로 나타내면

$$\vec{a}=\vec{b}$$

이다.

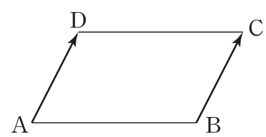


참고 $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$이면 두 벡터 $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$는 평행이동에 의하여 겹쳐질 수 있다.

예 그림과 같은 평행사변형 ABCD에서

$$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}$$

이다.



예제 1 두 벡터가 같을 조건

반지름의 길이가 1인 원 위의 서로 다른 네 점 A, B, C, D에 대하여

$|\overrightarrow{AB}|=1$, $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$

이다. 벡터 $\overrightarrow{AC}$의 크기는?

① 1 ② $\sqrt{2}$ ③ $\sqrt{3}$ ④ 2 ⑤ $\sqrt{5}$

길잡이 두 벡터가 같으면 두 벡터의 방향이 같고 크기가 같음을 이용한다.

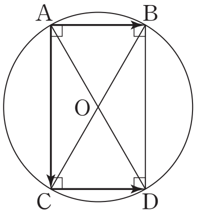
풀이 $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$이므로 두 선분 AB, CD는 서로 평행하고 크기가 같다.

이때 네 점 A, B, C, D가 한 원 위에 있으므로 이 네 점을 꼭짓점으로 하는 사각형은 직사각형이다.

원의 중심을 O라 하면 $\overline{AB}=1$이고 원의 반지름의 길이가 1이므로 삼각형 OBA는 한 변의 길이가 1인 정삼각형이다.

따라서 직각삼각형 ACB에서 $\angle CBA=60^\circ$이므로

$$|\overrightarrow{AC}|=\overline{AC}=\overline{CB}\times\sin 60^\circ=2\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}$$



답 ③

유제

정답과 풀이 31쪽

1 [23012-0070]

한 평면 위의 서로 다른 네 점 A, B, C, D에 대하여 $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CA}$이고 $|\overrightarrow{AB}|=|\overrightarrow{CD}|=|\overrightarrow{AD}|=2$일 때, 삼각형 ADB의 넓이는?

① 1 ② $\sqrt{2}$ ③ $\sqrt{3}$ ④ 2 ⑤ $\sqrt{5}$

2 [23012-0071]

한 평면에서 한 변의 길이가 2인 정삼각형 ABC의 변 AC의 중점을 M이라 할 때, $\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{BM}$을 만족시키는 점 P에 대하여 $|\overrightarrow{BP}|$의 값은?

① $\sqrt{11}$ ② $2\sqrt{3}$ ③ $\sqrt{13}$ ④ $\sqrt{14}$ ⑤ $\sqrt{15}$

04 벡터의 연산

3. 벡터의 덧셈

(1) 벡터의 덧셈

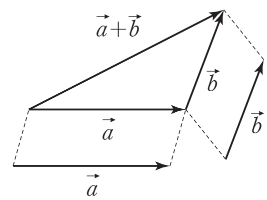
벡터 $\vec{a}$의 종점과 벡터 $\vec{b}$의 시점을 일치시켰을 때, 시점을 벡터 $\vec{a}$의 시점으로 하고 종점을 벡터 $\vec{b}$의 종점으로 하는 벡터를 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$의 합이라 하고 이것을 기호로

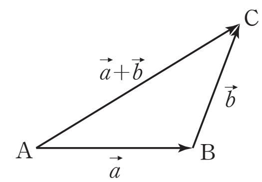
$$\vec{a}+\vec{b}$$

와 같이 나타낸다.

즉, $\vec{a}=\overrightarrow{AB}$, $\vec{b}=\overrightarrow{BC}$일 때,

$$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$$



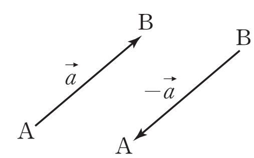


(2) 영벡터와 벡터 $-\vec{a}$의 뜻

① 크기가 0이고 방향을 고려하지 않는 것을 영벡터라 하고 기호로 $\vec{0}$과 같이 나타낸다.

② 벡터 $\vec{a}$와 크기가 같고 방향이 반대인 벡터를 기호로 $-\vec{a}$와 같이 나타낸다.

즉, $\vec{a}=\overrightarrow{AB}$일 때, $-\vec{a}=\overrightarrow{BA}$이다.



참고 벡터 $\overrightarrow{AA}$, $\overrightarrow{BB}$ 등은 영벡터이다.

(3) 벡터의 덧셈에 대한 성질

임의의 세 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$와 영벡터 $\vec{0}$에 대하여

① $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$ (교환법칙)

② $(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$ (결합법칙)

③ $\vec{a}+\vec{0}=\vec{0}+\vec{a}=\vec{a}$

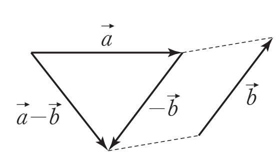
④ $\vec{a}+(-\vec{a})=(-\vec{a})+\vec{a}=\vec{0}$

4. 벡터의 뺄셈

두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$에 대하여 벡터 $\vec{a}$와 벡터 $-\vec{b}$의 합 $\vec{a}+(-\vec{b})$를 벡터 $\vec{a}$에서 벡터 $\vec{b}$를 뺀 차라 하고 기호로

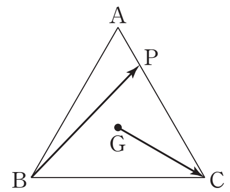
$$\vec{a}-\vec{b}$$

와 같이 나타낸다. 즉, $\vec{a}-\vec{b}=\vec{a}+(-\vec{b})$이다.



예제 2 벡터의 덧셈

그림과 같이 한 변의 길이가 6인 정삼각형 ABC의 무게중심을 G라 하자. 점 P가 선분 CA 위를 움직일 때, 벡터 $\overrightarrow{BP}+\overrightarrow{GC}$의 크기의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 하자. $M\times m$의 값은?



① $21\sqrt{7}$ ② $22\sqrt{7}$ ③ $23\sqrt{7}$ ④ $24\sqrt{7}$ ⑤ $25\sqrt{7}$

길잡이 벡터의 덧셈의 정의를 이용하여 벡터 $\overrightarrow{BP}+\overrightarrow{GC}$를 구한다.

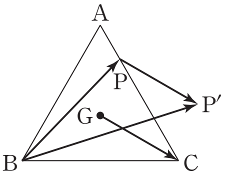
풀이 점 P′을 $\overrightarrow{PP'}=\overrightarrow{GC}$가 되도록 잡으면

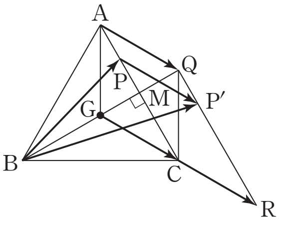
$$\overrightarrow{BP}+\overrightarrow{GC}=\overrightarrow{BP}+\overrightarrow{PP'}=\overrightarrow{BP'} \quad \cdots\cdots ㉠$$

이때 점 Q를 $\overrightarrow{AQ}=\overrightarrow{GC}$, 점 R를 $\overrightarrow{CR}=\overrightarrow{GC}$가 되도록 잡으면 점 P′은 선분 QR 위에 있다.

한편, 사각형 AGCQ는 마름모이므로 직선 BQ는 선분 AC를 수직이등분한다.

그러므로 점 P′이 점 Q일 때 ㉠의 크기는 최소이고, 점 P′이 점 R일 때 ㉠의 크기는 최대이다.





이때 선분 AC의 중점을 M이라 하면

$$m=|\overrightarrow{BQ}|=\overline{BQ}$$
$$=\overline{BM}+\frac{1}{3}\overline{BM}$$
$$=\frac{4}{3}\overline{BM}=\frac{4}{3}\times 6\sin 60^\circ=4\sqrt{3}$$

또

$$M=|\overrightarrow{BR}|=\overline{BR}=\sqrt{\overline{BQ}^2+\overline{QR}^2}=\sqrt{(4\sqrt{3})^2+6^2}=2\sqrt{21}$$

따라서

$$M\times m=2\sqrt{21}\times 4\sqrt{3}=24\sqrt{7}$$

답 ④

유제

정답과 풀이 32쪽

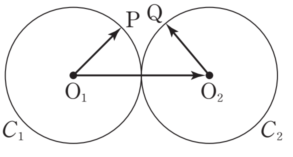
3 [23012-0072]

$\angle B=90^\circ$이고 $\overline{AB}=1$인 직각삼각형 ABC의 변 BC의 중점을 M이라 하자. $|\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{CM}|=\sqrt{5}$일 때, 선분 AC의 길이는?

① $\sqrt{11}$ ② $\sqrt{13}$ ③ $\sqrt{15}$ ④ $\sqrt{17}$ ⑤ $\sqrt{19}$

4 [23012-0073]

그림과 같이 평면에서 중심이 O_1이고 반지름의 길이가 1인 원 C_1과 중심이 O_2이고 반지름의 길이가 1인 원 C_2가 한 점에서 만난다. 두 점 P, Q가 각각 두 원 C_1, C_2 위를 움직일 때, 벡터 $\overrightarrow{O_1P}+\overrightarrow{O_1O_2}-\overrightarrow{O_2Q}$의 크기의 최댓값을 구하시오.



04 벡터의 연산

5. 벡터의 실수배

(1) 벡터의 실수배

실수 k와 벡터 $\vec{a}$의 곱 $k\vec{a}$를 벡터 $\vec{a}$의 실수배라 하고 다음과 같이 정의한다.

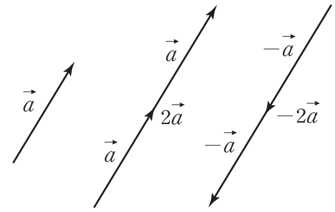
① $\vec{a}\neq\vec{0}$일 때,

(i) $k>0$이면 $k\vec{a}$는 $\vec{a}$와 같은 방향이고 크기는 $k|\vec{a}|$인 벡터

(ii) $k<0$이면 $k\vec{a}$는 $\vec{a}$와 반대 방향이고 크기는 $|k||\vec{a}|$인 벡터

(iii) $k=0$이면 $k\vec{a}=\vec{0}$

② $\vec{a}=\vec{0}$일 때, $k\vec{a}=\vec{0}$



(2) 벡터의 실수배의 성질

두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$와 두 실수 k, l에 대하여

① $k(l\vec{a})=(kl)\vec{a}$ (결합법칙)

② $(k+l)\vec{a}=k\vec{a}+l\vec{a}$ (분배법칙)

③ $k(\vec{a}+\vec{b})=k\vec{a}+k\vec{b}$ (분배법칙)

(3) 벡터의 실수배와 단위벡터

① 단위벡터의 뜻

크기가 1인 벡터를 단위벡터라 한다.

② 벡터의 실수배와 단위벡터

영벡터가 아닌 벡터 $\vec{a}$에 대하여 벡터 $\vec{a}$와 방향이 같은 단위벡터는 $\dfrac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$이다.

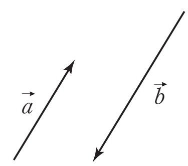
(4) 벡터의 실수배와 평행

① 벡터의 평행의 뜻

영벡터가 아닌 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$가 방향이 같거나 반대일 때, 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$는 평행하다고 하고 기호로

$$\vec{a}\,/\!/\,\vec{b}$$

와 같이 나타낸다.



② 벡터의 실수배와 평행

영벡터가 아닌 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$와 0이 아닌 실수 k에 대하여

$$\vec{a}\,/\!/\,\vec{b} \Longleftrightarrow \vec{b}=k\vec{a}$$

참고 서로 다른 세 점 A, B, C와 0이 아닌 실수 k에 대하여
A, B, C가 한 직선 위에 있다. $\Longleftrightarrow \overrightarrow{\mathrm{AB}}=k\overrightarrow{\mathrm{AC}}$

참고 영벡터가 아닌 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$가 평행하지 않을 때,
$k\vec{a}+l\vec{b}=m\vec{a}+n\vec{b} \Longleftrightarrow k=m,\ l=n$ (단, k, l, m, n은 실수이다.)

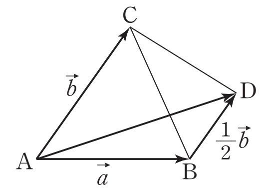
예제 3 벡터의 실수배

삼각형 ABC에서 $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$, $\overrightarrow{AC}=\vec{b}$라 할 때, 점 D가 $\overrightarrow{AD}=\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}$를 만족시킨다. 네 점 A, B, C, D를 꼭짓점으로 하는 사각형의 넓이가 12일 때, 삼각형 ABC의 넓이는?

① 5 ② 6 ③ 7 ④ 8 ⑤ 9

길잡이 벡터의 덧셈과 벡터의 실수배를 이용하여 점 D를 찾은 후 삼각형의 넓이를 구한다.

풀이



$\overrightarrow{AD}=\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}$에서 점 D는 $\overrightarrow{BD}=\frac{1}{2}\vec{b}$인 점이다.

한편, $\overline{AC} /\!/ \overline{BD}$이므로 $\angle BCA=\angle CBD$ ...... ㉠

또 $\frac{1}{2}\overline{AC}=\overline{BD}$ ...... ㉡

㉠, ㉡에서

$$(\text{삼각형 BDC의 넓이})=\frac{1}{2}\times(\text{삼각형 ABC의 넓이})$$

그러므로 사각형 ABDC의 넓이는

$$(\text{삼각형 ABC의 넓이})+(\text{삼각형 BDC의 넓이})=(\text{삼각형 ABC의 넓이})+\frac{1}{2}\times(\text{삼각형 ABC의 넓이})$$

$$=\frac{3}{2}\times(\text{삼각형 ABC의 넓이})$$

이때 사각형 ABDC의 넓이가 12이므로

$$\frac{3}{2}\times(\text{삼각형 ABC의 넓이})=12$$

따라서 삼각형 ABC의 넓이는 8이다.

답 ④

유제

정답과 풀이 32쪽

5 [23012-0074]

한 변의 길이가 4인 정삼각형 ABC에서 $\overrightarrow{AP}=\frac{2}{|2\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}|}\left(\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}\right)$를 만족시키는 점 P에 대하여 삼각형 ABP의 넓이는?

① $\frac{1}{2}$ ② 1 ③ $\frac{3}{2}$ ④ 2 ⑤ $\frac{5}{2}$

6 [23012-0075]

$\vec{a}\neq\vec{0}$, $\vec{b}\neq\vec{0}$이고 서로 평행하지 않은 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$에 대하여

$$\vec{p}=\vec{a}+\vec{b},\ \vec{q}=\vec{a}-2\vec{b},\ \vec{r}=2\vec{a}+k\vec{b}$$

일 때, 두 벡터 $\vec{p}+\vec{q}$, $\vec{p}-2\vec{r}$가 서로 평행하도록 하는 실수 k의 값은?

① $-\frac{1}{2}$ ② $-\frac{1}{4}$ ③ 0 ④ $\frac{1}{4}$ ⑤ $\frac{1}{2}$

6. 위치벡터

(1) 위치벡터

평면에서 정해진 점 O를 시점으로 하는 벡터 $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$를 점 O에 대한 점 A의 위치벡터라 한다.

설명 평면에서 벡터의 시점을 한 점 O로 고정시킬 때, 임의의 벡터 $\vec{a}$에 대하여 $\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}$인 점 A가 유일하게 정해진다. 역으로 임의의 점 A에 대하여 $\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$인 벡터 $\vec{a}$가 오직 하나로 결정된다.

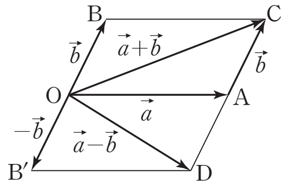
(2) 위치벡터와 덧셈, 뺄셈

평면 위의 두 점 A, B의 위치벡터를 각각 $\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}$, $\vec{b}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}$라 하자.

① 덧셈

선분 AB를 대각선으로 하는 평행사변형 OACB에서

$$\vec{a}+\vec{b}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\overrightarrow{\mathrm{OC}}$$



② 뺄셈

$-\vec{b}=\overrightarrow{\mathrm{OB'}}$일 때, 선분 AB′을 대각선으로 하는 평행사변형 OB′DA에서

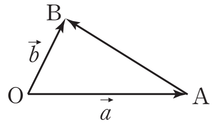
$$\vec{a}-\vec{b}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}-\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB'}}=\overrightarrow{\mathrm{OD}}$$

(3) 위치벡터의 활용

① 평면 위의 벡터의 위치벡터로의 표현

평면 위의 두 점 A, B의 위치벡터를 $\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$, $\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$라 하면

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{b}-\vec{a}$$



설명 $\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}$이므로 $\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}$이다.

② 내분점과 외분점

평면 위의 두 점 A, B의 위치벡터를 각각 $\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$, $\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$라 하고, 선분 AB를 $m : n$ $(m>0,\ n>0)$으로 내분하는 점 P의 위치벡터를 $\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\vec{p}$, 선분 AB를 $m : n$ $(m>0,\ n>0,\ m\neq n)$으로 외분하는 점 Q의 위치벡터를 $\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\vec{q}$라 하면

(i) $\vec{p}=\dfrac{m\vec{b}+n\vec{a}}{m+n}$

(ii) $\vec{q}=\dfrac{m\vec{b}-n\vec{a}}{m-n}$

③ 무게중심

평면 위의 한 직선 위에 있지 않은 세 점 A, B, C의 위치벡터를 각각 $\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$, $\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$, $\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{c}$라 하고, 삼각형 ABC의 무게중심 G의 위치벡터를 $\overrightarrow{\mathrm{OG}}=\vec{g}$라 하면

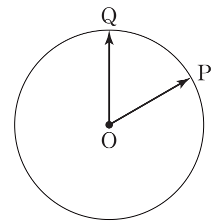
$$\vec{g}=\frac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{3}$$

예제 4 위치벡터의 덧셈

그림과 같이 중심이 O이고 반지름의 길이가 1인 원 위를 움직이는 서로 다른 두 점 P, Q에 대하여 $\angle POQ=60^\circ$이다.

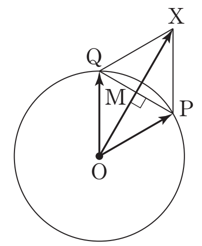
$$\overrightarrow{OX}=\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OQ}$$

를 만족시키는 점 X가 나타내는 도형의 길이는?



① $\sqrt{2}\pi$ ② $\sqrt{3}\pi$ ③ $2\sqrt{2}\pi$
④ $2\sqrt{3}\pi$ ⑤ $3\sqrt{2}\pi$

길잡이 위치벡터의 덧셈과 평행사변형의 성질을 이용하여 점 X가 나타내는 도형의 길이를 구한다.



풀이 $\overrightarrow{OX}=\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OQ}$를 만족시키는 점 X에 대하여 사각형 OPXQ는 평행사변형이다.
이때 $|\overrightarrow{OP}|=|\overrightarrow{OQ}|$이므로 사각형 OPXQ는 마름모이다.
또 $\angle POQ=60^\circ$이므로 삼각형 OPQ는 정삼각형이다.
두 선분 OX, PQ가 만나는 점을 M이라 하면

$$|\overrightarrow{OX}|=2\overline{OM}=2\times\overline{OP}\times\sin 60^\circ=\sqrt{3}$$

따라서 점 X가 나타내는 도형은 점 O를 중심으로 하고 반지름의 길이가 $\sqrt{3}$인 원이므로 구하는 도형의 길이는

$2\sqrt{3}\pi$

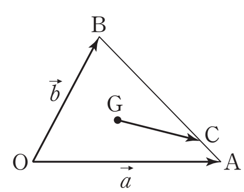
답 ④

유제

정답과 풀이 33쪽

7 [23012-0076]

그림과 같이 삼각형 OAB의 무게중심을 G, 선분 AB를 $1:5$로 내분하는 점을 C라 하자. $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{OB}=\vec{b}$라 할 때, 두 실수 m, n에 대하여 $\overrightarrow{GC}=m\vec{a}+n\vec{b}$이다. $m+n$의 값은?



① $\frac{1}{6}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ $\frac{1}{2}$
④ $\frac{2}{3}$ ⑤ $\frac{5}{6}$

8 [23012-0077]

삼각형 OAB에서 $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{OB}=\vec{b}$라 하고 $\overrightarrow{OC}=k\overrightarrow{OB}$ $(0<k<1)$을 만족시키는 점을 C라 하자. $\overrightarrow{OP}=\frac{1}{3}\vec{a}+\frac{1}{3}\vec{b}$를 만족시키는 점 P가 선분 AC를 $m:n$으로 내분할 때, $\frac{m+n}{k}$의 값을 구하시오.

(단, m과 n은 서로소인 자연수이다.)

04 벡터의 연산

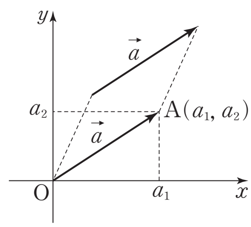
7. 평면벡터의 성분

(1) 평면벡터의 성분

좌표평면에서 원점 O를 시점으로 하고 점 $\mathrm{A}(a_1,\ a_2)$를 종점으로 하는 위치벡터 $\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}$를

$$\vec{a}=(a_1,\ a_2)$$

와 같이 나타낸다.



이때 두 실수 $a_1,\ a_2$를 벡터 $\vec{a}$의 성분이라 하고, $a_1,\ a_2$를 각각 벡터 $\vec{a}$의 x성분, y성분이라고 한다.

설명 좌표평면 위의 두 점 $\mathrm{E}_1(1,\ 0),\ \mathrm{E}_2(0,\ 1)$의 위치벡터를 각각 $\overrightarrow{\mathrm{OE}_1}=\vec{e_1},\ \overrightarrow{\mathrm{OE}_2}=\vec{e_2}$라 하면 점 $\mathrm{A}(a_1,\ a_2)$에 대하여

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=a_1\vec{e_1}+a_2\vec{e_2}$$

와 같이 나타낼 수 있다. 이때 $\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}$를

$$\vec{a}=(a_1,\ a_2)$$

와 같이 나타낸다.

(2) 평면벡터의 성분과 연산

두 평면벡터 $\vec{a}=(a_1,\ a_2),\ \vec{b}=(b_1,\ b_2)$에 대하여

① 크기: $|\vec{a}|=\sqrt{a_1^2+a_2^2}$

② 두 벡터가 서로 같을 조건: $\vec{a}=\vec{b} \Longleftrightarrow a_1=b_1$이고 $a_2=b_2$

③ 덧셈: $\vec{a}+\vec{b}=(a_1+b_1,\ a_2+b_2)$

④ 뺄셈: $\vec{a}-\vec{b}=(a_1-b_1,\ a_2-b_2)$

⑤ 실수배: $k\vec{a}=(ka_1,\ ka_2)$ (단, k는 실수이다.)

설명 좌표평면에서 원점을 O, 두 점을 $\mathrm{A}(a_1,\ a_2),\ \mathrm{B}(b_1,\ b_2)$라 하자.

① 벡터 $\vec{a}$의 크기는 선분 OA의 길이이므로

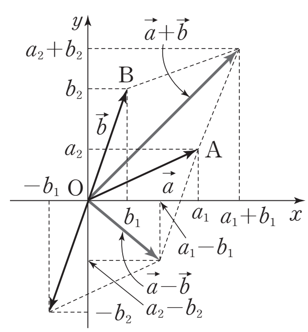
$$|\vec{a}|=\overline{\mathrm{OA}}=\sqrt{a_1^2+a_2^2}$$

② $\vec{a}=\vec{b}$이면 종점이 같으므로 $a_1=b_1,\ a_2=b_2$이다.
역도 성립한다.

③ $\vec{a}+\vec{b}=(a_1\vec{e_1}+a_2\vec{e_2})+(b_1\vec{e_1}+b_2\vec{e_2})$
$=(a_1+b_1)\vec{e_1}+(a_2+b_2)\vec{e_2}$
$=(a_1+b_1,\ a_2+b_2)$

④ $\vec{a}-\vec{b}=(a_1\vec{e_1}+a_2\vec{e_2})-(b_1\vec{e_1}+b_2\vec{e_2})$
$=(a_1-b_1)\vec{e_1}+(a_2-b_2)\vec{e_2}$
$=(a_1-b_1,\ a_2-b_2)$

⑤ $k\vec{a}=k(a_1\vec{e_1}+a_2\vec{e_2})=ka_1\vec{e_1}+ka_2\vec{e_2}=(ka_1,\ ka_2)$



예제 5 평면벡터의 성분

www.ebsi.co.kr

좌표평면 위의 세 점 A, B, C가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\overrightarrow{BA}=(1, 2)$, $\overrightarrow{BC}=(-2, 3)$
(나) 삼각형 ABC의 무게중심을 G라 할 때, G$(2, 1)$이다.

벡터 $\overrightarrow{OA}$의 모든 성분의 합은? (단, O는 원점이다.)

① 2 ② $\frac{8}{3}$ ③ $\frac{10}{3}$ ④ 4 ⑤ $\frac{14}{3}$

길잡이 벡터의 연산을 이용하여 $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$를 구한 후 무게중심의 좌표를 이용한다.

풀이 조건 (가)에서 $\overrightarrow{BA}=(1, 2)$이므로

$\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}=(1, 2)$, $\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OA}-(1, 2)$ …… ㉠

조건 (가)에서 $\overrightarrow{BC}=(-2, 3)$이므로

$\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB}=(-2, 3)$, $\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OB}+(-2, 3)$ …… ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면

$\overrightarrow{OC}=\{\overrightarrow{OA}-(1, 2)\}+(-2, 3)=\overrightarrow{OA}+(-3, 1)$ …… ㉢

조건 (나)에서 $\overrightarrow{OG}=(2, 1)$이므로 ㉠과 ㉢을 이용하면

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OG}&=\frac{\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}}{3}\\&=\frac{1}{3}[\overrightarrow{OA}+\{\overrightarrow{OA}-(1, 2)\}+\{\overrightarrow{OA}+(-3, 1)\}]\\&=\overrightarrow{OA}+\frac{1}{3}(-4, -1)\\&=\overrightarrow{OA}+\left(-\frac{4}{3}, -\frac{1}{3}\right)\\&=(2, 1)\end{aligned}$$

따라서 $\overrightarrow{OA}=(2, 1)-\left(-\frac{4}{3}, -\frac{1}{3}\right)=\left(\frac{10}{3}, \frac{4}{3}\right)$이므로 벡터 $\overrightarrow{OA}$의 모든 성분의 합은 $\frac{14}{3}$이다.

답 ⑤

유제

정답과 풀이 33쪽

9 [23012-0078]

두 벡터 $\vec{a}=(x, x-y)$, $\vec{b}=(y+1, 2y+5)$에 대하여 $\vec{a}=\vec{b}$일 때, 두 실수 x, y의 곱 xy의 값은?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

10 [23012-0079]

벡터 $\vec{a}=(3, -4)$에 대하여 벡터 $\vec{a}$와 방향이 반대이고 크기가 1인 벡터의 모든 성분의 합은?

① $-\frac{2}{5}$ ② $-\frac{1}{5}$ ③ 0 ④ $\frac{1}{5}$ ⑤ $\frac{2}{5}$

[23012-0080]

1 $\vec{a}\neq\vec{0}$, $\vec{b}\neq\vec{0}$이고 서로 평행하지 않은 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$에 대하여 두 벡터 $\vec{x}$, $\vec{y}$가

$$\vec{x}+\vec{y}=\vec{a}+5\vec{b},\ \vec{x}-\vec{y}=3\vec{a}+\vec{b}$$

를 만족시킨다. 두 실수 m, n에 대하여 $\vec{x}+3\vec{y}=m\vec{a}+n\vec{b}$일 때, $m+n$의 값은?

① 5 ② 6 ③ 7 ④ 8 ⑤ 9

[23012-0081]

2 영벡터가 아닌 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$가 서로 평행하고 방향은 반대이다. $|\vec{a}|=2$, $|2(\vec{a}+\vec{b})-\vec{b}|=5$일 때, 벡터 $\vec{a}+\vec{b}$의 크기는?

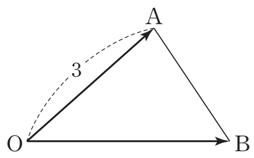
① 5 ② 6 ③ 7 ④ 8 ⑤ 9

[23012-0082]

3 그림과 같이 $\overline{OA}=3$인 예각삼각형 AOB에서

$$\overrightarrow{OP}=\frac{\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}}{2}$$

를 만족시키는 점 P와 직선 OB 사이의 거리가 1이다. $\angle AOB=\theta$일 때, $\sin\theta$의 값은?



① $\frac{1}{6}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ $\frac{1}{2}$ ④ $\frac{2}{3}$ ⑤ $\frac{5}{6}$

[23012-0083]

4 삼각형 OAB에서

$$(3k-2)\overrightarrow{PO}=k\overrightarrow{PA}+2k\overrightarrow{PB}$$

를 만족시키는 점 P가 삼각형 OAB의 경계 또는 내부에 있도록 하는 모든 실수 k의 값의 범위가 $\alpha\leq k\leq\beta$이다. $\alpha+\beta$의 값은?

① $\frac{1}{6}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ $\frac{1}{2}$ ④ $\frac{2}{3}$ ⑤ $\frac{5}{6}$

5
[23012-0084]
두 벡터 $\vec{a}=(1, 2)$, $\vec{b}=(3, -1)$에 대하여 벡터 $\vec{a}+2\vec{b}$의 모든 성분의 합은?

① 1 ② 3 ③ 5 ④ 7 ⑤ 9

6
[23012-0085]
두 벡터 $\vec{a}=(-1, 2)$, $\vec{b}=(3, 1)$에 대하여 $\vec{a}-(\vec{b}-2\vec{a})$의 모든 성분의 합은?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

7
[23012-0086]
좌표평면 위의 세 점 $\mathrm{A}(1, 2)$, $\mathrm{B}(2, 3)$, $\mathrm{C}(-3, 2)$에 대하여 점 $\mathrm{P}(a, b)$가 $\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\overrightarrow{\mathrm{BC}}+\overrightarrow{\mathrm{PC}}$를 만족시킬 때, $a+b$의 값은?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

8
[23012-0087]
좌표평면 위의 세 점 $\mathrm{A}(2, 1)$, $\mathrm{B}(5, x)$, $\mathrm{C}(x+1, 7)$에 대하여 두 벡터 $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$, $\overrightarrow{\mathrm{BC}}$가 평행할 때, x의 값은?
(단, O는 원점이다.)

① 2 ② 4 ③ 6 ④ 8 ⑤ 10

9
[23012-0088]
좌표평면에서 원 $(x+1)^2+y^2=1$ 위를 움직이는 점 P와 두 점 $\mathrm{A}(1, 2)$, $\mathrm{B}(3, 6)$에 대하여 벡터 $\overrightarrow{\mathrm{PA}}+\overrightarrow{\mathrm{PB}}$의 크기의 최댓값은?

① 8 ② 9 ③ 10 ④ 11 ⑤ 12

[23012-0089]

1 중심이 O이고 반지름의 길이가 1인 원 위의 서로 다른 세 점 P, Q, R가 $\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{QR}$를 만족시킬 때, 세 점 P, Q, R를 꼭짓점으로 하는 삼각형의 넓이는?

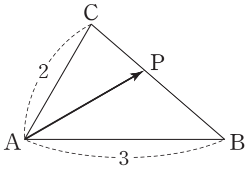
① $\frac{\sqrt{3}}{4}$　② $\frac{3\sqrt{3}}{8}$　③ $\frac{\sqrt{3}}{2}$　④ $\frac{5\sqrt{3}}{8}$　⑤ $\frac{3\sqrt{3}}{4}$

[23012-0090]

2 그림과 같이 $\overline{AB}=3$, $\overline{AC}=2$인 삼각형 ABC의 변 BC 위를 움직이는 점 P에 대하여

$$\overrightarrow{AQ}=3\times\frac{\overrightarrow{AP}}{|\overrightarrow{AP}|}$$

를 만족시키는 점 Q가 나타내는 도형의 길이가 π일 때, 삼각형 ABC의 넓이는?

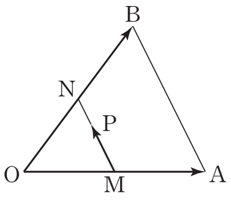


① $\frac{\sqrt{3}}{2}$　② $\sqrt{2}$　③ $\sqrt{3}$

④ $\frac{3\sqrt{2}}{2}$　⑤ $\frac{3\sqrt{3}}{2}$

[23012-0091]

3 그림과 같이 $\overline{OA}=\overline{OB}$이고 $\overline{AB}=2$인 이등변삼각형 OAB에서 두 변 OA, OB의 중점을 각각 M, N이라 하자. 선분 MN 위를 움직이는 점 P에 대하여 벡터 $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{MP}$의 크기의 최댓값은 $\sqrt{17}$이다. 삼각형 OAB의 넓이는?



① $\frac{3}{2}$　② 2　③ $\frac{5}{2}$

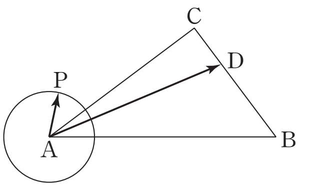
④ 3　⑤ $\frac{7}{2}$

[23012-0092]

4 그림과 같이 $\overline{\mathrm{AC}}=4$, $\overline{\mathrm{BC}}=3$인 삼각형 ABC가 있다. 점 P가 점 A를 중심으로 하고 반지름의 길이가 1인 원 위를 움직일 때, 변 BC 위의 어떤 한 점 D에 대하여

$$\overrightarrow{\mathrm{AQ}}=\overrightarrow{\mathrm{AP}}+\overrightarrow{\mathrm{AD}}$$

를 만족시키는 점 Q가 나타내는 도형이 직선 AC와 만나는 점은 C뿐이다. 삼각형 ABD의 넓이는?



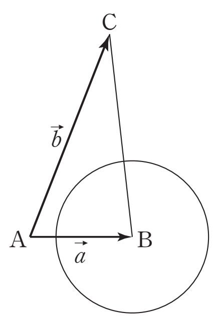
① $\frac{5}{2}$ ② 3 ③ $\frac{7}{2}$ ④ 4 ⑤ $\frac{9}{2}$

[23012-0093]

5 그림과 같이 $\overline{\mathrm{AB}}=3$, $\overline{\mathrm{BC}}=6$인 삼각형 ABC에서 $\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\vec{a}$, $\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\vec{b}$라 하자. 실수 t에 대하여

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=t(\vec{a}+\vec{b})$$

를 만족시키는 점 P가 나타내는 도형과 중심이 B이고 반지름의 길이가 $\sqrt{5}$인 원이 한 점에서만 만날 때, 삼각형 ABC의 넓이를 S라 하자. S^2의 값을 구하시오.

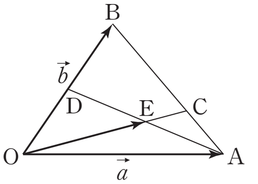


[23012-0094]

6 그림과 같이 삼각형 OAB에서 선분 AB를 1 : 2로 내분하는 점을 C, 선분 OB의 중점을 D라 하고 두 선분 AD, OC가 만나는 점을 E라 하자. $\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$, $\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$라 할 때,

$$\overrightarrow{\mathrm{OE}}=m\vec{a}+n\vec{b}$$

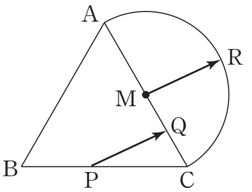
가 성립하도록 하는 두 실수 m, n에 대하여 $m+n$의 값은?



① $\frac{3}{8}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ $\frac{5}{8}$ ④ $\frac{3}{4}$ ⑤ $\frac{7}{8}$

[23012-0095]

1 그림과 같이 한 변의 길이가 2인 정삼각형 ABC의 두 변 BC, CA 위를 각각 움직이는 두 점 P, Q가 있다. 선분 CA의 중점을 M, 선분 CA를 지름으로 하는 반원의 호 위를 움직이는 점을 R라 하자. 네 점 P, Q, M, R가 $\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{MR}$를 만족시킬 때, $|\overrightarrow{PC}|$의 최댓값은? (단, 호 AC가 두 선분 AB, BC와 만나는 점은 A와 C뿐이다.)



① $\frac{\sqrt{3}}{6}$ ② $\frac{\sqrt{3}}{3}$ ③ $\frac{\sqrt{3}}{2}$

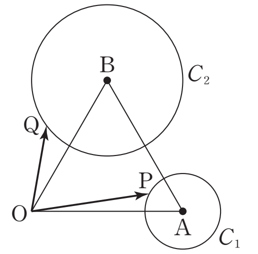
④ $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ ⑤ $\frac{5\sqrt{3}}{6}$

[23012-0096]

2 그림과 같이 한 변의 길이가 4인 정삼각형 OAB에서 점 A를 중심으로 하고 반지름의 길이가 1인 원을 C_1, 점 B를 중심으로 하고 반지름의 길이가 2인 원을 C_2라 하자. 두 점 P, Q가 각각 두 원 C_1, C_2 위를 움직일 때,

$$\overrightarrow{OX}=\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OQ}$$

를 만족시키는 점 X가 나타내는 영역의 넓이는 $a\pi$이고 $|\overrightarrow{OX}|$의 최댓값은 $b+c\sqrt{3}$이다. $a+b+c$의 값을 구하시오. (단, a는 실수이고, b와 c는 자연수이다.)



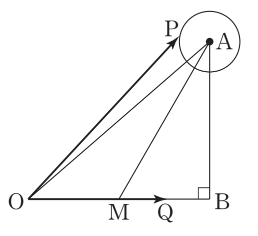
[23012-0097]

3 그림과 같이 ∠OBA=90°인 삼각형 AOB에서 변 OB의 중점을 M이라 할 때, $\overline{AM}=6$, ∠OMA=120°이다. 점 P가 중심이 A이고 반지름의 길이가 1인 원 위를 움직이고 점 Q가 선분 MB 위를 움직일 때,

$$\overrightarrow{OX}=\frac{\overrightarrow{OP}+2\overrightarrow{OQ}}{3}$$

를 만족시키는 점 X가 나타내는 영역의 넓이는 $a\pi+b$이다. $\frac{b}{a}$의 값을 구하시오.

(단, a와 b는 유리수이고, $a\neq0$이다.)



대표 기출 문제

EBS

출제 경향 벡터의 연산을 정의, 위치벡터, 성분으로 할 수 있는지를 묻는 문제가 출제된다.

2019학년도 대수능

좌표평면에서 넓이가 9인 삼각형 ABC의 세 변 AB, BC, CA 위를 움직이는 점을 각각 P, Q, R라 할 때,

$$\overrightarrow{AX}=\frac{1}{4}(\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{AR})+\frac{1}{2}\overrightarrow{AQ}$$

를 만족시키는 점 X가 나타내는 영역의 넓이가 $\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오.

(단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

출제 의도 벡터의 덧셈의 정의와 위치벡터를 이용하여 벡터의 덧셈을 할 수 있는지를 묻는 문제이다.

풀이 선분 AB의 4등분점을 점 A에서 가까운 점부터 차례로 I_1, I_2, I_3, 선분 BC의 4등분점을 점 B에서 가까운 점부터 차례로 J_1, J_2, J_3, 선분 CA의 4등분점을 점 C에서 가까운 점부터 차례로 K_1, K_2, K_3이라 하자. 이 9개의 점에 삼각형 ABC의 각 변에 평행하도록 선분을 긋는다.

$$\overrightarrow{AX}=\frac{1}{4}(\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{AR})+\frac{1}{2}\overrightarrow{AQ} \quad \cdots\cdots ㉠$$

에서

$$\frac{1}{4}(\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{AR})=\overrightarrow{AP_1} \quad \cdots\cdots ㉡$$

이라 하면 점 P_1이 나타내는 영역은 [그림 1]에서 어두운 부분이다.

또 ㉠에서

$$\frac{1}{2}\overrightarrow{AQ}=\overrightarrow{AQ_1} \quad \cdots\cdots ㉢$$

이라 하면 점 Q_1은 선분 I_2K_2 위의 점이다.

㉠을 ㉡과 ㉢으로 나타내면 $\overrightarrow{AX}=\overrightarrow{AP_1}+\overrightarrow{AQ_1}$

이때 [그림 2]와 같이 $\overrightarrow{AP_1}=\overrightarrow{Q_1P_2}$가 되도록 점 P_2를 잡으면

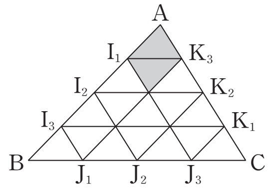
$$\overrightarrow{AX}=\overrightarrow{Q_1P_2}+\overrightarrow{AQ_1}=\overrightarrow{AP_2}$$

이므로 점 X가 나타내는 영역은 [그림 3]에서 어두운 부분이다.

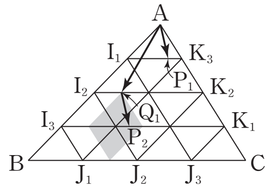
따라서 합동인 작은 16개의 삼각형의 넓이는 각각 $\frac{9}{16}$로 같으므로 구하는 넓이는

$\frac{9}{16}\times 10=\frac{45}{8}$이다. 즉, $p=8$, $q=45$이므로

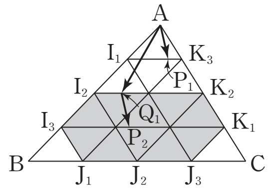
$$p+q=8+45=53$$



[그림 1]



[그림 2]



[그림 3]

답 53

05 벡터의 내적, 직선과 원의 방정식

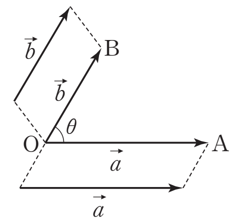
1. 벡터의 내적

(1) 두 벡터가 이루는 각의 크기

영벡터가 아닌 두 평면벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$에 대하여 임의의 한 점 O를 시점으로 하여 $\vec{a}=\overrightarrow{OA}$, $\vec{b}=\overrightarrow{OB}$가 되도록 두 점 A, B를 정할 때,

$$\angle AOB=\theta\ (0^\circ\le\theta\le180^\circ)$$

를 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$가 이루는 각의 크기라 한다.

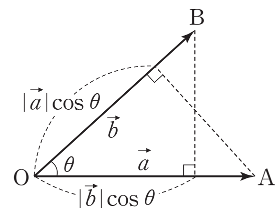


(2) 벡터의 내적

영벡터가 아닌 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$가 이루는 각의 크기가 θ일 때,

$$\begin{cases}|\vec{a}|\,|\vec{b}|\cos\theta & (0^\circ\le\theta\le90^\circ)\\ -|\vec{a}|\,|\vec{b}|\cos(180^\circ-\theta) & (90^\circ<\theta\le180^\circ)\end{cases}$$

를 두 벡터 $\vec{a}$와 $\vec{b}$의 내적이라 하고, 이것을 기호로 $\vec{a}\cdot\vec{b}$와 같이 나타낸다.



참고 ① 〈수학 I〉에서 공부한 삼각함수를 이용하면 위의 내적을 다음과 같이 간단히 나타낼 수 있다.

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\,|\vec{b}|\cos\theta$$

이때 $\vec{a}$와 $\vec{b}$의 내적은 $|\vec{a}|$와 $|\vec{b}|\cos\theta$ 또는 $|\vec{a}|\cos\theta$와 $|\vec{b}|$의 곱이다.

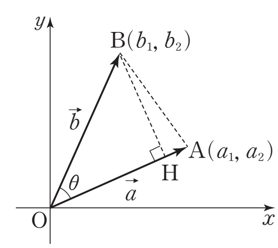
② $\vec{a}=\vec{0}$ 또는 $\vec{b}=\vec{0}$일 때에는 $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$으로 정한다.

(3) 벡터의 성분과 내적

두 평면벡터 $\vec{a}=(a_1,\ a_2)$, $\vec{b}=(b_1,\ b_2)$에 대하여

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=a_1b_1+a_2b_2$$

설명 좌표평면에서 영벡터가 아닌 두 평면벡터 $\vec{a}=(a_1,\ a_2)$, $\vec{b}=(b_1,\ b_2)$가 이루는 각의 크기를 $\theta\ (0^\circ<\theta<90^\circ)$라 하고 $A(a_1,\ a_2)$, $B(b_1,\ b_2)$라 하자.



점 B에서 직선 OA에 내린 수선의 발을 H라 하면 직각삼각형 BHA에서

$$\overline{AB}^2=(\overline{OB}\sin\theta)^2+|\overline{OA}-\overline{OB}\cos\theta|^2$$

이를 정리하면 $\overline{AB}^2=\overline{OA}^2+\overline{OB}^2-2\times\overline{OA}\times\overline{OB}\cos\theta$

그러므로 $(b_1-a_1)^2+(b_2-a_2)^2=(a_1^2+a_2^2)+(b_1^2+b_2^2)-2(\vec{a}\cdot\vec{b})$

이를 정리하면 $\vec{a}\cdot\vec{b}=a_1b_1+a_2b_2$

이 식은 $\theta=0^\circ$, $90^\circ\le\theta\le180^\circ$일 때에도 성립하고 $\vec{a}=\vec{0}$ 또는 $\vec{b}=\vec{0}$일 때에도 성립한다.

참고 〈수학 I〉에서 공부한 삼각함수를 이용하면 $\vec{a}\cdot\vec{b}=a_1b_1+a_2b_2$는 다음과 같이 설명할 수 있다.

좌표평면에서 세 점 $O(0,\ 0)$, $A(a_1,\ a_2)$, $B(b_1,\ b_2)$에 대하여 $\angle AOB=\theta$라 하면 삼각형 AOB에서 코사인법칙에 의하여

$$\overline{AB}^2=\overline{OA}^2+\overline{OB}^2-2\times\overline{OA}\times\overline{OB}\cos\theta$$

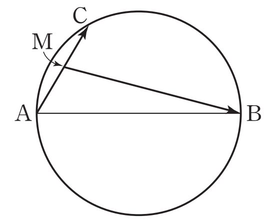
$$(b_1-a_1)^2+(b_2-a_2)^2=(a_1^2+a_2^2)+(b_1^2+b_2^2)-2\times\overline{OA}\times\overline{OB}\cos\theta$$

그러므로 $\overline{OA}\times\overline{OB}\cos\theta=a_1b_1+a_2b_2$

즉, $\vec{a}\cdot\vec{b}=a_1b_1+a_2b_2$

예제 1 평면벡터의 내적

그림과 같이 지름이 선분 AB인 원 위의 점 C에 대하여 $\overline{AC}=4$이다. 선분 AC의 중점을 M이라 할 때, $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{MB}$의 값은?



① -16　② -8　③ 0　④ 8　⑤ 16

길잡이　두 벡터가 이루는 각의 크기를 나타낸 후 내적을 구한다.

풀이　선분 AB가 지름이므로

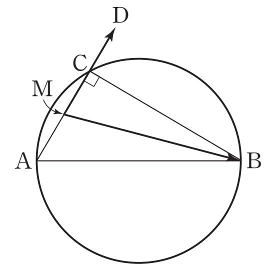
$\angle ACB=90^\circ$

$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{MD}$가 되도록 점 D를 잡으면 두 벡터 $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{MB}$가 이루는 각의 크기는 $\angle DMB$이므로

$$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{MB}=|\overrightarrow{AC}||\overrightarrow{MB}|\cos(\angle DMB)$$
$$=|\overrightarrow{MD}||\overrightarrow{MB}|\cos(\angle DMB)$$

이때 $\overline{MB}\cos(\angle DMB)=\overline{MC}$이므로

$$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{MB}=\overline{MD}\times\overline{MC}$$
$$=4\times 2=8$$



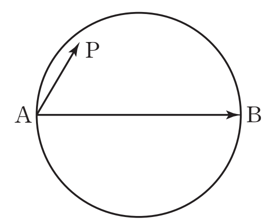
답 ④

유제

정답과 풀이 38쪽

1 [23012-0098]

그림과 같이 길이가 4인 선분 AB를 지름으로 하는 원 위의 점 또는 원의 내부의 점을 P라 할 때, $\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AB}=4$를 만족시키는 점 P가 나타내는 도형의 길이는?



① $\sqrt{3}$　② 2　③ $2\sqrt{2}$　④ $2\sqrt{3}$　⑤ 4

2 [23012-0099]

좌표평면 위의 두 점 A(1, 2), B(3, -1)에 대하여 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{AB}$의 값은? (단, O는 원점이다.)

① -4　② -2　③ 0　④ 2　⑤ 4

2. 벡터의 내적의 성질

(1) 벡터의 내적의 성질

세 평면벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$와 실수 k에 대하여

① $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}$ (교환법칙)

② $\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}$ (분배법칙)

③ $(k\vec{a})\cdot\vec{b}=\vec{a}\cdot(k\vec{b})=k(\vec{a}\cdot\vec{b})$

(2) 벡터의 크기와 내적

① $\vec{a}\cdot\vec{a}=|\vec{a}|^2$

② $|\vec{a}+\vec{b}|^2=|\vec{a}|^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2$

③ $|\vec{a}-\vec{b}|^2=|\vec{a}|^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2$

④ $(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}-\vec{b})=|\vec{a}|^2-|\vec{b}|^2$

설명 ① 두 벡터 $\vec{a}$와 $\vec{a}$가 이루는 각의 크기는 0°이므로 $\vec{a}\cdot\vec{a}=|\vec{a}||\vec{a}|\cos 0^\circ=|\vec{a}|^2$

② $|\vec{a}+\vec{b}|^2=(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}+\vec{b})=\vec{a}\cdot\vec{a}+\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}\cdot\vec{a}+\vec{b}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2$

③ $|\vec{a}-\vec{b}|^2=(\vec{a}-\vec{b})\cdot(\vec{a}-\vec{b})=\vec{a}\cdot\vec{a}-\vec{a}\cdot\vec{b}-\vec{b}\cdot\vec{a}+\vec{b}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2$

④ $(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}-\vec{b})=\vec{a}\cdot\vec{a}-\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}\cdot\vec{a}-\vec{b}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|^2-|\vec{b}|^2$

3. 두 평면벡터가 이루는 각의 크기

(1) 두 벡터가 이루는 각의 크기

평면 위의 영벡터가 아닌 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$가 이루는 각의 크기가 θ $(0^\circ\le\theta\le180^\circ)$일 때

$$\cos\theta=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}$$

(2) 벡터의 성분과 두 벡터가 이루는 각의 크기

좌표평면 위의 영벡터가 아닌 두 벡터 $\vec{a}=(a_1, a_2)$, $\vec{b}=(b_1, b_2)$가 이루는 각의 크기가 θ $(0^\circ\le\theta\le180^\circ)$일 때

$$\cos\theta=\frac{a_1b_1+a_2b_2}{\sqrt{a_1^{\,2}+a_2^{\,2}}\sqrt{b_1^{\,2}+b_2^{\,2}}}$$

4. 두 평면벡터의 평행, 수직

(1) 두 평면벡터의 평행, 수직

평면 위의 영벡터가 아닌 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$에 대하여

① $\vec{a}\perp\vec{b}\iff\vec{a}\cdot\vec{b}=0$　　② $\vec{a}/\!/\vec{b}\iff\vec{a}\cdot\vec{b}=\pm|\vec{a}||\vec{b}|$

(2) 벡터의 성분과 두 벡터의 평행, 수직

좌표평면에서 영벡터가 아닌 두 벡터 $\vec{a}=(a_1, a_2)$, $\vec{b}=(b_1, b_2)$에 대하여

① $\vec{a}\perp\vec{b}\iff\vec{a}\cdot\vec{b}=a_1b_1+a_2b_2=0$　　② $\vec{a}/\!/\vec{b}\iff\vec{a}\cdot\vec{b}=\pm\sqrt{a_1^{\,2}+a_2^{\,2}}\sqrt{b_1^{\,2}+b_2^{\,2}}$

참고 두 벡터가 이루는 각의 크기가 90°일 때, 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$는 서로 수직이라 하고 기호로 $\vec{a}\perp\vec{b}$와 같이 나타낸다.

예제 2 내적의 성질

평면 위의 네 점 O, A, B, C와 선분 BC의 중점 M이

$$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{BC}=4,\ \overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{AO}=-1$$

을 만족시킨다. $\overrightarrow{OA}\cdot(\overrightarrow{OB}+2\overrightarrow{OC})$의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

길잡이 주어진 벡터를 점 O를 시점으로 하는 위치벡터로 나타낸 후 벡터의 내적의 성질을 이용한다.

풀이 $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{OB}=\vec{b}$, $\overrightarrow{OC}=\vec{c}$라 하면 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{BC}=4$에서

$\overrightarrow{OA}\cdot(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB})=4$

$\vec{a}\cdot(\vec{c}-\vec{b})=4$

$\vec{a}\cdot\vec{c}-\vec{a}\cdot\vec{b}=4$ …… ㉠

또 $\overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{AO}=-1$에서

$\dfrac{\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}}{2}\cdot(-\overrightarrow{OA})=-1$

$(\vec{b}+\vec{c})\cdot\vec{a}=2$

$\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c})=2$

$\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}=2$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$\vec{a}\cdot\vec{b}=-1$, $\vec{a}\cdot\vec{c}=3$

따라서

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OA}\cdot(\overrightarrow{OB}+2\overrightarrow{OC})&=\vec{a}\cdot(\vec{b}+2\vec{c})\\&=\vec{a}\cdot\vec{b}+2\vec{a}\cdot\vec{c}\\&=-1+2\times3=5\end{aligned}$$

답 ⑤

유제

정답과 풀이 39쪽

3 [23012-0100]

두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$가 $|\vec{a}|=2$, $|\vec{b}|=3$, $|\vec{a}+\vec{b}|=4$일 때, 벡터 $\vec{a}+2\vec{b}$의 크기는?

① $\sqrt{42}$ ② $\sqrt{43}$ ③ $2\sqrt{11}$ ④ $3\sqrt{5}$ ⑤ $\sqrt{46}$

4 [23012-0101]

두 벡터 $\vec{a}=(1, 2)$, $\vec{b}=(3, 1)$에 대하여 두 벡터 $\vec{a}+\vec{b}$, $\vec{a}-\vec{b}$가 이루는 각의 크기를 θ라 할 때, $\cos\theta$의 값은?

① $-\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$ ② $-\dfrac{\sqrt{5}}{5}$ ③ 0 ④ $\dfrac{\sqrt{5}}{5}$ ⑤ $\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$

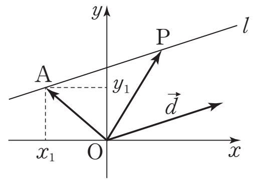
5. 직선의 방정식

(1) 방향벡터가 주어진 직선의 방정식

점 A를 지나고 방향벡터가 $\vec{d}$인 직선 l 위의 점을 P라 하면 직선 l의 방정식은 다음과 같다.

① 두 점 A, P의 위치벡터를 각각 $\vec{a}$, $\vec{p}$라 하면

$\vec{p}=\vec{a}+t\vec{d}$ (t는 실수)



② 두 점 A, P의 좌표를 각각 (x_1, y_1), (x, y)라 하고 $\vec{d}=(a, b)$라 하면

$\dfrac{x-x_1}{a}=\dfrac{y-y_1}{b}$ (단, $ab\neq 0$)

참고 두 점 $\mathrm{A}(x_1, y_1)$, $\mathrm{B}(x_2, y_2)$를 지나는 직선의 방정식은

$\dfrac{x-x_1}{x_2-x_1}=\dfrac{y-y_1}{y_2-y_1}$ (단, $x_1\neq x_2$, $y_1\neq y_2$)

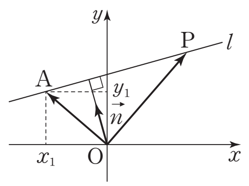
예 직선 $\dfrac{x}{2}=\dfrac{y-1}{3}$의 방향벡터 중 하나는 $\vec{d}=(2, 3)$이다.

(2) 법선벡터가 주어진 직선의 방정식

점 A를 지나고 법선벡터가 $\vec{n}$인 직선 l 위의 점을 P라 하면 직선 l의 방정식은 다음과 같다.

① 두 점 A, P의 위치벡터를 각각 $\vec{a}$, $\vec{p}$라 하면

$(\vec{p}-\vec{a})\cdot\vec{n}=0$



② 두 점 A, P의 좌표를 각각 (x_1, y_1), (x, y)라 하고, $\vec{n}=(a, b)$라 하면

$a(x-x_1)+b(y-y_1)=0$

예 직선 $2x+3y=4$의 법선벡터 중 하나는 $\vec{n}=(2, 3)$이다.

(3) 두 직선이 이루는 각의 크기

두 직선 l_1, l_2의 방향벡터를 각각 $\vec{d_1}=(a_1, b_1)$, $\vec{d_2}=(a_2, b_2)$라 할 때

① 두 직선 l_1, l_2가 이루는 각의 크기를 θ $(0^\circ\leq\theta\leq 90^\circ)$라 하면

$\cos\theta=\dfrac{|\vec{d_1}\cdot\vec{d_2}|}{|\vec{d_1}||\vec{d_2}|}=\dfrac{|a_1a_2+b_1b_2|}{\sqrt{a_1^2+b_1^2}\sqrt{a_2^2+b_2^2}}$

② 두 직선 l_1, l_2가 서로 평행하면 0이 아닌 어떤 실수 k에 대하여

$\vec{d_1}=k\vec{d_2}$, 즉 $(a_1, b_1)=k(a_2, b_2)$

참고 $\vec{d_1}=k\vec{d_2}$이면 두 직선 l_1, l_2는 서로 평행하다.

③ 두 직선 l_1, l_2가 서로 수직이면

$\vec{d_1}\cdot\vec{d_2}=0$, 즉 $a_1a_2+b_1b_2=0$

참고 $\vec{d_1}\cdot\vec{d_2}=0$이면 두 직선 l_1, l_2는 서로 수직이다.

예제 3 직선의 방정식

좌표평면에서 방향벡터가 $\vec{d}=(a,\ b)$인 직선 l_1이 x축과 한 점 A에서 만나고, 법선벡터가 $\vec{n}=(a,\ b)$인 직선 l_2가 x축과 한 점 B에서 만난다. 두 직선 l_1, l_2가 만나는 점을 P라 할 때, $\overline{\mathrm{PA}}=3$, $\overline{\mathrm{PB}}=4$이다. 선분 AB의 길이는? (단, $ab\neq0$)

① 2 ② 3 ③ 4 ④ 5 ⑤ 6

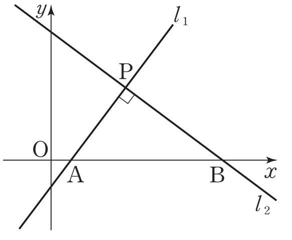
길잡이 방향벡터는 직선에 평행한 벡터이고 법선벡터는 직선에 수직인 벡터임을 이용한다.

풀이 직선 l_1의 방향벡터가 $\vec{d}=(a,\ b)$이고 직선 l_2의 법선벡터가 $\vec{n}=(a,\ b)$이므로

$$\vec{d}=\vec{n}$$

즉, 두 직선 l_1, l_2는 수직이다.

직선 l_1이 x축과 만나는 점이 A, 직선 l_2가 x축과 만나는 점이 B, 두 직선 l_1, l_2가 만나는 점이 P이므로 삼각형 PAB는 $\angle\mathrm{APB}=\frac{\pi}{2}$인 직각삼각형이다.



따라서 $\overline{\mathrm{PA}}=3$, $\overline{\mathrm{PB}}=4$이므로

$$\begin{aligned}\overline{\mathrm{AB}}&=\sqrt{\overline{\mathrm{PA}}^2+\overline{\mathrm{PB}}^2}\\&=\sqrt{3^2+4^2}\\&=5\end{aligned}$$

답 ④

유제

정답과 풀이 39쪽

5 [23012-0102]

좌표평면에서 방향벡터가 $\vec{d}=(1,\ 2)$인 직선과 직선 $3x+4y=8$이 이루는 예각의 크기를 θ라 할 때, $\cos\theta$의 값은?

① $\frac{2\sqrt{5}}{25}$ ② $\frac{4\sqrt{5}}{25}$ ③ $\frac{6\sqrt{5}}{25}$ ④ $\frac{8\sqrt{5}}{25}$ ⑤ $\frac{2\sqrt{5}}{5}$

6 [23012-0103]

좌표평면에서 법선벡터가 $\vec{n}=(2,\ 3)$인 직선과 직선 $y=kx+5$가 서로 수직일 때, 상수 k의 값은?

① $\frac{1}{2}$ ② 1 ③ $\frac{3}{2}$ ④ 2 ⑤ $\frac{5}{2}$

6. 원의 방정식

평면 위의 점 A를 중심으로 하고 반지름의 길이가 r인 원 C 위의 한 점을 P라 하면 원 C의 방정식은 다음과 같다.

(1) 두 점 A, P의 점 O에 대한 위치벡터를 각각 $\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}$, $\vec{p}=\overrightarrow{\mathrm{OP}}$라 하면

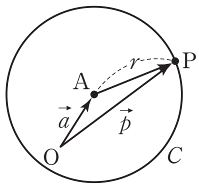
$$|\vec{p}-\vec{a}|=r,\ \text{즉}\ (\vec{p}-\vec{a})\cdot(\vec{p}-\vec{a})=r^2$$

(2) 두 점 A, P의 좌표를 각각 (x_1, y_1), (x, y)라 하면

$$(x-x_1, y-y_1)\cdot(x-x_1, y-y_1)=r^2$$

설명 점 A를 중심으로 하고 반지름의 길이가 r인 원 위의 한 점을 P라 하면

$|\overrightarrow{\mathrm{AP}}|=r$ …… ㉠



이때 두 점 A, P의 위치벡터를 각각 $\vec{a}$, $\vec{p}$라 하면

$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\vec{p}-\vec{a}$

이므로 ㉠은

$|\vec{p}-\vec{a}|=r$

이때 양변을 제곱하면

$|\vec{p}-\vec{a}|^2=r^2$

$(\vec{p}-\vec{a})\cdot(\vec{p}-\vec{a})=r^2$ …… ㉡

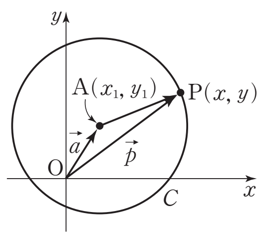
또 두 점 A, P의 좌표를 각각 (x_1, y_1), (x, y)라 하면

$\vec{p}-\vec{a}=(x-x_1, y-y_1)$

이므로 ㉡은

$(x-x_1, y-y_1)\cdot(x-x_1, y-y_1)=r^2$

즉, $(x-x_1)^2+(y-y_1)^2=r^2$



예 점 A$(1, 2)$와 점 P의 위치벡터를 각각 $\vec{a}$, $\vec{p}$라 하자.

(1) $|\vec{p}-\vec{a}|=1$을 만족시키는 점 P가 나타내는 도형은 중심이 A$(1, 2)$이고 반지름의 길이가 1인 원이다.

(2) $(\vec{p}-\vec{a})\cdot(\vec{p}-\vec{a})=4$를 만족시키는 점 P가 나타내는 도형은 중심이 A$(1, 2)$이고 반지름의 길이가 2인 원이다.

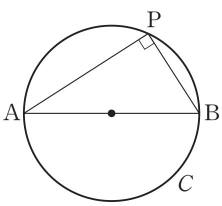
참고 두 점 A, B에 대하여 선분 AB를 지름으로 하는 원 C 위의 한 점을 P라 하면 원 C의 방정식은 다음과 같다.

(1) 세 점 A, B, P의 위치벡터를 각각 $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{p}$라 하면 $\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BP}}=0$이므로

$(\vec{p}-\vec{a})\cdot(\vec{p}-\vec{b})=0$

(2) 세 점 A, B, P의 좌표를 각각 (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x, y)라 하면

$(x-x_1, y-y_1)\cdot(x-x_2, y-y_2)=0$



예제 4 원의 방정식

a_1, a_2가 상수일 때, 좌표평면 위의 두 점 $A(a_1, a_2)$, P에 대하여 $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{OP}=\vec{p}$라 하자. 등식

$$|\vec{p}-\vec{a}|^2=\vec{a}\cdot\vec{a}$$

를 만족시키는 점 P가 나타내는 도형과 x축이 만나는 점 중 원점이 아닌 점을 $B(b, 0)$이라 할 때, $\overrightarrow{AB}=(2, -3)$이다. a_1+a_2+b의 값은? (단, O는 원점이다.)

① 5 ② 6 ③ 7 ④ 8 ⑤ 9

길잡이 점 P가 나타내는 도형을 구한 후 벡터 $\overrightarrow{AB}$를 이용하여 중심의 좌표를 구한다.

풀이 $|\vec{p}-\vec{a}|^2=\vec{a}\cdot\vec{a}$에서

$$|\vec{p}-\vec{a}|^2=|\vec{a}|^2,\ |\vec{p}-\vec{a}|=|\vec{a}|$$

이므로 점 P는 중심이 A이고 반지름이 선분 OA인 원 위의 점이다.

한편, 점 B는 이 원과 x축이 만나는 점 중 원점이 아닌 점이므로

$$\overline{AO}=\overline{AB}$$

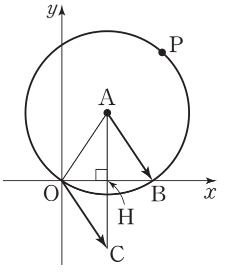
이때 $\overrightarrow{AB}=(2, -3)$이므로 점 C를 $\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{AB}$가 되도록 잡으면 $C(2, -3)$이다.

두 점 A와 C는 x축에 대하여 대칭이므로 $A(2, 3)$

또 점 A에서 x축에 내린 수선의 발을 H라 하면 $H(2, 0)$이고 H는 선분 OB의 중점이므로

$$B(4, 0)$$

따라서 $a_1+a_2+b=2+3+4=9$



답 ⑤

참고 $|\vec{p}-\vec{a}|^2=\vec{a}\cdot\vec{a}$에서 $\vec{p}\cdot\vec{p}-2\vec{a}\cdot\vec{p}=0$, $\vec{p}\cdot(\vec{p}-2\vec{a})=0$이므로 $D(2a_1, 2a_2)$라 하면 점 P가 나타내는 도형은 두 점 O, D를 지름의 양 끝으로 하는 원이다.

유제

정답과 풀이 39쪽

7 [23012-0104]

좌표평면에서 벡터 $\vec{a}=(1, 2)$와 양의 상수 k에 대하여 벡터 $\vec{p}=\overrightarrow{OP}$가

$$|\vec{p}-\vec{a}|=k$$

를 만족시킨다. 점 P가 나타내는 도형과 방향벡터가 $\vec{d}=(4, 3)$인 직선이 점 $A(-2, l)$에서만 만날 때, $k+l$의 값은? (단, O는 원점이다.)

① 11 ② 12 ③ 13 ④ 14 ⑤ 15

8 [23012-0105]

좌표평면 위의 세 점 $A(1, 2)$, $B(3, k)$, P에 대하여 $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{OB}=\vec{b}$, $\overrightarrow{OP}=\vec{p}$라 하자.

$$\vec{p}\cdot\vec{p}-(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{p}+\vec{a}\cdot\vec{b}=0$$

을 만족시키는 점 P가 나타내는 도형이 x축과 한 점에서 만날 때, k의 값은? (단, O는 원점이다.)

① $\frac{1}{3}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ 1 ④ 2 ⑤ 3

[23012-0106]

1 두 벡터 $\vec{a}=(1,\ x)$, $\vec{b}=(x+3,\ 2)$에 대하여 $\vec{a}\cdot\vec{b}=6$일 때, x의 값은?

① 1　② 2　③ 3　④ 4　⑤ 5

[23012-0107]

2 두 벡터 $\vec{a}=(1,\ 2)$, $\vec{b}=(3,\ -1)$에 대하여 $\vec{a}\cdot(\vec{a}+\sqrt{2}\vec{b})-\dfrac{1}{\sqrt{2}-1}(\vec{b}\cdot\vec{a})$의 값은?

① 1　② 2　③ 3　④ 4　⑤ 5

[23012-0108]

3 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$가 $\vec{a}\cdot(4\vec{a}+3\vec{b})=|2\vec{a}|^2+6$을 만족시킬 때, $\vec{a}\cdot\vec{b}$의 값은?

① -2　② -1　③ 0　④ 1　⑤ 2

[23012-0109]

4 평면 위의 세 점 O, A, B와 선분 AB의 중점 M이 $|\overrightarrow{\mathrm{OM}}|=1$, $|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|=3$을 만족시킬 때, $\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}$의 값은?

① $-\dfrac{5}{4}$　② -1　③ $-\dfrac{3}{4}$　④ $-\dfrac{1}{2}$　⑤ $-\dfrac{1}{4}$

[23012-0110]

5 두 벡터 $\vec{a}=(1,\ 2)$, $\vec{b}=(3,\ x)$에 대하여 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{a}+\vec{b}$가 서로 수직이 되도록 하는 x의 값은?

① -4 ② -2 ③ 0 ④ 2 ⑤ 4

[23012-0111]

6 좌표평면에서 방향벡터가 $\vec{d}=(1,\ \sqrt{3})$인 직선과 두 점 $\mathrm{A}(1,\ \sqrt{3})$, $\mathrm{B}(-1,\ 3\sqrt{3})$을 지나는 직선이 이루는 예각의 크기를 θ라 할 때, $\cos\theta$의 값은?

① $\frac{1}{8}$ ② $\frac{1}{4}$ ③ $\frac{3}{8}$ ④ $\frac{1}{2}$ ⑤ $\frac{5}{8}$

[23012-0112]

7 좌표평면에서 원점을 지나고 방향벡터가 $\vec{d}=(3,\ 1)$인 직선 위를 움직이는 점을 P, x절편이 양수인 직선 l 위를 움직이는 점을 Q라 할 때, 두 점 P, Q 사이의 거리의 최솟값은 $\sqrt{10}$이다. 직선 l의 x절편은?

① 8 ② 9 ③ 10 ④ 11 ⑤ 12

[23012-0113]

8 좌표평면 위의 두 점 $\mathrm{A}(4,\ 2\sqrt{5})$, P에 대하여 $\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$, $\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\vec{p}$라 하자.

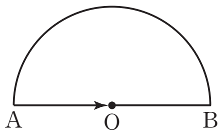
$$|2\vec{p}-\vec{a}|=2$$

를 만족시키는 점 P에 대하여 $|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|$의 최댓값은? (단, O는 원점이다.)

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

[23012-0114]

1 그림과 같이 지름 AB의 길이가 2인 반원의 호 위를 움직이는 두 점 P, Q와 선분 AB의 중점 O에 대하여 $\overrightarrow{AO} \cdot \overrightarrow{PQ} = \frac{1}{2}$일 때, $|\overrightarrow{PQ}|$의 최댓값은?



① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{2}{3}$ ③ 1

④ $\frac{3}{2}$ ⑤ 2

[23012-0115]

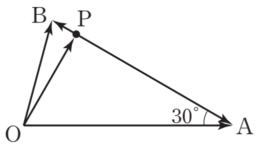
2 좌표평면 위에 두 점 A(1, 2), B(3, 1)이 있다. 네 점 O, A, B, C를 꼭짓점으로 하는 사각형이 선분 OC를 대각선으로 하는 평행사변형일 때, 두 벡터 $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OC}$가 이루는 각의 크기를 θ라 하자. $\cos\theta$의 값은?

(단, O는 원점이다.)

① $\frac{\sqrt{5}}{5}$ ② $\frac{4\sqrt{5}}{15}$ ③ $\frac{\sqrt{5}}{3}$ ④ $\frac{2\sqrt{5}}{5}$ ⑤ $\frac{7\sqrt{5}}{15}$

[23012-0116]

3 그림과 같이 $\overline{OA}=6$, $\angle OAB=30^\circ$인 예각삼각형 OAB의 변 AB 위의 점을 P라 하자. $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{PB} = \overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{PA}$일 때, 벡터 $\overrightarrow{OP}$의 크기는?



① 1 ② 2 ③ 3

④ 4 ⑤ 5

[23012-0117]

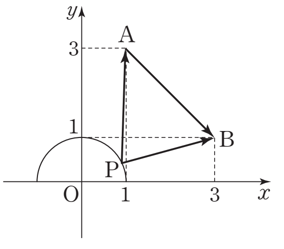
4 법선벡터가 $\vec{n}=(3,\ 4)$인 직선 l 위를 움직이는 두 점 P, Q에 대하여 $\overline{PQ}=9$이다. $|2\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OQ}|$의 값은 점 P가 점 P′일 때 최솟값 12를 갖는다. 직선 l의 y절편을 $m\ (m>0)$이라 할 때, $m+\overline{OP'}$의 값은?

(단, O는 원점이다.)

① 8 ② 9 ③ 10 ④ 11 ⑤ 12

[23012-0118]

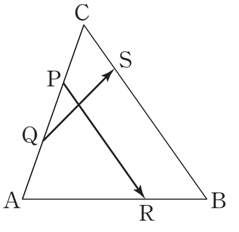
5 그림과 같이 두 점 A(1, 3), B(3, 1)과 반원의 호 $x^2+y^2=1\ (y\geq 0)$ 위를 움직이는 점 P에 대하여 $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{PB}$의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 할 때, $M\times m$의 값은?



① $-20\sqrt{2}$ ② $-16\sqrt{2}$ ③ $-12\sqrt{2}$
④ $-8\sqrt{2}$ ⑤ $-4\sqrt{2}$

[23012-0119]

6 그림과 같이 $\overline{AB}=\overline{AC}=3$인 삼각형 ABC에서 선분 AC를 삼등분하는 점을 점 C에서 가까운 점부터 순서대로 P, Q라 하고, 선분 AB를 2 : 1로 내분하는 점을 R라 하자. 선분 BC를 3 : 1로 내분하는 점을 S라 할 때, $\overrightarrow{PR}\cdot\overrightarrow{QS}=-\frac{2}{3}$이다. 두 벡터 $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$가 이루는 각의 크기를 θ라 할 때, $\cos\theta$의 값은?



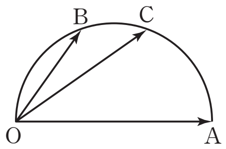
① $\frac{1}{6}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ $\frac{1}{2}$
④ $\frac{2}{3}$ ⑤ $\frac{5}{6}$

[23012-0120]

1 그림과 같이 길이가 6인 선분 OA를 지름으로 하는 반원의 호 위의 서로 다른 두 점 B, C가

$$\left(\frac{\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}}{|\overrightarrow{OA}|^2}\right)\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OC}$$

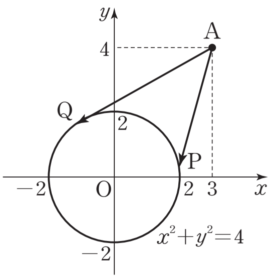
를 만족시킬 때, $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC}$의 값을 구하시오.



[23012-0121]

2 그림과 같이 좌표평면에서 원 $x^2+y^2=4$ 위의 두 점 P, Q가 $\overline{PQ}=2\sqrt{3}$을 만족시키며 움직일 때, 점 A(3, 4)에 대하여 $\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AQ}$의 최댓값은?

① 31　② 32　③ 33　④ 34　⑤ 35



[23012-0122]

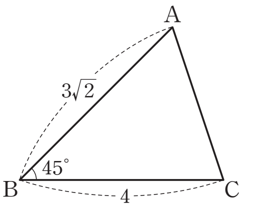
3 a_1, b_1은 상수이고 a_2, b_2는 양의 상수일 때, 좌표평면에서 두 점 $A(a_1, a_2)$, $B(b_1, b_2)$에 대하여 $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{OB}=\vec{b}$라 하자. 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$가 다음 조건을 만족시킬 때, $\vec{a}\cdot\vec{b}$의 값을 구하시오. (단, O는 원점이다.)

(가) $\vec{b}-\vec{a}=(6, 8)$
(나) $\overrightarrow{OP}\cdot(\overrightarrow{OP}-\vec{a})=(\overrightarrow{OP}-\vec{a})\cdot\vec{b}$를 만족시키는 점 P가 나타내는 도형과 x축이 만나는 점은 C(4, 0)뿐이다.

[23012-0123]

4 평면 위의 네 점 A, B, C, P가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\angle ABC=45°$, $\overline{AB}=3\sqrt{2}$, $\overline{BC}=4$
(나) $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}=-2$, $\overrightarrow{PC}\cdot\overrightarrow{AC}=4$

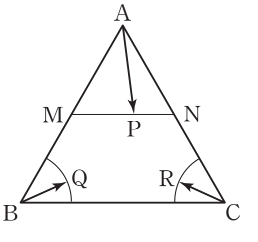


$|\overrightarrow{BP}|$의 최댓값은?

① $\sqrt{6}$　② $2\sqrt{2}$　③ $\sqrt{10}$　④ $2\sqrt{3}$　⑤ $\sqrt{14}$

[23012-0124]

5 그림과 같이 한 변의 길이가 4인 정삼각형 ABC에서 선분 AB의 중점을 M, 선분 AC의 중점을 N이라 하고 선분 MN 위를 움직이는 점을 P라 하자. 삼각형 ABC의 변 또는 내부의 두 점 Q, R는 $\overline{BQ}=1$, $\overline{CR}=1$을 만족시키며 움직이고 있다. $(\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{BQ})\cdot\overrightarrow{CR}$의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 할 때, $4\times(M\times m)^2$의 값을 구하시오.

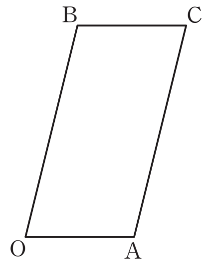


EBS

출제 경향 벡터의 내적의 간단한 계산 문제, 내적의 의미를 이용하고 활용하는 내적 문제가 출제된다.

2022학년도 대수능

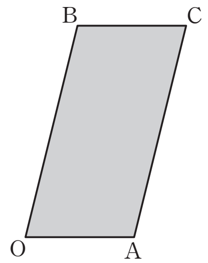
좌표평면에서 $\overline{\mathrm{OA}}=\sqrt{2}$, $\overline{\mathrm{OB}}=2\sqrt{2}$이고 $\cos(\angle\mathrm{AOB})=\frac{1}{4}$인 평행사변형 OACB에 대하여 점 P가 다음 조건을 만족시킨다.



(가) $\overrightarrow{\mathrm{OP}}=s\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\overrightarrow{\mathrm{OB}}\ (0\le s\le 1,\ 0\le t\le 1)$
(나) $\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\overrightarrow{\mathrm{BP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BC}}=2$

점 O를 중심으로 하고 점 A를 지나는 원 위를 움직이는 점 X에 대하여 $|3\overrightarrow{\mathrm{OP}}-\overrightarrow{\mathrm{OX}}|$의 최댓값과 최솟값을 각각 M, m이라 하자. $M\times m=a\sqrt{6}+b$일 때, a^2+b^2의 값을 구하시오. (단, a와 b는 유리수이다.) [4점]

출제 의도 평면벡터의 연산과 내적을 이용하여 조건을 만족시키는 벡터의 크기의 최댓값과 최솟값을 구할 수 있는지를 묻는 문제이다.



풀이 조건 (가)에 의하여 점 P는 평행사변형 OACB의 둘레 또는 내부에 있는 점이다.

조건 (나)에서

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\overrightarrow{\mathrm{BP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BC}}&=\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}+(\overrightarrow{\mathrm{OP}}-\overrightarrow{\mathrm{OB}})\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}}\\&=\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}\\&=\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot(\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}})-|\overrightarrow{\mathrm{OA}}||\overrightarrow{\mathrm{OB}}|\cos(\angle\mathrm{AOB})\\&=\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}-\sqrt{2}\times2\sqrt{2}\times\frac{1}{4}\\&=\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}-1=2\end{aligned}$$

이므로 $\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}=3$

한편,

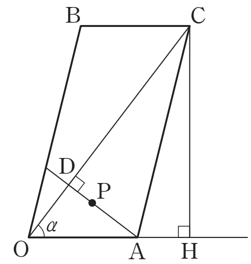
$$\begin{aligned}|\overrightarrow{\mathrm{OC}}|^2=|\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}|^2&=|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2+2\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}+|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|^2\\&=|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2+2|\overrightarrow{\mathrm{OA}}||\overrightarrow{\mathrm{OB}}|\cos(\angle\mathrm{AOB})+|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|^2\\&=(\sqrt{2})^2+2\times\sqrt{2}\times2\sqrt{2}\times\frac{1}{4}+(2\sqrt{2})^2=12\end{aligned}$$

에서 $\overline{\mathrm{OC}}=|\overrightarrow{\mathrm{OC}}|=2\sqrt{3}$

두 벡터 $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$, $\overrightarrow{\mathrm{OC}}$가 이루는 각의 크기를 θ라 하면

$$|\overrightarrow{\mathrm{OP}}||\overrightarrow{\mathrm{OC}}|\cos\theta=3,\ 2\sqrt{3}|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|\cos\theta=3,\ |\overrightarrow{\mathrm{OP}}|\cos\theta=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

즉, 선분 OC 위의 점 D를 $\overline{\mathrm{OD}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$이 되도록 잡으면 점 P는 점 D를 지나고 직선 OC에 수직인 직선 위에 있는 점 중 평행사변형 OACB의 경계 또는 내부에 있는 점이다.



한편, 점 C에서 직선 OA에 내린 수선의 발을 H라 하면

직각삼각형 AHC에서 $\angle\mathrm{HAC}=\angle\mathrm{AOB}$

이때 $\cos(\angle\mathrm{AOB})=\frac{1}{4}$이므로

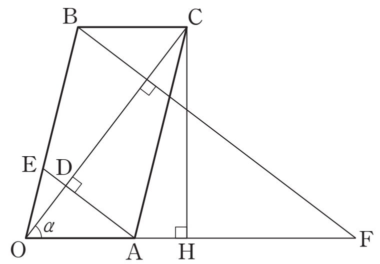
$$\overline{\mathrm{AH}}=\overline{\mathrm{AC}}\cos(\angle\mathrm{HAC})=2\sqrt{2}\times\frac{1}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\overline{\mathrm{OH}}=\overline{\mathrm{OA}}+\overline{\mathrm{AH}}=\sqrt{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{3\sqrt{2}}{2}$$

점 D를 지나고 직선 OC에 수직인 직선이 직선 OA와 만나는 점을 A′이라 하고 $\angle\mathrm{COH}=\alpha$라 하면

직각삼각형 OHC에서 $\cos\alpha=\frac{\overline{\mathrm{OH}}}{\overline{\mathrm{OC}}}=\frac{\frac{3\sqrt{2}}{2}}{2\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{6}}{4}$

또 직각삼각형 OA′D에서 $\cos\alpha=\frac{\overline{\mathrm{OD}}}{\overline{\mathrm{OA'}}}$, $\frac{\sqrt{6}}{4}=\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\overline{\mathrm{OA'}}}$, $\overline{\mathrm{OA'}}=\sqrt{2}$



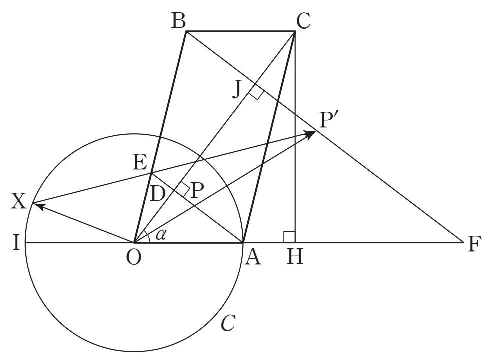
그러므로 점 A′은 점 A이고 직선 AD가 선분 OB와 만나는 점을 E라 하면 점 P는 선분 AE 위의 점이다.

$|3\overrightarrow{\mathrm{OP}}-\overrightarrow{\mathrm{OX}}|$에서 벡터 $3\overrightarrow{\mathrm{OP}}$의 종점을 나타내기 위해 점 F를 $3\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\overrightarrow{\mathrm{OF}}$가 되도록 잡고, 점 F를 지나고 직선 AD와 평행한 직선이 직선 OB와 만나는 점을 B′이라 하자.

한편, 두 삼각형 DEO, DAC는 서로 닮음이다.

이때 $\overline{\mathrm{OD}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\overline{\mathrm{OC}}=2\sqrt{3}$에서 $\overline{\mathrm{CD}}=\frac{3\sqrt{3}}{2}$

즉, 두 삼각형 DEO, DAC의 닮음비는 1 : 3이다.



그러므로 점 B′은 점 B이다. 이때 $|3\overrightarrow{\mathrm{OP}}-\overrightarrow{\mathrm{OX}}|$에서 점 P′을 $\overrightarrow{\mathrm{OP'}}=3\overrightarrow{\mathrm{OP}}$가 되도록 잡으면 점 P′은 선분 FB 위에 있다. 또

$$\begin{aligned}|3\overrightarrow{\mathrm{OP}}-\overrightarrow{\mathrm{OX}}|&=|\overrightarrow{\mathrm{OP'}}+\overrightarrow{\mathrm{XO}}|=|\overrightarrow{\mathrm{XO}}+\overrightarrow{\mathrm{OP'}}|\\&=|\overrightarrow{\mathrm{XP'}}|=\overline{\mathrm{XP'}}\qquad\cdots\cdots\ ㉠\end{aligned}$$

중심이 O이고 반지름이 선분 OA인 원을 C라 하고 직선 OF가 원 C와 만나는 점 중 A가 아닌 점을 I라 하면 ㉠의 최댓값은

$$M=\overline{\mathrm{IF}}=\overline{\mathrm{IO}}+\overline{\mathrm{OF}}=\sqrt{2}+3\sqrt{2}=4\sqrt{2}$$

또 두 선분 OC와 BF가 만나는 점을 J라 할 때, ㉠의 최솟값은

$$m=\overline{\mathrm{OJ}}-\overline{\mathrm{OA}}=\frac{3\sqrt{3}}{2}-\sqrt{2}$$

따라서 $M\times m=4\sqrt{2}\times\left(\frac{3\sqrt{3}}{2}-\sqrt{2}\right)=6\sqrt{6}-8$이므로 $a=6$, $b=-8$에서

$$a^2+b^2=6^2+(-8)^2=100$$

답 100

06 공간도형

1. 공간에서 직선과 평면의 위치 관계

(1) 평면의 결정 조건

① 한 직선 위에 있지 않은 서로 다른 세 점　② 한 직선과 그 위에 있지 않은 한 점

③ 한 점에서 만나는 두 직선　④ 평행한 두 직선

(2) 서로 다른 두 직선의 위치 관계

① 한 점에서 만난다.　② 평행하다.　③ 꼬인 위치에 있다.

(3) 직선과 평면의 위치 관계

① 포함된다.　② 한 점에서 만난다.　③ 평행하다.

(4) 서로 다른 두 평면의 위치 관계

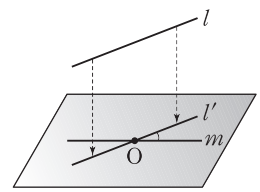
① 만난다.　② 평행하다.

참고 ① 서로 다른 두 평면이 만나서 생기는 도형은 직선이고 이 직선을 두 평면의 교선이라 한다.

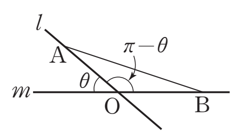
② 서로 다른 두 평면 α, β가 만나지 않을 때, 두 평면은 서로 평행하다고 하고 기호로 $\alpha /\!/ \beta$와 같이 나타낸다.

2. 공간에서 두 직선이 이루는 각

두 직선 l, m이 꼬인 위치에 있을 때, 직선 m 위에 한 점 O를 잡고, 점 O를 지나고 직선 l에 평행한 직선 l'을 그으면 두 직선 l', m은 점 O에서 만나므로 한 평면을 결정한다. 이때 두 직선 l', m이 이루는 각을 두 직선 l, m이 이루는 각이라 한다.



참고 ① 일반적으로 두 직선이 이루는 각은 크기가 크지 않은 것을 택한다. 그림과 같이 두 직선 l, m이 이루는 각의 크기는 θ $(0^\circ < \theta \le 90^\circ)$와 $\pi - \theta$ 중에서 θ를 택한다. 그런데 두 직선 l, m의 교점 O, 직선 l 위의 점 A, 직선 m 위의 점 B에 대하여 둔각삼각형 AOB에 코사인법칙을 적용해서 두 직선 l, m이 이루는 각의 크기 θ를 구할 경우 $\cos(\pi - \theta) = -\cos\theta$를 이용한다.



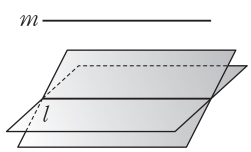
② 두 직선이 이루는 각이 직각일 때 두 직선 l, m은 서로 수직이라 하고, 기호로 $l \perp m$과 같이 나타낸다.

3. 공간에서 직선과 평면의 평행

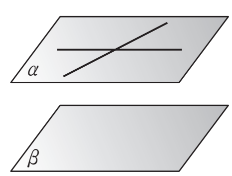
(1) 두 직선 l, m이 서로 평행할 때, 직선 l을 포함하고 직선 m을 포함하지 않는 모든 평면은 직선 m과 평행하다.

(2) 두 평면 α, β가 서로 평행할 때, 평면 α 위에 있는 모든 직선은 평면 β와 평행하다.

(1)



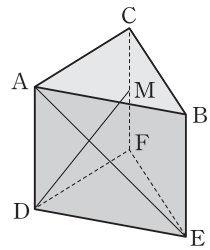
(2)



예제 1 공간에서 두 직선이 이루는 각

www.ebsi.co.kr

그림과 같이 밑면은 한 변의 길이가 $2\sqrt{2}$인 정삼각형이고 $\overline{AD}=2$인 정삼각기둥 ABC$-$DEF에서 선분 CF의 중점을 M이라 하자. 두 직선 AE, DM이 이루는 예각의 크기를 θ라 할 때, $\cos\theta$의 값은?



① $\frac{1}{9}$ ② $\frac{\sqrt{2}}{9}$ ③ $\frac{\sqrt{3}}{9}$ ④ $\frac{2}{9}$ ⑤ $\frac{\sqrt{5}}{9}$

길잡이 꼬인 위치에 있는 두 직선이 이루는 각의 크기는 어느 한 직선을 평행이동하여 두 직선이 만날 때 이루는 각의 크기이다.

풀이 직선 CF 위에 $\overline{DM}\,/\!/\,\overline{AM'}$이 되도록 점 M′을 잡으면 사각형 ADMM′은 평행사변형이다. 꼬인 위치에 있는 두 직선 AE, DM이 이루는 예각의 크기는 두 직선 AE, AM′이 이루는 예각의 크기이므로 $\angle EAM'=\theta\ (0^\circ<\theta<90^\circ)$

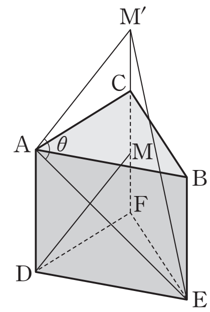
$$\overline{AE}=\sqrt{\overline{AD}^2+\overline{DE}^2}=\sqrt{2^2+(2\sqrt{2})^2}=2\sqrt{3}$$

$$\overline{AM'}=\overline{DM}=\sqrt{\overline{DF}^2+\overline{FM}^2}=\sqrt{(2\sqrt{2})^2+1^2}=3$$

$$\overline{M'E}=\sqrt{\overline{M'F}^2+\overline{FE}^2}=\sqrt{3^2+(2\sqrt{2})^2}=\sqrt{17}$$

따라서 삼각형 AEM′에서 코사인법칙에 의하여

$$\cos\theta=\frac{(2\sqrt{3})^2+3^2-(\sqrt{17})^2}{2\times2\sqrt{3}\times3}=\frac{4}{2\times2\sqrt{3}\times3}=\frac{\sqrt{3}}{9}$$



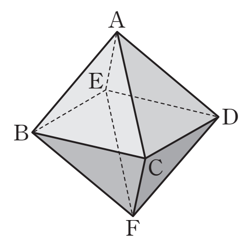
답 ③

유제

정답과 풀이 46쪽

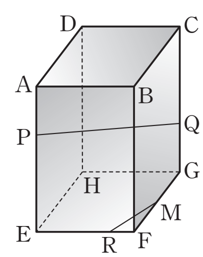
1 [23012-0125]

그림과 같은 정팔면체 ABCDEF의 모든 모서리를 연장한 직선 중에서 직선 AB와 꼬인 위치에 있는 직선의 개수를 a, 직선 AB와 이루는 각의 크기가 90°인 직선의 개수를 b라 할 때, $a+b$의 값을 구하시오.



2 [23012-0126]

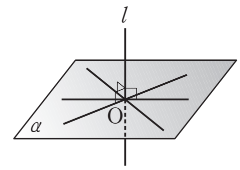
그림과 같이 $\overline{AB}=\overline{BC}=2$, $\overline{AE}=3$인 직육면체 ABCD$-$EFGH에서 선분 AE를 $1:2$로 내분하는 점을 P, 선분 CG를 $2:1$로 내분하는 점을 Q, 선분 EF를 $3:1$로 내분하는 점을 R, 선분 FG의 중점을 M이라 하자. 두 직선 PQ와 RM이 이루는 예각의 크기를 θ라 할 때, $\cos\theta$의 값은?



① $\frac{2\sqrt{5}}{5}$ ② $\frac{3\sqrt{2}}{5}$ ③ $\frac{4}{5}$ ④ $\frac{2\sqrt{3}}{5}$ ⑤ $\frac{3}{5}$

4. 공간에서 직선과 평면의 수직 관계

공간에서 직선 l과 평면 α 위의 모든 직선이 수직일 때, 직선 l은 평면 α와 수직이라 하고, 기호로 $l\perp\alpha$와 같이 나타낸다. 이때 직선 l을 평면 α의 수선, 직선 l과 평면 α가 만나는 점 O를 수선의 발이라 한다.



참고 직선 l이 평면 α 위의 평행하지 않은 서로 다른 두 직선과 각각 수직이면 $l\perp\alpha$이다.

5. 삼수선의 정리

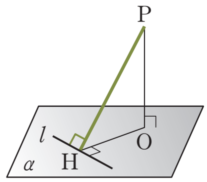
평면 α 위에 있지 않은 한 점 P, 평면 α 위의 한 점 O, 평면 α에 포함되고 점 O를 지나지 않는 한 직선 l, 직선 l 위의 한 점 H에 대하여 다음과 같은 세 가지 성질이 성립한다. 이를 삼수선의 정리라 한다.

(1) $\overline{\mathrm{PO}}\perp\alpha$, $\overline{\mathrm{OH}}\perp l$이면 $\overline{\mathrm{PH}}\perp l$

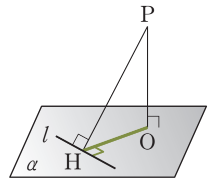
(2) $\overline{\mathrm{PO}}\perp\alpha$, $\overline{\mathrm{PH}}\perp l$이면 $\overline{\mathrm{OH}}\perp l$

(3) $\overline{\mathrm{PH}}\perp l$, $\overline{\mathrm{OH}}\perp l$, $\overline{\mathrm{PO}}\perp\overline{\mathrm{OH}}$이면 $\overline{\mathrm{PO}}\perp\alpha$

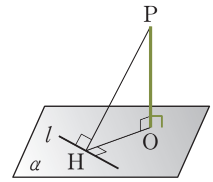
(1)



(2)



(3)

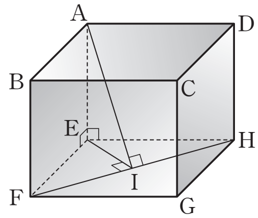


설명 (1) $\overline{\mathrm{PO}}\perp\alpha$이므로 직선 PO는 평면 α 위의 모든 직선과 수직이다.
이때 직선 l은 평면 α에 포함되므로 $\overline{\mathrm{PO}}\perp l$이다.
또한 $\overline{\mathrm{OH}}\perp l$이므로 직선 l은 직선 PO와 직선 OH를 포함하는 평면 PHO와 수직이다.
이때 직선 PH는 평면 PHO에 포함되고, 직선 l은 평면 PHO 위에 있는 모든 직선과 수직이므로 $\overline{\mathrm{PH}}\perp l$이다.

(2) $\overline{\mathrm{PO}}\perp\alpha$이므로 직선 PO는 평면 α 위의 모든 직선과 수직이다.
이때 직선 l은 평면 α에 포함되므로 $\overline{\mathrm{PO}}\perp l$이다.
또한 $\overline{\mathrm{PH}}\perp l$이므로 직선 l은 직선 PO와 직선 PH를 포함하는 평면 PHO와 수직이다.
이때 직선 OH는 평면 PHO에 포함되고, 직선 l은 평면 PHO 위에 있는 모든 직선과 수직이므로 $\overline{\mathrm{OH}}\perp l$이다.

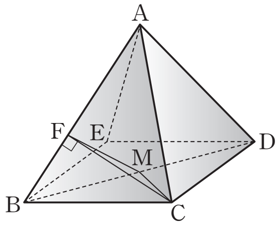
(3) $\overline{\mathrm{PH}}\perp l$, $\overline{\mathrm{OH}}\perp l$이므로 직선 l은 직선 PH와 직선 OH를 포함하는 평면 PHO와 수직이다.
이때 직선 PO는 평면 PHO에 포함되고, 직선 l은 평면 PHO 위에 있는 모든 직선과 수직이므로 $\overline{\mathrm{PO}}\perp l$이다.
또한 $\overline{\mathrm{PO}}\perp\overline{\mathrm{OH}}$이므로 직선 PO는 직선 OH와 직선 l을 포함하는 평면 α와 수직이다.
즉, $\overline{\mathrm{PO}}\perp\alpha$이다.

예 그림과 같은 직육면체 ABCD$-$EFGH의 한 꼭짓점 A에서 선분 FH에 내린 수선의 발을 I라 하자.
$\overline{\mathrm{AE}}\perp\overline{\mathrm{EF}}$, $\overline{\mathrm{AE}}\perp\overline{\mathrm{EH}}$이므로 $\overline{\mathrm{AE}}\perp$(평면 EFGH)이고 $\overline{\mathrm{AI}}\perp\overline{\mathrm{FH}}$이므로 삼수선의 정리 (2)에 의하여 $\overline{\mathrm{EI}}\perp\overline{\mathrm{FH}}$이다.



예제 2 삼수선의 정리

그림과 같이 밑면은 한 변의 길이가 $3\sqrt{2}$인 정사각형이고 $\overline{AB}=\overline{AC}=\overline{AD}=\overline{AE}=5$인 정사각뿔 A$-$BCDE가 있다. 점 C에서 선분 AB에 내린 수선의 발을 F, 선분 BD의 중점을 M이라 할 때, 삼각형 FCM의 넓이는?



① $\frac{18}{5}$ ② $\frac{18\sqrt{2}}{5}$ ③ $\frac{18\sqrt{3}}{5}$

④ $\frac{36}{5}$ ⑤ $\frac{18\sqrt{5}}{5}$

길잡이 직선 l이 평면 α 위의 평행하지 않은 서로 다른 두 직선과 각각 수직이면 $l\perp\alpha$이다. 또 평면 α 위에 있지 않은 한 점 P에서 평면 α에 내린 수선의 발을 O라 하고, 점 P에서 점 O를 지나지 않고 평면 α 위에 있는 직선 m에 내린 수선의 발을 H라 하면 삼수선의 정리에 의하여 $\overline{OH}\perp m$이다.

풀이 사각형 BCDE가 정사각형이므로 선분 CE의 중점도 M이다.

$$\overline{CM}=\overline{BM}=\frac{1}{2}\overline{CE}=\frac{1}{2}\overline{BD}=\frac{1}{2}\times6=3$$

이등변삼각형 AEC에서 $\overline{CM}\perp\overline{AM}$ …… ㉠

이등변삼각형 CDB에서 $\overline{CM}\perp\overline{BD}$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 직선 CM이 평면 ABD 위의 평행하지 않은 서로 다른 두 직선 AM, BD와 각각 수직이므로

(직선 CM)$\perp$(평면 ABD)이고, 직선 FM이 평면 ABD 위의 직선이므로

$$\overline{CM}\perp\overline{FM}$$

또 (직선 CM)$\perp$(평면 ABD), $\overline{CF}\perp\overline{AB}$이므로 삼수선의 정리에 의하여

$$\overline{FM}\perp\overline{AB}$$

$\overline{AM}\perp\overline{BD}$이므로 직각삼각형 ABM에서

$$\overline{AM}=\sqrt{\overline{AB}^2-\overline{BM}^2}=\sqrt{5^2-3^2}=4$$

$$\overline{AB}\times\overline{FM}=\overline{AM}\times\overline{BM},\ 5\overline{FM}=4\times3,\ \overline{FM}=\frac{12}{5}$$

따라서 직각삼각형 FCM의 넓이는

$$\frac{1}{2}\times\overline{CM}\times\overline{FM}=\frac{1}{2}\times3\times\frac{12}{5}=\frac{18}{5}$$

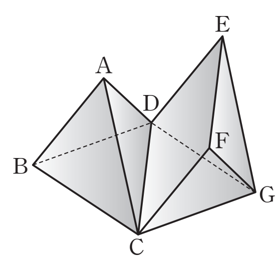
답 ①

유제

정답과 풀이 46쪽

3 [23012-0127]

그림과 같이 한 모서리의 길이가 4인 정사면체 ABCD와 모든 모서리의 길이가 4인 정사각뿔 G$-$CDEF가 있다. 네 점 B, C, D, G가 한 평면 위에 있고 점 A에서 평면 CDEF에 내린 수선의 발을 H라 할 때, 선분 AH의 길이는?



① $\sqrt{3}$ ② 2 ③ $\sqrt{5}$

④ $\sqrt{6}$ ⑤ $2\sqrt{2}$

06 공간도형

6. 이면각

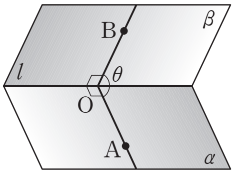
(1) 반평면

평면 위의 한 직선은 그 평면을 두 부분으로 나누는데, 그 각각을 반평면이라 한다.

(2) 이면각

직선 l을 공유하는 두 개의 반평면 α, β로 이루어진 도형을 이면각이라 한다.

이때 직선 l을 이면각의 변, 두 반평면 α, β를 각각 이면각의 면이라 한다.



(3) 이면각의 크기

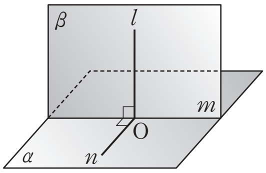
이면각의 변 l 위의 한 점 O를 지나고 직선 l에 수직인 두 반직선 OA, OB를 각각 반평면 α, β 위에 그을 때, $\angle$AOB의 크기는 점 O의 위치에 관계없이 일정하다. 이 일정한 각의 크기 θ를 이면각의 크기라 한다.

(4) 두 평면이 이루는 각

서로 다른 두 평면이 만나서 생기는 이면각 중에서 크기가 크지 않은 한 이면각의 크기를 두 평면이 이루는 각의 크기라 한다.

참고 ① 두 평면 α, β에서 이면각의 크기가 90°일 때, 두 평면 α, β는 서로 수직이라 하고, 기호로 $\alpha \perp \beta$와 같이 나타낸다.

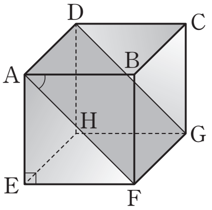
② 직선 l이 평면 α에 수직일 때, 직선 l을 포함하는 평면 β는 평면 α와 수직임을 보이자.
그림과 같이 두 평면 α, β의 교선을 m이라 하고, 직선 l과 평면 α의 교점을 O라 하자.
평면 α 위에 점 O를 지나고 직선 m과 수직인 직선 n을 그으면 $l \perp \alpha$이므로 $l \perp n$이다.
이때 $l \perp m$, $n \perp m$이므로 두 평면 α, β가 이루는 각의 크기는 두 직선 l, n이 이루는 각의 크기이다.
따라서 $\alpha \perp \beta$이다.



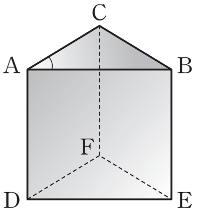
예1 그림과 같은 정육면체 ABCD$-$EFGH에서

① $\overline{AB} \perp \overline{AD}$, $\overline{AF} \perp \overline{AD}$이고 $\angle FAB = 45^\circ$이므로 두 평면 ABCD, AFGD가 이루는 예각의 크기는 45°이다.

② $\overline{EA} \perp \overline{EH}$, $\overline{EF} \perp \overline{EH}$이고 $\angle FEA = 90^\circ$이므로 두 평면 AEHD, EFGH가 이루는 각의 크기는 90°이다.
즉, (평면 AEHD)$\perp$(평면 EFGH)이다.



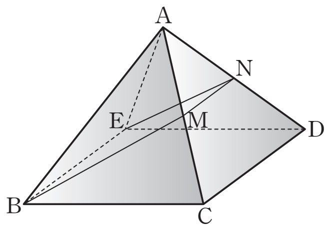
예2 그림과 같이 모든 모서리의 길이가 같은 정삼각기둥 ABC$-$DEF에서
$\overline{AB} \perp \overline{AD}$, $\overline{AC} \perp \overline{AD}$이고 $\angle BAC = 60^\circ$이므로 두 평면 ADEB, ADFC가 이루는 예각의 크기는 60°이다.



예제 3 이면각

그림과 같이 모든 모서리의 길이가 4인 정사각뿔 A−BCDE에서 두 선분 AC, AD의 중점을 각각 M, N이라 하자. 두 평면 ABE, BMNE가 이루는 예각의 크기를 θ라 할 때, $\cos^2\theta=\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오.

(단, p와 q는 서로소인 자연수이다.)

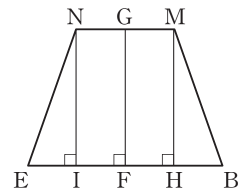


길잡이 두 평면이 이루는 각의 크기를 구할 때에는 두 평면의 교선 위의 한 점을 지나고 교선에 수직이 되도록 두 평면 위에 각각 그은 두 직선이 이루는 각의 크기를 구하면 된다.

풀이 삼각형 ACD에서 중점연결정리에 의하여 $\overline{MN}=2$, $\overline{MN}/\!/\overline{CD}$이므로

$\overline{MN}/\!/\overline{BE}$, $\overline{BM}=\overline{EN}=2\sqrt{3}$

즉, 사각형 BMNE는 등변사다리꼴이다. 두 점 M, N에서 선분 BE에 내린 수선의 발을 각각 H, I라 하면



$\overline{NM}=\overline{IH}=2$이므로 $\overline{EI}=\overline{BH}=1$

직각삼각형 NEI에서

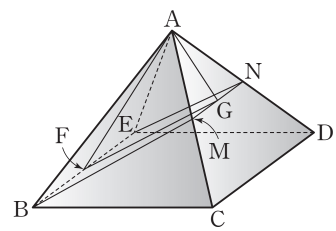
$\overline{NI}=\sqrt{\overline{NE}^2-\overline{EI}^2}=\sqrt{(2\sqrt{3})^2-1^2}=\sqrt{11}$

두 선분 BE, MN의 중점을 각각 F, G라 하면

$\overline{AF}\perp\overline{BE}$, $\overline{GF}\perp\overline{BE}$이므로 이면각의 정의에 의하여 $\angle AFG=\theta$

삼각형 AFG에서

$\overline{AF}=2\sqrt{3}$, $\overline{GF}=\overline{NI}=\sqrt{11}$, $\overline{AG}=\sqrt{3}$



이므로 코사인법칙에 의하여

$$\cos\theta=\frac{12+11-3}{2\times2\sqrt{3}\times\sqrt{11}}=\frac{20}{4\sqrt{33}}=\frac{5}{\sqrt{33}}$$

$$\cos^2\theta=\frac{25}{33}$$

따라서 $p=33$, $q=25$이므로 $p+q=58$

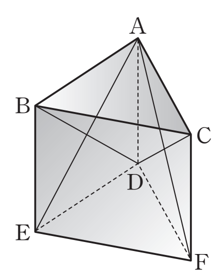
답 58

유제

정답과 풀이 47쪽

4 [23012-0128]

그림과 같이 모든 모서리의 길이가 2인 정삼각기둥 ABC−DEF가 있다. 두 평면 AEF, BCD가 이루는 예각의 크기를 θ라 할 때, $\cos\theta$의 값은?



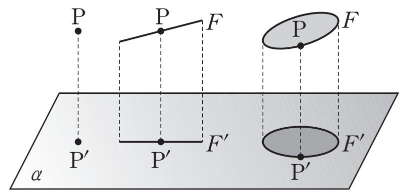
① $\frac{1}{7}$ ② $\frac{2}{7}$ ③ $\frac{3}{7}$ ④ $\frac{4}{7}$ ⑤ $\frac{5}{7}$

06 공간도형

7. 정사영

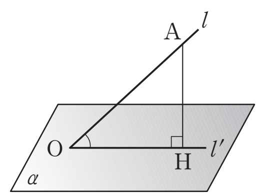
(1) 정사영

한 점 P에서 평면 α에 내린 수선의 발 P′을 점 P의 평면 α 위로의 정사영이라 한다. 또한 도형 F에 속하는 각 점의 평면 α 위로의 정사영 전체로 이루어진 도형 F'을 도형 F의 평면 α 위로의 정사영이라 한다.



(2) 직선과 평면이 이루는 각

직선 l과 평면 α가 한 점에서 만나고 수직이 아닐 때, 직선 l의 평면 α 위로의 정사영 l'과 직선 l이 이루는 각을 직선 l과 평면 α가 이루는 각이라 한다. 즉, 직선 l이 평면 α와 점 O에서 만나고 수직이 아닐 때 직선 l 위의 O가 아닌 한 점 A에서 평면 α에 내린 수선의 발을 H라 하면 직각삼각형 AOH에서 $\angle$AOH의 크기가 직선 l과 평면 α가 이루는 각의 크기이다.



참고 직선 l과 평면 α가 서로 평행할 때, 직선 l과 평면 α가 이루는 각의 크기는 $0°$이다.

(3) 정사영의 길이

선분 AB의 평면 α 위로의 정사영을 선분 A′B′이라 하고, 직선 AB와 평면 α가 이루는 각의 크기를 $\theta\ (0° \le \theta \le 90°)$라 하면

$$\overline{A'B'} = \overline{AB}\cos\theta$$

설명 $0° < \theta < 90°$일 때, 선분 AB의 평면 α 위로의 정사영을 선분 A′B′이라 하면

$\overline{AA'} \perp \alpha$, $\overline{BB'} \perp \alpha$이므로 $\overline{AA'} /\!/ \overline{BB'}$이다.

점 A에서 직선 BB′에 내린 수선의 발을 C라 하면 사각형 AA′B′C는 직사각형이므로

$\overline{A'B'} = \overline{AC}$, $\overline{A'B'} /\!/ \overline{AC}$이다.

따라서 $\angle$BAC$=\theta$이고 직각삼각형 BAC에서 $\overline{AC} = \overline{AB}\cos\theta$이므로

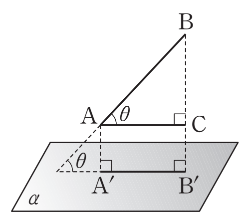
$$\overline{A'B'} = \overline{AB}\cos\theta$$

가 성립한다.

한편, $\theta = 0°$ 또는 $\theta = 90°$일 때에도

$$\overline{A'B'} = \overline{AB}\cos\theta$$

가 성립한다.

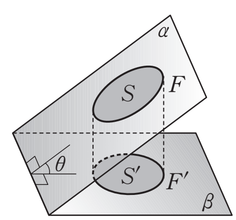


(4) 정사영의 넓이

평면 α 위의 도형 F의 평면 β 위로의 정사영을 F'이라 하고, 두 도형 F, F'의 넓이를 각각 S, S'이라 할 때, 두 평면 α, β가 이루는 각의 크기가 $\theta\ (0° \le \theta \le 90°)$이면

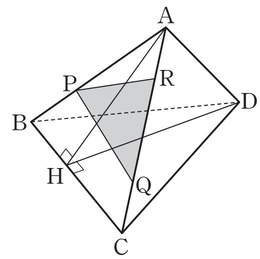
$$S' = S\cos\theta$$

참고 등식 $S' = S\cos\theta\ (0° \le \theta < 90°)$는 $S = \dfrac{S'}{\cos\theta}$ 또는 $\cos\theta = \dfrac{S'}{S}$으로 변형하여 사용할 수 있다.



예제 4 정사영

그림과 같이 $\overline{AD}=10$인 사면체 ABCD에서 선분 AB를 $2:1$로 내분하는 점을 P, 선분 AC를 $3:1$과 $1:3$으로 내분하는 점을 각각 Q, R라 하자.
$\overline{AH}\perp\overline{BC}$, $\overline{DH}\perp\overline{BC}$인 선분 BC 위의 점 H에 대하여 사면체 ABCD가 다음 조건을 만족시킬 때, 삼각형 PQR의 평면 BCD 위로의 정사영의 넓이는?



(가) 삼각형 ABC의 넓이는 18이다.
(나) 삼각형 AHD의 외접원의 반지름의 길이는 $3\sqrt{5}$이다.

① 3　② $\frac{7}{2}$　③ 4　④ $\frac{9}{2}$　⑤ 5

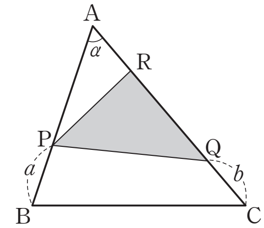
길잡이 평면 α 위의 도형 F의 평면 β 위로의 정사영을 F'이라 할 때, 두 도형 F, F'의 넓이가 각각 S, S'이고 두 평면 α, β가 이루는 각의 크기가 θ $(0^\circ\le\theta\le 90^\circ)$이면 $S'=S\cos\theta$이다.

풀이 두 평면 ABC, BCD가 이루는 예각의 크기를 θ라 하면 이면각의 정의에 의하여 $\angle AHD=\theta$
조건 (나)에서 사인법칙에 의하여

$$\frac{\overline{AD}}{\sin\theta}=2\times3\sqrt{5},\ \sin\theta=\frac{10}{2\times3\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{5}}{3}$$

이므로 $\cos\theta=\sqrt{1-\sin^2\theta}=\sqrt{1-\frac{5}{9}}=\frac{2}{3}$

삼각형 ABC에서 $\overline{PB}=a$, $\overline{QC}=b$, $\angle BAC=\alpha$라 하면



조건 (가)에서 삼각형 ABC의 넓이는

$$\frac{1}{2}\times3a\times4b\times\sin\alpha=18$$

$$ab\sin\alpha=3$$

이고

$$(\text{삼각형 APR의 넓이})=\frac{1}{2}\times2a\times b\times\sin\alpha=3$$

$$(\text{삼각형 PQR의 넓이})=2\times(\text{삼각형 APR의 넓이})=6$$

따라서 삼각형 PQR의 평면 BCD 위로의 정사영의 넓이는

$$6\cos\theta=6\times\frac{2}{3}=4$$

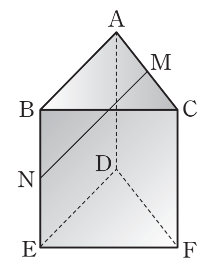
답 ③

유제

정답과 풀이 47쪽

5 [23012-0129]

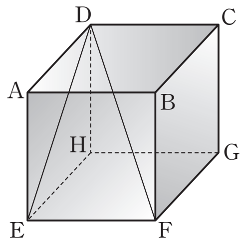
그림과 같이 모든 모서리의 길이가 2인 정삼각기둥 ABC−DEF에서 두 선분 AC, BE의 중점을 각각 M, N이라 하자. 직선 MN과 평면 DEF가 이루는 예각의 크기를 θ라 할 때, $\cos\theta$의 값은?



① $\frac{\sqrt{5}}{3}$　② $\frac{\sqrt{6}}{3}$　③ $\frac{5}{6}$
④ $\frac{\sqrt{3}}{2}$　⑤ $\frac{\sqrt{7}}{3}$

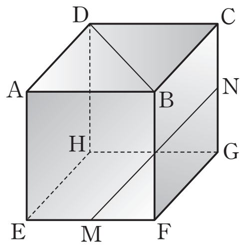
[23012-0130]

1 그림과 같은 정육면체 ABCD−EFGH의 모든 모서리를 연장한 직선 중에서 직선 DF와 꼬인 위치에 있는 직선의 개수를 p, 직선 DE와 수직인 직선의 개수를 q라 할 때, $p+q$의 값을 구하시오.



[23012-0131]

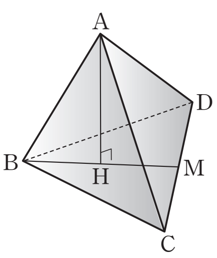
2 그림과 같이 정육면체 ABCD−EFGH에서 두 선분 EF, CG의 중점을 각각 M, N이라 하자. 두 직선 BD, MN이 이루는 예각의 크기를 θ라 할 때, $\cos\theta$의 값은?



① $\frac{\sqrt{3}}{6}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ $\frac{\sqrt{6}}{6}$
④ $\frac{\sqrt{2}}{3}$ ⑤ $\frac{1}{2}$

[23012-0132]

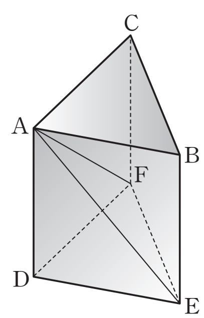
3 그림과 같이 한 변의 길이가 8인 정삼각형 BCD를 한 면으로 하는 사면체 ABCD가 있다. 선분 CD의 중점을 M이라 하면 점 A에서 평면 BCD에 내린 수선의 발 H는 선분 BM의 중점이다. $\overline{\text{AH}}=6$일 때, 삼각형 ACD의 넓이는?



① $16\sqrt{2}$ ② $16\sqrt{3}$ ③ $20\sqrt{2}$
④ $20\sqrt{3}$ ⑤ $16\sqrt{5}$

[23012-0133]

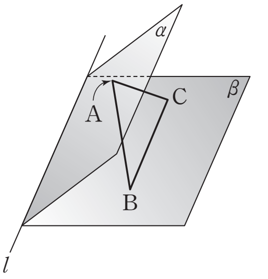
4 그림과 같이 모든 모서리의 길이가 2인 정삼각기둥 ABC−DEF가 있다. 두 평면 AEF, ABC가 이루는 예각의 크기를 θ라 할 때, $\cos^2\theta=\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오.
(단, p와 q는 서로소인 자연수이다.)



[23012-0134]

5 그림과 같이 이면각의 크기가 θ인 두 평면 α, β의 교선은 l이고 $\cos\theta=\frac{3}{5}$이다. 평면 α 위의 점 A와 평면 β 위의 길이가 6인 선분 BC가 다음 조건을 만족시킬 때, 삼각형 ABC의 넓이는?

(단, 선분 AB의 평면 β 위로의 정사영은 직선 l과 만나지 않는다.)

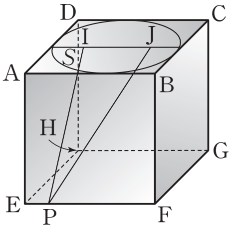


(가) 점 A에서 평면 β까지의 거리는 4이다.
(나) 직선 l과 직선 BC는 서로 평행하고 점 B와 직선 l 사이의 거리는 5이다.

① 12 ② $6\sqrt{5}$ ③ $6\sqrt{7}$ ④ $12\sqrt{2}$ ⑤ 18

[23012-0135]

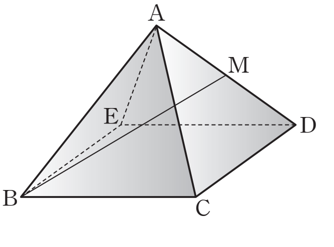
6 그림과 같이 $\overline{AD}=4$, $\overline{AB}=\overline{AE}=6$인 직육면체 ABCD$-$EFGH가 있다. 직사각형 ABCD의 네 변에 모두 접하는 타원 S의 두 초점을 각각 I, J라 하고, 선분 EF 위를 움직이는 점을 P라 하자. 두 선분 PI, PJ의 평면 ABCD 위로의 정사영의 길이의 합이 최소일 때의 점 P를 Q라 하자. 점 Q의 평면 ABCD 위로의 정사영을 Q′이라 할 때, 사면체 QQ′IJ의 부피는? (단, 타원 S의 장축은 직선 AB와 평행하다.)



① $2\sqrt{15}$ ② 8 ③ $6\sqrt{2}$
④ $5\sqrt{3}$ ⑤ $4\sqrt{5}$

[23012-0136]

7 그림과 같이 모든 모서리의 길이가 4인 정사각뿔 A$-$BCDE에서 선분 AD의 중점을 M이라 하자. 직선 BM과 평면 BCDE가 이루는 예각의 크기를 θ라 할 때, $\cos\theta$의 값은?

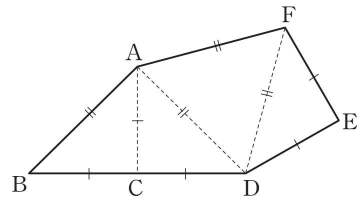


① $\frac{3\sqrt{2}}{5}$ ② $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ③ $\frac{2\sqrt{5}}{5}$
④ $\frac{9}{10}$ ⑤ $\frac{3\sqrt{10}}{10}$

Level 2 기본 연습

[23012-0137]

1 그림과 같이 $\overline{\mathrm{BC}}=\overline{\mathrm{AC}}=\overline{\mathrm{CD}}=\overline{\mathrm{DE}}=\overline{\mathrm{EF}}$, $\overline{\mathrm{AB}}=\overline{\mathrm{AD}}=\overline{\mathrm{AF}}=\overline{\mathrm{FD}}=\sqrt{2}\times\overline{\mathrm{BC}}$인 사면체의 전개도가 있다. 이 전개도로 만들어지는 사면체에 대하여 **보기**에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?



보기

ㄱ. $\overline{\mathrm{AC}}\perp\overline{\mathrm{ED}}$

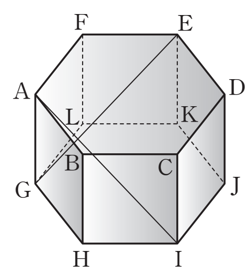
ㄴ. $\overline{\mathrm{AB}}\perp\overline{\mathrm{FD}}$

ㄷ. $\overline{\mathrm{AE}}\perp\overline{\mathrm{BD}}$

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

[23012-0138]

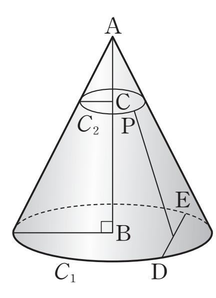
2 그림과 같이 모든 모서리의 길이가 2인 정육각기둥 ABCDEF$-$GHIJKL이 있다. 두 직선 AI, GE가 이루는 예각의 크기를 θ라 할 때, $\cos\theta$의 값은?



① $\frac{1}{8}$ ② $\frac{\sqrt{2}}{8}$ ③ $\frac{\sqrt{3}}{8}$ ④ $\frac{1}{4}$ ⑤ $\frac{\sqrt{5}}{8}$

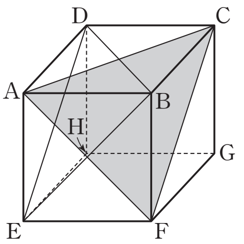
[23012-0139]

3 그림과 같이 점 A를 꼭짓점으로 하고, 중심이 B이고 반지름의 길이가 6인 원 C_1을 밑면으로 하는 원뿔에서 선분 AB를 1 : 2로 내분하는 점 C를 지나고 선분 AB와 수직인 평면이 원뿔과 만나서 생기는 원을 C_2라 하자. $\overline{\mathrm{AB}}=12$이고, 원 C_1 위의 두 점 D, E가 $\overline{\mathrm{DE}}=6\sqrt{3}$을 만족시킨다. 원 C_2 위를 움직이는 점 P에 대하여 점 P와 직선 DE 사이의 거리의 최솟값이 k일 때, k^2의 값을 구하시오.



[23012-0140]

4 그림과 같이 모든 모서리의 길이가 4인 정육면체 ABCD$-$EFGH가 있다. 삼각형 AFC의 평면 BDE 위로의 정사영의 넓이는?

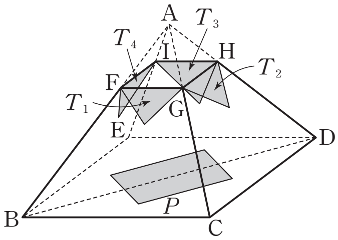


① $\frac{5\sqrt{6}}{3}$　② $3\sqrt{2}$　③ $2\sqrt{5}$

④ $\frac{8\sqrt{3}}{3}$　⑤ $\frac{3\sqrt{10}}{2}$

[23012-0141]

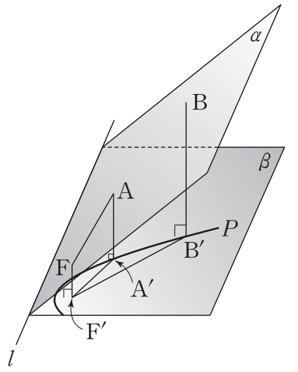
5 그림과 같이 모든 모서리의 길이가 6인 정사각뿔 A$-$BCDE를 밑면 BCDE와 평행한 평면으로 잘라서 만든 정사각뿔대 FGHI$-$BCDE가 있다. 네 개의 선분 FG, GH, HI, IF를 각각 한 변으로 하는 합동인 네 개의 삼각형 T_1, T_2, T_3, T_4가 정사각뿔대 FGHI$-$BCDE의 네 개의 옆면 위에 각각 하나씩 있다. 네 개의 삼각형 T_1, T_2, T_3, T_4와 사각형 FGHI의 평면 BCDE 위로의 정사영으로 이루어진 도형 P가 한 변의 길이가 $2\sqrt{2}$인 정사각형일 때, 네 개의 삼각형 T_1, T_2, T_3, T_4의 넓이의 합은? (단, 도형 P의 한 변은 직선 BD와 평행하다.)



① 4　② $4\sqrt{2}$　③ $4\sqrt{3}$　④ 8　⑤ $4\sqrt{5}$

[23012-0142]

6 그림과 같이 교선이 l인 두 평면 α, β에 대하여 평면 α 위의 점 F에서 평면 β에 내린 수선의 발을 F$'$이라 하고, 초점이 F$'$이고 준선이 l인 평면 β 위의 포물선을 P라 하자. 평면 α 위의 두 점 A, B에서 평면 β에 내린 수선의 발을 각각 A$'$, B$'$이라 하면 두 점 A$'$, B$'$은 포물선 P 위의 점이다. $\overline{\mathrm{AF}}=6$, $\overline{\mathrm{FF'}}=3$, $\overline{\mathrm{A'F'}}=3\sqrt{3}$, $\overline{\mathrm{B'F'}}=2\sqrt{21}$일 때, 점 B에서 직선 l까지의 거리는? (단, $\overline{\mathrm{AA'}}>\overline{\mathrm{FF'}}$)



① 10　② 11　③ 12

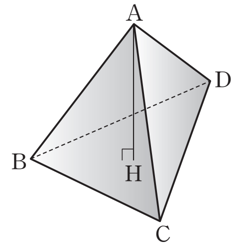
④ 13　⑤ 14

[23012-0143]

1 그림과 같이 $\overline{BC}=5$, $\overline{BD}=8$, $\angle CBD=\frac{\pi}{3}$인 사면체 ABCD가 있다. 점 A에서 밑면 BCD에 내린 수선의 발을 H라 하고, 세 삼각형 ABC, ACD, ABD의 넓이를 각각 S_1, S_2, S_3이라 할 때,

$\overline{AH}=6$, $S_1 : S_2 : S_3=5 : 7 : 8$

이다. 선분 AB의 길이는? (단, 점 H는 삼각형 BCD의 내부에 있다.)

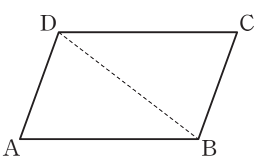


① $3\sqrt{5}$ ② $4\sqrt{3}$ ③ 7 ④ $5\sqrt{2}$ ⑤ 8

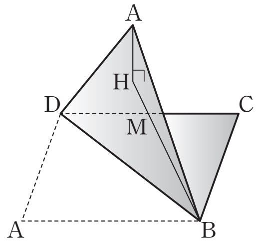
[23012-0144]

2 그림과 같이 $\overline{AB}=\overline{BD}=10$, $\overline{AD}=2\sqrt{10}$인 평행사변형 ABCD 모양의 종이를 대각선 BD를 접는 선으로 하여 삼각형 ABD를 접어 올렸다. 점 A에서 평면 BCD에 내린 수선의 발을 H라 하면 직선 BH는 선분 CD의 중점 M을 지난다. 두 평면 ABD와 BCD가 이루는 예각의 크기를 θ라 할 때, $\cos\theta$의 값은?

(단, 점 H는 삼각형 BCD의 외부에 있고, 종이의 두께는 고려하지 않는다.)



[그림 1]

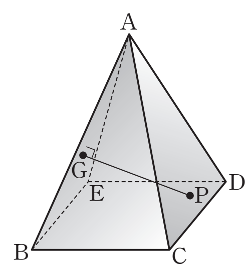


[그림 2]

① $\frac{1}{3}$ ② $\frac{\sqrt{2}}{3}$ ③ $\frac{\sqrt{3}}{3}$ ④ $\frac{2}{3}$ ⑤ $\frac{\sqrt{5}}{3}$

[23012-0145]

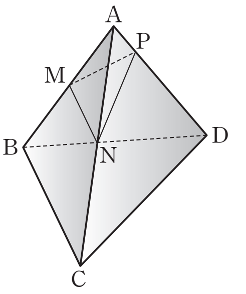
3 그림과 같이 밑면 BCDE는 한 변의 길이가 4인 정사각형이고 $\overline{AB}=\overline{AC}=\overline{AD}=\overline{AE}=2\sqrt{10}$인 정사각뿔 A−BCDE가 있다. 삼각형 ACD 내부의 점 P에서 평면 ABE에 내린 수선의 발 G가 삼각형 ABE의 무게중심이다. 직선 PG와 평면 BCDE가 이루는 예각의 크기를 θ라 할 때, $\cos\theta$의 값은?



① $\frac{7}{9}$ ② $\frac{2\sqrt{13}}{9}$ ③ $\frac{2\sqrt{15}}{9}$
④ $\frac{2\sqrt{2}}{3}$ ⑤ $\frac{4\sqrt{5}}{9}$

[23012-0146]

4 그림과 같이 $\overline{AB}=\overline{AC}=8$, $\overline{DB}=\overline{DC}$인 사면체 ABCD가 있다. 두 선분 AB, AC의 중점을 각각 M, N이라 하면 선분 AD 위의 한 점 P에 대하여 사면체 ABCD는 다음 조건을 만족시킨다.



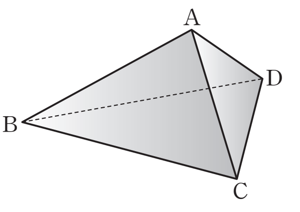
(가) 삼각형 PMN의 평면 BCD 위로의 정사영은 한 변의 길이가 $2\sqrt{3}$인 정삼각형이다.
(나) 삼각형 AMN의 평면 BCD 위로의 정사영의 넓이는 $2\sqrt{3}$이다.
(다) 삼각형 DBC의 넓이는 $20\sqrt{3}$이다.

두 평면 PMN과 BCD가 이루는 예각의 크기를 θ라 할 때, $\cos^2\theta=\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오.

(단, 점 A의 평면 BCD 위로의 정사영은 삼각형 BCD 내부에 있고, p와 q는 서로소인 자연수이다.)

[23012-0147]

5 그림과 같이 두 평면 ACD와 BCD가 이루는 예각의 크기가 $60°$이고 $\overline{CD}=6$인 사면체 ABCD가 다음 조건을 만족시킬 때, 삼각형 BCD의 넓이는?



(가) 삼각형 BCD의 평면 ACD 위로의 정사영은 삼각형 ACD이다.
(나) 평면 ACD에서 $\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CD}=2\overrightarrow{DA}\cdot\overrightarrow{DC}$
(다) 직선 AC와 평면 BCD가 이루는 예각의 크기는 $45°$이다.

① $12\sqrt{2}$ ② 24 ③ $24\sqrt{2}$ ④ $24\sqrt{3}$ ⑤ 48

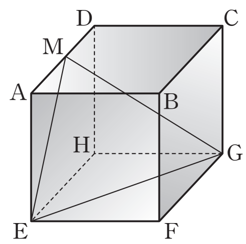
대표 기출 문제

EBS

출제 경향 삼수선의 정리를 이용하여 수직 관계를 분석하고 이를 이용하여 선분의 길이 또는 삼각형의 넓이를 구하는 문제가 출제된다.

2022학년도 대수능

그림과 같이 한 모서리의 길이가 4인 정육면체 ABCD−EFGH가 있다. 선분 AD의 중점을 M이라 할 때, 삼각형 MEG의 넓이는? [3점]

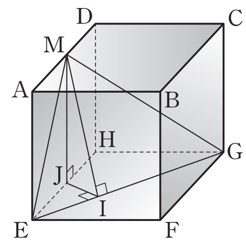


① $\frac{21}{2}$　② 11　③ $\frac{23}{2}$

④ 12　⑤ $\frac{25}{2}$

출제 의도 삼수선의 정리를 이용하여 삼각형의 넓이를 구할 수 있는지를 묻는 문제이다.

풀이 점 M에서 두 선분 EG, EH에 내린 수선의 발을 각각 I, J라 하면 삼수선의 정리에 의하여



$\overline{\mathrm{JI}}\perp\overline{\mathrm{EG}}$

점 J가 선분 EH의 중점이고 직각삼각형 EIJ에서 $\angle\mathrm{IEJ}=45^\circ$이므로

$\overline{\mathrm{EJ}}=2$

$\overline{\mathrm{IJ}}=\overline{\mathrm{EJ}}\sin 45^\circ=2\times\frac{\sqrt{2}}{2}=\sqrt{2}$

직각삼각형 MJI에서

$\overline{\mathrm{MI}}=\sqrt{\overline{\mathrm{MJ}}^2+\overline{\mathrm{IJ}}^2}=\sqrt{4^2+(\sqrt{2})^2}=3\sqrt{2}$

직각삼각형 EFG에서

$\overline{\mathrm{EG}}=\sqrt{\overline{\mathrm{EF}}^2+\overline{\mathrm{FG}}^2}=\sqrt{4^2+4^2}=4\sqrt{2}$

따라서 구하는 삼각형 MEG의 넓이는

$\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{EG}}\times\overline{\mathrm{MI}}=\frac{1}{2}\times4\sqrt{2}\times3\sqrt{2}=12$

답 ④

대표 기출 문제

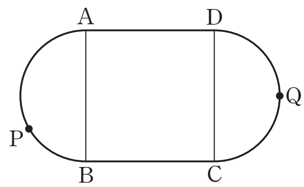
EBS

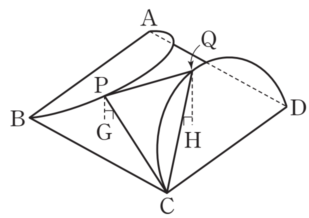
출제 경향 삼수선의 정리를 이용하여 위치를 파악하고 선분의 길이를 구하는 문제, 정사영과 이면각의 관계를 이용하여 선분의 길이 또는 삼각형의 넓이를 구하는 문제가 출제된다.

2022학년도 대수능 9월 모의평가

그림과 같이 한 변의 길이가 8인 정사각형 ABCD에 두 선분 AB, CD를 각각 지름으로 하는 두 반원이 붙어 있는 모양의 종이가 있다. 반원의 호 AB의 삼등분점 중 점 B에 가까운 점을 P라 하고, 반원의 호 CD를 이등분하는 점을 Q라 하자.

이 종이에서 두 선분 AB와 CD를 접는 선으로 하여 두 반원을 접어 올렸을 때 두 점 P, Q에서 평면 ABCD에 내린 수선의 발을 각각 G, H라 하면 두 점 G, H는 정사각형 ABCD의 내부에 놓여 있고, $\overline{PG}=\sqrt{3}$, $\overline{QH}=2\sqrt{3}$이다. 두 평면 PCQ와 ABCD가 이루는 각의 크기가 θ일 때, $70\times\cos^2\theta$의 값을 구하시오. (단, 종이의 두께는 고려하지 않는다.) [4점]





출제 의도 정사영을 이용하여 이면각의 크기를 구할 수 있는지를 묻는 문제이다.

풀이 두 선분 AB, CD의 중점을 각각 M, N이라 하자.

[그림 1]의 점 P에서 두 선분 AB, QH에 내린 수선의 발을 각각 E, F라 하면

$$\overline{PE}=\overline{PM}\sin 60^\circ=2\sqrt{3}$$

[그림 1]의 직각삼각형 PEG에서

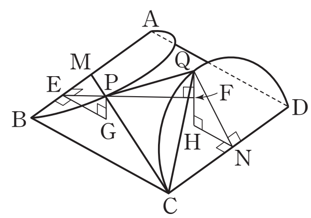
$$\overline{EG}=\sqrt{\overline{PE}^2-\overline{PG}^2}=\sqrt{(2\sqrt{3})^2-(\sqrt{3})^2}=3$$

[그림 1]의 직각삼각형 QHN에서

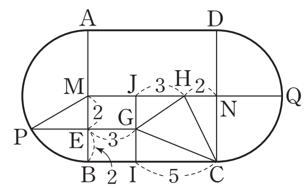
$$\overline{HN}=\sqrt{\overline{QN}^2-\overline{QH}^2}=\sqrt{4^2-(2\sqrt{3})^2}=2$$

그러므로 두 점 G, H의 위치가 [그림 2]와 같고 삼각형 PCQ의 평면 ABCD 위로의 정사영 GCH의 넓이는

$$4\times5-\left(\frac{1}{2}\times2\times5+\frac{1}{2}\times2\times3+\frac{1}{2}\times2\times4\right)=8$$



[그림 1]



[그림 2]

[그림 1]의 직각삼각형 QPF에서

$$\overline{QP}=\sqrt{\overline{PF}^2+\overline{FQ}^2}=\sqrt{\overline{GH}^2+\overline{FQ}^2}=\sqrt{(\sqrt{13})^2+(\sqrt{3})^2}=4$$

[그림 1]의 직각삼각형 PGC에서

$$\overline{PC}=\sqrt{\overline{PG}^2+\overline{GC}^2}=\sqrt{(\sqrt{3})^2+(\sqrt{29})^2}=4\sqrt{2}$$

[그림 1]의 직각삼각형 QCH에서 $\overline{QC}=\sqrt{\overline{CH}^2+\overline{HQ}^2}=\sqrt{(2\sqrt{5})^2+(2\sqrt{3})^2}=4\sqrt{2}$

이등변삼각형 PCQ의 넓이는 $\frac{1}{2}\times4\times\sqrt{(4\sqrt{2})^2-2^2}=4\sqrt{7}$이므로 $\cos\theta=\frac{(\text{삼각형 GCH의 넓이})}{(\text{삼각형 PCQ의 넓이})}=\frac{8}{4\sqrt{7}}=\frac{2}{\sqrt{7}}$

따라서 $70\times\cos^2\theta=70\times\frac{4}{7}=40$

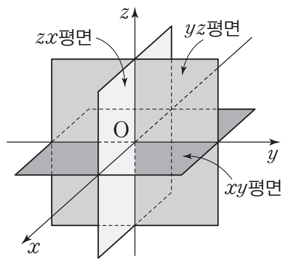
답 40

07 공간좌표

1. 공간좌표

(1) 좌표공간

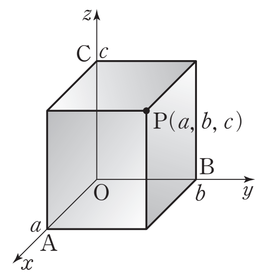
그림과 같이 공간의 한 점 O에서 서로 직교하는 세 수직선을 그어 각각 x축, y축, z축이라 하고, 점 O를 원점이라 한다. 이때 x축, y축, z축을 통틀어 좌표축이라 하고, 좌표축으로 정해진 공간을 좌표공간이라 한다. 또 x축과 y축을 포함하는 평면을 xy평면, y축과 z축을 포함하는 평면을 yz평면, z축과 x축을 포함하는 평면을 zx평면이라 하고, 이 세 평면을 통틀어 좌표평면이라 한다.



(2) 공간좌표

그림과 같이 좌표공간의 한 점 P에 대하여 점 P를 지나면서 x축, y축, z축과 수직인 평면이 각각 x축, y축, z축과 만나는 점을 각각 A, B, C라 하자. 이때 세 점 A, B, C의 x축, y축, z축 위에서의 좌표를 각각 a, b, c라 하면 점 P와 세 실수 a, b, c의 순서쌍 (a, b, c)는 일대일로 대응된다.

이와 같이 좌표공간의 점 P에 대응하는 세 실수 a, b, c의 순서쌍 (a, b, c)를 점 P의 공간좌표라 하고, 기호로 $\mathrm{P}(a, b, c)$와 같이 나타낸다. 이때 a, b, c를 각각 점 P의 x좌표, y좌표, z좌표라 한다.



(3) 좌표공간의 점 $\mathrm{P}(a, b, c)$의 수선의 발의 좌표

① 점 $\mathrm{P}(a, b, c)$에서 x축, y축, z축에 내린 수선의 발의 좌표는 각각

$(a, 0, 0)$, $(0, b, 0)$, $(0, 0, c)$

② 점 $\mathrm{P}(a, b, c)$에서 xy평면, yz평면, zx평면에 내린 수선의 발의 좌표는 각각

$(a, b, 0)$, $(0, b, c)$, $(a, 0, c)$

예 점 $\mathrm{P}(3, 2, 1)$에서 x축에 내린 수선의 발의 좌표는 $(3, 0, 0)$, yz평면에 내린 수선의 발의 좌표는 $(0, 2, 1)$이다.

(4) 좌표공간의 점 $\mathrm{P}(a, b, c)$를 대칭이동시킨 점의 좌표

① 점 $\mathrm{P}(a, b, c)$를 x축, y축, z축에 대하여 대칭이동시킨 점의 좌표는 각각

$(a, -b, -c)$, $(-a, b, -c)$, $(-a, -b, c)$

② 점 $\mathrm{P}(a, b, c)$를 xy평면, yz평면, zx평면에 대하여 대칭이동시킨 점의 좌표는 각각

$(a, b, -c)$, $(-a, b, c)$, $(a, -b, c)$

③ 점 $\mathrm{P}(a, b, c)$를 원점에 대하여 대칭이동시킨 점의 좌표는

$(-a, -b, -c)$

예 점 $\mathrm{P}(3, 2, 1)$을 x축에 대하여 대칭이동시킨 점의 좌표는 $(3, -2, -1)$, yz평면에 대하여 대칭이동시킨 점의 좌표는 $(-3, 2, 1)$, 원점에 대하여 대칭이동시킨 점의 좌표는 $(-3, -2, -1)$이다.

예제 1 공간좌표

좌표공간의 세 점 $\mathrm{A}(1, 2, 3)$, $\mathrm{B}(-2, a, b)$, $\mathrm{C}(c, d, e)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 점 A에서 z축에 내린 수선의 발과 점 B에서 yz평면에 내린 수선의 발이 일치한다.
(나) 점 B를 x축에 대하여 대칭이동시킨 점은 점 C와 원점에 대하여 대칭이다.

$a+b+c+d+e$의 값은?

① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

길잡이

(1) 점 $\mathrm{P}(a, b, c)$에서 z축에 내린 수선의 발의 좌표는 $(0, 0, c)$이고, yz평면에 내린 수선의 발의 좌표는 $(0, b, c)$이다.
(2) 점 $\mathrm{P}(a, b, c)$를 x축에 대하여 대칭이동시킨 점의 좌표는 $(a, -b, -c)$이고, 원점에 대하여 대칭이동시킨 점의 좌표는 $(-a, -b, -c)$이다.

풀이

점 A에서 z축에 내린 수선의 발의 좌표는 $(0, 0, 3)$이고
점 B에서 yz평면에 내린 수선의 발의 좌표는 $(0, a, b)$이므로
$a=0$, $b=3$
점 $\mathrm{B}(-2, 0, 3)$을 x축에 대하여 대칭이동시킨 점의 좌표는 $(-2, 0, -3)$이고
이 점이 점 C와 원점에 대하여 대칭이므로
점 C를 원점에 대하여 대칭이동시킨 점의 좌표가 $(-2, 0, -3)$이어야 한다.
점 C를 원점에 대하여 대칭이동시킨 점의 좌표가 $(-c, -d, -e)$이므로
$-c=-2$, $-d=0$, $-e=-3$에서
$c=2$, $d=0$, $e=3$
따라서 $a+b+c+d+e=0+3+2+0+3=8$

답 ③

유제

정답과 풀이 54쪽

1 [23012-0148]

좌표공간의 점 $\mathrm{P}(3, a, b)$를 x축에 대하여 대칭이동시킨 점을 Q, 점 Q를 xy평면에 대하여 대칭이동시킨 점을 R라 하자. 점 R의 좌표가 $(c, 1, 4)$일 때, $a+b+c$의 값은?

① 2 ② 4 ③ 6 ④ 8 ⑤ 10

2 [23012-0149]

좌표공간의 점 $\mathrm{P}(2, a, b)$를 x축, y축에 대하여 대칭이동시킨 점을 각각 Q, R라 하고, 점 P를 yz평면, zx평면에 대하여 대칭이동시킨 점을 각각 S, T라 하자. 삼각형 PRS의 넓이가 12이고 삼각형 PST의 넓이가 18일 때, 삼각형 PQT의 넓이는? (단, $a>0$, $b>0$)

① 24 ② 27 ③ 30 ④ 33 ⑤ 36

2. 좌표공간의 두 점 사이의 거리

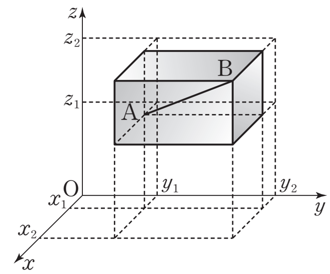
(1) 좌표공간의 두 점 $A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$ 사이의 거리는

$$\overline{AB}=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$$

(2) 좌표공간의 원점 O와 점 $A(x_1, y_1, z_1)$ 사이의 거리는

$$\overline{OA}=\sqrt{{x_1}^2+{y_1}^2+{z_1}^2}$$

설명 좌표공간의 두 점 $A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$에 대하여 직선 AB가 세 좌표평면에 평행하지 않는 경우, 그림과 같이 두 점 A, B를 꼭짓점으로 하고 세 좌표평면에 평행한 6개의 평면으로 이루어진 직육면체를 생각하면 선분 AB는 직육면체의 대각선이다.



이때 직육면체의 세 모서리의 길이가

$|x_2-x_1|$, $|y_2-y_1|$, $|z_2-z_1|$

이므로 두 점 A, B 사이의 거리는 다음과 같다.

$$\overline{AB}=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$$

또한 직선 AB가 세 좌표평면 중 어느 한 평면에 평행한 경우에도 위의 식은 성립한다.

참고 ① 두 점 A, B가 xy평면 위에 있을 때에는 두 점 A, B의 z좌표가 모두 0이므로

$$\overline{AB}=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$$

즉, 좌표평면 위의 두 점 사이의 거리에 대한 공식과 일치함을 알 수 있다.

② 두 점 A, B가 x축 위에 있을 때에는 두 점 A, B의 y좌표와 z좌표가 모두 0이므로

$$\overline{AB}=\sqrt{(x_2-x_1)^2}=|x_2-x_1|$$

즉, 수직선 위의 두 점 사이의 거리에 대한 공식과 일치함을 알 수 있다.

예 ① 두 점 $A(3, 2, 1)$, $B(1, 1, -1)$ 사이의 거리는

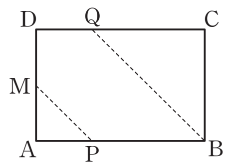
$$\overline{AB}=\sqrt{(1-3)^2+(1-2)^2+(-1-1)^2}=3$$

② 원점 O와 점 $A(3, 2, 1)$ 사이의 거리는

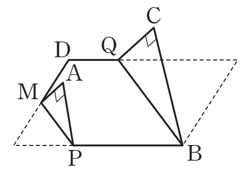
$$\overline{OA}=\sqrt{3^2+2^2+1^2}=\sqrt{14}$$

예제 2 두 점 사이의 거리

[그림 1]과 같이 $\overline{AB}=6$, $\overline{AD}=4$인 직사각형 ABCD 모양의 종이에서 선분 AB와 선분 DC를 각각 $1:2$로 내분하는 점을 P, Q라 하고, 선분 AD의 중점을 M이라 하자. [그림 2]는 두 선분 PM, BQ를 접는 선으로 하여 두 평면 APM, BCQ가 평면 PQM과 각각 수직이 되도록 종이를 접어 올려서 만든 도형이다. [그림 2]에서 직선 AC와 평면 PQM이 이루는 예각의 크기를 θ라 할 때, $\cos\theta$의 값은?



[그림 1]



[그림 2]

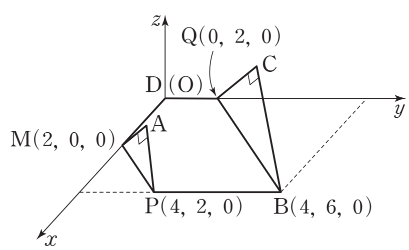
① $\frac{\sqrt{6}}{3}$　② $\frac{\sqrt{26}}{6}$　③ $\frac{\sqrt{7}}{3}$　④ $\frac{\sqrt{30}}{6}$　⑤ $\frac{2\sqrt{2}}{3}$

길잡이

(1) 좌표공간의 두 점 $A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$ 사이의 거리는 $\overline{AB}=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$

(2) 선분 AB의 평면 α 위로의 정사영을 선분 A′B′이라 하고, 직선 AB와 평면 α가 이루는 예각의 크기를 θ라 하면
$\overline{A'B'}=\overline{AB}\cos\theta$

풀이



그림과 같이 점 D가 원점, 점 M의 좌표가 $(2, 0, 0)$, 점 Q의 좌표가 $(0, 2, 0)$이 되도록 좌표공간을 설정하면 점 P의 좌표는 $(4, 2, 0)$, 점 B의 좌표는 $(4, 6, 0)$이다.

점 A에서 xy평면에 내린 수선의 발을 A′이라 하면

점 A′은 선분 PM의 중점이므로 점 A′의 좌표는 $(3, 1, 0)$이고,

$\overline{AA'}=\frac{1}{2}\overline{PM}=\sqrt{2}$이므로 점 A의 좌표는 $(3, 1, \sqrt{2})$이다.

점 C에서 xy평면에 내린 수선의 발을 C′이라 하면 점 C′은 선분 BQ의 중점이므로 점 C′의 좌표는 $(2, 4, 0)$

$\overline{CC'}=\frac{1}{2}\overline{BQ}=2\sqrt{2}$이므로 점 C의 좌표는 $(2, 4, 2\sqrt{2})$이다.

따라서

$$\overline{AC}=\sqrt{(2-3)^2+(4-1)^2+(2\sqrt{2}-\sqrt{2})^2}=2\sqrt{3}$$
$$\overline{A'C'}=\sqrt{(2-3)^2+(4-1)^2+(0-0)^2}=\sqrt{10}$$

이므로 $\cos\theta=\frac{\sqrt{10}}{2\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{30}}{6}$

답 ④

유제

정답과 풀이 54쪽

3 [23012-0150]

좌표공간의 두 점 $A(2, 3, -1)$, $B(4, -1, 0)$과 z축 위의 점 C에 대하여 $\overline{AC}=\overline{BC}$일 때, 점 C의 z좌표는?

① 1　② $\frac{3}{2}$　③ 2　④ $\frac{5}{2}$　⑤ 3

4 [23012-0151]

좌표공간에 세 점 $A(a, 4, 1)$, $B(0, 1, 5)$, $C(0, 4, 2)$가 있다. 선분 BC 위를 움직이는 점 P에 대하여 $\overline{AP}$의 최솟값이 $2\sqrt{3}$일 때, $\overline{AP}$의 최댓값은? (단, $a>0$)

① $4\sqrt{2}$　② 6　③ $2\sqrt{10}$　④ $2\sqrt{11}$　⑤ $4\sqrt{3}$

07 공간좌표

3. 선분의 내분점과 외분점

(1) 좌표공간에서 선분의 내분점과 외분점

좌표공간의 두 점 $\mathrm{A}(x_1, y_1, z_1)$, $\mathrm{B}(x_2, y_2, z_2)$에 대하여

① 선분 AB를 $m : n$ $(m>0, n>0)$으로 내분하는 점의 좌표는

$$\left(\frac{mx_2+nx_1}{m+n}, \frac{my_2+ny_1}{m+n}, \frac{mz_2+nz_1}{m+n}\right)$$

② 선분 AB를 $m : n$ $(m>0, n>0, m\neq n)$으로 외분하는 점의 좌표는

$$\left(\frac{mx_2-nx_1}{m-n}, \frac{my_2-ny_1}{m-n}, \frac{mz_2-nz_1}{m-n}\right)$$

③ 선분 AB의 중점의 좌표는

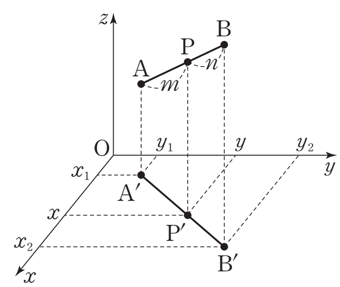
$$\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}, \frac{z_1+z_2}{2}\right)$$

설명 좌표공간의 두 점 $\mathrm{A}(x_1, y_1, z_1)$, $\mathrm{B}(x_2, y_2, z_2)$에 대하여 선분 AB를 $m : n$ $(m>0, n>0)$으로 내분하는 점을 $\mathrm{P}(x, y, z)$라 하자.

세 점 A, B, P의 xy평면 위로의 정사영을 각각 A′, B′, P′이라 하면 $\mathrm{A}'(x_1, y_1, 0)$, $\mathrm{B}'(x_2, y_2, 0)$, $\mathrm{P}'(x, y, 0)$이고 $\overline{\mathrm{A'P'}} : \overline{\mathrm{P'B'}} = \overline{\mathrm{AP}} : \overline{\mathrm{PB}} = m : n$이다.

따라서 선분 A′B′의 내분점의 좌표를 xy평면 위에서 생각하면

$x=\frac{mx_2+nx_1}{m+n}$, $y=\frac{my_2+ny_1}{m+n}$이다. 마찬가지로 세 점 A, B, P의 yz평면(또는 zx평면) 위로의 정사영을 이용하여 점 P의 z좌표를 구하면



$z=\frac{mz_2+nz_1}{m+n}$이므로 점 P의 좌표는 $\left(\frac{mx_2+nx_1}{m+n}, \frac{my_2+ny_1}{m+n}, \frac{mz_2+nz_1}{m+n}\right)$이다.

또 두 점 $\mathrm{A}(x_1, y_1, z_1)$, $\mathrm{B}(x_2, y_2, z_2)$를 이은 선분 AB를 $m : n$ $(m>0, n>0, m\neq n)$으로 외분하는 점의 좌표도 같은 방법으로 구할 수 있다.

(2) 좌표공간에서 삼각형의 무게중심

좌표공간의 삼각형 ABC에 대하여 $\mathrm{A}(x_1, y_1, z_1)$, $\mathrm{B}(x_2, y_2, z_2)$, $\mathrm{C}(x_3, y_3, z_3)$일 때, 삼각형 ABC의 무게중심의 좌표는

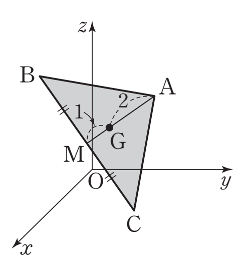
$$\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3}, \frac{y_1+y_2+y_3}{3}, \frac{z_1+z_2+z_3}{3}\right)$$

설명 변 BC의 중점을 $\mathrm{M}(x_4, y_4, z_4)$라 하면 $x_4=\frac{x_2+x_3}{2}$, $y_4=\frac{y_2+y_3}{2}$, $z_4=\frac{z_2+z_3}{2}$

무게중심 G의 좌표를 (x, y, z)라 하면 점 G는 선분 AM을 $2 : 1$로 내분하는 점이므로

$$x=\frac{2x_4+x_1}{2+1}=\frac{x_1+x_2+x_3}{3},\ y=\frac{2y_4+y_1}{2+1}=\frac{y_1+y_2+y_3}{3},$$

$$z=\frac{2z_4+z_1}{2+1}=\frac{z_1+z_2+z_3}{3}$$



즉, $\mathrm{G}\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3}, \frac{y_1+y_2+y_3}{3}, \frac{z_1+z_2+z_3}{3}\right)$이다.

예제 3 공간에서 선분의 내분점과 외분점

좌표공간의 세 점 A$(3, 2, -4)$, B$(2, -5, 1)$, C(a, b, c)가 있다. 선분 AC를 $2:1$로 내분하는 점이 x축 위에 있고, 선분 BC를 $2:1$로 외분하는 점이 yz평면 위에 있을 때, $a+b+c$의 값은?

① 1　② 2　③ 3　④ 4　⑤ 5

길잡이 좌표공간의 두 점 A(x_1, y_1, z_1), B(x_2, y_2, z_2)에 대하여

(1) 선분 AB를 $m:n$ $(m>0, n>0)$으로 내분하는 점의 좌표는

$$\left(\frac{mx_2+nx_1}{m+n}, \frac{my_2+ny_1}{m+n}, \frac{mz_2+nz_1}{m+n}\right)$$

(2) 선분 AB를 $m:n$ $(m>0, n>0, m\neq n)$으로 외분하는 점의 좌표는

$$\left(\frac{mx_2-nx_1}{m-n}, \frac{my_2-ny_1}{m-n}, \frac{mz_2-nz_1}{m-n}\right)$$

풀이 선분 AC를 $2:1$로 내분하는 점을 P라 하면 점 P의 좌표는

$$\left(\frac{2\times a+1\times 3}{2+1}, \frac{2\times b+1\times 2}{2+1}, \frac{2\times c+1\times(-4)}{2+1}\right), \text{ 즉 } \left(\frac{2a+3}{3}, \frac{2b+2}{3}, \frac{2c-4}{3}\right)$$

점 P가 x축 위에 있으므로 점 P의 y좌표와 z좌표는 모두 0이다.

즉, $\frac{2b+2}{3}=0$에서 $b=-1$, $\frac{2c-4}{3}=0$에서 $c=2$

선분 BC를 $2:1$로 외분하는 점을 Q라 하면 점 Q의 좌표는

$$\left(\frac{2\times a-1\times 2}{2-1}, \frac{2\times b-1\times(-5)}{2-1}, \frac{2\times c-1\times 1}{2-1}\right), \text{ 즉 } (2a-2, 2b+5, 2c-1)$$

점 Q가 yz평면 위에 있으므로 점 Q의 x좌표는 0이다.

즉, $2a-2=0$에서 $a=1$

따라서

$$a+b+c=1+(-1)+2=2$$

답 ②

유제

정답과 풀이 55쪽

5 [23012-0152]

좌표공간의 네 점 A$(5, 7, -2)$, B$(-3, 1, 6)$, C$(a, -5, 5)$, D$(1, b, c)$에 대하여 삼각형 ABC의 무게중심이 선분 AD의 중점과 일치할 때, $a+b+c$의 값은?

① 2　② 4　③ 6　④ 8　⑤ 10

6 [23012-0153]

좌표공간의 두 점 A$(4, 1, -2)$, B$(-2, k, 7)$에 대하여 선분 AB가 yz평면과 만나는 점을 P라 할 때, $\overline{\text{OP}}=5$이다. 양수 k의 값은? (단, O는 원점이다.)

① $\frac{8}{3}$　② 3　③ $\frac{10}{3}$　④ $\frac{11}{3}$　⑤ 4

4. 구의 방정식

(1) 구

공간에서 한 정점으로부터 일정한 거리에 있는 점 전체의 집합을 구라 한다. 이때 정점을 구의 중심, 구의 중심과 구 위의 한 점을 이은 선분을 구의 반지름이라 한다.

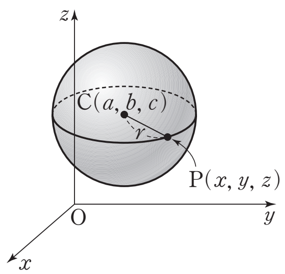
(2) 구의 방정식

좌표공간에서 중심이 점 $C(a, b, c)$이고 반지름의 길이가 r인 구의 방정식은

$$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=r^2$$

특히 중심이 원점이고 반지름의 길이가 r인 구의 방정식은

$$x^2+y^2+z^2=r^2$$



예 ① 중심이 점 $(3, 2, 1)$이고 반지름의 길이가 5인 구의 방정식은

$$(x-3)^2+(y-2)^2+(z-1)^2=5^2$$

즉, $(x-3)^2+(y-2)^2+(z-1)^2=25$

② 중심이 원점이고 반지름의 길이가 4인 구의 방정식은 $x^2+y^2+z^2=16$

(3) 방정식 $x^2+y^2+z^2+Ax+By+Cz+D=0$이 나타내는 도형

방정식 $x^2+y^2+z^2+Ax+By+Cz+D=0$을 변형하면

$$\left(x+\frac{A}{2}\right)^2+\left(y+\frac{B}{2}\right)^2+\left(z+\frac{C}{2}\right)^2=\frac{A^2+B^2+C^2-4D}{4}$$

이므로 $A^2+B^2+C^2-4D>0$이면 이 방정식은 중심이 점 $\left(-\frac{A}{2}, -\frac{B}{2}, -\frac{C}{2}\right)$이고 반지름의 길이가 $\frac{\sqrt{A^2+B^2+C^2-4D}}{2}$인 구를 나타낸다.

예 방정식 $x^2+y^2+z^2-6x+4y-4z+13=0$은

$$(x-3)^2+(y+2)^2+(z-2)^2=2^2$$

이므로 이 방정식은 중심이 점 $(3, -2, 2)$이고 반지름의 길이가 2인 구를 나타낸다.

또한 중심의 y좌표가 -2, z좌표가 2이므로 이 구는 zx평면과 xy평면에 동시에 접한다.

참고 구 $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=r^2$이 좌표평면 또는 좌표축에 접할 조건은 다음과 같다.

① xy평면에 접하는 경우: $r=|c|$

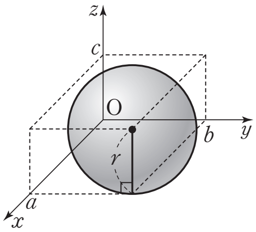
② yz평면에 접하는 경우: $r=|a|$

③ zx평면에 접하는 경우: $r=|b|$

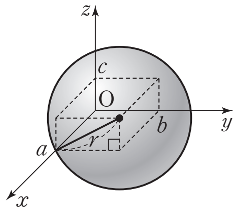
④ x축에 접하는 경우: $r=\sqrt{b^2+c^2}$

⑤ y축에 접하는 경우: $r=\sqrt{a^2+c^2}$

⑥ z축에 접하는 경우: $r=\sqrt{a^2+b^2}$



(xy평면에 접하는 경우)



(x축에 접하는 경우)

예제 4 구의 방정식

양수 a에 대하여 좌표공간의 구 S: $x^2+y^2+z^2-4x+2ay-2az+a=0$의 중심을 C라 하자. $\overline{\mathrm{OC}}=6$일 때, 구 S의 반지름의 길이는? (단, O는 원점이다.)

① $2\sqrt{6}$ ② $\sqrt{26}$ ③ $2\sqrt{7}$ ④ $\sqrt{30}$ ⑤ $4\sqrt{2}$

길잡이 방정식 $x^2+y^2+z^2+Ax+By+Cz+D=0$ $(A^2+B^2+C^2-4D>0)$이 나타내는 도형은 중심이 점 $\left(-\frac{A}{2}, -\frac{B}{2}, -\frac{C}{2}\right)$이고 반지름의 길이가 $\frac{\sqrt{A^2+B^2+C^2-4D}}{2}$인 구이다.

풀이 $x^2+y^2+z^2-4x+2ay-2az+a=0$에서

$$(x-2)^2+(y+a)^2+(z-a)^2=2a^2-a+4$$

즉, 구 S의 중심의 좌표는 $\mathrm{C}(2, -a, a)$이고 반지름의 길이는 $\sqrt{2a^2-a+4}$이다.

$\overline{\mathrm{OC}}=6$이므로 $\sqrt{2^2+(-a)^2+a^2}=6$에서 $2a^2=32$, $a^2=16$

$a>0$이므로 $a=4$

따라서 구 S의 반지름의 길이는

$$\sqrt{2\times4^2-4+4}=4\sqrt{2}$$

답 ⑤

유제

정답과 풀이 55쪽

7 [23012-0154] 양수 a에 대하여 좌표공간의 구 $x^2+y^2+z^2-4ax-12z+16=0$이 x축 위의 점 $(p, 0, 0)$에서 xy평면과 접할 때, $a+p$의 값을 구하시오.

8 [23012-0155] 좌표공간의 구 $(x-1)^2+y^2+(z+4)^2=25$가 xy평면과 만나서 생긴 도형을 C라 하자. 도형 C 위를 움직이는 점 P와 점 $\mathrm{Q}(4, 4, 2)$에 대하여 $\overline{\mathrm{PQ}}$의 최댓값은?

① $2\sqrt{14}$ ② $2\sqrt{15}$ ③ 8 ④ $2\sqrt{17}$ ⑤ $6\sqrt{2}$

[23012-0156]

1 두 양수 a, b에 대하여 좌표공간의 점 $\mathrm{P}(a,\ b,\ 2b)$를 z축에 대하여 대칭이동시킨 점을 Q, 점 Q를 zx평면에 대하여 대칭이동시킨 점을 $\mathrm{R}(p,\ q,\ r)$라 하자. $\overline{\mathrm{PR}}=6$이고 $p+q+r=12$일 때, $a+b$의 값은?

① 6　② 7　③ 8　④ 9　⑤ 10

[23012-0157]

2 좌표공간의 점 $\mathrm{A}(5,\ -2,\ 3)$에서 y축에 내린 수선의 발을 B, 점 A를 zx평면에 대하여 대칭이동시킨 점을 C라 하자. 선분 BC의 길이는?

① $\sqrt{42}$　② $2\sqrt{11}$　③ $\sqrt{46}$　④ $4\sqrt{3}$　⑤ $5\sqrt{2}$

[23012-0158]

3 좌표공간의 두 점 $\mathrm{A}(4,\ 5,\ 6)$, $\mathrm{B}(1,\ -2,\ -1)$과 xy평면 위의 점 $\mathrm{P}(a,\ a,\ 0)$에 대하여 $\overline{\mathrm{AP}}>\overline{\mathrm{BP}}$를 만족시키는 자연수 a의 개수는?

① 3　② 4　③ 5　④ 6　⑤ 7

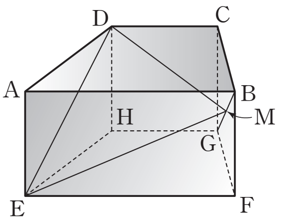
[23012-0159]

4 좌표공간의 두 점 $\mathrm{A}(t+1,\ 3,\ 5)$, $\mathrm{B}(2t,\ t,\ 1)$에 대하여 선분 AB의 길이의 최솟값은? (단, t는 실수이다.)

① $3\sqrt{2}$　② $2\sqrt{5}$　③ $\sqrt{22}$　④ $2\sqrt{6}$　⑤ $\sqrt{26}$

[23012-0160]

5 그림과 같이 $\overline{AB}=4$, $\overline{BC}=\overline{CD}=\overline{DA}=2$인 사다리꼴 ABCD를 밑면으로 하고 높이가 2인 사각기둥 ABCD$-$EFGH가 있다. 선분 BG의 중점을 M, 삼각형 DEM의 무게중심을 I라 할 때, $\overline{HI}^2$의 값은?



① 2 ② $\frac{9}{4}$ ③ $\frac{5}{2}$

④ $\frac{11}{4}$ ⑤ 3

[23012-0161]

6 좌표공간의 두 점 A$(-1,\ -4,\ 3)$, B$(3,\ 4,\ -3)$을 $1:k$로 내분하는 점을 C$(a,\ b,\ c)$라 하자. $a+b+c=0$일 때, $a^2+b^2+c^2$의 값은? (단, $k>0$)

① $\frac{22}{9}$ ② $\frac{8}{3}$ ③ $\frac{26}{9}$ ④ $\frac{28}{9}$ ⑤ $\frac{10}{3}$

[23012-0162]

7 좌표공간의 두 점 A$(1,\ a,\ -2)$, B$(4,\ 2,\ b)$와 xy평면 위의 점 P, zx평면 위의 점 Q에 대하여 선분 PQ를 $1:2$, $2:1$로 내분하는 점이 각각 A, B이다. $\overline{OP}^2+\overline{OQ}^2$의 값은? (단, O는 원점이다.)

① 105 ② 110 ③ 115 ④ 120 ⑤ 125

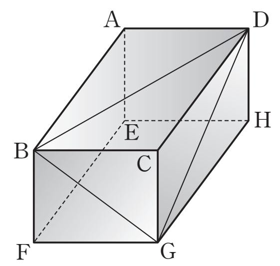
[23012-0163]

8 좌표공간의 두 점 A$(0,\ 2,\ 3)$, B$(4,\ -2,\ a)$에 대하여 선분 AB를 지름으로 하는 구 S가 점 P$(-1,\ 0,\ 2)$를 지날 때, a의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

[23012-0164]

1 좌표공간에 있는 직육면체 ABCD$-$EFGH가 다음 조건을 만족시킨다.



> (가) 세 직선 AB, AD, AE는 각각 x축, y축, z축과 평행하다.
>
> (나) $\overline{\mathrm{AB}}=\frac{3}{2}\overline{\mathrm{AD}}=2\overline{\mathrm{AE}}$
>
> (다) 선분 AE의 중점의 z좌표는 -1이고, 삼각형 BGD의 무게중심의 좌표는 $(4, 0, 0)$이다.

점 C의 좌표를 (a, b, c)라 할 때, $a+b+c$의 값은? (단, a, b, c는 각각 점 E의 x, y, z좌표보다 크다.)

① $\frac{32}{3}$ ② $\frac{34}{3}$ ③ 12 ④ $\frac{38}{3}$ ⑤ $\frac{40}{3}$

[23012-0165]

2 좌표공간의 세 점 $\mathrm{A}(2\sqrt{2}, -2, 1)$, $\mathrm{B}(\sqrt{2}, 2, a)$, $\mathrm{C}(-\sqrt{2}, b, 1)$이 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $\overline{\mathrm{AB}}=\overline{\mathrm{AC}}$
>
> (나) 두 점 B, C에서 xy평면에 내린 수선의 발을 각각 B$'$, C$'$이라 하면 $\overline{\mathrm{BC}}=2\overline{\mathrm{B'C'}}$이다.

$a>b$일 때, $a+b$의 값을 구하시오.

[23012-0166]

3 좌표공간의 두 점 $\mathrm{A}(5, -1, 2)$, $\mathrm{B}(-4, a, 1)$과 xy평면 위를 움직이는 점 P에 대하여 $\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{BP}}$는 점 P의 좌표가 $(b, c, 0)$일 때 최솟값 $3\sqrt{14}$를 갖는다. $a+b+c$의 값은? (단, $a>0$)

① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

[23012-0167]

4 좌표공간의 세 점 $\mathrm{A}(-2,\ 0,\ 0)$, $\mathrm{B}(6,\ 0,\ 0)$, $\mathrm{C}(0,\ p,\ q)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) 삼각형 ABC의 넓이는 $8\sqrt{5}$이다.
> (나) 직선 BC가 xy평면과 이루는 예각의 크기는 $30°$이다.

$p\times q$의 값은? (단, $p>0$, $q>0$)

① $4\sqrt{5}$ ② $2\sqrt{21}$ ③ $2\sqrt{22}$ ④ $2\sqrt{23}$ ⑤ $4\sqrt{6}$

[23012-0168]

5 좌표공간에 세 점 $\mathrm{A}(1,\ -3,\ 0)$, $\mathrm{B}(-2,\ -9,\ 3)$, $\mathrm{C}(a,\ b,\ c)$가 있다. 점 C를 xy평면에 대하여 대칭이동시킨 점 P에 대하여 점 A가 선분 BP 위의 점일 때, $a^2+b^2+c^2$의 최솟값은? (단, $c>0$)

① $\frac{31}{6}$ ② $\frac{16}{3}$ ③ $\frac{11}{2}$ ④ $\frac{17}{3}$ ⑤ $\frac{35}{6}$

[23012-0169]

6 좌표공간에 점 $\mathrm{A}(2,\ 1,\ 4)$와 xy평면 위에 점 $\mathrm{B}(2,\ 1,\ 0)$을 중심으로 하고 반지름의 길이가 3인 원 C가 있다. 원 C 위를 움직이는 점 P와 점 A를 지나는 모든 직선이 중심이 D이고 반지름의 길이가 6인 구와 접할 때, $\overline{\mathrm{OD}}^2$의 값을 구하시오. (단, O는 원점이고, 점 D의 z좌표는 양수이다.)

[23012-0170]

7 좌표공간의 구 S: $x^2+(y-8\sqrt{2})^2+(z-2)^2=36$에 대하여 구 S 위의 점 중 xy평면으로부터 가장 멀리 떨어진 점을 P라 하자. x축을 포함하고 점 P를 지나는 평면 α가 구 S와 만나서 생기는 도형을 C라 할 때, 도형 C의 xy평면 위로의 정사영의 넓이는?

① $4\sqrt{2}\pi$ ② $4\sqrt{3}\pi$ ③ 8π ④ $4\sqrt{5}\pi$ ⑤ $4\sqrt{6}\pi$

[23012-0171]

1 좌표공간의 서로 다른 세 점 A, B, C가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 두 점 A, B는 z축 위에 있고, 직선 AC는 xy평면과 평행하다.

(나) 삼각형 ABC의 무게중심의 좌표는 $(1,\ 2,\ 3)$이고, 삼각형 ABC의 넓이는 $\frac{9\sqrt{5}}{2}$이다.

$\overline{\mathrm{OC}}$의 최댓값은? (단, O는 원점이다.)

① $\sqrt{61}$ ② $\sqrt{62}$ ③ $3\sqrt{7}$ ④ 8 ⑤ $\sqrt{65}$

[23012-0172]

2 좌표공간의 두 점 $\mathrm{A}(1,\ 2,\ 5)$, $\mathrm{B}(-2,\ 6,\ 5)$에 대하여 **보기**에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

보기

ㄱ. $\overline{\mathrm{AP}}=\overline{\mathrm{BP}}$인 y축 위의 점 P가 존재한다.

ㄴ. 삼각형 ABQ가 정삼각형이 되도록 하는 zx평면 위의 점 Q가 존재한다.

ㄷ. 삼각형 ABR가 직각이등변삼각형이 되도록 하는 xy평면 위의 점 R가 존재한다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ ④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

[23012-0173]

3 좌표공간의 구 S가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 구 S가 xy평면, yz평면, zx평면과 만나서 생기는 도형의 넓이는 각각 28π, 30π, 34π이다.

(나) 구 S 위를 움직이는 점 P에 대하여 $\overline{\mathrm{OP}}$의 최댓값은 10이다.

구 S가 y축과 만나는 두 점을 A, B라 할 때, 선분 AB의 길이는?

(단, O는 원점이고, 구 S의 중심의 x좌표, y좌표, z좌표는 모두 양수이다.)

① 8 ② $6\sqrt{2}$ ③ $4\sqrt{5}$ ④ $2\sqrt{22}$ ⑤ $4\sqrt{6}$

[23012-0174]

4 좌표공간에 점 $\mathrm{A}(3,\ 4,\ 0)$과 점 A를 지나고 xy평면에 수직인 직선 l이 있다. 직선 l 위의 점 B에 대하여 선분 AB를 $3 : 1$로 내분하는 점을 C라 하고, 점 C를 중심으로 하고 반지름의 길이가 $\overline{\mathrm{BC}}$인 구를 S라 하자. 구 S 위를 움직이는 점 P에 대하여 직선 BP가 xy평면과 만나는 점을 Q라 할 때, 두 점 P, Q가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) 점 P는 선분 BQ를 $1 : 2$로 내분하는 점이다.
> (나) 점 Q가 나타내는 도형의 길이는 24π이다.

$\overline{\mathrm{OP}}^2$의 최댓값을 구하시오. (단, O는 원점이고, 점 B의 z좌표는 양수이고, 점 P는 점 B가 아니다.)

[23012-0175]

5 좌표공간의 구 S가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) 구 S의 중심의 x좌표는 0이고, z좌표는 양수이다.
> (나) 구 S는 점 $\mathrm{A}(0,\ \sqrt{15},\ 0)$에서 y축과 접한다.
> (다) 구 S는 z축과 두 점 B, C에서 만나고, $\overline{\mathrm{OC}}-\overline{\mathrm{OB}}=14$이다.

구 S 위를 움직이는 점 P에 대하여 삼각형 ACP의 넓이가 최대가 되도록 하는 점 P를 Q라 하고, 구 S 위의 점 중 x좌표가 가장 큰 점을 R라 하자. 점 R에서 선분 BQ에 내린 수선의 발을 H라 하고, 직선 RH와 yz평면이 이루는 예각의 크기를 θ라 하자. $\cos^2\theta=\dfrac{q}{p}$일 때, $p+q$의 값을 구하시오.

(단, O는 원점이고, 점 P는 점 A와 점 C가 아니며 p와 q는 서로소인 자연수이다.)

대표 기출 문제

출제 경향 좌표공간에서 한 점과 구 위의 점 사이의 거리에 대한 문제, 구와 평면이 접할 조건, 구와 평면이 만나서 생기는 원에 대한 문제, 구의 평면 위로의 정사영에 대한 문제가 출제된다.

2023학년도 대수능 9월 모의평가

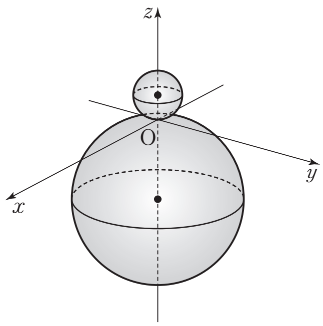
좌표공간에 두 개의 구

$$S_1 : x^2+y^2+(z-2)^2=4,\ S_2 : x^2+y^2+(z+7)^2=49$$

가 있다. 점 $\mathrm{A}(\sqrt{5},\ 0,\ 0)$을 지나고 zx평면에 수직이며, 구 S_1과 z좌표가 양수인 한 점에서 접하는 평면을 α라 하자. 구 S_2가 평면 α와 만나서 생기는 원을 C라 할 때, 원 C 위의 점 중 z좌표가 최소인 점을 B라 하고 구 S_2와 점 B에서 접하는 평면을 β라 하자.

원 C의 평면 β 위로의 정사영의 넓이가 $\dfrac{q}{p}\pi$일 때, $p+q$의 값을 구하시오.

(단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]



출제 의도 좌표공간에서 구와 평면이 만나서 생기는 도형의 다른 평면 위로의 정사영의 넓이를 구할 수 있는지를 묻는 문제이다.

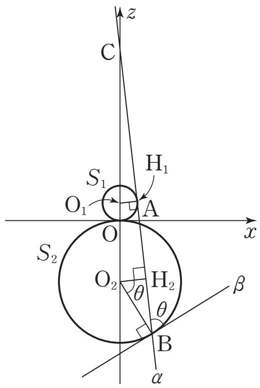
풀이 좌표공간의 원점을 O, 두 구 S_1, S_2의 중심을 각각 $\mathrm{O_1}$, $\mathrm{O_2}$라 하면 점 O는 두 구 S_1, S_2 위의 점이므로

$\overline{\mathrm{OO_1}}=2$, $\overline{\mathrm{OO_2}}=7$

두 점 $\mathrm{O_1}$, $\mathrm{O_2}$에서 평면 α에 내린 수선의 발을 각각 $\mathrm{H_1}$, $\mathrm{H_2}$라 하자.

구 S_1과 평면 α가 점 $\mathrm{H_1}$에서 접하므로 $\overline{\mathrm{O_1H_1}}=2$이다.

평면 α와 z축이 만나는 점을 C라 하면 좌표공간을 zx평면으로 자른 단면은 그림과 같다.



직각삼각형 O_1CH_1에서 $\overline{O_1C}=k\ (k>0)$이라 하면

$$\overline{CH_1}=\sqrt{\overline{O_1C}^2-\overline{O_1H_1}^2}$$
$$=\sqrt{k^2-4}$$

두 삼각형 O_1CH_1, ACO는 서로 닮음이고, $\overline{OA}=\sqrt{5}$, $\overline{OC}=k+2$이므로

$\overline{O_1H_1}:\overline{CH_1}=\overline{AO}:\overline{CO}$에서

$$2:\sqrt{k^2-4}=\sqrt{5}:(k+2)$$
$$k^2-16k-36=0$$
$$(k-18)(k+2)=0$$

$k>0$이므로 $k=18$

또한 두 삼각형 O_1CH_1, O_2CH_2는 서로 닮음이고, $\overline{O_1C}=18$, $\overline{O_2C}=27$이므로

$\overline{O_1C}:\overline{O_1H_1}=\overline{O_2C}:\overline{O_2H_2}$에서

$$18:2=27:\overline{O_2H_2}$$
$$\overline{O_2H_2}=3$$

한편, 구 S_2가 평면 α와 만나서 생기는 원 C의 중심은 H_2이고, 반지름의 길이는 $\overline{BH_2}$이다.

직각삼각형 BO_2H_2에서

$$\overline{BH_2}=\sqrt{\overline{O_2B}^2-\overline{O_2H_2}^2}$$
$$=\sqrt{7^2-3^2}$$
$$=2\sqrt{10}$$

이므로 원 C의 넓이는 $\pi\times(2\sqrt{10})^2=40\pi$

두 평면 α, β가 이루는 예각의 크기를 θ라 하면 $\theta+\angle H_2BO_2=\frac{\pi}{2}$이고,

$\angle H_2O_2B+\angle H_2BO_2=\frac{\pi}{2}$이므로 $\theta=\angle H_2O_2B$

직각삼각형 BO_2H_2에서

$$\cos\theta=\frac{\overline{O_2H_2}}{\overline{BO_2}}=\frac{3}{7}$$

그러므로 원 C의 평면 β 위로의 정사영의 넓이는

$$40\pi\times\frac{3}{7}=\frac{120}{7}\pi$$

따라서 $p=7$, $q=120$이므로

$$p+q=7+120=127$$

답 127

고2~N수 수능 집중 로드맵

수능 입문 → **기출 / 연습** → **연계+연계 보완** → **고난도** → **모의고사**

수능 입문
- 윤혜정의 개념/패턴의 나비효과
- 수능 감(感)잡기
- 수능특강 Light
- 강의노트 수능개념

기출 / 연습
- 윤혜정의 기출의 나비효과
- 수능 기출의 미래
- 수능 기출의 미래 미니모의고사
- 수능특강Q 미니모의고사

연계+연계 보완
- 수능연계교재의 국어 어휘
- 수능연계교재의 VOCA 1800
- 수능연계 기출 Vaccine VOCA
- 연계: 수능특강, 수능완성
- 수능특강 사용설명서
- 수능특강 연계 기출
- 수능 영어 간접연계 서치라이트
- 수능완성 사용설명서

고난도
- 수능연계완성 3/4주 특강 (고난도·신유형)
- 박봄의 사회 · 문화 표 분석의 패턴

모의고사
- FINAL 실전모의고사
- 만점마무리 봉투모의고사
- 고난도 시크릿X 봉투모의고사
- 수능 싱크로 100% 프리미엄 봉투모의고사

구분	시리즈명	특징	수준	영역
수능 입문	윤혜정의 개념/패턴의 나비효과	윤혜정 선생님과 함께하는 수능 국어 개념/패턴 학습		국어
	수능 감(感) 잡기	동일 소재·유형의 내신과 수능 문항 비교로 수능 입문		국/수/영
	수능특강 Light	수능 연계교재 학습 전 연계교재 입문서		국/영
	수능개념	EBSi 대표 강사들과 함께하는 수능 개념 다지기		전 영역
기출/연습	윤혜정의 기출의 나비효과	윤혜정 선생님과 함께하는 까다로운 국어 기출 완전 정복		국어
	수능 기출의 미래	올해 수능에 딱 필요한 문제만 선별한 기출문제집		전 영역
	수능 기출의 미래 미니모의고사	부담없는 실전 훈련, 고품질 기출 미니모의고사		국/수/영
	수능특강Q 미니모의고사	매일 15분으로 연습하는 고품격 미니모의고사		전 영역
연계 + 연계 보완	수능특강	최신 수능 경향과 기출 유형을 분석한 종합 개념서		전 영역
	수능특강 사용설명서	수능 연계교재 수능특강의 지문·자료·문항 분석		국/영
	수능특강 연계 기출	수능특강 수록 작품·지문과 연결된 기출문제 학습		국/영
	수능완성	유형 분석과 실전모의고사로 단련하는 문항 연습		전 영역
	수능완성 사용설명서	수능 연계교재 수능완성의 국어·영어 지문 분석		국/영
	수능 영어 간접연계 서치라이트	출제 가능성이 높은 핵심만 모아 구성한 간접연계 대비 교재		영어
	수능연계교재의 국어 어휘	수능 지문과 문항 이해에 필요한 어휘 학습서		국어
	수능연계교재의 VOCA 1800	수능특강과 수능완성의 필수 중요 어휘 1800개 수록		영어
	수능연계 기출 Vaccine VOCA	수능-EBS 연계 및 평가원 최다 빈출 어휘 선별 수록		영어
고난도	수능연계완성 3/4주 특강	단기간에 끝내는 수능 킬러 문항 대비서		국/수/영/과
	박봄의 사회·문화 표 분석의 패턴	박봄 선생님과 사회·문화 표 분석 문항의 패턴 연습		사회탐구
모의고사	FINAL 실전모의고사	수능 동일 난도의 최다 분량, 최다 과목 모의고사		전 영역
	만점마무리 봉투모의고사	실제 시험지 형태와 OMR 카드로 실전 훈련 모의고사		전 영역
	고난도 시크릿X 봉투모의고사	제대로 어려운 최고난도 모의고사		국/수/영
	수능 싱크로 100% 프리미엄 봉투모의고사	수능 직전에 만나는, 수능과 가장 가까운 고품격 프리미엄 모의고사		국/수/영