# 수능특강

수학영역 | **미적분**

# 이 책의 차례 Contents


01 수열의 극한 ······ 04

02 급수 ······ 14

03 여러 가지 함수의 미분 ······ 26

04 여러 가지 미분법 ······ 42

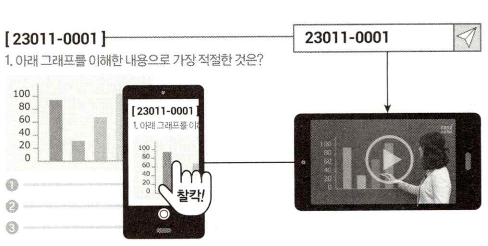
05 도함수의 활용 ······ 58

06 여러 가지 적분법 ······ 74

07 정적분의 활용 ······ 86


**학생 EBS 교재 문제 검색**

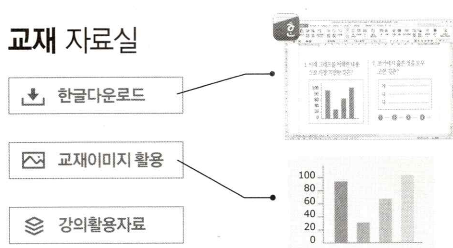
EBS 단추에서 문항코드나 사진으로
문제를 검색하면 푸리봇이 해설 영상을 제공합니다.




※ EBSi 사이트 및 모바일에서 이용이 가능합니다.
※ 사진 검색은 EBSi 고교강의 앱에서만 이용하실 수 있습니다.

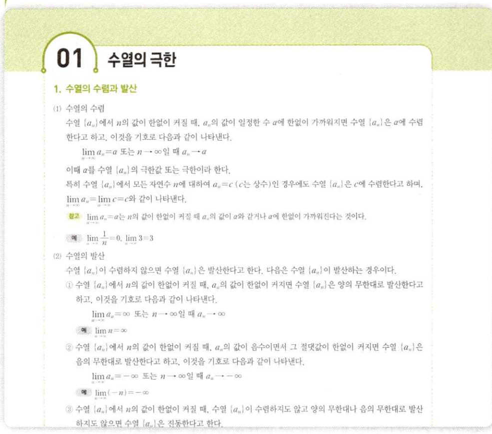
**교사 교사지원센터 교재 자료실**

교재 문항 한글 문서(HWP)와
교재의 이미지 파일을 무료로 제공합니다.




※ 교사지원센터(http://teacher.ebsi.co.kr) 접속 후 '교사인증'을 통해 이용 가능

## 개념 정리



## 01 수열의 극한

**1. 수열의 수렴과 발산**

(1) 수열의 수렴

수열 $\{a_n\}$에서 $n$의 값이 한없이 커질 때, $a_n$의 값이 일정한 수 $\alpha$에 한없이 가까워지면 수열 $\{a_n\}$은 $\alpha$에 수렴한다고 하고, 이것을 기호로 다음과 같이 나타낸다.

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n=\alpha$ 또는 $n\to\infty$일 때 $a_n\to\alpha$

이때 $\alpha$를 수열 $\{a_n\}$의 극한값 또는 극한이라 한다.

특히 수열 $\{a_n\}$에서 모든 자연수 $n$에 대하여 $a_n=c$ ($c$는 상수)인 경우에도 수열 $\{a_n\}$은 $c$에 수렴한다고 하며, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=\lim\limits_{n\to\infty} c=c$와 같이 나타낸다.

참고 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=\alpha$는 $n$의 값이 한없이 커질 때 $a_n$의 값이 $\alpha$와 같거나 $\alpha$에 한없이 가까워진다는 것이다.

예 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$, $\lim\limits_{n\to\infty} 3=3$

(2) 수열의 발산

수열 $\{a_n\}$이 수렴하지 않으면 수열 $\{a_n\}$은 발산한다고 한다. 다음은 수열 $\{a_n\}$이 발산하는 경우이다.

① 수열 $\{a_n\}$에서 $n$의 값이 한없이 커질 때, $a_n$의 값이 한없이 커지면 수열 $\{a_n\}$은 양의 무한대로 발산한다고 하고, 이것을 기호로 다음과 같이 나타낸다.

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n=\infty$ 또는 $n\to\infty$일 때 $a_n\to\infty$

예 $\lim\limits_{n\to\infty} n=\infty$

② 수열 $\{a_n\}$에서 $n$의 값이 한없이 커질 때, $a_n$의 값이 음수이면서 그 절댓값이 한없이 커지면 수열 $\{a_n\}$은 음의 무한대로 발산한다고 하고, 이것을 기호로 다음과 같이 나타낸다.

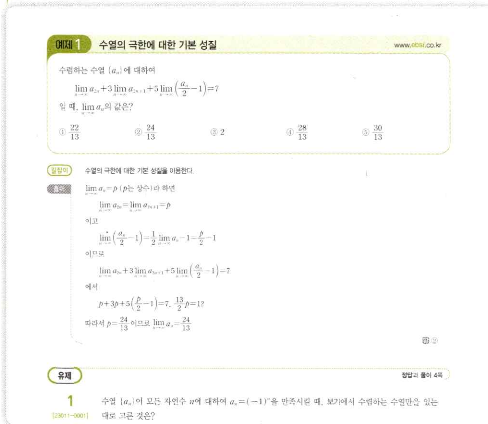
$\lim\limits_{n\to\infty} a_n=-\infty$ 또는 $n\to\infty$일 때 $a_n\to-\infty$

예 $\lim\limits_{n\to\infty}(-n)=-\infty$

③ 수열 $\{a_n\}$에서 $n$의 값이 한없이 커질 때, 수열 $\{a_n\}$이 수렴하지도 않고 양의 무한대나 음의 무한대로 발산하지도 않으면 수열 $\{a_n\}$은 진동한다고 한다.

여러 종의 교과서를 통합하여 핵심 개념만을 체계적으로 정리하였고 **설명**, **참고**, **예** 를 제시하여 개념에 대한 이해와 적용에 도움이 되게 하였다.

## 예제 & 유제



**예제 1** 수열의 극한에 대한 기본 성질 www.ebsi.co.kr

수렴하는 수열 $\{a_n\}$에 대하여

$$\lim_{n\to\infty} a_{2n}+3\lim_{n\to\infty} a_{2n+1}+5\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_n}{2}-1\right)=7$$

일 때, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$의 값은?

① $\frac{22}{13}$ ② $\frac{24}{13}$ ③ 2 ④ $\frac{28}{13}$ ⑤ $\frac{30}{13}$

길잡이 수열의 극한에 대한 기본 성질을 이용한다.

풀이 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=p$ ($p$는 상수)라 하면

$$\lim_{n\to\infty} a_{2n}=\lim_{n\to\infty} a_{2n+1}=p$$

이고

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_n}{2}-1\right)=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty} a_n-1=\frac{p}{2}-1$$

이므로

$$\lim_{n\to\infty} a_{2n}+3\lim_{n\to\infty} a_{2n+1}+5\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_n}{2}-1\right)=7$$

에서

$$p+3p+5\left(\frac{p}{2}-1\right)=7,\ \frac{13}{2}p=12$$

따라서 $p=\frac{24}{13}$이므로 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=\frac{24}{13}$

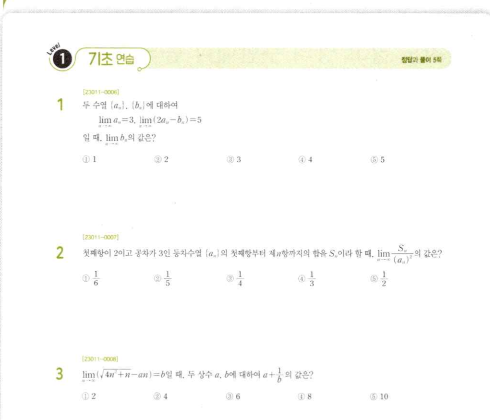
답 ②

**유제** 정답과 풀이 4쪽

1 [23011-0001] 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 $n$에 대하여 $a_n=(-1)^n$을 만족시킬 때, 보기에서 수렴하는 수열만을 있는 대로 고른 것은?

예제는 개념을 적용한 대표 문항으로 문제를 해결하는 데 필요한 주요 개념 및 풀이 전략을 길잡이로 제시하여 풀이 과정의 이해를 돕도록 하였고, 유제는 예제와 유사한 내용의 문제나 일반화된 문제를 제시하여 학습 내용과 문제에 대한 연관성을 익히도록 구성하였다.

## Level 1-Level 2-Level 3



Level 1 기초 연습 정답과 풀이 5쪽

1 [23011-0006] 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$에 대하여

$$\lim_{n\to\infty} a_n=3,\ \lim_{n\to\infty}(2a_n-b_n)=5$$

일 때, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n$의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

2 [23011-0007] 첫째항이 2이고 공차가 3인 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제$n$항까지의 합을 $S_n$이라 할 때, $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{S_n}{(a_n)^2}$의 값은?

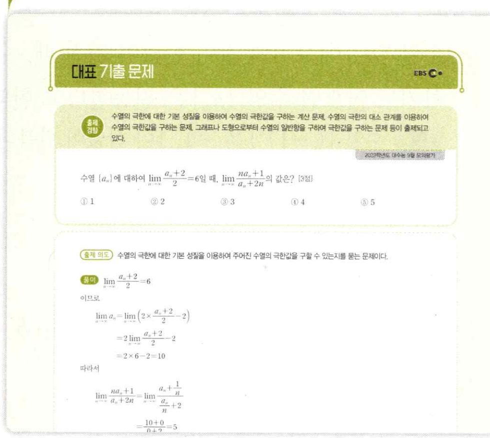
① $\frac{1}{6}$ ② $\frac{1}{5}$ ③ $\frac{1}{4}$ ④ $\frac{1}{3}$ ⑤ $\frac{1}{2}$

3 [23011-0008] $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{4n^2+n}-an)=b$일 때, 두 상수 $a$, $b$에 대하여 $a+\frac{1}{b}$의 값은?

① 2 ② 4 ③ 6 ④ 8 ⑤ 10

Level 1 기초 연습은 기초 개념을 제대로 숙지했는지 확인할 수 있는 문항을 제시하였으며, Level 2 기본 연습은 기본 응용 문항을, 그리고 Level 3 실력 완성은 수학적 사고력과 문제 해결 능력을 함양할 수 있는 문항을 제시하여 대학수학능력시험 실전에 대비할 수 있도록 구성하였다.

## 대표 기출 문제



대표 기출 문제 EBS

출제 경향 수열의 극한에 대한 기본 성질을 이용하여 수열의 극한값을 구하는 계산 문제, 수열의 극한의 대소 관계를 이용하여 수열의 극한값을 구하는 문제, 그래프나 도형으로부터 수열의 일반항을 구하여 극한값을 구하는 문제 등이 출제되고 있다.

2022학년도 대수능 9월 모의평가

수열 $\{a_n\}$에 대하여 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n+2}{2}=6$일 때, $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{na_n+1}{a_n+2n}$의 값은? [3점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

출제 의도 수열의 극한에 대한 기본 성질을 이용하여 주어진 수열의 극한값을 구할 수 있는지를 묻는 문제이다.

풀이 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n+2}{2}=6$

이므로

$$\lim_{n\to\infty} a_n=\lim_{n\to\infty}\left(2\times\frac{a_n+2}{2}-2\right)=2\lim_{n\to\infty}\frac{a_n+2}{2}-2=2\times6-2=10$$

따라서

$$\lim_{n\to\infty}\frac{na_n+1}{a_n+2n}=\lim_{n\to\infty}\frac{a_n+\frac{1}{n}}{\frac{a_n}{n}+2}=\frac{10+0}{0+2}=5$$

대학수학능력시험과 모의평가 기출 문항으로 구성하였으며 기존 출제 유형을 파악할 수 있도록 출제 경향과 출제 의도를 제시하였다.

# 01 수열의 극한

## 1. 수열의 수렴과 발산

(1) 수열의 수렴

수열 $\{a_n\}$에서 $n$의 값이 한없이 커질 때, $a_n$의 값이 일정한 수 $\alpha$에 한없이 가까워지면 수열 $\{a_n\}$은 $\alpha$에 수렴한다고 하고, 이것을 기호로 다음과 같이 나타낸다.

$\lim\limits_{n \to \infty} a_n = \alpha$ 또는 $n \to \infty$일 때 $a_n \to \alpha$

이때 $\alpha$를 수열 $\{a_n\}$의 극한값 또는 극한이라 한다.

특히 수열 $\{a_n\}$에서 모든 자연수 $n$에 대하여 $a_n = c$ ($c$는 상수)인 경우에도 수열 $\{a_n\}$은 $c$에 수렴한다고 하며, $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = \lim\limits_{n \to \infty} c = c$와 같이 나타낸다.

**참고** $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = \alpha$는 $n$의 값이 한없이 커질 때 $a_n$의 값이 $\alpha$와 같거나 $\alpha$에 한없이 가까워진다는 것이다.

**예** $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{1}{n} = 0$, $\lim\limits_{n \to \infty} 3 = 3$

(2) 수열의 발산

수열 $\{a_n\}$이 수렴하지 않으면 수열 $\{a_n\}$은 발산한다고 한다. 다음은 수열 $\{a_n\}$이 발산하는 경우이다.

① 수열 $\{a_n\}$에서 $n$의 값이 한없이 커질 때, $a_n$의 값이 한없이 커지면 수열 $\{a_n\}$은 양의 무한대로 발산한다고 하고, 이것을 기호로 다음과 같이 나타낸다.

$\lim\limits_{n \to \infty} a_n = \infty$ 또는 $n \to \infty$일 때 $a_n \to \infty$

**예** $\lim\limits_{n \to \infty} n = \infty$

② 수열 $\{a_n\}$에서 $n$의 값이 한없이 커질 때, $a_n$의 값이 음수이면서 그 절댓값이 한없이 커지면 수열 $\{a_n\}$은 음의 무한대로 발산한다고 하고, 이것을 기호로 다음과 같이 나타낸다.

$\lim\limits_{n \to \infty} a_n = -\infty$ 또는 $n \to \infty$일 때 $a_n \to -\infty$

**예** $\lim\limits_{n \to \infty} (-n) = -\infty$

③ 수열 $\{a_n\}$에서 $n$의 값이 한없이 커질 때, 수열 $\{a_n\}$이 수렴하지도 않고 양의 무한대나 음의 무한대로 발산하지도 않으면 수열 $\{a_n\}$은 진동한다고 한다.

**예** 수열 $\{(-1)^n\}$은 $-1$, $1$이 한없이 반복되므로 진동하는 수열이다.

## 2. 수열의 극한에 대한 기본 성질

두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$에 대하여 $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = \alpha$, $\lim\limits_{n \to \infty} b_n = \beta$ ($\alpha$, $\beta$는 상수)일 때

(1) $\lim\limits_{n \to \infty} ca_n = c\lim\limits_{n \to \infty} a_n = c\alpha$ (단, $c$는 상수)

(2) $\lim\limits_{n \to \infty} (a_n + b_n) = \lim\limits_{n \to \infty} a_n + \lim\limits_{n \to \infty} b_n = \alpha + \beta$

(3) $\lim\limits_{n \to \infty} (a_n - b_n) = \lim\limits_{n \to \infty} a_n - \lim\limits_{n \to \infty} b_n = \alpha - \beta$

(4) $\lim\limits_{n \to \infty} a_n b_n = \lim\limits_{n \to \infty} a_n \times \lim\limits_{n \to \infty} b_n = \alpha\beta$

(5) $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{a_n}{b_n} = \dfrac{\lim\limits_{n \to \infty} a_n}{\lim\limits_{n \to \infty} b_n} = \dfrac{\alpha}{\beta}$ (단, 모든 자연수 $n$에 대하여 $b_n \neq 0$, $\beta \neq 0$)

## 예제 1 수열의 극한에 대한 기본 성질



수렴하는 수열 $\{a_n\}$에 대하여

$$\lim_{n\to\infty} a_{2n}+3\lim_{n\to\infty} a_{2n+1}+5\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_n}{2}-1\right)=7$$

일 때, $\lim_{n\to\infty} a_n$의 값은?

① $\frac{22}{13}$　② $\frac{24}{13}$　③ 2　④ $\frac{28}{13}$　⑤ $\frac{30}{13}$

**길잡이** 수열의 극한에 대한 기본 성질을 이용한다.

**풀이** $\lim_{n\to\infty} a_n=p$ ($p$는 상수)라 하면

$$\lim_{n\to\infty} a_{2n}=\lim_{n\to\infty} a_{2n+1}=p$$

이고

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_n}{2}-1\right)=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty} a_n-1=\frac{p}{2}-1$$

이므로

$$\lim_{n\to\infty} a_{2n}+3\lim_{n\to\infty} a_{2n+1}+5\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_n}{2}-1\right)=7$$

에서

$$p+3p+5\left(\frac{p}{2}-1\right)=7,\ \frac{13}{2}p=12$$

따라서 $p=\frac{24}{13}$이므로 $\lim_{n\to\infty} a_n=\frac{24}{13}$

답 ②

## 유제

정답과 풀이 4쪽

**1** [23011-0001]

수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 $n$에 대하여 $a_n=(-1)^n$을 만족시킬 때, **보기**에서 수렴하는 수열만을 있는 대로 고른 것은?

보기

ㄱ. $\{(a_n)^2\}$　ㄴ. $\{a_n+a_{n+1}\}$　ㄷ. $\{a_n\times a_{n+1}\}$

① ㄱ　② ㄷ　③ ㄱ, ㄴ　④ ㄴ, ㄷ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

**2** [23011-0002]

두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$에 대하여

$$\lim_{n\to\infty}(3a_n-1)=5,\ \lim_{n\to\infty}(2a_n+3b_n)=7$$

일 때, $\lim_{n\to\infty}(b_n+4)$의 값은?

① 1　② 3　③ 5　④ 7　⑤ 9

# 01 수열의 극한

## 3. 수열의 극한값의 계산

두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$에 대하여 일반항 $a_n$, $b_n$이 각각 $n$에 대한 일차 이상의 다항식일 때

(1) $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}$의 값은 다음과 같이 구할 수 있다. (단, 모든 자연수 $n$에 대하여 $b_n\neq0$)

① ($a_n$의 차수)>($b_n$의 차수)이면 $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\infty$ 또는 $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=-\infty$

② ($a_n$의 차수)<($b_n$의 차수)이면 $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=0$

③ ($a_n$의 차수)=($b_n$의 차수)=$p$ ($p$는 자연수)이면 $\frac{a_n}{b_n}$의 분모와 분자를 $n^p$으로 각각 나눈 후 수열의 극한에 대한 기본 성질을 이용하여 구한다.

예 $\lim_{n\to\infty}\frac{3n-1}{2n+5}=\lim_{n\to\infty}\frac{3-\frac{1}{n}}{2+\frac{5}{n}}=\frac{\lim_{n\to\infty}\left(3-\frac{1}{n}\right)}{\lim_{n\to\infty}\left(2+\frac{5}{n}\right)}=\frac{\lim_{n\to\infty}3-\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}}{\lim_{n\to\infty}2+\lim_{n\to\infty}\frac{5}{n}}=\frac{3-0}{2+0}=\frac{3}{2}$

(2) $\lim_{n\to\infty}(\sqrt{a_n}-\sqrt{b_n})$의 값은 다음과 같이 구할 수 있다. (단, 모든 자연수 $n$에 대하여 $a_n\geq0$, $b_n\geq0$)

① ($a_n$의 차수)≠($b_n$의 차수)이면 $\lim_{n\to\infty}(\sqrt{a_n}-\sqrt{b_n})=\infty$ 또는 $\lim_{n\to\infty}(\sqrt{a_n}-\sqrt{b_n})=-\infty$

② ($a_n$의 차수)=($b_n$의 차수)이면 $\sqrt{a_n}-\sqrt{b_n}=\frac{a_n-b_n}{\sqrt{a_n}+\sqrt{b_n}}$으로 변형하여 구한다.

예 $\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+2n}-n)=\lim_{n\to\infty}\frac{(\sqrt{n^2+2n}-n)(\sqrt{n^2+2n}+n)}{\sqrt{n^2+2n}+n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2n}{\sqrt{n^2+2n}+n}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{\sqrt{1+\frac{2}{n}}+1}=\frac{2}{1+1}=1$

## 4. 수열의 극한의 대소 관계

두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$에 대하여 $\lim_{n\to\infty}a_n=\alpha$, $\lim_{n\to\infty}b_n=\beta$ ($\alpha$, $\beta$는 상수)일 때

(1) 모든 자연수 $n$에 대하여 $a_n\leq b_n$이면 $\alpha\leq\beta$이다.

(2) 수열 $\{c_n\}$이 모든 자연수 $n$에 대하여 $a_n\leq c_n\leq b_n$을 만족시키고 $\alpha=\beta$이면 $\lim_{n\to\infty}c_n=\alpha$이다.

예 수열 $\{c_n\}$이 모든 자연수 $n$에 대하여 $\frac{2n-1}{n+1}\leq c_n\leq\frac{2n+3}{n+2}$을 만족시키면 $\lim_{n\to\infty}\frac{2n-1}{n+1}=2$, $\lim_{n\to\infty}\frac{2n+3}{n+2}=2$이므로 $\lim_{n\to\infty}c_n=2$이다.

참고 (1)에서 모든 자연수 $n$에 대하여 $a_n<b_n$이지만 $\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}b_n$인 경우도 있다.

$a_n=\frac{1}{n}$, $b_n=\frac{3}{n}$이면 모든 자연수 $n$에 대하여 $a_n<b_n$이지만 $\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$, $\lim_{n\to\infty}b_n=\lim_{n\to\infty}\frac{3}{n}=0$이므로 $\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}b_n$이다.

(2)에서 모든 자연수 $n$에 대하여 $a_n<c_n<b_n$인 경우에도 $\alpha=\beta$이면 $\lim_{n\to\infty}c_n=\alpha$이다.

$a_n=\frac{1}{n}$, $b_n=\frac{3}{n}$, $c_n=\frac{2}{n}$이면 모든 자연수 $n$에 대하여 $a_n<c_n<b_n$이고 $\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}b_n=0$이므로 $\lim_{n\to\infty}c_n=0$이다.

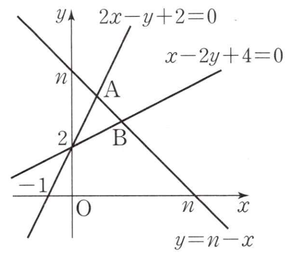
## 예제 2 수열의 극한값의 계산



그림과 같이 3 이상의 자연수 $n$에 대하여 직선 $y=n-x$가 두 직선 $2x-y+2=0$, $x-2y+4=0$과 만나는 두 점을 각각 A, B라 하고, $l_n=\overline{AB}^2$이라 하자. 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 $n$에 대하여

$$l_{2n+1} \le n^2 a_n \le l_{2n+2}$$

를 만족시킬 때, $\lim_{n\to\infty} a_n$의 값은?




① $\frac{4}{9}$　② $\frac{5}{9}$　③ $\frac{2}{3}$　④ $\frac{7}{9}$　⑤ $\frac{8}{9}$

**길잡이** 두 직선이 만나는 점의 좌표를 구하여 수열 $\{l_n\}$의 일반항을 구한 후 수열의 극한의 대소 관계를 이용하여 수열 $\{a_n\}$의 극한값을 구한다.

**풀이** $y=n-x$를 $2x-y+2=0$에 대입하면

$2x-n+x+2=0$, $x=\frac{n-2}{3}$ …… ㉠

$y=n-x$를 $x-2y+4=0$에 대입하면

$x-2n+2x+4=0$, $x=\frac{2n-4}{3}$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 두 점 A, B의 $x$좌표가 각각 $\frac{n-2}{3}$, $\frac{2n-4}{3}$이고, 직선 $y=n-x$의 기울기가 $-1$이므로

$$\overline{AB}=\sqrt{2}\left(\frac{2n-4}{3}-\frac{n-2}{3}\right)=\sqrt{2}\times\frac{n-2}{3}$$

즉, $l_n=\overline{AB}^2=\frac{2(n-2)^2}{9}$ (단, $n\ge3$)

이때 모든 자연수 $n$에 대하여 $l_{2n+1}\le n^2a_n\le l_{2n+2}$, 즉 $\frac{l_{2n+1}}{n^2}\le a_n\le\frac{l_{2n+2}}{n^2}$이고,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{l_{2n+1}}{n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{2(2n-1)^2}{9n^2}=\frac{8}{9},\ \lim_{n\to\infty}\frac{l_{2n+2}}{n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{2(2n)^2}{9n^2}=\frac{8}{9}$$

이므로 수열의 극한의 대소 관계에 의하여

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\frac{8}{9}$$

답 ⑤

## 유제

정답과 풀이 4쪽

**3** [23011-0003]

$\lim_{n\to\infty}a_n=k$ ($k$는 자연수)인 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 $n$에 대하여

$$|(2n+3)a_n-4n|<a_n+n-1$$

을 만족시킬 때, $k$의 값은?

① 1　② 2　③ 3　④ 4　⑤ 5

## 5. 등비수열의 극한

등비수열 $\{r^n\}$의 수렴과 발산은 공비 $r$의 값의 범위에 따라 다음과 같다.

(1) $r>1$일 때, $\lim_{n\to\infty} r^n=\infty$ (발산)

(2) $r=1$일 때, $\lim_{n\to\infty} r^n=1$ (수렴)

(3) $-1<r<1$일 때, $\lim_{n\to\infty} r^n=0$ (수렴)

(4) $r\le -1$일 때, 수열 $\{r^n\}$은 진동한다. (발산)

**설명** (1) $r>1$일 때

$r=1+h\ (h>0)$으로 놓으면 모든 자연수 $n$에 대하여

$$r^n=(1+h)^n\ge 1+nh$$

이때 $\lim_{n\to\infty}(1+nh)=\infty$이므로 $\lim_{n\to\infty} r^n=\infty$

(2) $r=1$일 때

수열 $\{r^n\}$의 모든 항이 1이므로 $\lim_{n\to\infty} r^n=1$

(3) $-1<r<1$일 때

㉠ $r=0$이면 수열 $\{r^n\}$의 모든 항이 0이므로 $\lim_{n\to\infty} r^n=0$

㉡ $r\ne 0$이면 $\dfrac{1}{|r|}>1$이므로 (1)에 의하여 $\lim_{n\to\infty}\dfrac{1}{|r^n|}=\lim_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{|r|}\right)^n=\infty$

따라서 $\lim_{n\to\infty}|r^n|=\lim_{n\to\infty}\dfrac{1}{\dfrac{1}{|r^n|}}=0$이므로 $\lim_{n\to\infty} r^n=0$

(4) $r\le -1$일 때

㉠ $r=-1$이면 수열 $\{r^n\}$은 $-1,\ 1,\ -1,\ 1,\ \cdots$이므로 진동한다.

㉡ $r<-1$이면 $|r|>1$이므로 (1)에 의하여 $\lim_{n\to\infty}|r^n|=\lim_{n\to\infty}(|r|)^n=\infty$이고, $n$의 값이 한없이 커질 때 $r^n$의 값의 부호가 교대로 바뀌므로 수열 $\{r^n\}$은 진동한다.

**참고** ① $h>0$일 때, 모든 자연수 $n$에 대하여 $(1+h)^n\ge 1+nh$임은 수학적 귀납법으로 보일 수 있다.

② $\lim_{n\to\infty}|a_n|=0$이면 $\lim_{n\to\infty} a_n=0$이다.

③ 등비수열 $\{r^n\}$이 수렴하기 위한 필요충분조건은 $-1<r\le 1$이다.

④ $r^n$을 포함한 수열의 극한은 $r$의 값의 범위를

$$|r|>1,\ |r|<1,\ r=1,\ r=-1$$

인 경우로 나누어 구하면 편리하다.

**예** ① 수열 $\{3^n\}$은 공비가 3인 등비수열이고 $3>1$이므로 $\lim_{n\to\infty} 3^n=\infty$

② 수열 $\left\{\dfrac{1}{3^n}\right\}$은 공비가 $\dfrac{1}{3}$인 등비수열이고 $-1<\dfrac{1}{3}<1$이므로 $\lim_{n\to\infty}\dfrac{1}{3^n}=0$

③ 수열 $\{(-3)^n\}$은 공비가 $-3$인 등비수열이고 $-3<-1$이므로 수열 $\{(-3)^n\}$은 진동한다.

## 예제 3 등비수열의 극한



첫째항이 2이고 공비가 3인 등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제$n$항까지의 합을 $S_n$이라 할 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{S_{2n}}{a_{2n}+a_{2n+1}}$의 값은?

① $\frac{1}{8}$ ② $\frac{1}{4}$ ③ $\frac{3}{8}$ ④ $\frac{1}{2}$ ⑤ $\frac{5}{8}$

**길잡이** 조건을 만족시키는 등비수열의 일반항과 첫째항부터 제$n$항까지의 합을 구한 후, $|r|<1$일 때 $\lim_{n\to\infty} r^n=0$임을 이용할 수 있도록 식을 변형하여 극한값을 구한다.

**풀이** 등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항이 2이고 공비가 3이므로

$$a_n=2\times 3^{n-1}$$

$$S_n=\frac{2(3^n-1)}{3-1}=3^n-1$$

따라서

$$\lim_{n\to\infty}\frac{S_{2n}}{a_{2n}+a_{2n+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{3^{2n}-1}{2\times 3^{2n-1}+2\times 3^{2n}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{3-\left(\frac{1}{3}\right)^{2n-1}}{2+2\times 3}$$

$$=\frac{3-0}{2+6}=\frac{3}{8}$$

답 ③

## 유제

정답과 풀이 4쪽

**4** [23011-0004]

$\lim_{n\to\infty}\frac{4\times\left(\frac{1}{3}\right)^n+5\times\left(\frac{1}{6}\right)^n}{3\times\left(\frac{1}{2}\right)^{2n+1}+2\times\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}}$의 값은?

① 2 ② 4 ③ 6 ④ 8 ⑤ 10

**5** [23011-0005]

수열 $\left\{\left(\frac{x^2+2x+3}{18}\right)^n\right\}$이 수렴하도록 하는 모든 정수 $x$의 개수는?

① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

[23011-0006]

**1** 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$에 대하여

$$\lim_{n\to\infty} a_n=3,\ \lim_{n\to\infty}(2a_n-b_n)=5$$

일 때, $\lim_{n\to\infty} b_n$의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

[23011-0007]

**2** 첫째항이 2이고 공차가 3인 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제$n$항까지의 합을 $S_n$이라 할 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{S_n}{(a_n)^2}$의 값은?

① $\frac{1}{6}$ ② $\frac{1}{5}$ ③ $\frac{1}{4}$ ④ $\frac{1}{3}$ ⑤ $\frac{1}{2}$

[23011-0008]

**3** $\lim_{n\to\infty}(\sqrt{4n^2+n}-an)=b$일 때, 두 상수 $a$, $b$에 대하여 $a+\frac{1}{b}$의 값은?

① 2 ② 4 ③ 6 ④ 8 ⑤ 10

[23011-0009]

**4** $\lim_{n\to\infty}\frac{r^n+1}{r^{n+2}+r^{n+1}+1}=\frac{1}{6}$을 만족시키는 모든 실수 $r$의 값의 합은?

① $-2$ ② $-1$ ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

[23011-0010]

**1** 수열 $\{a_n\}$에 대하여

$$\lim_{n\to\infty} a_n=p,\ \lim_{n\to\infty}\{(-1)^n(2a_n+3)\}=q$$

일 때, $\lim_{n\to\infty}(4pa_n+q)$의 값은? (단, $p$, $q$는 상수이다.)

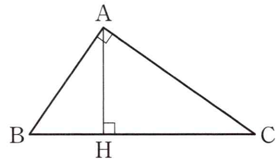
① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

[23011-0011]

**2** 그림과 같이 자연수 $n$에 대하여

$$\overline{AB}=\sqrt{n+1},\ \overline{AC}=\sqrt{2n+3},\ \angle A=90°$$

인 직각삼각형 ABC가 있다. 점 A에서 선분 BC에 내린 수선의 발을 H라 하고, $\overline{AH}=a_n$이라 하자. $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{\sqrt{n}}=p$일 때, $p^2$의 값은? (단, $p$는 실수이다.)




① $\frac{7}{12}$ ② $\frac{2}{3}$ ③ $\frac{3}{4}$ ④ $\frac{5}{6}$ ⑤ $\frac{11}{12}$

[23011-0012]

**3** 다항함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 모든 자연수 $n$에 대하여 $2n^2+1\le f(n)\le 2n^2+3$이다.

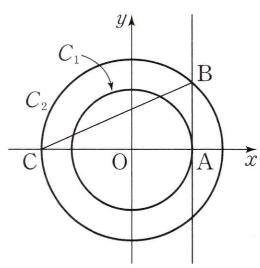
(나) $\lim_{n\to\infty} f\left(\frac{1}{n}\right)=\frac{5}{2}$

$f(1)$의 값은?

① 3 ② $\frac{7}{2}$ ③ 4 ④ $\frac{9}{2}$ ⑤ 5

[23011-0013]

**4** 그림과 같이 자연수 $n$에 대하여 좌표평면에 중심이 원점 O이고 반지름의 길이가 각각 $2^n$, $3^n$인 두 원 $C_1$, $C_2$가 있다. 원 $C_1$이 $x>0$에서 $x$축과 만나는 점을 A, 점 A를 지나고 원 $C_1$에 접하는 직선이 제1사분면에서 원 $C_2$와 만나는 점을 B, 원 $C_2$가 $x<0$에서 $x$축과 만나는 점을 C라 하자. 선분 BC의 길이를 $f(n)$이라 할 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{f(n+1)}{f(n)}$의 값은?




① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

[23011-0014]

**1** 다항함수 $f(x)$와 최고차항의 계수가 1인 이차함수 $g(x)$가

$$\lim_{n\to\infty}\frac{g(n)\times g\left(\frac{1}{n}\right)}{f(n)}=\frac{1}{2}$$

을 만족시킨다. 상수 $p$에 대하여

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f(n^2)\times f\left(\frac{1}{n^2}\right)}{\{g(n)\}^p}=8$$

일 때, $p+f(0)\times g(0)$의 값은? (단, $f(0)\times g(0)\neq 0$)

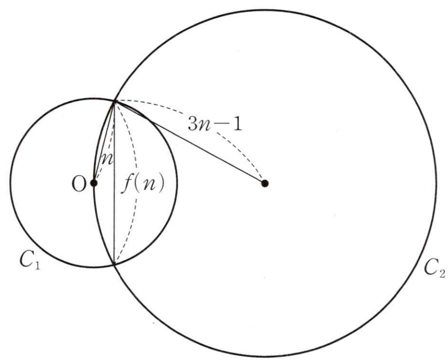
① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

[23011-0015]

**2** 자연수 $n$에 대하여 그림과 같이 중심이 O이고 반지름의 길이가 $n$인 원을 $C_1$, 점 O를 지나고 반지름의 길이가 $3n-1$인 원을 $C_2$라 하고, 두 원 $C_1$, $C_2$가 만나는 두 점 사이의 거리를 $f(n)$이라 하자. 두 상수 $a$, $b$에 대하여

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f(n)}{\sqrt{an^b+1}}=\frac{\sqrt{7}}{3}$$

일 때, $a+b$의 값은?




① 6 ② 7 ③ 8
④ 9 ⑤ 10

[23011-0016]

**3** $x>-2$에서 정의된 함수

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{4x^{2n}-x^{2n-1}}{x^{2n}+2x^{2n-1}+3}$$

에 대하여 직선 $y=tx+2t+2$가 함수 $y=f(x)$의 그래프와 오직 한 점에서만 만나도록 하는 모든 양의 실수 $t$의 값의 합이 $\frac{q}{p}$일 때, $p+q$의 값을 구하시오. (단, $p$와 $q$는 서로소인 자연수이다.)

# 대표 기출 문제

EBS

**출제 경향** 수열의 극한에 대한 기본 성질을 이용하여 수열의 극한값을 구하는 계산 문제, 수열의 극한의 대소 관계를 이용하여 수열의 극한값을 구하는 문제, 그래프나 도형으로부터 수열의 일반항을 구하여 극한값을 구하는 문제 등이 출제되고 있다.

2023학년도 대수능 9월 모의평가

수열 $\{a_n\}$에 대하여 $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n+2}{2}=6$일 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{na_n+1}{a_n+2n}$의 값은? [3점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

**출제 의도** 수열의 극한에 대한 기본 성질을 이용하여 주어진 수열의 극한값을 구할 수 있는지를 묻는 문제이다.

**풀이** $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n+2}{2}=6$

이므로

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}a_n&=\lim_{n\to\infty}\left(2\times\frac{a_n+2}{2}-2\right)\\&=2\lim_{n\to\infty}\frac{a_n+2}{2}-2\\&=2\times6-2=10\end{aligned}$$

따라서

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\frac{na_n+1}{a_n+2n}&=\lim_{n\to\infty}\frac{a_n+\frac{1}{n}}{\frac{a_n}{n}+2}\\&=\frac{10+0}{0+2}=5\end{aligned}$$

답 ⑤

# 02 급수

## 1. 급수의 뜻

수열 $\{a_n\}$의 각 항을 차례로 덧셈 기호 $+$로 연결한 식

$$a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n+\cdots$$

을 급수라 하고, 이것을 기호 $\sum$를 사용하여 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$과 같이 나타낸다. 즉,

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n+\cdots$$

예 ① $\sum_{n=1}^{\infty}(3n-1)=2+5+8+\cdots+(3n-1)+\cdots$

② $\sum_{n=1}^{\infty}2^{n-1}=1+2+2^2+\cdots+2^{n-1}+\cdots$

## 2. 급수의 수렴과 발산

급수 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$에서 첫째항부터 제$n$항까지의 합

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}a_k=a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n$$

을 이 급수의 제$n$항까지의 부분합이라 한다.

이때 급수 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$의 제$n$항까지의 부분합으로 이루어진 수열 $\{S_n\}$이 일정한 값 $S$에 수렴하면, 즉

$$\lim_{n\to\infty}S_n=S$$

이면 급수 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$은 $S$에 수렴한다고 하고 $S$를 이 급수의 합이라 하며, 이것을 기호로

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=S$$

와 같이 나타낸다.

한편, 수열 $\{S_n\}$이 발산할 때 급수 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$은 발산한다고 한다.

예 ① 급수 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$의 제$n$항까지의 부분합을 $S_n$이라 하면

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)=\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)=1-\frac{1}{n+1}$$

이고, $\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=1$이므로

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)=1$$

② 급수 $\sum_{n=1}^{\infty}(4n-1)$의 제$n$항까지의 부분합을 $S_n$이라 하면

$S_n=\sum_{k=1}^{n}(4k-1)=4\times\frac{n(n+1)}{2}-n=2n^2+n$이고, $\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}(2n^2+n)=\infty$이므로 급수 $\sum_{n=1}^{\infty}(4n-1)$은 발산한다.

## 예제 1 급수의 합



공차가 3인 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_n a_{n+1}}=\frac{1}{6}$$

일 때, $a_5$의 값은? (단, $a_n \neq 0$)

① 11　　② 12　　③ 13　　④ 14　　⑤ 15

**길잡이** 급수 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_n a_{n+1}}$의 제$n$항까지의 부분합을 $S_n$이라 할 때, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_n a_{n+1}}=\lim_{n\to\infty}S_n$임을 이용한다.

**풀이** 급수 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_n a_{n+1}}$의 제$n$항까지의 부분합을 $S_n$이라 하면

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k a_{k+1}}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_{k+1}-a_k}\left(\frac{1}{a_k}-\frac{1}{a_{k+1}}\right)=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{3}\left(\frac{1}{a_k}-\frac{1}{a_{k+1}}\right)$$

$$=\frac{1}{3}\left\{\left(\frac{1}{a_1}-\frac{1}{a_2}\right)+\left(\frac{1}{a_2}-\frac{1}{a_3}\right)+\left(\frac{1}{a_3}-\frac{1}{a_4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{a_n}-\frac{1}{a_{n+1}}\right)\right\}=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{a_1}-\frac{1}{a_{n+1}}\right)$$

수열 $\{a_n\}$은 공차가 3인 등차수열이므로

$$a_n=a_1+(n-1)\times 3=3n+a_1-3$$

이때 $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{a_{n+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{3n+a_1}=0$이므로

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_n a_{n+1}}=\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{3}\left(\frac{1}{a_1}-\frac{1}{a_{n+1}}\right)=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{a_1}-0\right)=\frac{1}{3a_1}$$

즉, $\frac{1}{3a_1}=\frac{1}{6}$이므로 $a_1=2$

따라서 $a_n=3n-1$이므로

$$a_5=3\times 5-1=14$$

답 ④

## 유제

정답과 풀이 9쪽

**1** [23011-0017]

수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 $n$에 대하여

$$\sum_{k=1}^{n}a_{2k-1}=\frac{3n^2-n}{n^2+1},\ \sum_{k=1}^{n}a_{2k}=\frac{4n-3}{2n+1}$$

을 만족시킨다. 급수 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$이 실수 $p$에 수렴할 때, $p$의 값은?

① 3　　② 4　　③ 5　　④ 6　　⑤ 7

**2** [23011-0018]

좌표평면에서 자연수 $n$에 대하여 두 직선 $y=x$, $y=\frac{n}{2n+1}x+3$이 만나는 점의 $x$좌표를 $f(n)$이라 하자. 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제$n$항까지의 합이 $f(n)$일 때, $a_1+\sum_{n=1}^{\infty}a_n$의 값은?

① 10　　② $\frac{21}{2}$　　③ 11　　④ $\frac{23}{2}$　　⑤ 12

# 02 급수

## 3. 급수와 수열의 극한 사이의 관계

수열 $\{a_n\}$에 대하여

(1) 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$이 수렴하면 $\lim_{n\to\infty} a_n=0$이다.

(2) $\lim_{n\to\infty} a_n\neq 0$이면 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$은 발산한다.

**설명** (1) 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$이 $S$에 수렴한다고 하자.

급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$의 제$n$항까지의 부분합을 $S_n$이라 하면 $n\geq 2$일 때

$$\lim_{n\to\infty} S_n=\lim_{n\to\infty} S_{n-1}=S$$

이고, $a_n=S_n-S_{n-1}\ (n\geq 2)$이므로

$$\lim_{n\to\infty} a_n=\lim_{n\to\infty}(S_n-S_{n-1})=\lim_{n\to\infty} S_n-\lim_{n\to\infty} S_{n-1}=S-S=0$$

따라서 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$이 수렴하면 $\lim_{n\to\infty} a_n=0$이다.

(2) (1)의 명제가 참이므로 그 대우 '$\lim_{n\to\infty} a_n\neq 0$이면 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$은 발산한다.'는 참이다.

**예** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n}{3n+1}$에서 $\lim_{n\to\infty} \frac{2n}{3n+1}=\lim_{n\to\infty} \frac{2}{3+\frac{1}{n}}=\frac{2}{3}\neq 0$이므로 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n}{3n+1}$은 발산한다.

**참고** (1)의 명제의 역은 성립하지 않는다. 즉, $\lim_{n\to\infty} a_n=0$이라고 해서 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$이 반드시 수렴하는 것은 아니다.

예를 들어 $a_n=\frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}$이면 $\lim_{n\to\infty} a_n=0$이지만

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n=\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}=\sum_{n=1}^{\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}(\sqrt{k+1}-\sqrt{k})=\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n+1}-1)=\infty$$

이므로 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$은 발산한다.

## 4. 급수의 성질

두 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$이 모두 수렴하고, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n=S$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n=T$라 할 때

(1) $\sum_{n=1}^{\infty} ca_n=c\sum_{n=1}^{\infty} a_n=cS$ (단, $c$는 상수)

(2) $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)=\sum_{n=1}^{\infty} a_n+\sum_{n=1}^{\infty} b_n=S+T$

(3) $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n-b_n)=\sum_{n=1}^{\infty} a_n-\sum_{n=1}^{\infty} b_n=S-T$

**예** 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$에 대하여 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n=3$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n=2$일 때

$$\sum_{n=1}^{\infty}(2a_n+b_n)=\sum_{n=1}^{\infty} 2a_n+\sum_{n=1}^{\infty} b_n=2\sum_{n=1}^{\infty} a_n+\sum_{n=1}^{\infty} b_n=2\times 3+2=8$$

## 예제 2 급수의 성질



두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$에 대하여

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n+2)=3,\ \sum_{n=1}^{\infty}(3a_n-b_n+2)=5$$

일 때, $\lim_{n\to\infty}\left\{2a_n-3b_n+\sum_{k=1}^{n}(a_k+1)\right\}$의 값은?

① 1　　② 2　　③ 3　　④ 4　　⑤ 5

**길잡이**

(1) 급수 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$이 수렴하면 $\lim_{n\to\infty}a_n=0$이다.

(2) 두 급수 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$이 모두 수렴하면 $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n+\sum_{n=1}^{\infty}b_n$, $\sum_{n=1}^{\infty}ca_n=c\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ ($c$는 상수)이다.

**풀이**

두 급수 $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n+2)$, $\sum_{n=1}^{\infty}(3a_n-b_n+2)$가 모두 수렴하므로

$$\lim_{n\to\infty}(a_n+b_n+2)=0,\ \lim_{n\to\infty}(3a_n-b_n+2)=0$$

그러므로

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}a_n&=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{4}\{(a_n+b_n+2)+(3a_n-b_n+2)-4\}\\&=\frac{1}{4}\lim_{n\to\infty}(a_n+b_n+2)+\frac{1}{4}\lim_{n\to\infty}(3a_n-b_n+2)-1\\&=\frac{1}{4}\times0+\frac{1}{4}\times0-1=-1\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}b_n&=\lim_{n\to\infty}\{(a_n+b_n+2)-a_n-2\}=\lim_{n\to\infty}(a_n+b_n+2)-\lim_{n\to\infty}a_n-2\\&=0-(-1)-2=-1\end{aligned}$$

한편, $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n+2)+\sum_{n=1}^{\infty}(3a_n-b_n+2)=\sum_{n=1}^{\infty}(4a_n+4)=4\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+1)$에서

$$4\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+1)=3+5=8,\ 즉\ \sum_{n=1}^{\infty}(a_n+1)=2$$

따라서

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\left\{2a_n-3b_n+\sum_{k=1}^{n}(a_k+1)\right\}&=2\lim_{n\to\infty}a_n-3\lim_{n\to\infty}b_n+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+1)\\&=2\times(-1)-3\times(-1)+2=3\end{aligned}$$

답 ③

## 유제

정답과 풀이 10쪽

**3**
[23011-0019]

수열 $\{a_n\}$에 대하여 $\sum_{n=1}^{\infty}(na_n-2)=3$일 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{n\sqrt{na_n}+1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{4n+1}}$의 값은?

① $\frac{1}{3}$　　② $\frac{2}{3}$　　③ 1　　④ $\frac{4}{3}$　　⑤ $\frac{5}{3}$

# 02 급수

## 5. 등비급수의 뜻

첫째항이 $a$ $(a\neq 0)$이고 공비가 $r$인 등비수열 $\{ar^{n-1}\}$의 각 항을 차례로 덧셈 기호 $+$로 연결한 급수

$$\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1}=a+ar+ar^2+\cdots+ar^{n-1}+\cdots$$

을 첫째항이 $a$이고 공비가 $r$인 등비급수라 한다.

## 6. 등비급수의 수렴과 발산

첫째항이 $a$ $(a\neq 0)$이고 공비가 $r$인 등비급수 $\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1}$은

(1) $|r|<1$일 때, 수렴하고 그 합은 $\frac{a}{1-r}$이다. 즉,

$$\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1}=\frac{a}{1-r}$$

(2) $|r|\geq 1$일 때, 발산한다.

**설명** (1) $|r|<1$일 때

급수 $\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1}$의 제$n$항까지의 부분합을 $S_n$이라 하면

$$S_n=\frac{a(1-r^n)}{1-r}$$

이고 $\lim_{n\to\infty} r^n=0$이므로

$$\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1}=\lim_{n\to\infty} S_n=\lim_{n\to\infty}\frac{a(1-r^n)}{1-r}=\frac{a}{1-r}$$

(2) $|r|\geq 1$일 때

$\lim_{n\to\infty} ar^{n-1}\neq 0$이므로 급수와 수열의 극한 사이의 관계에 의하여 등비급수 $\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1}$은 발산한다.

**참고** 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1}$에서 $a=0$이면 급수의 각 항이 0이므로 $\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1}=0$이다.

즉, 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1}$이 수렴할 필요충분조건은 $a=0$ 또는 $|r|<1$이다.

**예** ① 등비급수 $\sum_{n=1}^{\infty}\left\{3\times\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right\}$은 첫째항이 3, 공비가 $\frac{1}{2}$이고, $\left|\frac{1}{2}\right|<1$이므로 수렴하고 그 합은

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left\{3\times\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right\}=\frac{3}{1-\frac{1}{2}}=6$$

② 등비급수 $\sum_{n=1}^{\infty}(-3)^n$은 공비가 $-3$이고 $|-3|\geq 1$이므로 발산한다.

## 예제 3 등비급수의 합

www.ebsi.co.kr

등비수열 $\{a_n\}$에 대하여

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 12,\ 3\sum_{n=1}^{\infty} a_{2n} = \sum_{n=1}^{\infty} a_{2n-1}$$

일 때, $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n)^2$의 값은?

① 72 ② 74 ③ 76 ④ 78 ⑤ 80

**길잡이** 등비수열 $\{a_n\}$의 공비가 $r$일 때, 수열 $\{a_{2n}\}$은 첫째항이 $a_1 r$, 공비가 $r^2$인 등비수열이고, 수열 $\{a_{2n-1}\}$은 첫째항이 $a_1$, 공비가 $r^2$인 등비수열임을 이용한다.

**풀이** 등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 $a$, 공비를 $r$라 하면 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 12$이므로 $a \neq 0$, $|r| < 1$이다. 이때

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{2n} = \frac{ar}{1-r^2},\ \sum_{n=1}^{\infty} a_{2n-1} = \frac{a}{1-r^2}$$

이므로 $3\sum_{n=1}^{\infty} a_{2n} = \sum_{n=1}^{\infty} a_{2n-1}$에서

$$3 \times \frac{ar}{1-r^2} = \frac{a}{1-r^2}$$

$a \neq 0$, $r^2 \neq 1$이므로 $3r = 1$

$$r = \frac{1}{3}$$

이때 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \dfrac{a}{1-\frac{1}{3}} = \dfrac{3}{2}a = 12$이므로 $a = 8$

따라서 $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n)^2 = \dfrac{a^2}{1-r^2} = \dfrac{64}{1-\frac{1}{9}} = 72$

답 ①

## 유제

정답과 풀이 10쪽

**4** [23011-0020]

$\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{2^n + 6^{n-1}}{12^{n+1}} = \dfrac{q}{p}$일 때, $p+q$의 값을 구하시오. (단, $p$와 $q$는 서로소인 자연수이다.)

**5** [23011-0021]

첫째항이 1인 두 등비수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$에 대하여 두 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$이 모두 수렴하고

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) = \frac{10}{3},\ \sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n = \frac{8}{7}$$

일 때, $a_2 + b_2$의 값은?

① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ $\frac{3}{4}$ ④ 1 ⑤ $\frac{5}{4}$

[23011-0022]

**1** 자연수 $n$에 대하여 $x$에 대한 이차방정식

$$x^2-3nx+n^2-4=0$$

의 두 근을 각각 $\alpha_n$, $\beta_n$이라 할 때, $\sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{\alpha_n\beta_n}$의 값은?

① $\frac{7}{16}$ ② $\frac{23}{48}$ ③ $\frac{25}{48}$ ④ $\frac{9}{16}$ ⑤ $\frac{29}{48}$

[23011-0023]

**2** 수열 $\{a_n\}$에 대하여

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n-3n-1}{2n+1}=4$$

일 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{2na_n}{5n^2+3}$의 값은?

① $\frac{2}{5}$ ② $\frac{4}{5}$ ③ $\frac{6}{5}$ ④ $\frac{8}{5}$ ⑤ 2

[23011-0024]

**3** 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$에 대하여

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n-3b_n)=p,\ \sum_{n=1}^{\infty}(3a_n-b_n)=10$$

이다. $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)=3$일 때, 실수 $p$의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

[23011-0025]

**4** 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 $n$에 대하여

$$a_{n+1}=\frac{3}{5}a_n$$

을 만족시킨다. $\sum_{n=1}^{\infty}a_{2n}=30$일 때, $a_1$의 값은?

① 32 ② 34 ③ 36 ④ 38 ⑤ 40

[23011-0026]

**1** $a_5=\frac{1}{33}$인 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제$n$항까지의 합을 $S_n$이라 할 때, $S_n=\frac{kn+3}{2n+1}$이다. $\lim_{n\to\infty} n^2a_n+\sum_{n=1}^{\infty}a_n$의 값은? (단, $k$는 상수이다.)

① $\frac{21}{4}$ ② $\frac{23}{4}$ ③ $\frac{25}{4}$ ④ $\frac{27}{4}$ ⑤ $\frac{29}{4}$

[23011-0027]

**2** 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$에 대하여

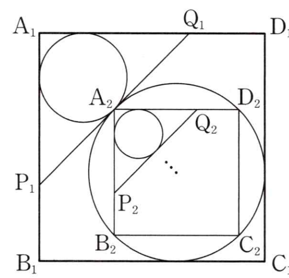
$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n-\frac{3}{2^n}\right)=5,\ \sum_{n=1}^{\infty}(2a_n-3b_n)=7$$

일 때, $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$의 값은?

① 1 ② 3 ③ 5 ④ 7 ⑤ 9

[23011-0028]

**3** 그림과 같이 한 변의 길이가 3인 정사각형 $A_1B_1C_1D_1$에 대하여 선분 $A_1B_1$을 $2:1$로 내분하는 점을 $P_1$, 선분 $A_1D_1$을 $2:1$로 내분하는 점을 $Q_1$이라 하고, 삼각형 $A_1P_1Q_1$의 내접원의 둘레의 길이를 $l_1$이라 하자.
세 선분 $P_1Q_1$, $B_1C_1$, $C_1D_1$에 모두 접하는 원에 내접하는 정사각형 $A_2B_2C_2D_2$에 대하여 선분 $A_2B_2$를 $2:1$로 내분하는 점을 $P_2$, 선분 $A_2D_2$를 $2:1$로 내분하는 점을 $Q_2$라 하고, 삼각형 $A_2P_2Q_2$의 내접원의 둘레의 길이를 $l_2$라 하자.
이와 같은 과정을 계속하여 $n$번째 얻은 삼각형 $A_nP_nQ_n$의 내접원의 둘레의 길이를 $l_n$이라 할 때, $\sum_{n=1}^{\infty}l_n$의 값은? (단, 자연수 $n$에 대하여 점 $A_{n+1}$은 선분 $P_nQ_n$ 위에 있다.)




① $\frac{3(6-\sqrt{2})\pi}{17}$ ② $\frac{3(6+\sqrt{2})\pi}{17}$ ③ $\frac{6(6-\sqrt{2})\pi}{17}$

④ $\frac{6(6+\sqrt{2})\pi}{17}$ ⑤ $\frac{6(9-\sqrt{2})\pi}{17}$

[23011-0029]

**1** 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제$n$항까지의 합을 $S_n$이라 할 때, **보기**에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

보기

ㄱ. 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_{2n}$이 수렴하면 $\lim_{n\to\infty} a_n=0$이다.

ㄴ. 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$이 수렴하면 수열 $\{S_{2n}\}$은 수렴한다.

ㄷ. 두 수열 $\{S_{2n-1}\}$, $\{S_{2n}\}$이 모두 수렴하면 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$은 수렴한다.

① ㄱ　② ㄴ　③ ㄷ　④ ㄱ, ㄴ　⑤ ㄴ, ㄷ

[23011-0030]

**2** 함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $0\le x<1$일 때, $f(x)=2x-2$이다.
(나) 모든 실수 $x$에 대하여 $f(x+1)=-f(x)$이다.

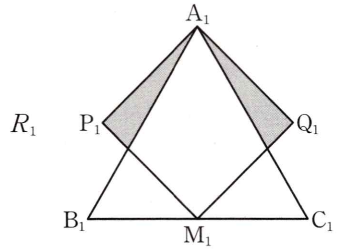
자연수 $n$에 대하여 직선 $y=\frac{1}{2n}x-1$이 함수 $y=f(x)$의 그래프와 만나는 서로 다른 점의 개수를 $a_n$이라 하자. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_n a_{n+2}}=\frac{q}{p}$일 때, $p+q$의 값을 구하시오. (단, $p$와 $q$는 서로소인 자연수이다.)

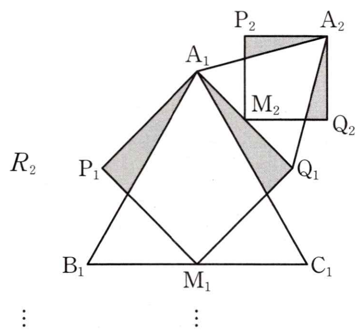
[23011-0031]

**3** 그림과 같이 한 변의 길이가 20인 정삼각형 $A_1B_1C_1$에 대하여 선분 $B_1C_1$의 중점을 $M_1$이라 하자. 선분 $A_1M_1$을 대각선으로 하는 정사각형 $A_1P_1M_1Q_1$을 그리고 사각형 $A_1P_1M_1Q_1$의 내부와 삼각형 $A_1B_1C_1$의 외부의 공통부분에 색칠하여 얻은 그림을 $R_1$이라 하자.

그림 $R_1$에 선분 $A_1Q_1$을 한 변으로 하는 정삼각형 $A_2A_1Q_1$을 사각형 $A_1P_1M_1Q_1$의 내부와 겹치지 않게 그리고, 선분 $A_1Q_1$의 중점을 $M_2$라 하자. 선분 $A_2M_2$를 대각선으로 하는 정사각형 $A_2P_2M_2Q_2$를 그리고 사각형 $A_2P_2M_2Q_2$의 내부와 삼각형 $A_2A_1Q_1$의 외부의 공통부분에 색칠하여 얻은 그림을 $R_2$라 하자.

이와 같은 과정을 계속하여 $n$번째 얻은 그림 $R_n$에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 $S_n$이라 할 때, $\lim_{n \to \infty} S_n = p + q\sqrt{3}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, $p$, $q$는 유리수이다.)



# 대표 기출 문제

EBS

**출제 경향** 기본적인 급수의 합을 구하는 문제, 급수와 수열의 극한 사이의 관계를 이용하는 문제, 등비급수의 합을 이용하여 도형의 길이나 넓이를 구하는 문제 등이 출제되고 있다.

2022학년도 대수능 9월 모의평가

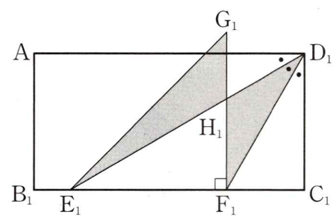
그림과 같이 $\overline{AB_1}=1$, $\overline{B_1C_1}=2$인 직사각형 $AB_1C_1D_1$이 있다. $\angle AD_1C_1$을 삼등분하는 두 직선이 선분 $B_1C_1$과 만나는 점 중 점 $B_1$에 가까운 점을 $E_1$, 점 $C_1$에 가까운 점을 $F_1$이라 하자.

$\overline{E_1F_1}=\overline{F_1G_1}$, $\angle E_1F_1G_1=\frac{\pi}{2}$이고 선분 $AD_1$과 선분 $F_1G_1$이 만나도록 점 $G_1$을 잡아 삼각형 $E_1F_1G_1$을 그린다. 선분 $E_1D_1$과 선분 $F_1G_1$이 만나는 점을 $H_1$이라 할 때, 두 삼각형 $G_1E_1H_1$, $H_1F_1D_1$로 만들어진  모양의 도형에 색칠하여 얻은 그림을 $R_1$이라 하자.

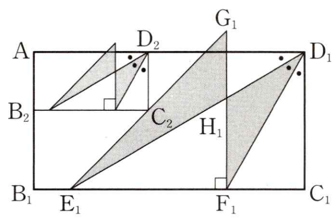
그림 $R_1$에 선분 $AB_1$ 위의 점 $B_2$, 선분 $E_1G_1$ 위의 점 $C_2$, 선분 $AD_1$ 위의 점 $D_2$와 점 A를 꼭짓점으로 하고 $\overline{AB_2}:\overline{B_2C_2}=1:2$인 직사각형 $AB_2C_2D_2$를 그린다. 직사각형 $AB_2C_2D_2$에 그림 $R_1$을 얻은 것과 같은 방법으로  모양의 도형을 그리고 색칠하여 얻은 그림을 $R_2$라 하자.

이와 같은 과정을 계속하여 $n$번째 얻은 그림 $R_n$에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 $S_n$이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} S_n$의 값은? [3점]

$R_1$




$R_2$




⋮ ⋮

① $\frac{2\sqrt{3}}{9}$　② $\frac{5\sqrt{3}}{18}$　③ $\frac{\sqrt{3}}{3}$　④ $\frac{7\sqrt{3}}{18}$　⑤ $\frac{4\sqrt{3}}{9}$

출제 의도 등비급수의 합을 이용하여 일정한 비율로 줄어들며 반복되는 도형의 넓이의 합의 극한을 구할 수 있는지를 묻는 문제이다.

풀이 $\overline{C_1E_1}=\overline{C_1D_1}\times\tan\frac{\pi}{3}=1\times\sqrt{3}=\sqrt{3}$,

$\overline{C_1F_1}=\overline{C_1D_1}\times\tan\frac{\pi}{6}=1\times\frac{\sqrt{3}}{3}=\frac{\sqrt{3}}{3}$

이므로

$$\overline{E_1F_1}=\sqrt{3}-\frac{\sqrt{3}}{3}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$$

또 $\overline{F_1H_1}=\overline{E_1F_1}\times\tan\frac{\pi}{6}=\frac{2\sqrt{3}}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{3}=\frac{2}{3}$이므로

$$\overline{G_1H_1}=\overline{G_1F_1}-\overline{F_1H_1}=\overline{E_1F_1}-\overline{F_1H_1}=\frac{2\sqrt{3}-2}{3}$$

그러므로

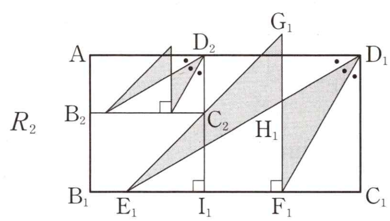
$$\begin{aligned}S_1&=\frac{1}{2}\times\overline{G_1H_1}\times\overline{E_1F_1}+\frac{1}{2}\times\overline{F_1H_1}\times\overline{C_1F_1}\\&=\frac{1}{2}\times\frac{2\sqrt{3}-2}{3}\times\frac{2\sqrt{3}}{3}+\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{3}\\&=\frac{6-\sqrt{3}}{9}\qquad\cdots\cdots\ ㉠\end{aligned}$$

한편, $\overline{C_2D_2}=k$라 하고 두 직선 $C_2D_2$, $B_1C_1$의 교점을 $I_1$이라 하면

$$\begin{aligned}\overline{C_1E_1}&=\overline{E_1I_1}+\overline{I_1C_1}=\overline{C_2I_1}+\overline{I_1C_1}\\&=(1-k)+(2-2k)=\sqrt{3}\end{aligned}$$

이므로

$$k=\frac{3-\sqrt{3}}{3}\qquad\cdots\cdots\ ㉡$$




㉠, ㉡에 의하여 $S_n$은 첫째항이 $\frac{6-\sqrt{3}}{9}$이고 공비가 $k^2=\frac{4-2\sqrt{3}}{3}$인 등비수열의 첫째항부터 제$n$항까지의 합이므로

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\frac{\frac{6-\sqrt{3}}{9}}{1-\frac{4-2\sqrt{3}}{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$$

답 ③

# 03 여러 가지 함수의 미분

## 1. 지수함수와 로그함수의 극한 (1)

(1) 지수함수의 극한

① $a>1$일 때, $\lim_{x\to\infty} a^x=\infty$ ② $0<a<1$일 때, $\lim_{x\to\infty} a^x=0$

(2) 로그함수의 극한

① $a>1$일 때, $\lim_{x\to\infty} \log_a x=\infty$, $\lim_{x\to 0+} \log_a x=-\infty$

② $0<a<1$일 때, $\lim_{x\to\infty} \log_a x=-\infty$, $\lim_{x\to 0+} \log_a x=\infty$

참고 (1) 지수함수 $y=a^x\ (a>0,\ a\neq1)$은 구간 $(-\infty,\ \infty)$에서 연속이므로 실수 $k$에 대하여 $\lim_{x\to k} a^x=a^k$이다.

(2) 로그함수 $y=\log_a x\ (a>0,\ a\neq1)$은 구간 $(0,\ \infty)$에서 연속이므로 양수 $k$에 대하여 $\lim_{x\to k}\log_a x=\log_a k$이다.

## 2. 지수함수와 로그함수의 극한 (2)

(1) 무리수 $e$의 뜻

$x$의 값이 0에 한없이 가까워질 때, $(1+x)^{\frac{1}{x}}$의 값은 일정한 값에 수렴한다는 것이 알려져 있는데 그 극한값을 $e$로 나타낸다. 즉, $\lim_{x\to0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$이다. 이때 수 $e$는 무리수이며 그 값은 $e=2.71828\cdots$임이 알려져 있다.

(2) 자연로그의 뜻

무리수 $e$를 밑으로 하는 로그 $\log_e x$를 자연로그라 하고, 기호로 $\ln x$와 같이 나타낸다.

(3) 지수함수와 로그함수의 극한

① $\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1$, $\lim_{x\to0}\frac{e^x-1}{x}=1$

② $\lim_{x\to0}\frac{\log_a(1+x)}{x}=\frac{1}{\ln a}$, $\lim_{x\to0}\frac{a^x-1}{x}=\ln a$ (단, $a>0$, $a\neq1$)

설명 ① $\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+x)}{x}=\lim_{x\to0}\frac{1}{x}\ln(1+x)=\lim_{x\to0}\ln(1+x)^{\frac{1}{x}}=\ln e=1$

또 $\lim_{x\to0}\frac{e^x-1}{x}$에서 $e^x-1=t$로 놓으면 $x=\ln(1+t)$이고, $x\to0$일 때 $t\to0$이므로

$$\lim_{x\to0}\frac{e^x-1}{x}=\lim_{t\to0}\frac{t}{\ln(1+t)}=\lim_{t\to0}\frac{1}{\frac{\ln(1+t)}{t}}=\frac{1}{\lim_{t\to0}\frac{\ln(1+t)}{t}}=\frac{1}{1}=1$$

② $\lim_{x\to0}\frac{\log_a(1+x)}{x}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{\ln(1+x)}{\ln a}}{x}=\frac{1}{\ln a}\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+x)}{x}=\frac{1}{\ln a}\times1=\frac{1}{\ln a}$

또 $\lim_{x\to0}\frac{a^x-1}{x}=\lim_{x\to0}\frac{(e^{\ln a})^x-1}{x}=\lim_{x\to0}\frac{e^{x\ln a}-1}{x}$

이때 $x\ln a=t$로 놓으면 $x=\frac{t}{\ln a}$이고, $x\to0$일 때 $t\to0$이므로

$$\lim_{x\to0}\frac{e^{x\ln a}-1}{x}=\lim_{t\to0}\frac{e^t-1}{\frac{t}{\ln a}}=\ln a\times\lim_{t\to0}\frac{e^t-1}{t}=\ln a\times1=\ln a$$

참고 함수 $y=e^x$과 함수 $y=\ln x$는 서로 역함수의 관계이므로 두 함수의 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이다.

## 예제 1 지수함수와 로그함수의 극한



등식 $\lim_{x\to 2}\frac{4^x-16}{2^x-4}=\lim_{x\to\infty}\frac{2^{x+a}-1}{2^x+1}$을 만족시키는 실수 $a$의 값은?

① 1 ② 2 ③ $\log_2 6$ ④ 3 ⑤ $\log_2 10$

**길잡이** 좌변은 $\frac{0}{0}$ 꼴이므로 분자의 식을 변형한 후 지수함수가 실수 전체의 집합에서 연속임을 이용하여 극한값을 구한다. 또 우변은 $\frac{\infty}{\infty}$ 꼴이므로 분모, 분자를 $2^x$으로 각각 나누어 함수의 극한의 성질을 이용할 수 있도록 식을 변형한다.

**풀이** 좌변의 분자의 식을 인수분해하여 식을 변형한 후 극한값을 구하면

$$\lim_{x\to 2}\frac{4^x-16}{2^x-4}=\lim_{x\to 2}\frac{(2^x+4)(2^x-4)}{2^x-4}=\lim_{x\to 2}(2^x+4)=\lim_{x\to 2}2^x+\lim_{x\to 2}4=2^2+4=8$$

또 우변의 분모와 분자를 $2^x$으로 각각 나누어 식을 변형한 후 극한값을 구하면

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2^{x+a}-1}{2^x+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{2^a-\left(\frac{1}{2}\right)^x}{1+\left(\frac{1}{2}\right)^x}=\frac{\lim_{x\to\infty}2^a-\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^x}{\lim_{x\to\infty}1+\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^x}=\frac{2^a-0}{1+0}=2^a$$

따라서 $8=2^a$이므로 $a=3$

답 ④

## 유제

정답과 풀이 14쪽

**1** [23011-0032]

$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+2x)+\ln(1-2x)}{x^2}$의 값은?

① $-4$ ② $-2$ ③ 0 ④ 2 ⑤ 4

**2** [23011-0033]

$\lim_{x\to 0}\frac{2^{ax+b}-4}{\log_2(2x+1)}=4$일 때, 두 상수 $a$, $b$에 대하여 $ab$의 값은?

① $2(\ln 2)^2$ ② 1 ③ $4(\ln 2)^2$ ④ $\frac{2}{(\ln 2)^2}$ ⑤ $\frac{4}{(\ln 2)^2}$

## 3. 지수함수와 로그함수의 미분

(1) $y=e^x$이면 $y'=e^x$

$y=\ln x$이면 $y'=\dfrac{1}{x}$

(2) $y=a^x\ (a>0,\ a\neq1)$이면 $y'=a^x\ln a$

$y=\log_a x\ (a>0,\ a\neq1)$이면 $y'=\dfrac{1}{x\ln a}$

**설명** (1) $y=e^x$에 대하여 지수함수의 극한을 이용하면

$$y'=\lim_{h\to0}\frac{e^{x+h}-e^x}{h}=\lim_{h\to0}\frac{e^x(e^h-1)}{h}=e^x\lim_{h\to0}\frac{e^h-1}{h}=e^x\times1=e^x$$

$y=\ln x$에 대하여

$$y'=\lim_{h\to0}\frac{\ln(x+h)-\ln x}{h}=\lim_{h\to0}\frac{\ln\frac{x+h}{x}}{h}=\lim_{h\to0}\frac{1}{h}\ln\left(1+\frac{h}{x}\right)$$

이때 $\dfrac{h}{x}=t$로 놓으면 $h=xt$이고, $h\to0$일 때 $t\to0$이므로 로그함수의 극한에 의하여

$$y'=\lim_{h\to0}\frac{1}{h}\ln\left(1+\frac{h}{x}\right)=\lim_{t\to0}\frac{\ln(1+t)}{xt}=\frac{1}{x}\lim_{t\to0}\frac{\ln(1+t)}{t}=\frac{1}{x}\times1=\frac{1}{x}$$

(2) $y=a^x$에 대하여 지수함수의 극한을 이용하면

$$y'=\lim_{h\to0}\frac{a^{x+h}-a^x}{h}=\lim_{h\to0}\frac{a^x(a^h-1)}{h}=a^x\lim_{h\to0}\frac{a^h-1}{h}=a^x\times\ln a=a^x\ln a$$

$y=\log_a x$에 대하여 (1)의 로그함수의 미분을 이용하면

$$y'=(\log_a x)'=\left(\frac{\ln x}{\ln a}\right)'=\frac{1}{\ln a}\times(\ln x)'=\frac{1}{\ln a}\times\frac{1}{x}=\frac{1}{x\ln a}$$

**예 1** ① $y=2e^x+1$에 대하여 $y'=(2e^x)'+(1)'=2e^x+0=2e^x$

② $y=xe^x$에 대하여 $y'=(x)'e^x+x(e^x)'=1\times e^x+x\times e^x=e^x+xe^x=(x+1)e^x$

③ $y=2\ln x+1$에 대하여 $y'=(2\ln x)'+(1)'=\dfrac{2}{x}+0=\dfrac{2}{x}$

④ $y=x\ln x$에 대하여 $y'=(x)'\ln x+x(\ln x)'=1\times\ln x+x\times\dfrac{1}{x}=\ln x+1$

**예 2** ① $y=2^x$에 대하여 $y'=2^x\ln 2$

② $y=\log_2 x$에 대하여 $y'=\dfrac{1}{x\ln 2}$

## 예제 2 지수함수와 로그함수의 미분



함수 $f(x)=x^n \ln x$에 대하여 $\lim_{x\to e}\frac{f(x)-f(e)}{x-e}=5e^3$일 때, 자연수 $n$의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

**길잡이** 도함수를 이용하여 미분계수를 구한 후 지수에 미지수를 포함한 방정식을 풀어 자연수 $n$의 값을 구한다.

**풀이** 미분계수의 정의에 의하여

$$\lim_{x\to e}\frac{f(x)-f(e)}{x-e}=f'(e)$$

$f(x)=x^n \ln x$에서

$f'(x)=nx^{n-1}\ln x+x^n\times\frac{1}{x}=nx^{n-1}\ln x+x^{n-1}=x^{n-1}(n\ln x+1)$이므로

$$f'(e)=e^{n-1}(n\ln e+1)=e^{n-1}(n\times1+1)=(n+1)e^{n-1}$$

따라서 $(n+1)e^{n-1}=5e^3$이므로 자연수 $n$의 값은 4이다.

답 ④

[참고] 자연수 $n$에 대하여 함수 $y=(n+1)e^{n-1}$은 증가하는 함수이므로 일대일함수이다.

## 유제

정답과 풀이 15쪽

**3** [23011-0034]

함수 $f(x)=2^{x+3}+4^{x+1}$에 대하여 $f'(0)$의 값은?

① $2\ln 2$ ② $4\ln 2$ ③ $8\ln 2$ ④ $16\ln 2$ ⑤ $32\ln 2$

**4** [23011-0035]

곡선 $y=xe^{x+2}$ 위의 점 $(t,\ te^{t+2})$에서의 접선의 기울기를 $f(t)$라 할 때, 부등식 $f(t)\geq0$을 만족시키는 실수 $t$의 최솟값은?

① $-2$ ② $-1$ ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

## 4. 삼각함수의 덧셈정리

(1) $\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$

$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$

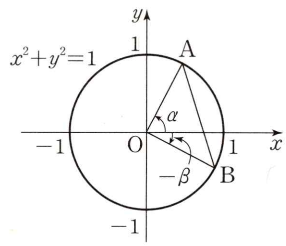
(2) $\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$

$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$

(3) $\tan(\alpha+\beta)=\dfrac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$

$\tan(\alpha-\beta)=\dfrac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}$

**설명** 그림과 같이 좌표평면에서 두 각 $\alpha$, $-\beta$ $(\alpha>0,\ \beta>0)$이 나타내는 동경과 원 $x^2+y^2=1$이 만나는 점을 각각 A, B라 하자.




원점 O에 대하여 삼각형 AOB에서 $\angle AOB=\alpha+\beta$이므로 코사인법칙으로부터

$$\overline{AB}=\sqrt{\overline{OA}^2+\overline{OB}^2-2\overline{OA}\times\overline{OB}\times\cos(\alpha+\beta)}$$
$$=\sqrt{2-2\cos(\alpha+\beta)} \quad\cdots\cdots ㉠$$

이때 점 A의 좌표는 $(\cos\alpha,\ \sin\alpha)$이고,

점 B의 좌표는 $(\cos(-\beta),\ \sin(-\beta))$, 즉 $(\cos\beta,\ -\sin\beta)$이므로

$$\overline{AB}=\sqrt{(\cos\alpha-\cos\beta)^2+(\sin\alpha+\sin\beta)^2} \quad\cdots\cdots ㉡$$

㉠과 ㉡의 우변이 서로 같으므로 두 우변을 각각 제곱하여 등식을 만들면

$$2-2\cos(\alpha+\beta)=(\cos\alpha-\cos\beta)^2+(\sin\alpha+\sin\beta)^2$$
$$=(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)+(\sin^2\beta+\cos^2\beta)-2(\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta)$$
$$=1+1-2(\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta)$$

이므로 $\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$ $\quad\cdots\cdots$ ㉢

또 $\sin\theta=\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-\theta\right)$이므로 ㉢을 이용하면

$$\sin(\alpha+\beta)=\cos\left\{\frac{\pi}{2}-(\alpha+\beta)\right\}=\cos\left\{\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)+(-\beta)\right\}$$
$$=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\cos(-\beta)-\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\sin(-\beta)$$
$$=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta \quad\cdots\cdots ㉣$$

또 $\tan\theta=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$이므로 ㉢, ㉣을 이용하면

$$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)}=\frac{\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta}=\frac{\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}+\dfrac{\sin\beta}{\cos\beta}}{1-\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\times\dfrac{\sin\beta}{\cos\beta}}=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$$

한편, $\alpha-\beta$에 대한 덧셈정리는 $\alpha+\beta$에 대한 덧셈정리에 $\beta$ 대신 $-\beta$를 대입하면 얻을 수 있다.

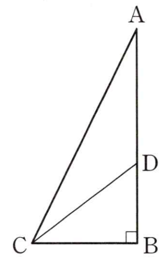
**예** ① $\sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{6}\right)=\sin\theta\cos\dfrac{\pi}{6}+\cos\theta\sin\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta+\dfrac{1}{2}\cos\theta$

② $\sin 2\theta=\sin(\theta+\theta)=\sin\theta\cos\theta+\cos\theta\sin\theta=2\sin\theta\cos\theta$

③ $\cos 2\theta=\cos(\theta+\theta)=\cos\theta\cos\theta-\sin\theta\sin\theta=\cos^2\theta-\sin^2\theta$

## 예제 3 삼각함수의 덧셈정리

그림과 같이 $\overline{AB}=8$이고 $\angle B=\frac{\pi}{2}$인 직각삼각형 ABC에서 선분 AB를 5 : 3으로 내분하는 점을 D라 하자. $\tan(\angle ACD)=\frac{1}{2}$이 되도록 하는 모든 선분 BC의 길이의 합은?



① 4 ② 6 ③ 8 ④ 10 ⑤ 12

**길잡이** 직각삼각형을 찾아 tan의 값을 구한 후 $\tan(\alpha-\beta)=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}$를 이용한다.

**풀이** $\overline{AB}=8$이고 점 D가 선분 AB를 5 : 3으로 내분하는 점이므로

$\overline{AD}=\frac{5}{8}\overline{AB}=\frac{5}{8}\times 8=5$, $\overline{DB}=\overline{AB}-\overline{AD}=8-5=3$

$\overline{BC}=x$로 놓으면 $\tan(\angle DCB)=\frac{3}{x}$, $\tan(\angle ACB)=\frac{8}{x}$

이고 $\angle ACD=\angle ACB-\angle DCB$이므로 삼각함수의 덧셈정리에 의하여

$$\tan(\angle ACD)=\tan(\angle ACB-\angle DCB)=\frac{\tan(\angle ACB)-\tan(\angle DCB)}{1+\tan(\angle ACB)\times\tan(\angle DCB)}=\frac{\frac{8}{x}-\frac{3}{x}}{1+\frac{8}{x}\times\frac{3}{x}}=\frac{5x}{x^2+24}$$

즉, $\frac{5x}{x^2+24}=\frac{1}{2}$이므로 $x^2+24=10x$, $x^2-10x+24=0$, $(x-4)(x-6)=0$

$x=4$ 또는 $x=6$

따라서 조건을 만족시키는 모든 선분 BC의 길이의 합은 $4+6=10$이다.

답 ④

## 유제

정답과 풀이 15쪽

**5** [23011-0036]

$\sin\theta=\frac{1}{3}$일 때, $9\cos 2\theta$의 값을 구하시오.

**6** [23011-0037]

$0\le x\le\pi$일 때, 방정식 $25\sin^2 x-5\cos x-13=0$의 서로 다른 두 실근을 $\alpha$, $\beta$라 하자. $\tan(\alpha+\beta)$의 값은?

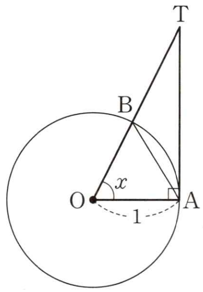
① $\frac{1}{6}$ ② $\frac{5}{24}$ ③ $\frac{1}{4}$ ④ $\frac{7}{24}$ ⑤ $\frac{1}{3}$

## 5. 삼각함수의 극한

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=1$$

**설명** (i) $0<x<\frac{\pi}{2}$일 때

그림과 같이 중심각의 크기가 $x$(라디안)이고 반지름의 길이가 1인 부채꼴 OAB에 대하여 점 A를 지나고 선분 OA에 수직인 직선과 선분 OB의 연장선이 만나는 점을 T라 하자.




(삼각형 OAB의 넓이)<(부채꼴 OAB의 넓이)<(삼각형 OAT의 넓이)이므로

$$\frac{1}{2}\times1^2\times\sin x<\frac{1}{2}\times1^2\times x<\frac{1}{2}\times1\times\tan x$$

$$\frac{1}{2}\sin x<\frac{1}{2}x<\frac{1}{2}\tan x$$

$$\sin x<x<\tan x$$

$\sin x>0$이므로 각 변을 $\sin x$로 나누면

$$1<\frac{x}{\sin x}<\frac{1}{\cos x}$$

각 변의 역수를 취하면

$$\cos x<\frac{\sin x}{x}<1$$

$\lim_{x\to0+}\cos x=1$, $\lim_{x\to0+}1=1$이므로 함수의 극한의 대소 관계에 의하여

$$\lim_{x\to0+}\frac{\sin x}{x}=1$$

(ii) $-\frac{\pi}{2}<x<0$일 때

$\lim_{x\to0-}\frac{\sin x}{x}$에서 $-x=t$로 놓으면 $0<t<\frac{\pi}{2}$이고, $x\to0-$일 때 $t\to0+$이므로

$$\lim_{x\to0-}\frac{\sin x}{x}=\lim_{t\to0+}\frac{\sin(-t)}{-t}$$

$$=\lim_{t\to0+}\frac{\sin t}{t}=1$$

(i), (ii)에 의하여 $\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=1$

**예** ① $\lim_{x\to0}\frac{\tan x}{x}=\lim_{x\to0}\left(\frac{\sin x}{x}\times\frac{1}{\cos x}\right)=\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}\times\lim_{x\to0}\frac{1}{\cos x}=1\times\frac{1}{1}=1$

② $\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{(1-\cos x)(1+\cos x)}{x^2(1+\cos x)}=\lim_{x\to0}\left(\frac{1-\cos^2 x}{x^2}\times\frac{1}{1+\cos x}\right)$

$=\lim_{x\to0}\left(\frac{\sin^2 x}{x^2}\times\frac{1}{1+\cos x}\right)=\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}\times\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}\times\lim_{x\to0}\frac{1}{1+\cos x}$

$=1\times1\times\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$

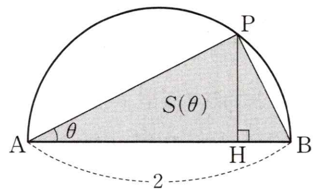
**참고** 극한값 $\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}$는 함수 $f(x)=\sin x$에 대하여 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(0,\ 0)$에서의 접선의 기울기를 나타낸다.

즉, $f'(0)=\lim_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=1$

## 예제 4 삼각함수의 극한

www.ebsi.co.kr

그림과 같이 길이가 2인 선분 AB를 지름으로 하는 반원이 있다. 호 AB 위의 두 점 A, B가 아닌 점 P에서 선분 AB에 내린 수선의 발을 H라 하자. $\angle PAB=\theta$라 할 때, 삼각형 PAB의 넓이를 $S(\theta)$라 하자. $\lim\limits_{\theta\to0+}\dfrac{\theta\times S(\theta)}{\overline{AH}\times\overline{BH}}$의 값은? $\left(단,\ 0<\theta<\dfrac{\pi}{2}\right)$




① $\dfrac{1}{4}$ ② $\dfrac{1}{2}$ ③ 1

④ 2 ⑤ 4

**길잡이** $S(\theta)$, $\overline{AH}$, $\overline{BH}$를 $\theta$에 대한 삼각함수로 나타낸 후 삼각함수의 극한을 구한다.

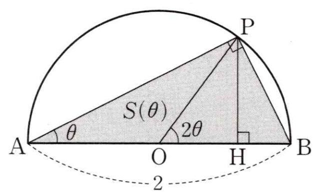
**풀이** 반원에 대한 원주각의 크기는 $\dfrac{\pi}{2}$이므로 $\angle APB=\dfrac{\pi}{2}$

직각삼각형 PAB에서

$$\cos\theta=\frac{\overline{AP}}{\overline{AB}}=\frac{\overline{AP}}{2},\ \sin\theta=\frac{\overline{BP}}{\overline{AB}}=\frac{\overline{BP}}{2}$$

즉, $\overline{AP}=2\cos\theta$, $\overline{BP}=2\sin\theta$이므로

$$S(\theta)=\frac{1}{2}\times2\cos\theta\times2\sin\theta=2\sin\theta\cos\theta$$




선분 AB의 중점을 O라 하면 $\angle POB=2\angle PAB=2\theta$

$\overline{OP}=1$이므로 삼각형 POH에서 $\sin2\theta=\dfrac{\overline{PH}}{\overline{OP}}=\overline{PH}$

$\overline{PH}^2=\overline{AH}\times\overline{BH}$이므로 $\overline{AH}\times\overline{BH}=\sin^2 2\theta$

따라서

$$\lim_{\theta\to0+}\frac{\theta\times S(\theta)}{\overline{AH}\times\overline{BH}}=\lim_{\theta\to0+}\frac{\theta\times2\sin\theta\cos\theta}{\sin^2 2\theta}=\lim_{\theta\to0+}\frac{2\times\dfrac{\sin\theta}{\theta}\times\cos\theta}{\left(\dfrac{\sin2\theta}{2\theta}\right)^2\times4}$$

$$=\frac{2\times\lim\limits_{\theta\to0+}\dfrac{\sin\theta}{\theta}\times\lim\limits_{\theta\to0+}\cos\theta}{\lim\limits_{\theta\to0+}\left(\dfrac{\sin2\theta}{2\theta}\right)^2\times4}=\frac{2\times1\times1}{1^2\times4}=\frac{1}{2}$$

답 ②

## 유제

정답과 풀이 16쪽

**7** [23011-0038]

$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{ax}{\tan x+\sin2x}=2$일 때, 상수 $a$의 값을 구하시오.

**8** [23011-0039]

$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^3+2x^2}{1-\cos x}$의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

## 6. 삼각함수의 미분

(1) $y=\sin x$이면 $y'=\cos x$

(2) $y=\cos x$이면 $y'=-\sin x$

설명 (1) $y=\sin x$에 대하여 삼각함수의 덧셈정리와 삼각함수의 극한을 이용하면

$$\begin{aligned} y' &= \lim_{h\to 0}\frac{\sin(x+h)-\sin x}{h} \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{(\sin x\cos h+\cos x\sin h)-\sin x}{h} \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{\cos x\sin h-\sin x(1-\cos h)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0}\left(\cos x\times\frac{\sin h}{h}-\sin x\times\frac{1-\cos h}{h}\right) \end{aligned}$$

이때

$$\begin{aligned} \lim_{h\to 0}\frac{1-\cos h}{h} &= \lim_{h\to 0}\frac{(1-\cos h)(1+\cos h)}{h(1+\cos h)} = \lim_{h\to 0}\frac{\sin^2 h}{h(1+\cos h)} \\ &= \lim_{h\to 0}\left(\frac{\sin h}{h}\times\frac{\sin h}{1+\cos h}\right) = 1\times\frac{0}{1+1} = 0 \end{aligned}$$

이므로

$$\begin{aligned} y' &= \cos x\times\lim_{h\to 0}\frac{\sin h}{h}-\sin x\times\lim_{h\to 0}\frac{1-\cos h}{h} \\ &= \cos x\times 1-\sin x\times 0 \\ &= \cos x \end{aligned}$$

(2) $y=\cos x$에 대하여 삼각함수의 덧셈정리와 삼각함수의 극한을 이용하면

$$\begin{aligned} y' &= \lim_{h\to 0}\frac{\cos(x+h)-\cos x}{h} \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{(\cos x\cos h-\sin x\sin h)-\cos x}{h} \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{-\sin x\sin h-\cos x(1-\cos h)}{h} \\ &= -\sin x\times\lim_{h\to 0}\frac{\sin h}{h}-\cos x\times\lim_{h\to 0}\frac{1-\cos h}{h} \\ &= -\sin x\times 1-\cos x\times 0 \\ &= -\sin x \end{aligned}$$

예 1 $y=\sin x\cos x$에 대하여

$$y'=(\sin x)'\cos x+\sin x(\cos x)'=\cos x\times\cos x+\sin x\times(-\sin x)=\cos^2 x-\sin^2 x$$

예 2 ① $f(x)=\sin x$에 대하여 $f'(x)=\cos x$이므로 $x=2n\pi$ ($n$은 정수)에서의 미분계수는

$$f'(2n\pi)=\cos 2n\pi=\cos 0=1$$

② $f(x)=\cos x$에 대하여 $f'(x)=-\sin x$이므로 $x=\frac{\pi}{2}+2n\pi$ ($n$은 정수)에서의 미분계수는

$$f'\left(\frac{\pi}{2}+2n\pi\right)=-\sin\left(\frac{\pi}{2}+2n\pi\right)=-\sin\frac{\pi}{2}=-1$$

## 예제 5 삼각함수의 미분

www.ebsi.co.kr

함수 $f(x)=x(\sin x+\cos x)$에 대하여 $\lim_{x \to \frac{\pi}{4}} \frac{f(x)-f\left(\frac{\pi}{4}\right)}{x-\frac{\pi}{4}}$의 값은?

① $-\sqrt{2}$ ② $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ ③ $0$ ④ $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ⑤ $\sqrt{2}$

**길잡이** $(\sin x)'=\cos x$, $(\cos x)'=-\sin x$임을 이용하여 미분계수를 구한다.

**풀이** 미분계수의 정의에 의하여

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{4}} \frac{f(x)-f\left(\frac{\pi}{4}\right)}{x-\frac{\pi}{4}}=f'\left(\frac{\pi}{4}\right)$$

$f(x)=x(\sin x+\cos x)$에서

$$\begin{aligned} f'(x)&=(x)'(\sin x+\cos x)+x(\sin x+\cos x)' \\ &=1\times(\sin x+\cos x)+x\{\cos x+(-\sin x)\} \\ &=\sin x+\cos x+x(\cos x-\sin x) \end{aligned}$$

이므로

$$\begin{aligned} f'\left(\frac{\pi}{4}\right)&=\sin\frac{\pi}{4}+\cos\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{4}\left(\cos\frac{\pi}{4}-\sin\frac{\pi}{4}\right) \\ &=\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\pi}{4}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \\ &=\sqrt{2} \end{aligned}$$

답 ⑤

## 유제

정답과 풀이 16쪽

**9** [23011-0040]

함수 $f(x)=x^2\cos x$에 대하여 $f'\left(\frac{\pi}{4}\right)=p\pi\sqrt{2}+q\pi^2\sqrt{2}$이다. 두 유리수 $p$, $q$에 대하여 $\left|\frac{p}{q}\right|$의 값을 구하시오.

**10** [23011-0041]

$0<x<\pi$에서 정의된 함수 $f(x)=\sqrt{3}x+2\sin x$에 대하여 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(t, f(t))$에서의 접선의 기울기가 0일 때, $\tan t$의 값은?

① $-\sqrt{3}$ ② $-1$ ③ $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ ④ $\frac{\sqrt{3}}{3}$ ⑤ $1$

## Level 1 기초 연습

[23011-0042]

**1** $\lim_{x \to 0} \frac{4^x - 2^x}{e^x - 1}$의 값은?

① $\ln \frac{1}{2}$ ② $0$ ③ $\ln 2$ ④ $\ln 3$ ⑤ $2\ln 2$

[23011-0043]

**2** $\lim_{x \to 2} (x-1)^{\frac{2}{x-2}}$의 값은?

① $1$ ② $\sqrt{e}$ ③ $e$ ④ $e\sqrt{e}$ ⑤ $e^2$

[23011-0044]

**3** $\lim_{x \to 0} \frac{\ln(3x-2a+b)}{x} = b$일 때, 두 상수 $a$, $b$에 대하여 $a+b$의 값은?

① $1$ ② $2$ ③ $3$ ④ $4$ ⑤ $5$

[23011-0045]

**4** 함수 $f(x)=(x^2-4x+5)e^x$에 대하여 방정식 $f'(x)=0$의 해는?

① $-2$ ② $-1$ ③ $0$ ④ $1$ ⑤ $2$

[23011-0046]

**5** 자연수 $n$에 대하여 곡선 $y=x\ln x$ 위의 점 $(e^n, ne^n)$에서의 접선의 기울기를 $f(n)$이라 할 때, $\sum_{n=1}^{10} f(n)$의 값을 구하시오.

[23011-0047]

**6** $\tan(\alpha+\beta)=\frac{1}{3}$이고 $\tan\alpha=2$일 때, $\tan\beta$의 값은?

① $-1$　② $-\frac{5}{6}$　③ $-\frac{2}{3}$　④ $-\frac{1}{2}$　⑤ $-\frac{1}{3}$

[23011-0048]

**7** $0\le\theta\le2\pi$일 때, 방정식 $\sin\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)+\sin\left(\theta-\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{2}$의 해를 $\alpha$, $\beta$ $(\alpha<\beta)$라 하자. 이때 $\beta-\alpha$의 값은?

① $\frac{\pi}{6}$　② $\frac{\pi}{3}$　③ $\frac{\pi}{2}$　④ $\frac{2}{3}\pi$　⑤ $\frac{5}{6}\pi$

[23011-0049]

**8** $\lim_{x\to0}\frac{\sin ax+\tan bx}{x}=4$, $\lim_{x\to0}\frac{e^x-1}{abx}=\frac{1}{3}$일 때, 두 상수 $a$, $b$에 대하여 $a^2+b^2$의 값을 구하시오.

(단, $ab\neq0$)

[23011-0050]

**9** 함수 $f(x)=e^x\sin x$에 대하여 $f'\left(\frac{\pi}{3}\right)\times f'\left(-\frac{\pi}{3}\right)$의 값은?

① $-\frac{1}{2}$　② $-\frac{1}{4}$　③ $0$　④ $\frac{1}{4}$　⑤ $\frac{1}{2}$

[23011-0051]

**10** 곡선 $y=a\cos x+\ln\frac{x}{\pi}$ 위의 $x=\frac{\pi}{6}$인 점에서의 접선의 기울기가 $3+\frac{b}{\pi}$일 때, $a+b$의 값은?

(단, $a$, $b$는 유리수이다.)

① $-6$　② $-3$　③ $0$　④ $3$　⑤ $6$

[23011-0052]

**1** 자연수 전체의 집합을 정의역으로 하는 함수 $f(n)$이

$$f(n)=\lim_{x \to 0}\frac{\ln(1+nx)}{n^2(n+1)x}$$

일 때, $\sum_{n=1}^{10} f(n)$의 값은?

① $\frac{9}{10}$ ② $\frac{10}{11}$ ③ $\frac{11}{12}$ ④ $\frac{12}{13}$ ⑤ $\frac{13}{14}$

[23011-0053]

**2** 실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $f(x)$가 모든 실수 $x$에 대하여

$$x(e^x-1)f(x)=2-a\cos x$$

를 만족시킬 때, $a+f(0)$의 값은? (단, $a$는 상수이다.)

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

[23011-0054]

**3** 함수 $f(x)=|\ln x|$와 양수 $t$에 대하여 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=t$가 만나는 서로 다른 두 점을 각각 P, Q라 할 때, 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 P에서의 접선의 기울기를 $m_{\mathrm{P}}$, 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 Q에서의 접선의 기울기를 $m_{\mathrm{Q}}$라 하자. $m_{\mathrm{Q}}-m_{\mathrm{P}}=\frac{10}{3}$일 때, $t$의 값은? (단, 점 P의 $x$좌표는 점 Q의 $x$좌표보다 작다.)

① $\frac{1}{2}\ln 3$ ② $\ln 3$ ③ $\frac{3}{2}\ln 3$ ④ $2\ln 3$ ⑤ $\frac{5}{2}\ln 3$

[23011-0055]

**4** 함수 $f(x)=\begin{cases} x+k & (x<a) \\ e^x & (x\geq a)\end{cases}$가 실수 전체의 집합에서 미분가능할 때, 두 상수 $a$, $k$에 대하여 $a^2+k^2$의 값은?

① 0 ② $\frac{1}{2}$ ③ 1 ④ $\frac{3}{2}$ ⑤ 2

[23011-0056]

**5** 함수 $f(x)=\cos x\cos 2x+\sin x\sin 2x$에 대하여 $f(a)=\frac{1}{2}$, $f(b)=\frac{4}{5}$이다. $\sin(a+b)$의 값은?

$\left(\text{단, } 0<a<\frac{\pi}{2},\ 0<b<\frac{\pi}{2}\right)$

① $\frac{2\sqrt{3}}{5}+\frac{1}{10}$ ② $\frac{2\sqrt{3}}{5}+\frac{3}{20}$ ③ $\frac{2\sqrt{3}}{5}+\frac{1}{5}$ ④ $\frac{2\sqrt{3}}{5}+\frac{1}{4}$ ⑤ $\frac{2\sqrt{3}}{5}+\frac{3}{10}$

[23011-0057]

**6** 곡선 $y=\sin x\ (0<x<\pi)$ 위의 두 점 $\left(a, \frac{4}{5}\right)$, $(b, \sin b)$에서의 접선을 각각 $l$, $m$이라 하자. 두 직선 $l$, $m$이 이루는 예각의 크기가 $\frac{\pi}{4}$일 때, $16\sin^2 b$의 값을 구하시오. $\left(\text{단, } 0<a<\frac{\pi}{2}\right)$

[23011-0058]

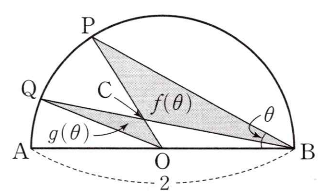
**7** 함수 $f(x)=a\sin x+b\cos x-2$가 다음 조건을 만족시킨다.

| | |
|---|---|
| (가) $f'\left(\frac{\pi}{4}\right)=4\sqrt{2}$ | (나) $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=c$ |

세 상수 $a$, $b$, $c$에 대하여 $a+b+c$의 값을 구하시오.

[23011-0059]

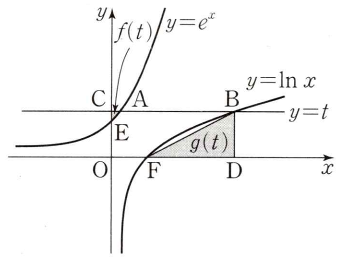
**8** 그림과 같이 길이가 2인 선분 AB를 지름으로 하는 반원의 호 위에 두 점 A, B가 아닌 점 P가 있다. 호 AP 위에 점 Q를 호 AQ의 길이와 호 QP의 길이의 비가 2 : 3이 되도록 잡는다. 선분 AB의 중점을 O라 하고 두 선분 PO, QB가 만나는 점을 C라 하자. $\angle ABP=\theta$라 할 때, 삼각형 PCB의 넓이를 $f(\theta)$, 삼각형 QOC의 넓이를 $g(\theta)$라 하자. $\lim_{\theta\to 0+}\frac{f(\theta)-g(\theta)}{\theta}$의 값은? $\left(\text{단, } 0<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$




① $\frac{2}{5}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ $\frac{3}{5}$ ④ $\frac{7}{10}$ ⑤ $\frac{4}{5}$

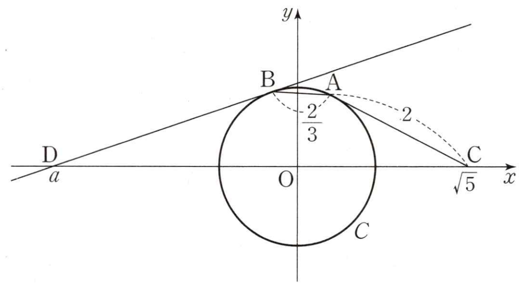
[23011-0060]

**1** $t\neq1$인 양수 $t$에 대하여 직선 $y=t$와 두 곡선 $y=e^x$, $y=\ln x$가 만나는 점을 각각 A, B라 하고 점 A에서 $y$축에 내린 수선의 발을 C, 점 B에서 $x$축에 내린 수선의 발을 D라 하자. 두 점 E$(0, 1)$, F$(1, 0)$에 대하여 삼각형 ACE의 넓이와 삼각형 BFD의 넓이를 각각 $f(t)$, $g(t)$라 하자. 최고차항의 계수가 1인 사차함수 $h(t)$에 대하여 $\lim\limits_{t\to1+}\dfrac{f(t)}{h(t)}=a$, $\lim\limits_{t\to0+}\dfrac{g(t)}{h(t)}=b$일 때, $h\left(\dfrac{1}{ab}\right)$의 값을 구하시오. (단, $ab\neq0$)




[23011-0061]

**2** 그림과 같이 중심이 원점 O이고 반지름의 길이가 1인 원 $C$ 위의 두 점 A, B가 각각 제1사분면과 제2사분면에 있다. 점 C$(\sqrt{5}, 0)$에 대하여 $\overline{\mathrm{AC}}=2$이고 $\overline{\mathrm{AB}}=\dfrac{2}{3}$이다. 원 $C$ 위의 점 B에서의 접선이 $x$축과 만나는 점을 D$(a, 0)$이라 할 때, $\dfrac{1}{a}$의 값은?



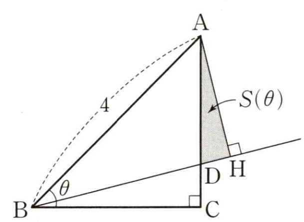

① $\dfrac{7\sqrt{5}}{45}-\dfrac{8\sqrt{10}}{45}$ ② $\dfrac{7\sqrt{5}}{45}-\dfrac{\sqrt{10}}{5}$

③ $\dfrac{7\sqrt{5}}{45}-\dfrac{2\sqrt{10}}{9}$ ④ $\dfrac{7\sqrt{5}}{45}-\dfrac{11\sqrt{10}}{45}$

⑤ $\dfrac{7\sqrt{5}}{45}-\dfrac{4\sqrt{10}}{15}$

[23011-0062]

**3** 그림과 같이 $\overline{\mathrm{AB}}=4$, $\angle\mathrm{C}=\dfrac{\pi}{2}$인 직각삼각형 ABC가 있다. 선분 AC를 $3:1$로 내분하는 점을 D라 하고 점 A에서 직선 BD에 내린 수선의 발을 H라 하자. $\angle\mathrm{ABC}=\theta$라 할 때, 삼각형 ADH의 넓이를 $S(\theta)$라 하자. $\lim\limits_{\theta\to0+}\dfrac{S(\theta)}{\theta^3}=\dfrac{q}{p}$일 때, $p+q$의 값을 구하시오. $\left(\text{단, } 0<\theta<\dfrac{\pi}{2}\text{이고, } p\text{와 } q\text{는 서로소인 자연수이다.}\right)$



# 대표 기출 문제

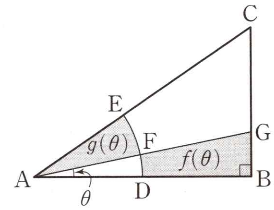
EBS

**출제 경향** 지수함수, 로그함수, 삼각함수의 극한을 이용하여 극한값을 구하는 문제, 지수함수, 로그함수, 삼각함수의 미분을 이용하여 미분계수를 구하는 문제, 도형에서 사인법칙, 코사인법칙, 삼각함수의 덧셈정리 및 도형의 성질을 이용하여 식을 구하고 삼각함수의 극한을 이용하여 극한값을 구하는 문제 등이 출제되고 있다.

2021학년도 대수능

그림과 같이 $\overline{AB}=2$, $\angle B=\frac{\pi}{2}$인 직각삼각형 ABC에서 중심이 A, 반지름의 길이가 1인 원이 두 선분 AB, AC와 만나는 점을 각각 D, E라 하자. 호 DE의 삼등분점 중 점 D에 가까운 점을 F라 하고, 직선 AF가 선분 BC와 만나는 점을 G라 하자. $\angle BAG=\theta$라 할 때, 삼각형 ABG의 내부와 부채꼴 ADF의 외부의 공통부분의 넓이를 $f(\theta)$, 부채꼴 AFE의 넓이를 $g(\theta)$라 하자.

$40\times\lim\limits_{\theta\to0+}\frac{f(\theta)}{g(\theta)}$의 값을 구하시오. $\left(\text{단, } 0<\theta<\frac{\pi}{6}\right)$ [3점]




**출제 의도** 부채꼴의 넓이와 삼각형의 넓이를 이용하여 식을 구하고 삼각함수의 극한을 이용하여 극한값을 구할 수 있는지를 묻는 문제이다.

**풀이** 삼각형 ABG에서 $\overline{BG}=2\tan\theta$이므로

$$f(\theta)=\frac{1}{2}\times\overline{AB}\times\overline{BG}-\frac{1}{2}\times1^2\times\theta=\frac{1}{2}\times2\times2\tan\theta-\frac{\theta}{2}=2\tan\theta-\frac{\theta}{2}$$

호 EF와 호 FD의 길이의 비가 2 : 1이고 $\angle FAD=\theta$이므로 부채꼴 AFE에서 $\angle EAF=2\theta$

또한 $\overline{AE}=\overline{AF}=1$이므로

$$g(\theta)=\frac{1}{2}\times1^2\times2\theta=\theta$$

따라서

$$\begin{aligned}40\times\lim_{\theta\to0+}\frac{f(\theta)}{g(\theta)}&=40\times\lim_{\theta\to0+}\frac{2\tan\theta-\frac{\theta}{2}}{\theta}\\&=40\times\lim_{\theta\to0+}\left(\frac{2\tan\theta}{\theta}-\frac{1}{2}\right)\\&=40\times\left(2\lim_{\theta\to0+}\frac{\tan\theta}{\theta}-\frac{1}{2}\right)\\&=40\times\left(2\times1-\frac{1}{2}\right)\\&=40\times\frac{3}{2}=60\end{aligned}$$

답 60

# 04 여러 가지 미분법

## 1. 함수의 몫의 미분법

두 함수 $f(x)$, $g(x)$ $(f(x)\neq 0)$이 미분가능할 때

(1) $\left\{\dfrac{1}{f(x)}\right\}'=-\dfrac{f'(x)}{\{f(x)\}^2}$

(2) $\left\{\dfrac{g(x)}{f(x)}\right\}'=\dfrac{g'(x)f(x)-g(x)f'(x)}{\{f(x)\}^2}$

설명 (1) 함수 $f(x)$가 미분가능하므로

$$\left\{\frac{1}{f(x)}\right\}'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\dfrac{1}{f(x+\Delta x)}-\dfrac{1}{f(x)}}{\Delta x}=-\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}\times\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{f(x+\Delta x)f(x)}=-\frac{f'(x)}{\{f(x)\}^2}$$

(2) $\dfrac{g(x)}{f(x)}=g(x)\times\dfrac{1}{f(x)}$이므로 (1)과 곱의 미분법에 의하여

$$\left\{\frac{g(x)}{f(x)}\right\}'=g'(x)\times\frac{1}{f(x)}+g(x)\times\left\{\frac{1}{f(x)}\right\}'=\frac{g'(x)}{f(x)}-\frac{g(x)f'(x)}{\{f(x)\}^2}=\frac{g'(x)f(x)-g(x)f'(x)}{\{f(x)\}^2}$$

## 2. 함수 $y=x^n$ ($n$은 정수)의 도함수

$n$이 정수일 때, $y=x^n$이면 $y'=nx^{n-1}$

설명 $n$이 음의 정수일 때, $n=-m$ ($m$은 양의 정수)로 놓으면 $x^n=x^{-m}=\dfrac{1}{x^m}$이므로

$$y'=(x^n)'=\left(\frac{1}{x^m}\right)'=-\frac{(x^m)'}{(x^m)^2}=-\frac{mx^{m-1}}{x^{2m}}=-mx^{-m-1}=nx^{n-1}$$

한편, $n=0$일 때, $y=x^0=1$로 정의하면 $y'=0$이므로 이 경우에도 $y'=nx^{n-1}$이 성립한다.

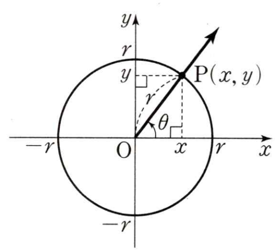
## 3. 삼각함수의 도함수

(1) $\csc\theta$, $\sec\theta$, $\cot\theta$의 정의

좌표평면의 원점 O에서 $x$축의 양의 방향을 시초선으로 정할 때, 일반각 $\theta$를 나타내는 동경과 원점 O를 중심으로 하고 반지름의 길이가 $r$인 원의 교점을 $\mathrm{P}(x, y)$라 하면 $\csc\theta$, $\sec\theta$, $\cot\theta$를 다음과 같이 정의한다.

$$\csc\theta=\frac{r}{y}\ (y\neq 0),\ \sec\theta=\frac{r}{x}\ (x\neq 0),\ \cot\theta=\frac{x}{y}\ (y\neq 0)$$

이 함수를 차례로 $\theta$에 대한 코시컨트함수, 시컨트함수, 코탄젠트함수라고 한다.




참고 ① $\csc\theta=\dfrac{1}{\sin\theta}$, $\sec\theta=\dfrac{1}{\cos\theta}$, $\cot\theta=\dfrac{1}{\tan\theta}$ ② $\tan^2\theta+1=\sec^2\theta$, $1+\cot^2\theta=\csc^2\theta$

(2) 삼각함수의 도함수

몫의 미분법을 이용하여 여러 가지 삼각함수의 도함수를 구할 수 있다.

① $y=\tan x$이면 $y'=\sec^2 x$

② $y=\cot x$이면 $y'=-\csc^2 x$

③ $y=\sec x$이면 $y'=\sec x\tan x$

④ $y=\csc x$이면 $y'=-\csc x\cot x$

설명 ① $\tan x=\dfrac{\sin x}{\cos x}$이므로

$$y'=(\tan x)'=\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)'=\frac{(\sin x)'\times\cos x-\sin x\times(\cos x)'}{\cos^2 x}=\frac{\cos^2 x+\sin^2 x}{\cos^2 x}=\frac{1}{\cos^2 x}=\sec^2 x$$

마찬가지 방법으로 몫의 미분법을 이용하여 ②, ③, ④의 삼각함수의 도함수를 구할 수 있다.

## 예제 1 함수의 몫의 미분법

www.ebsi.co.kr

실수 전체의 집합에서 증가하고 미분가능한 두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 있다. 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(1, 2)$에서의 접선과 곡선 $y=\dfrac{g(x)}{f(x)}$ 위의 점 $(1, 1)$에서의 접선이 서로 수직이고 $\dfrac{g'(1)}{f'(1)}=\dfrac{1}{g(1)}$일 때, $f'(1)$의 값은?

① $\dfrac{1}{4}$ ② $\dfrac{1}{2}$ ③ $1$ ④ $2$ ⑤ $4$

**길잡이** 두 함수 $f(x)$, $g(x)$ $(f(x)\neq 0)$이 미분가능할 때, $\left\{\dfrac{g(x)}{f(x)}\right\}'=\dfrac{g'(x)f(x)-g(x)f'(x)}{\{f(x)\}^2}$이다.

**풀이** 곡선 $y=f(x)$가 점 $(1, 2)$를 지나므로 $f(1)=2$

곡선 $y=\dfrac{g(x)}{f(x)}$가 점 $(1, 1)$을 지나므로 $\dfrac{g(1)}{f(1)}=1$에서 $g(1)=f(1)=2$

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(1, 2)$에서의 접선의 기울기를 $m$이라 하면 $m=f'(1)$

$\dfrac{g'(1)}{f'(1)}=\dfrac{1}{g(1)}=\dfrac{1}{2}$에서 $g'(1)=\dfrac{1}{2}f'(1)=\dfrac{1}{2}m$

한편, $y=\dfrac{g(x)}{f(x)}$에서 몫의 미분법에 의하여

$$y'=\dfrac{g'(x)f(x)-g(x)f'(x)}{\{f(x)\}^2}\ (\text{단, } f(x)\neq 0)$$

이므로 곡선 $y=\dfrac{g(x)}{f(x)}$ 위의 점 $(1, 1)$에서의 접선의 기울기를 $m'$이라 하면

$$m'=\dfrac{g'(1)f(1)-g(1)f'(1)}{\{f(1)\}^2}=\dfrac{\frac{1}{2}m\times 2-2\times m}{2^2}=-\dfrac{m}{4}$$

서로 수직인 두 직선의 기울기의 곱은 $-1$이므로 $m\times m'=-\dfrac{m^2}{4}=-1$에서 $m^2=4$

그런데 실수 전체의 집합에서 증가하는 함수 $f(x)$에 대하여 $f'(x)\geq 0$이므로 $m\geq 0$이다.

따라서 $m=2$, 즉 $f'(1)=2$

답 ④

## 유제

정답과 풀이 25쪽

**1** [23011-0063]

$\displaystyle\lim_{h\to 0}\dfrac{1}{h}\left\{\dfrac{1}{\ln(e+h)}-1\right\}$의 값은?

① $-e$ ② $-\dfrac{1}{e}$ ③ $\dfrac{1}{e}$ ④ $1$ ⑤ $e$

**2** [23011-0064]

곡선 $y=x\sec x$ 위의 점 $(\pi, a)$에서의 접선의 기울기를 $b$라 할 때, $ab$의 값은?

① $-2\pi$ ② $-\pi$ ③ $0$ ④ $\pi$ ⑤ $2\pi$

### 4. 합성함수의 미분법

두 함수 $y=f(u)$, $u=g(x)$가 미분가능할 때, 합성함수 $y=f(g(x))$도 미분가능하며 그 도함수는

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\times\frac{du}{dx} \text{ 또는 } \{f(g(x))\}'=f'(g(x))g'(x)$$

**설명** 함수 $u=g(x)$에서 $x$의 증분 $\varDelta x$에 대한 $u$의 증분을 $\varDelta u$라 하고, 함수 $y=f(u)$에서 $u$의 증분 $\varDelta u$에 대한 $y$의 증분을 $\varDelta y$라 하면 $\frac{\varDelta y}{\varDelta x}=\frac{\varDelta y}{\varDelta u}\times\frac{\varDelta u}{\varDelta x}$ $(\varDelta u\neq 0)$이고, 두 함수 $y=f(u)$, $u=g(x)$가 미분가능하므로

$$\lim_{\varDelta u\to 0}\frac{\varDelta y}{\varDelta u}=\frac{dy}{du},\ \lim_{\varDelta x\to 0}\frac{\varDelta u}{\varDelta x}=\frac{du}{dx}$$

이때 미분가능한 함수 $u=g(x)$는 연속이므로 $\varDelta u=g(x+\varDelta x)-g(x)$에서 $\varDelta x\to 0$이면 $\varDelta u\to 0$이다.

따라서 $\frac{dy}{dx}=\lim_{\varDelta x\to 0}\frac{\varDelta y}{\varDelta x}=\lim_{\varDelta x\to 0}\left(\frac{\varDelta y}{\varDelta u}\times\frac{\varDelta u}{\varDelta x}\right)=\lim_{\varDelta u\to 0}\frac{\varDelta y}{\varDelta u}\times\lim_{\varDelta x\to 0}\frac{\varDelta u}{\varDelta x}=\frac{dy}{du}\times\frac{du}{dx}$

또한 $\frac{dy}{du}=f'(u)=f'(g(x))$이고, $\frac{du}{dx}=g'(x)$이므로 $\{f(g(x))\}'=f'(g(x))g'(x)$

**예** 함수 $y=(2x+3)^4$의 도함수를 구해 보자.

$u=2x+3$이라 하면 $y=u^4$이고 $\frac{dy}{du}=4u^3$, $\frac{du}{dx}=2$이므로 $y'=\frac{dy}{du}\times\frac{du}{dx}=4u^3\times 2=8(2x+3)^3$

**참고** 함수 $f(x)$가 미분가능할 때, 함수 $y=\{f(x)\}^n$ ($n$은 정수)는 미분가능하고 그 도함수는 $y'=n\{f(x)\}^{n-1}f'(x)$

### 5. 로그함수의 도함수

(1) $(\ln|x|)'=\frac{1}{x}$

(2) $(\log_a|x|)'=\frac{1}{x\ln a}$ (단, $a>0$, $a\neq 1$)

(3) 미분가능한 함수 $f(x)$에 대하여 $f(x)\neq 0$일 때, $(\ln|f(x)|)'=\frac{f'(x)}{f(x)}$

**설명** (1) 함수 $y=\ln|x|$의 정의역은 $\{x|x\neq 0$인 실수$\}$이므로

(i) $x>0$일 때, $y=\ln|x|=\ln x$이므로 $y'=\frac{1}{x}$

(ii) $x<0$일 때, $y=\ln|x|=\ln(-x)$이므로 합성함수의 미분법에 의하여

$$y'=\frac{1}{-x}\times(-x)'=\frac{1}{-x}\times(-1)=\frac{1}{x}$$

(i), (ii)에 의하여 $(\ln|x|)'=\frac{1}{x}$

### 6. 함수 $y=x^{\alpha}$ ($\alpha$는 실수, $x>0$)의 도함수

$\alpha$가 실수일 때, $y=x^{\alpha}$ $(x>0)$이면 $y'=\alpha x^{\alpha-1}$

**설명** $x^{\alpha}=(e^{\ln x})^{\alpha}=e^{\alpha\ln x}$이므로 $y'=(e^{\alpha\ln x})'=e^{\alpha\ln x}(\alpha\ln x)'=e^{\alpha\ln x}\times\frac{\alpha}{x}=x^{\alpha}\times\frac{\alpha}{x}=\alpha x^{\alpha-1}$

**예** 함수 $y=\sqrt{x}$에 대하여 $y'=(\sqrt{x})'=(x^{\frac{1}{2}})'=\frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1}=\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{2\sqrt{x}}$

## 예제 2 합성함수의 미분법



함수 $f(x)=\dfrac{1}{1+\ln|x|}$에 대하여 곡선 $y=f(f(x))$ 위의 점 $(-1,\ a)$에서의 접선의 기울기가 $b$일 때, $a+b$의 값은?

① $-2$ ② $-1$ ③ $0$ ④ $1$ ⑤ $2$

**길잡이** 두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 미분가능할 때, $\{f(g(x))\}'=f'(g(x))g'(x)$이다.

**풀이** 곡선 $y=f(f(x))$는 점 $(-1,\ a)$를 지나고, $f(-1)=\dfrac{1}{1+\ln|-1|}=\dfrac{1}{1+0}=1$이므로

$$a=f(f(-1))=f(1)=\frac{1}{1+\ln 1}=1$$

$g(x)=f(f(x))$라 하면

$$g'(x)=f'(f(x))f'(x)$$

이므로 곡선 $y=f(f(x))$ 위의 점 $(-1,\ 1)$에서의 접선의 기울기는

$$b=g'(-1)=f'(f(-1))f'(-1)=f'(1)f'(-1)$$

$f(x)=\dfrac{1}{1+\ln|x|}$에서

$$f'(x)=-\frac{(1+\ln|x|)'}{(1+\ln|x|)^2}=-\frac{\frac{1}{x}}{(1+\ln|x|)^2}=-\frac{1}{x(1+\ln|x|)^2}$$

이므로

$$f'(-1)=-\frac{1}{-1\times(1+\ln|-1|)^2}=-\frac{1}{-1\times1^2}=1,$$

$$f'(1)=-\frac{1}{1\times(1+\ln|1|)^2}=-\frac{1}{1\times1^2}=-1$$

따라서 $b=f'(1)f'(-1)=(-1)\times1=-1$이므로

$$a+b=1+(-1)=0$$

답 ③

## 유제

정답과 풀이 26쪽

**3** [23011-0065]

함수 $f(x)=(2x+1)e^{2x}$의 도함수가 $f'(x)=(ax+b)e^{cx}$일 때, $a+b+c$의 값은? (단, $a$, $b$, $c$는 상수이다.)

① 10 ② 12 ③ 14 ④ 16 ⑤ 18

**4** [23011-0066]

곡선 $y=\sin x+2$ 위의 점 $(t,\ \sin t+2)$를 중심으로 하고 $x$축에 접하는 원의 넓이를 $S(t)$라 할 때, $S'\left(\dfrac{\pi}{6}\right)$의 값은?

① $\dfrac{\sqrt{3}}{2}\pi$ ② $\sqrt{3}\pi$ ③ $\dfrac{3\sqrt{3}}{2}\pi$ ④ $2\sqrt{3}\pi$ ⑤ $\dfrac{5\sqrt{3}}{2}\pi$

## 04 여러 가지 미분법

### 7. 매개변수로 나타낸 함수의 미분법

(1) 두 변수 $x$, $y$ 사이의 관계를 변수 $t$를 매개로 하여

$x=f(t)$, $y=g(t)$

로 나타낼 때 변수 $t$를 매개변수라 하고, 이 함수를 매개변수로 나타낸 함수라 한다.

(2) 매개변수 $t$로 나타낸 함수

$x=f(t)$, $y=g(t)$

에서 두 함수 $f(t)$, $g(t)$가 미분가능하고 $f'(t)\neq 0$일 때,

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{g'(t)}{f'(t)}$$

**설명** 매개변수 $t$의 증분 $\Delta t$에 대한 $x$의 증분을 $\Delta x$, $y$의 증분을 $\Delta y$라 하면

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\frac{\Delta y}{\Delta t}}{\frac{\Delta x}{\Delta t}}$$

이때 $x=f(t)$는 $t$에 대하여 미분가능하고, $f'(t)\neq 0$이므로 $\Delta x\to 0$이면 $\Delta t\to 0$이다.

따라서 $$\frac{dy}{dx}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\frac{\Delta y}{\Delta t}}{\frac{\Delta x}{\Delta t}}=\frac{\lim\limits_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta t}}{\lim\limits_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta t}}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{g'(t)}{f'(t)}$$

**예** ① 매개변수 $t$로 나타낸 함수 $x=2t-1$, $y=t^2+2t$에서 $\frac{dy}{dx}$를 구해 보자.

$\frac{dx}{dt}=2$, $\frac{dy}{dt}=2t+2$이므로 $\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{2t+2}{2}=t+1$

**참고** $x=2t-1$에서 $t=\frac{x+1}{2}$이므로 $y=t^2+2t$에서 $y=\left(\frac{x+1}{2}\right)^2+2\times\frac{x+1}{2}=\frac{1}{4}x^2+\frac{3}{2}x+\frac{5}{4}$

따라서 $y'=\frac{dy}{dx}=\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}=t+1$이다.

② 매개변수 $t$로 나타낸 함수 $x=2t+\sin t$, $y=2\cos t$에 대하여 $t=\frac{\pi}{2}$에서의 $\frac{dy}{dx}$의 값을 구해 보자.

$\frac{dx}{dt}=2+\cos t$, $\frac{dy}{dt}=-2\sin t$이므로 $\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{-2\sin t}{2+\cos t}$ …… ㉠

따라서 주어진 함수의 $t=\frac{\pi}{2}$에서의 $\frac{dy}{dx}$의 값은 ㉠에 $t=\frac{\pi}{2}$를 대입한 값과 같으므로

$$\frac{-2\sin\frac{\pi}{2}}{2+\cos\frac{\pi}{2}}=\frac{-2\times 1}{2+0}=-1$$

## 예제 3 매개변수로 나타낸 함수의 미분법



매개변수 $t$ $(0<t<\pi)$로 나타낸 곡선 $x=1-\cos t$, $y=e^{\sin t}$에 대하여 $t=a$에 대응하는 점에서의 접선의 기울기가 0일 때, $t=\frac{a}{3}$에 대응하는 점에서의 접선의 기울기는?

① $\sqrt{e}$ ② $\sqrt{2e}$ ③ $\sqrt{3e}$ ④ $2\sqrt{e}$ ⑤ $\sqrt{5e}$

**길잡이** 매개변수 $t$로 나타낸 곡선 $x=f(t)$, $y=g(t)$에 대하여 두 함수 $f(t)$, $g(t)$가 미분가능하고 $f'(t)\neq0$일 때, $t=a$에 대응하는 점에서의 접선의 기울기는 $\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{g'(t)}{f'(t)}$에 $t=a$를 대입한 값과 같다.

**풀이** $x=1-\cos t$에서 $\frac{dx}{dt}=\sin t$,

$y=e^{\sin t}$에서 $\frac{dy}{dt}=e^{\sin t}(\sin t)'=e^{\sin t}\times\cos t$이므로

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{e^{\sin t}\times\cos t}{\sin t}$$

$t=a$일 때, $\frac{dy}{dx}=0$이므로 $\frac{e^{\sin a}\times\cos a}{\sin a}=0$에서 $\cos a=0$

$0<t<\pi$이므로 $a=\frac{\pi}{2}$

따라서 $t=\frac{a}{3}=\frac{\pi}{6}$에 대응하는 점에서의 접선의 기울기는

$$\frac{e^{\sin\frac{\pi}{6}}\times\cos\frac{\pi}{6}}{\sin\frac{\pi}{6}}=\frac{e^{\frac{1}{2}}\times\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}}=\sqrt{3e}$$

답 ③

### 유제

정답과 풀이 26쪽

**5** [23011-0067]

매개변수 $t$ $(t>0)$으로 나타낸 함수 $x=\sqrt{t}$, $y=\ln\sqrt{t}$에 대하여 $t=4$에서의 $\frac{dy}{dx}$의 값은?

① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ 1 ④ 2 ⑤ 4

**6** [23011-0068]

매개변수 $t$ $(t>0)$으로 나타낸 곡선 $x=(t-1)^2$, $y=t+\frac{a}{t}$ 위의 점 $(4, 2)$에서의 접선의 기울기는? (단, $a$는 상수이다.)

① $\frac{1}{6}$ ② $\frac{1}{5}$ ③ $\frac{1}{4}$ ④ $\frac{1}{3}$ ⑤ $\frac{1}{2}$

## 8. 음함수의 미분법

(1) 음함수

방정식 $f(x, y)=0$에서 $x$와 $y$의 값의 범위를 적당히 정하면 $y$는 $x$에 대한 함수가 된다.
이와 같은 의미에서 $x$의 함수 $y$가 방정식

$f(x, y)=0$

의 꼴로 주어졌을 때, $x$의 함수 $y$가 음함수 꼴로 주어졌다고 한다.

설명 함수 $y=\dfrac{x}{3x+1}$를 음함수의 꼴로 나타내면 $3xy-x+y=0$이다.

(2) 음함수의 미분법

$x$의 함수 $y$가 음함수 $f(x, y)=0$의 꼴로 주어질 때, $y$를 $x$의 함수로 보고 양변을 $x$에 대하여 미분하여 $\dfrac{dy}{dx}$를 구하는 것을 음함수의 미분법이라고 한다.

예 ① 방정식 $x^2+y^2=r^2$ ($r$는 상수)에서 $\dfrac{dy}{dx}$를 구해 보자.

$y$를 $x$의 함수로 보고 각 항을 $x$에 대하여 미분하면

$$\frac{d}{dx}(x^2)+\frac{d}{dx}(y^2)=\frac{d}{dx}(r^2) \qquad \cdots\cdots ㉠$$

합성함수의 미분법에 의하여

$$\frac{d}{dx}(y^2)=\frac{d}{dy}(y^2)\times\frac{dy}{dx}=2y\frac{dy}{dx}$$

이므로 ㉠에서

$$2x+2y\frac{dy}{dx}=0$$

따라서 $\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{x}{y}$ (단, $y\neq0$)

② 곡선 $x^2+xy-2y+5=0$ 위의 점 $(-1, 2)$에서의 접선의 기울기를 구해 보자.

$y$를 $x$의 함수로 보고 각 항을 $x$에 대하여 미분하면

$$\frac{d}{dx}(x^2)+\frac{d}{dx}(xy)+\frac{d}{dx}(-2y)+\frac{d}{dx}(5)=\frac{d}{dx}(0) \qquad \cdots\cdots ㉠$$

곱의 미분법과 합성함수의 미분법에 의하여

$$\frac{d}{dx}(xy)=\frac{d}{dx}(x)\times y+x\times\frac{d}{dx}(y)=1\times y+x\times\frac{dy}{dx}=y+x\frac{dy}{dx}$$

$$\frac{d}{dx}(-2y)=\frac{d}{dy}(-2y)\times\frac{dy}{dx}=-2\frac{dy}{dx}$$

이므로 ㉠에서

$$2x+y+x\frac{dy}{dx}-2\frac{dy}{dx}+0=0,\ \text{즉}\ (x-2)\frac{dy}{dx}=-2x-y$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{-2x-y}{x-2}\ (\text{단, } x\neq2) \qquad \cdots\cdots ㉡$$

따라서 점 $(-1, 2)$에서의 접선의 기울기는 ㉡에 $x=-1$, $y=2$를 대입한 값과 같으므로

$$\frac{-2\times(-1)-2}{-1-2}=0$$

## 예제 4 음함수의 미분법



곡선 $e^{x-y}+y^2=e$가 $x$축과 만나는 점을 A라 할 때, 점 A를 지나고 이 곡선에 접하는 직선의 기울기는?

① $-1$ ② $-\frac{1}{2}$ ③ $0$ ④ $\frac{1}{2}$ ⑤ $1$

**길잡이** 곡선의 방정식이 $f(x, y)=0$의 꼴로 주어질 때, $y$를 $x$의 함수로 보고 양변을 $x$에 대하여 미분하여 $\frac{dy}{dx}$를 구한다.

**풀이** $e^{x-y}+y^2=e$에 $y=0$을 대입하면 $e^x=e$에서 $x=1$이므로 점 A의 좌표는 $(1, 0)$이다.

$e^{x-y}+y^2=e$, 즉 $e^xe^{-y}+y^2=e$에서 $y$를 $x$의 함수로 보고 양변을 $x$에 대하여 미분하면

$$\frac{d}{dx}(e^xe^{-y})+\frac{d}{dx}(y^2)=\frac{d}{dx}(e) \quad \cdots\cdots ㉠$$

곱의 미분법과 합성함수의 미분법에 의하여

$$\frac{d}{dx}(e^xe^{-y})=\frac{d}{dx}(e^x)\times e^{-y}+e^x\times\frac{d}{dx}(e^{-y})=e^xe^{-y}+e^x\times\frac{d}{dy}(e^{-y})\times\frac{dy}{dx}$$

$$=e^{x-y}+e^x(-e^{-y})\frac{dy}{dx}=e^{x-y}-e^{x-y}\frac{dy}{dx},$$

$$\frac{d}{dx}(y^2)=\frac{d}{dy}(y^2)\times\frac{dy}{dx}=2y\frac{dy}{dx}$$

이므로 ㉠에서 $e^{x-y}-e^{x-y}\frac{dy}{dx}+2y\frac{dy}{dx}=0$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{e^{x-y}}{e^{x-y}-2y} \text{ (단, } e^{x-y}-2y\neq 0)$$

따라서 곡선 $e^{x-y}+y^2=e$ 위의 점 $(1, 0)$에서의 접선의 기울기는 $\frac{e^{1-0}}{e^{1-0}-2\times 0}=1$

답 ⑤

## 유제

정답과 풀이 26쪽

**7** [23011-0069]

곡선 $xy+\sqrt{y}=6$ 위의 점 $(1, 4)$에서의 접선의 기울기는?

① $-4$ ② $-\frac{18}{5}$ ③ $-\frac{16}{5}$ ④ $-\frac{14}{5}$ ⑤ $-\frac{12}{5}$

**8** [23011-0070]

곡선 $\ln y+\frac{x}{y}=\frac{1}{2}$ 위의 점 $(0, a)$에서의 접선의 기울기는 $b$이다. $ab$의 값은?

① $-e\sqrt{e}$ ② $-e$ ③ $-\sqrt{e}$ ④ $e$ ⑤ $e\sqrt{e}$

## 9. 역함수의 미분법

미분가능한 함수 $f(x)$의 역함수 $y=g(x)$가 존재하고 이 역함수가 미분가능할 때

(1) $g'(x)=\dfrac{1}{f'(g(x))}$ (단, $f'(g(x))\neq 0$) 또는 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1}{\dfrac{dx}{dy}}$ $\left(\text{단, } \dfrac{dx}{dy}\neq 0\right)$

(2) $f(a)=b$이면 $g'(b)=\dfrac{1}{f'(g(b))}=\dfrac{1}{f'(a)}$ (단, $f'(a)\neq 0$)

**설명** 함수 $f(x)$의 역함수가 $g(x)$이므로 역함수의 정의에 의하여

$$f(g(x))=x$$

이 식의 양변을 $x$에 대하여 미분하면 합성함수의 미분법에 의하여

$$f'(g(x))g'(x)=1$$

따라서 $g'(x)=\dfrac{1}{f'(g(x))}$ (단, $f'(g(x))\neq 0$)

**참고** $y=g(x)$에서 $x=f(y)$이므로 이 식의 양변을 $x$에 대하여 미분하면

$$1=\frac{d}{dx}f(y)=\frac{d}{dy}f(y)\times\frac{dy}{dx}=f'(y)\frac{dy}{dx}=\frac{dx}{dy}\times\frac{dy}{dx}$$

따라서 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1}{\dfrac{dx}{dy}}$ $\left(\text{단, } \dfrac{dx}{dy}\neq 0\right)$

**예 1** 함수 $f(x)=x^3$의 역함수를 $g(x)$라 할 때, $g'(8)$의 값을 구해 보자.

$g(8)=a$라 하면 $f(a)=8$, 즉 $a^3=8$에서 $a=2$

따라서 $g(8)=2$이고 $f'(x)=3x^2$에서 $f'(2)=12$이므로

$$g'(8)=\frac{1}{f'(g(8))}=\frac{1}{f'(2)}=\frac{1}{12}$$

**예 2** 역함수의 미분법을 이용하여 함수 $y=\sqrt[4]{x+2}$에서 $\dfrac{dy}{dx}$를 구해 보자.

$y=\sqrt[4]{x+2}$를 $x$에 대하여 정리하면 $y^4=x+2$에서 $x=y^4-2$

양변을 $y$에 대하여 미분하면 $\dfrac{dx}{dy}=4y^3$

따라서 함수 $y=\sqrt[4]{x+2}$의 도함수는 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1}{\dfrac{dx}{dy}}=\dfrac{1}{4y^3}=\dfrac{1}{4\sqrt[4]{(x+2)^3}}$

## 10. 이계도함수

함수 $f(x)$의 도함수 $f'(x)$가 미분가능할 때, 함수 $f'(x)$의 도함수

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f'(x+\Delta x)-f'(x)}{\Delta x}$$

를 함수 $y=f(x)$의 이계도함수라 하고, 기호로 $y''$, $f''(x)$, $\dfrac{d^2y}{dx^2}$, $\dfrac{d^2}{dx^2}f(x)$와 같이 나타낸다.

**예** 함수 $y=(x+2)^3$의 이계도함수를 구해 보자.

$y'=3(x+2)^2$이므로 $y''=3\times 2(x+2)^1=6(x+2)$

## 예제 5 역함수의 미분법



함수 $f(x)=x^3+6x^2+ax+10$의 역함수 $g(x)$가 존재하고, $\lim_{h\to 0}\frac{g(b+h)-g(b)}{h}$의 값이 존재하지 않는다. $60\times g'(b+1)$의 값을 구하시오. (단, $a$, $b$는 상수이다.)

**길잡이** 미분가능한 함수 $f(x)$의 역함수 $g(x)$가 존재하고 미분가능할 때, $f(a)=b$이고 $f'(a)\neq 0$이면

$$g'(b)=\frac{1}{f'(g(b))}=\frac{1}{f'(a)}$$

**풀이** 함수 $f(x)$의 역함수가 존재하려면 모든 실수 $x$에 대하여

$$f'(x)=3x^2+12x+a=3(x+2)^2+a-12\geq 0 \quad \cdots\cdots ㉠$$

이어야 하므로 $a-12\geq 0$, 즉 $a\geq 12$ $\cdots\cdots$ ㉡

이때 $g(b)=c$라 하면 역함수의 미분법에 의하여

$$g'(b)=\frac{1}{f'(g(b))}=\frac{1}{f'(c)} \text{ (단, } f'(c)\neq 0)$$

$\lim_{h\to 0}\frac{g(b+h)-g(b)}{h}$의 값이 존재하지 않으려면 $f'(c)=0$이어야 하므로 ㉠, ㉡에서 $3(c+2)^2=0$이고 $a-12=0$이어야 한다. 즉, $c=-2$, $a=12$

이때 $f(x)=x^3+6x^2+12x+10$이므로

$$f'(x)=3x^2+12x+12$$

한편, $b=f(c)=f(-2)=2$이므로 $g(b+1)=g(3)=d$라 하면

$$f(d)=d^3+6d^2+12d+10=3,\ d^3+6d^2+12d+7=(d+1)(d^2+5d+7)=0$$

이때 모든 실수 $d$에 대하여 $d^2+5d+7\neq 0$이므로

$$d=-1$$

따라서 역함수의 미분법에 의하여

$$g'(b+1)=g'(3)=\frac{1}{f'(g(3))}=\frac{1}{f'(-1)}=\frac{1}{3}$$

이므로 $60\times g'(b+1)=60\times\frac{1}{3}=20$

답 20

## 유제

정답과 풀이 27쪽

**9** [23011-0071]

함수 $f(x)=(\ln x)^2$에 대하여 $f''(\sqrt{e})$의 값은?

① $\frac{1}{e}$ ② $\frac{1}{\sqrt{e}}$ ③ 1 ④ $\sqrt{e}$ ⑤ $e$

**10** [23011-0072]

열린구간 $(-\pi, \pi)$에서 정의된 함수 $f(x)=\tan\frac{x}{2}$의 역함수를 $g(x)$라 할 때, $g'(\sqrt{3})$의 값은?

① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ $\frac{1}{2}$ ④ $\frac{2}{3}$ ⑤ $\frac{3}{4}$

[23011-0073]

**1** 함수 $f(x)=\frac{x}{e^x}$에 대하여 $f'(0)$의 값은?

① $\frac{1}{e^2}$ ② $\frac{1}{e}$ ③ $1$ ④ $e$ ⑤ $e^2$

[23011-0074]

**2** 함수 $f(x)=\frac{\sin x}{x}$에 대하여 $f'(\pi)$의 값은?

① $-\frac{1}{\pi}$ ② $-\frac{1}{\pi^2}$ ③ $0$ ④ $\frac{1}{\pi^2}$ ⑤ $\frac{1}{\pi}$

[23011-0075]

**3** 함수 $f(x)=\frac{1}{\sqrt[3]{x}}$에 대하여 $f'(a)=-\frac{1}{48}$일 때, 양수 $a$의 값은?

① $\frac{1}{64}$ ② $\frac{1}{8}$ ③ $1$ ④ $8$ ⑤ $64$

[23011-0076]

**4** 두 함수 $f(x)=e^{ax}-1$, $g(x)=\ln(x^2+b)$에 대하여

$$f(0)=g(0),\ f'(0)+g'(0)=1$$

일 때, $a+b$의 값은? (단, $a$, $b$는 상수이다.)

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

[23011-0077]

**5** 곡선 $\cos 2x+\sin y=1$ 위의 점 $\left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}\right)$에서의 접선의 기울기는?

① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ $1$ ④ $2$ ⑤ $4$

[23011-0078]

**6** 매개변수 $t$ $(t\neq 0)$으로 나타낸 곡선

$$x=e^t+at,\ y=\ln|t|$$

를 $C$라 하자. 곡선 $C$ 위의 $t=-1$에 대응하는 점 A가 직선 $y=x$ 위에 있을 때, 곡선 $C$ 위의 점 A에서의 접선의 기울기는? (단, $a$는 상수이다.)

① $-e$ ② $-\frac{e}{2}$ ③ $\frac{e}{2}$ ④ $e$ ⑤ $2e$

[23011-0079]

**7** $0<x<2$인 실수 $x$에 대하여 넓이가 4이고 가로의 길이가 $x$인 직사각형의 둘레의 길이를 $f(x)$라 하자. 함수 $f(x)$의 역함수를 $g(x)$라 할 때, $g'(10)$의 값은?

① $-\frac{1}{10}$ ② $-\frac{1}{8}$ ③ $-\frac{1}{6}$ ④ $-\frac{1}{4}$ ⑤ $-\frac{1}{2}$

[23011-0080]

**8** 열린구간 $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$에서 미분가능한 함수 $f(x)$가 $-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}$인 모든 실수 $x$에 대하여

$$f(x)=\ln(\cos x)+f'\left(\frac{\pi}{3}\right)\sin x$$

를 만족시킬 때, $f''\left(\frac{\pi}{3}\right)$의 값은?

① $-3$ ② $-\sqrt{3}$ ③ $-1$ ④ $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ ⑤ $-\frac{1}{3}$

[23011-0081]

**1** 함수 $f(x)=\ln|x|+|\ln(-x)|$에 대하여

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(-1+h)-f(-1-h)}{h}$$

의 값은?

① $-2$ ② $-1$ ③ $0$ ④ $1$ ⑤ $2$

[23011-0082]

**2** 1보다 큰 실수 $a$에 대하여 곡선 $y=a^x$과 곡선 $y=a^{-x}-\frac{3}{2}$이 만나는 점의 $x$좌표를 $f(a)$라 하자. 미분가능한 함수 $f(a)$에 대하여 $f(k)=-\frac{1}{2}$일 때, $f'(k)=\frac{q}{p}\times\frac{1}{\ln 2}$이다. $p+q$의 값을 구하시오.

(단, $p$와 $q$는 서로소인 자연수이다.)

[23011-0083]

**3** 함수 $f(x)=\begin{cases} e^{-x} & (x<0) \\ -2x^2+1 & (x\ge 0)\end{cases}$에 대하여 함수 $g(x)$를 $g(x)=(f\circ f)(x)$라 할 때, $\frac{g'(1)}{g'(-1)}$의 값은?

① $\frac{1}{2e}$ ② $\frac{1}{e}$ ③ $1$ ④ $e$ ⑤ $2e$

[23011-0084]

**4** 두 곡선 $y=(x^2+x+a)^3$, $y=e^{bx}$이 $y$축과 만나는 점을 각각 A, B라 하자. 두 점 A, B가 원점에 대하여 서로 대칭이고, 곡선 $y=(x^2+x+a)^3$ 위의 점 A에서의 접선과 곡선 $y=e^{bx}$ 위의 점 B에서의 접선이 서로 평행할 때, $a+b$의 값은? (단, $a$, $b$는 상수이다.)

① $1$ ② $2$ ③ $3$ ④ $4$ ⑤ $5$

[23011-0085]

**5** 매개변수 $t$로 나타낸 함수

$$x=2t-\sin 2t,\ y=\sin^3 2t$$

에 대하여 $\lim_{t \to 0} \frac{dy}{dx}$의 값은?

① 2 ② 4 ③ 6 ④ 8 ⑤ 10

[23011-0086]

**6** 좌표평면에서 두 점 $\mathrm{A}(-1,\ 0)$, $\mathrm{B}(1,\ 0)$에 대하여 점 $\mathrm{P}(x,\ y)$가

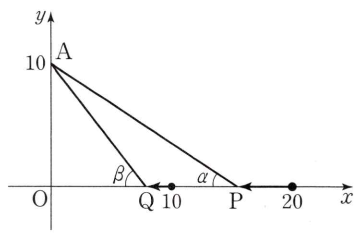
$$\overline{\mathrm{AP}}^2 \times \overline{\mathrm{BP}}^2 = 5$$

를 만족시킬 때, 점 P가 나타내는 곡선을 $C$라 하자. 곡선 $C$ 위의 점 $(1,\ 1)$에서의 접선의 기울기는?

① $-\frac{1}{2}$ ② $-\frac{1}{3}$ ③ $-\frac{1}{4}$ ④ $-\frac{1}{5}$ ⑤ $-\frac{1}{6}$

[23011-0087]

**7** 그림과 같이 좌표평면 위에 점 $\mathrm{A}(0,\ 10)$과 $x$축 위를 움직이는 두 점 P, Q가 있다. 두 점 P, Q가 각각 점 $(20,\ 0)$과 점 $(10,\ 0)$에서 동시에 출발하여 원점 O까지 $\overline{\mathrm{OP}}=2\overline{\mathrm{OQ}}$를 유지하며 움직일 때, $\angle \mathrm{OPA}=\alpha$, $\angle \mathrm{OQA}=\beta$라 하자. $\overline{\mathrm{PQ}}=5$인 순간의 $\frac{d\beta}{d\alpha}$의 값은?




① $\frac{2}{5}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ $\frac{3}{5}$

④ $\frac{7}{10}$ ⑤ $\frac{4}{5}$

[23011-0088]

**8** 구간 $(0,\ \infty)$에서 정의된 함수 $f(x)=\ln(x^2+x+1)$의 역함수를 $g(x)$라 하자. 매개변수 $t$로 나타낸 곡선

$$x=e^t,\ y=g(t)$$

에서 $t=\ln 3$일 때, $\frac{dy}{dx}$의 값은?

① $\frac{1}{9}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ 1 ④ 3 ⑤ 9

[23011-0089]

**1** 곡선 $x^2+xy+2y^2=7$ 위의 두 점 $(\alpha, k)$, $(\beta, k)$에서의 접선이 서로 수직일 때, $\alpha\beta$의 값은?

(단, $k$는 $0\le k<2$인 상수이고, $\alpha+4k\ne0$, $\beta+4k\ne0$이다.)

① $-\frac{13}{3}$ ② $-\frac{11}{3}$ ③ $-3$ ④ $-\frac{7}{3}$ ⑤ $-\frac{5}{3}$

[23011-0090]

**2** 실수 전체의 집합에서 미분가능하고 역함수가 존재하는 함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x)=\begin{cases} ax^2\ln x & (0<x<e) \\ f^{-1}(x) & (x\ge e) \end{cases}$$

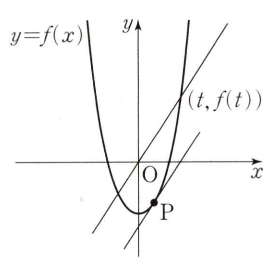
로 정의하자. 함수 $g(x)$가 $x=e$에서 미분가능하고 $\lim_{h\to0}\frac{f(1+h)-e}{h}=b$일 때, $ab$의 값은?

(단, $a$, $b$는 상수이다.)

① $\frac{1}{3e}$ ② $\frac{e}{3}$ ③ $1$ ④ $\frac{3}{e}$ ⑤ $3e$

[23011-0091]

**3** 함수 $f(x)=\frac{1}{4}x^4+x^2-2$가 있다. 양의 실수 $t$에 대하여 두 점 $(0, 0)$, $(t, f(t))$를 지나는 직선이 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 P에서의 접선과 평행할 때, 점 P의 $x$좌표를 $g(t)$라 하자. 미분가능한 함수 $g(t)$의 역함수를 $h(t)$라 할 때, $h'(1)$의 값은?




① $\frac{7}{9}$ ② $\frac{8}{9}$ ③ $1$

④ $\frac{10}{9}$ ⑤ $\frac{11}{9}$

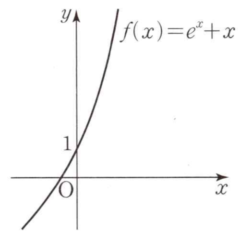
# 대표 기출 문제

EBS

**출제 경향** 함수의 몫의 미분법, 합성함수의 미분법, 역함수의 미분법을 이용하여 다항함수, 삼각함수, 지수함수, 로그함수의 도함수를 구하는 문제, 매개변수 또는 음함수로 나타낸 곡선 위의 점에서의 접선의 기울기를 구하는 문제 등이 출제되고 있다.

2023학년도 대수능 9월 모의평가

함수 $f(x)=e^x+x$가 있다. 양수 $t$에 대하여 점 $(t,\ 0)$과 점 $(x,\ f(x))$ 사이의 거리가 $x=s$에서 최소일 때, 실수 $f(s)$의 값을 $g(t)$라 하자. 함수 $g(t)$의 역함수를 $h(t)$라 할 때, $h'(1)$의 값을 구하시오. [4점]




**출제 의도** 역함수의 미분법과 합성함수의 미분법을 이용하여 주어진 조건을 만족시키는 함수의 미분계수를 구할 수 있는지를 묻는 문제이다.

**풀이** $f(x)=e^x+x$에서 $f'(x)=e^x+1$

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $\mathrm{P}(s,\ f(s))$, 즉 $\mathrm{P}(s,\ e^s+s)$와 점 $\mathrm{Q}(t,\ 0)$에 대하여 점 P에서의 접선과 직선 PQ가 서로 수직이어야 하므로

$(e^s+1)\times\dfrac{e^s+s}{s-t}=-1$에서 $t=(e^s+1)(e^s+s)+s$ ······ ㉠

이때 $g(t)=f(s)=e^s+s$이고, ㉠에서 $s=0$일 때 $t=2$이므로 $g(2)=f(0)=1$ ······ ㉡

이고, 함수 $g(t)$의 역함수가 $h(t)$이므로 ㉡에서 $h(1)=2$이고, $g(h(t))=t$ ······ ㉢

㉢의 양변을 $t$에 대하여 미분하면 $g'(h(t))h'(t)=1$ ······ ㉣

㉣에 $t=1$을 대입하면 $g'(h(1))h'(1)=1$, $h'(1)=\dfrac{1}{g'(h(1))}=\dfrac{1}{g'(2)}$

한편, ㉠의 양변을 $t$에 대하여 미분하면

$1=\{e^s(e^s+s)+(e^s+1)^2+1\}\dfrac{ds}{dt}$에서 $\dfrac{ds}{dt}=\dfrac{1}{e^s(e^s+s)+(e^s+1)^2+1}$

이므로 $g(t)=e^s+s$의 양변을 $t$에 대하여 미분하면

$$g'(t)=(e^s+1)\frac{ds}{dt}=\frac{e^s+1}{e^s(e^s+s)+(e^s+1)^2+1}$$

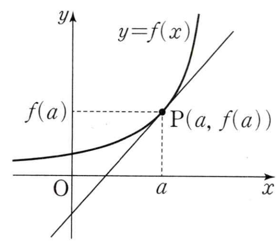
$t=2$일 때 $s=0$이므로 $g'(2)=\dfrac{2}{1+4+1}=\dfrac{1}{3}$

따라서 $h'(1)=\dfrac{1}{g'(2)}=3$

답 3

# 05 도함수의 활용

## 1. 접선의 방정식




미분가능한 함수 $f(x)$에 대하여 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $\mathrm{P}(a,\ f(a))$에서의 접선의 방정식은

$$y-f(a)=f'(a)(x-a)$$

**예** 곡선 $y=e^{-x+1}$ 위의 점 $(1,\ 1)$에서의 접선의 방정식을 구해 보자.
$f(x)=e^{-x+1}$이라 하면 $f'(x)=-e^{-x+1}$
곡선 $y=e^{-x+1}$ 위의 점 $(1,\ 1)$에서의 접선의 기울기는 $f'(1)=-e^0=-1$
따라서 접선의 방정식은 $y-1=-1\times(x-1)$, 즉 $y=-x+2$

**참고** 미분가능한 함수 $f(x)$에 대하여 곡선 $y=f(x)$에 접하고 기울기가 $m$인 접선의 방정식은 다음과 같은 순서로 구한다.
(i) 접점의 좌표를 $(t,\ f(t))$로 놓는다.
(ii) $f'(t)=m$을 만족시키는 $t$의 값을 구한다.
(iii) 접선의 방정식 $y-f(t)=m(x-t)$를 구한다.

**예** 곡선 $y=\frac{1}{x}\ (x>0)$에 접하고 기울기가 $-\frac{1}{4}$인 접선의 방정식을 구해 보자.
$f(x)=\frac{1}{x}$이라 하고 접점의 좌표를 $\left(t,\ \frac{1}{t}\right)\ (t>0)$이라 하자.
$f'(x)=-\frac{1}{x^2}$이므로 $f'(t)=-\frac{1}{t^2}=-\frac{1}{4}$에서 $t^2=4$
$t>0$이므로 $t=2$
따라서 접점의 좌표는 $\left(2,\ \frac{1}{2}\right)$이므로 접선의 방정식은

$$y-\frac{1}{2}=-\frac{1}{4}(x-2),\ 즉\ y=-\frac{1}{4}x+1$$

**참고** 미분가능한 함수 $f(x)$에 대하여 곡선 $y=f(x)$ 위에 있지 않은 점 $(x_1,\ y_1)$에서 곡선 $y=f(x)$에 그은 접선의 방정식은 다음과 같은 순서로 구한다.
(i) 접점의 좌표를 $(t,\ f(t))$로 놓고, 이 점에서의 접선의 방정식 $y-f(t)=f'(t)(x-t)$를 구한다.
(ii) 점 $(x_1,\ y_1)$은 이 접선 위의 점이므로 (i)의 방정식에 $x=x_1$, $y=y_1$을 대입한다.
(iii) (ii)에서 실수 $t$의 값을 구한 후 (i)에 대입하여 접선의 방정식을 구한다.

**예** 원점에서 곡선 $y=\ln x$에 그은 접선의 방정식을 구해 보자.
$f(x)=\ln x$라 하고 접점의 좌표를 $(t,\ \ln t)\ (t>0)$이라 하자.
$f'(x)=\frac{1}{x}$이므로 접선의 기울기는 $f'(t)=\frac{1}{t}$이고, 접선의 방정식은

$$y-\ln t=\frac{1}{t}(x-t)$$

이 직선이 원점을 지나므로 $0-\ln t=\frac{1}{t}(0-t)$, $-\ln t=-1$, $t=e$
따라서 접선의 방정식은

$$y-\ln e=\frac{1}{e}(x-e),\ 즉\ y=\frac{1}{e}x$$

## 예제 1 접선의 방정식



곡선 $y=\ln x$ 위의 점 $\left(\sqrt{e}, \frac{1}{2}\right)$에서의 접선이 $x$축과 만나는 점을 A라 하자. 점 A를 지나는 직선이 곡선 $y=\sqrt{e^x}$과 점 B에서 접할 때, 두 점 A, B의 $x$좌표의 합은?

① $1+\frac{\sqrt{e}}{2}$ ② $1+\sqrt{e}$ ③ $2+\frac{\sqrt{e}}{2}$ ④ $2+\sqrt{e}$ ⑤ $3+\frac{\sqrt{e}}{2}$

**길잡이** 미분가능한 함수 $f(x)$에 대하여 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $\mathrm{P}(a, f(a))$에서의 접선의 방정식은

$y-f(a)=f'(a)(x-a)$

**풀이** $y=\ln x$에서 $y'=\frac{1}{x}$이므로 곡선 $y=\ln x$ 위의 점 $\left(\sqrt{e}, \frac{1}{2}\right)$에서의 접선의 방정식은

$$y-\frac{1}{2}=\frac{1}{\sqrt{e}}(x-\sqrt{e}),\ \text{즉 } y=\frac{1}{\sqrt{e}}x-\frac{1}{2}$$

따라서 이 접선이 $x$축과 만나는 점 A의 좌표는 $\left(\frac{\sqrt{e}}{2}, 0\right)$이다.

점 A를 지나는 직선이 곡선 $y=\sqrt{e^x}$과 접하는 점 B의 $x$좌표를 $t$라 하자.

$y=\sqrt{e^x}=e^{\frac{x}{2}}$에서 $y'=\frac{1}{2}e^{\frac{x}{2}}$이므로 곡선 $y=\sqrt{e^x}$ 위의 점 $\mathrm{B}(t, \sqrt{e^t})$에서의 접선의 방정식은

$$y-\sqrt{e^t}=\frac{1}{2}e^{\frac{t}{2}}(x-t),\ \text{즉 } y-\sqrt{e^t}=\frac{1}{2}\sqrt{e^t}(x-t)$$

이 접선이 점 $\mathrm{A}\left(\frac{\sqrt{e}}{2}, 0\right)$을 지나므로

$$0-\sqrt{e^t}=\frac{1}{2}\sqrt{e^t}\left(\frac{\sqrt{e}}{2}-t\right),\ -1=\frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{e}}{2}-t\right)$$

$$t=2+\frac{\sqrt{e}}{2}$$

따라서 두 점 A, B의 $x$좌표의 합은 $\frac{\sqrt{e}}{2}+\left(2+\frac{\sqrt{e}}{2}\right)=2+\sqrt{e}$

답 ④

## 유제

정답과 풀이 36쪽

**1** [23011-0092]

곡선 $y=x\cos x\ (0<x<\pi)$ 위의 점 $(a, 0)$에서의 접선의 $y$절편은 $b$이다. $\frac{b}{a}$의 값은?

① $\frac{\pi}{4}$ ② $\frac{\pi}{2}$ ③ $\frac{\pi^2}{4}$ ④ $\frac{\pi^2}{2}$ ⑤ $\pi^2$

**2** [23011-0093]

매개변수 $t$로 나타낸 곡선 $x=e^t+t,\ y=e^{-2t}+1$ 위의 $t=0$에 대응하는 점에서의 접선을 $l$이라 하자. 직선 $l$과 $x$축 및 $y$축으로 둘러싸인 부분의 넓이는?

① $\frac{7}{2}$ ② $\frac{9}{2}$ ③ $\frac{11}{2}$ ④ $\frac{13}{2}$ ⑤ $\frac{15}{2}$

## 2. 함수의 극대와 극소의 판정

(1) 도함수를 이용한 극대와 극소의 판정

미분가능한 함수 $f(x)$에 대하여 $f'(a)=0$이고 $x=a$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가

① 양에서 음으로 바뀌면 함수 $f(x)$는 $x=a$에서 극대이다.

② 음에서 양으로 바뀌면 함수 $f(x)$는 $x=a$에서 극소이다.

(2) 이계도함수를 이용한 극대와 극소의 판정

이계도함수가 존재하는 함수 $f(x)$에 대하여 $f'(a)=0$이고

① $f''(a)<0$이면 함수 $f(x)$는 $x=a$에서 극대이다.

② $f''(a)>0$이면 함수 $f(x)$는 $x=a$에서 극소이다.

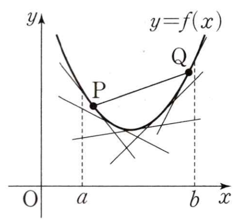
## 3. 곡선의 오목과 볼록

(1) 곡선의 오목과 볼록

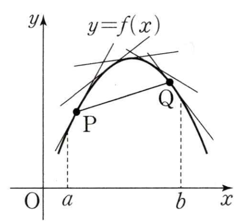
닫힌구간 $[a, b]$에서 곡선 $y=f(x)$ 위의 임의의 서로 다른 두 점 P, Q에 대하여 두 점 P, Q를 잇는 곡선 부분이

① 선분 PQ보다 항상 아래쪽에 있으면 곡선 $y=f(x)$는 이 구간에서 아래로 볼록 또는 위로 오목하다고 한다.

② 선분 PQ보다 항상 위쪽에 있으면 곡선 $y=f(x)$는 이 구간에서 위로 볼록 또는 아래로 오목하다고 한다.



아래로 볼록



위로 볼록

(2) 이계도함수를 이용한 곡선의 오목과 볼록의 판정

이계도함수가 존재하는 함수 $f(x)$가 어떤 구간의 모든 $x$에 대하여

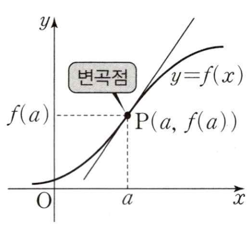
① $f''(x)>0$이면 곡선 $y=f(x)$는 이 구간에서 아래로 볼록하다.

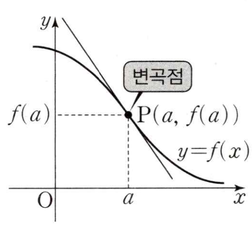
② $f''(x)<0$이면 곡선 $y=f(x)$는 이 구간에서 위로 볼록하다.

## 4. 곡선의 변곡점

(1) 곡선의 변곡점

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $\mathrm{P}(a, f(a))$에 대하여 $x=a$의 좌우에서 곡선의 모양이 아래로 볼록에서 위로 볼록으로 변하거나 위로 볼록에서 아래로 볼록으로 변할 때, 점 P를 곡선 $y=f(x)$의 변곡점이라고 한다.




(2) 이계도함수를 이용한 곡선의 변곡점의 판정

이계도함수가 존재하는 함수 $f(x)$에 대하여

$f''(a)=0$이고, $x=a$의 좌우에서 $f''(x)$의 부호가 바뀌면 점 $(a, f(a))$는 곡선 $y=f(x)$의 변곡점이다.

## 예제 2 극대와 극소



함수 $f(x)=(x^2+x+a)e^x$의 극솟값이 0일 때, 함수 $f(x)$는 $x=p$에서 극대이다. 상수 $p$의 값은?

(단, $a$는 상수이다.)

① $-\frac{5}{2}$ ② $-2$ ③ $-\frac{3}{2}$ ④ $-1$ ⑤ $-\frac{1}{2}$

**길잡이** 미분가능한 함수 $f(x)$에 대하여 $f'(a)=0$이고 $x=a$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 양에서 음으로 바뀌면 함수 $f(x)$는 $x=a$에서 극대이고, 음에서 양으로 바뀌면 함수 $f(x)$는 $x=a$에서 극소이다.

**풀이** $f(x)=(x^2+x+a)e^x$에서

$$f'(x)=(2x+1)e^x+(x^2+x+a)e^x=(x^2+3x+a+1)e^x$$

이때 모든 실수 $x$에 대하여 $e^x>0$이므로 함수 $f(x)$가 극값을 가지려면 이차방정식 $x^2+3x+a+1=0$이 서로 다른 두 실근을 가져야 한다. 이차방정식 $x^2+3x+a+1=0$의 판별식을 $D$라 하면

$D=3^2-4(a+1)=-4a+5>0$에서 $a<\frac{5}{4}$

이차방정식 $x^2+3x+a+1=0$의 두 실근을 $\alpha$, $\beta$ $(\alpha<\beta)$라 할 때, 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 오른쪽과 같다.

| $x$ | $\cdots$ | $\alpha$ | $\cdots$ | $\beta$ | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $+$ | 0 | $-$ | 0 | $+$ |
| $f(x)$ | ↗ | 극대 | ↘ | 극소 | ↗ |

함수 $f(x)$의 극솟값이 0이려면 $f'(\beta)=0$이고 $f(\beta)=0$이어야 한다.

$f'(\beta)=(\beta^2+3\beta+a+1)e^\beta=0$에서 $\beta^2+3\beta+a+1=0$, $-a=\beta^2+3\beta+1$ ······ ㉠

$f(\beta)=(\beta^2+\beta+a)e^\beta=0$에서 $\beta^2+\beta+a=0$, $-a=\beta^2+\beta$ ······ ㉡

㉠, ㉡에서 $\beta^2+3\beta+1=\beta^2+\beta$이므로 $\beta=-\frac{1}{2}$, $a=-\frac{1}{4}+\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$

이때 $x^2+3x+a+1=x^2+3x+\frac{5}{4}=\left(x+\frac{1}{2}\right)\left(x+\frac{5}{2}\right)=0$이므로 $\alpha=-\frac{5}{2}$

즉, 함수 $f(x)$는 $x=-\frac{5}{2}$에서 극대이므로 $p=-\frac{5}{2}$

답 ①

## 유제

정답과 풀이 37쪽

**3** [23011-0094]

곡선 $y=\frac{\ln x}{x}$의 변곡점의 $y$좌표는?

① $\frac{1}{2e\sqrt{e}}$ ② $\frac{1}{e\sqrt{e}}$ ③ $\frac{3}{2e\sqrt{e}}$ ④ $\frac{2}{e\sqrt{e}}$ ⑤ $\frac{5}{2e\sqrt{e}}$

**4** [23011-0095]

열린구간 $(0, 2\pi)$에서 정의된 함수 $f(x)=\sin^2 x+\sin x$가 $x=\alpha$와 $x=\beta$ $(\alpha<\beta)$에서 극소일 때, $\beta-\alpha$의 값은?

① $\frac{\pi}{3}$ ② $\frac{\pi}{2}$ ③ $\frac{2}{3}\pi$ ④ $\frac{5}{6}\pi$ ⑤ $\pi$

## 5. 함수의 그래프

함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형은 다음과 같은 사항을 고려하여 그린다.

(1) 함수 $f(x)$의 정의역과 치역

(2) 곡선 $y=f(x)$의 대칭성($y$축 대칭, 원점 대칭)과 주기

(3) 곡선 $y=f(x)$와 좌표축이 만나는 점

(4) 함수 $f(x)$의 증가와 감소, 극대와 극소

(5) 곡선 $y=f(x)$의 오목과 볼록, 변곡점

(6) $\lim_{x\to\infty} f(x)$, $\lim_{x\to-\infty} f(x)$, 곡선 $y=f(x)$의 점근선

**예** 함수 $y=e^{-x^2}$의 그래프의 개형을 그려 보자.

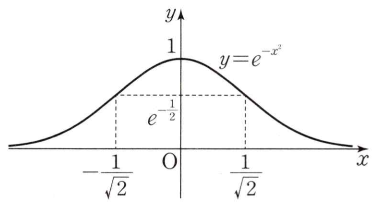
$f(x)=e^{-x^2}$이라 하면 함수 $f(x)$의 정의역은 실수 전체의 집합이다.

$f'(x)=e^{-x^2}\times(-x^2)'=-2xe^{-x^2}$이므로 $f'(x)=0$에서 $x=0$

$f''(x)=-2e^{-x^2}+(-2x)\times(-2xe^{-x^2})=2e^{-x^2}(-1+2x^2)$이므로 $f''(x)=0$에서 $x=-\frac{1}{\sqrt{2}}$ 또는 $x=\frac{1}{\sqrt{2}}$

실수 전체의 집합에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

| $x$ | $\cdots$ | $-\frac{1}{\sqrt{2}}$ | $\cdots$ | $0$ | $\cdots$ | $\frac{1}{\sqrt{2}}$ | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $+$ | $+$ | $+$ | $0$ | $-$ | $-$ | $-$ |
| $f''(x)$ | $+$ | $0$ | $-$ | $-$ | $-$ | $0$ | $+$ |
| $f(x)$ | ⤴ | $e^{-\frac{1}{2}}$ | ↷ | $1$ | ⤵ | $e^{-\frac{1}{2}}$ | ↘ |




$f(0)=1$이고 모든 실수 $x$에 대하여 $f(-x)=f(x)$이므로 곡선 $y=f(x)$는 점 $(0, 1)$을 지나고 $y$축에 대하여 대칭이다.

또한 $\lim_{x\to\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty} f(x)=0$이므로 점근선의 방정식은 $y=0$이다.

따라서 함수 $y=e^{-x^2}$의 그래프의 개형은 그림과 같다.

## 6. 함수의 최댓값과 최솟값

(1) 최대 · 최소 정리

함수 $f(x)$가 닫힌구간 $[a, b]$에서 연속이면 함수 $f(x)$는 이 구간에서 반드시 최댓값과 최솟값을 갖는다.

(2) 함수의 최댓값과 최솟값 구하기

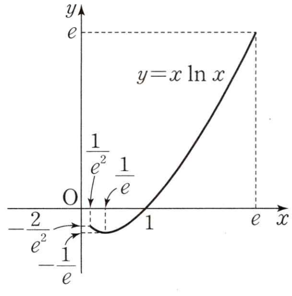
닫힌구간 $[a, b]$에서 연속인 함수 $f(x)$가 열린구간 $(a, b)$에서 극값을 가질 때, 극값, $f(a)$, $f(b)$ 중에서 가장 큰 값이 함수 $f(x)$의 최댓값, 가장 작은 값이 함수 $f(x)$의 최솟값이다.

**예** 닫힌구간 $\left[\frac{1}{e^2}, e\right]$에서 함수 $f(x)=x\ln x$의 최댓값과 최솟값을 구해 보자.

$$f'(x)=\ln x+x\times\frac{1}{x}=\ln x+1$$

$f'(x)=0$에서 $x=\frac{1}{e}$이고 $x=\frac{1}{e}$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 음에서 양으로 바뀌므로 함수 $f(x)$는 $x=\frac{1}{e}$에서 극솟값 $f\left(\frac{1}{e}\right)=\frac{1}{e}\ln\frac{1}{e}=-\frac{1}{e}$을 갖는다.

또 $f\left(\frac{1}{e^2}\right)=\frac{1}{e^2}\ln\frac{1}{e^2}=-\frac{2}{e^2}$, $f(e)=e\ln e=e$이므로 닫힌구간 $\left[\frac{1}{e^2}, e\right]$에서 함수 $f(x)$의 최솟값은 $-\frac{1}{e}$, 최댓값은 $e$이다.



## 예제 3 함수의 그래프

닫힌구간 $[0, 2\pi]$에서 정의된 함수 $f(x)=\cos x \times e^{2\sin^2 x}$이 있다. 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=k$가 서로 다른 세 점에서 만나도록 하는 상수 $k$의 값은?

① $-\frac{e\sqrt{e}}{2}$ ② $-\frac{e}{2}$ ③ $-1$ ④ $-\frac{\sqrt{e}}{2}$ ⑤ $-\frac{1}{2e}$

**길잡이** 도함수 $f'(x)$를 이용하여 함수 $y=f(x)$의 그래프를 그리고, 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=k$가 서로 다른 세 점에서 만날 조건을 구한다.

**풀이** $f(x)=\cos x \times e^{2\sin^2 x}$ $(0\le x\le 2\pi)$에서

$$f'(x)=-\sin x \times e^{2\sin^2 x}+\cos x \times e^{2\sin^2 x}\times 4\sin x\cos x=\sin x(4\cos^2 x-1)e^{2\sin^2 x}\ (0<x<2\pi)$$

$f'(x)=0$을 만족시키는 $x$의 값을 구하면

$\sin x=0$에서 $x=\pi$이고,

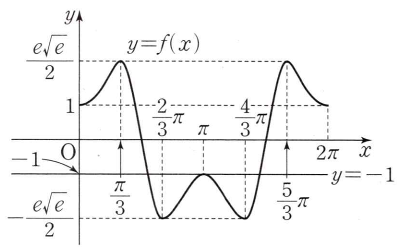
$4\cos^2 x-1=0$, 즉 $\cos x=\pm\frac{1}{2}$에서 $x=\frac{\pi}{3}, \frac{2}{3}\pi, \frac{4}{3}\pi, \frac{5}{3}\pi$이다.

닫힌구간 $[0, 2\pi]$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

| $x$ | $0$ | $\cdots$ | $\frac{\pi}{3}$ | $\cdots$ | $\frac{2}{3}\pi$ | $\cdots$ | $\pi$ | $\cdots$ | $\frac{4}{3}\pi$ | $\cdots$ | $\frac{5}{3}\pi$ | $\cdots$ | $2\pi$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $f(x)$ | $1$ | ↗ | $\frac{e\sqrt{e}}{2}$ | ↘ | $-\frac{e\sqrt{e}}{2}$ | ↗ | $-1$ | ↘ | $-\frac{e\sqrt{e}}{2}$ | ↗ | $\frac{e\sqrt{e}}{2}$ | ↘ | $1$ |

함수 $y=f(x)$의 그래프는 그림과 같다.

따라서 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=k$가 서로 다른 세 점에서 만나도록 하는 상수 $k$의 값은 $-1$이다.




답 ③

## 유제

정답과 풀이 37쪽

**5** [23011-0096]

닫힌구간 $\left[\frac{1}{e}, e\right]$에서 함수 $f(x)=x^2\ln\frac{1}{x}$의 최댓값과 최솟값의 곱은?

① $-2e$ ② $-\frac{e}{2}$ ③ $-\frac{1}{2e}$ ④ $\frac{1}{2e^3}$ ⑤ $\frac{1}{2e^2}$

**6** [23011-0097]

함수 $f(x)=(x-a)e^{-x+a}$에 대하여 곡선 $y=|f(x)|$와 직선 $y=a$가 만나는 서로 다른 점의 개수가 2일 때, 상수 $a$의 값은? (단, $\lim_{x\to\infty}f(x)=0$)

① $\frac{1}{2e}$ ② $\frac{1}{e}$ ③ $\frac{2}{e}$ ④ $\frac{4}{e}$ ⑤ $\frac{8}{e}$

## 7. 방정식에의 활용

(1) 방정식 $f(x)=0$의 서로 다른 실근의 개수

방정식 $f(x)=0$의 실근은 함수 $y=f(x)$의 그래프와 $x$축이 만나는 점의 $x$좌표와 같다.

따라서 방정식 $f(x)=0$의 서로 다른 실근의 개수는 함수 $y=f(x)$의 그래프와 $x$축이 만나는 점의 개수와 같다.

(2) 방정식 $f(x)=g(x)$의 서로 다른 실근의 개수

① 방정식 $f(x)=g(x)$의 실근은 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프가 만나는 점의 $x$좌표와 같다.

따라서 방정식 $f(x)=g(x)$의 서로 다른 실근의 개수는 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프가 만나는 점의 개수와 같다.

② 방정식 $f(x)=g(x)$에서 $f(x)-g(x)=0$이므로 방정식 $f(x)=g(x)$의 서로 다른 실근의 개수는 함수 $y=f(x)-g(x)$의 그래프와 $x$축이 만나는 점의 개수와 같다.

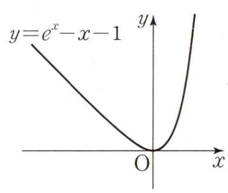
예 방정식 $e^x-x-1=0$의 서로 다른 실근의 개수를 구해 보자.

$f(x)=e^x-x-1$로 놓으면

$f'(x)=e^x-1$이므로 $f'(x)=0$에서 $x=0$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

| $x$ | $\cdots$ | $0$ | $\cdots$ |
|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $-$ | $0$ | $+$ |
| $f(x)$ | $\searrow$ | 극소 | $\nearrow$ |




함수 $f(x)$는 $x=0$에서 극소이고, 극솟값은 $f(0)=e^0-0-1=0$이다.

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 그림과 같이 $x$축과 한 점에서만 만나므로 방정식 $e^x-x-1=0$의 서로 다른 실근의 개수는 1이다.

## 8. 부등식에의 활용

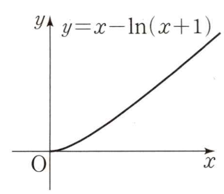
(1) 부등식 $f(x)\ge 0$ 또는 $f(x)>0$이 성립함을 보이는 방법

함수 $y=f(x)$의 그래프를 이용하여 주어진 구간에서 부등식 $f(x)\ge 0$ 또는 $f(x)>0$이 성립함을 보이면 된다.

(2) 부등식 $f(x)\ge g(x)$ 또는 $f(x)>g(x)$가 성립함을 보이는 방법

$h(x)=f(x)-g(x)$로 놓고 주어진 구간에서 부등식 $h(x)\ge 0$ 또는 $h(x)>0$이 성립함을 보이면 된다.

예 모든 양의 실수 $x$에 대하여 부등식 $x>\ln(x+1)$이 성립함을 보이자.




$f(x)=x-\ln(x+1)$로 놓으면 $f'(x)=1-\dfrac{1}{x+1}$

모든 양의 실수 $x$에 대하여 $\dfrac{1}{x+1}<1$이므로 $1-\dfrac{1}{x+1}>0$

즉, $f'(x)>0$이므로 함수 $f(x)$는 양의 실수 전체의 집합에서 증가한다.

이때 $f(0)=0-\ln 1=0$이므로 $x>0$일 때 $f(x)>f(0)=0$, 즉 $x-\ln(x+1)>0$이다.

따라서 모든 양의 실수 $x$에 대하여 부등식 $x>\ln(x+1)$이 성립한다.

## 예제 4 방정식에의 활용



함수 $f(x)=2\ln ax$에 대하여 두 곡선 $y=f(x)$, $y=f'(x)$가 서로 만나도록 하는 실수 $a$의 최솟값은? (단, $a\neq0$)

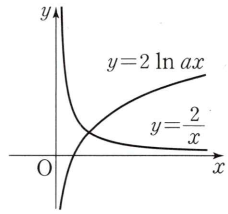
① $-e^2$ ② $-e$ ③ $-\frac{1}{e}$ ④ $\frac{1}{e}$ ⑤ $e$

**길잡이** 방정식 $f(x)=g(x)$의 실근은 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프가 만나는 점의 $x$좌표와 같다.

**풀이** $f(x)=2\ln ax$에서 $f'(x)=2\times\frac{a}{ax}=\frac{2}{x}$

(i) $a>0$일 때

함수 $y=2\ln ax$의 정의역은 $\{x\mid x>0\}$이고, 그 그래프는 [그림 1]과 같으므로 두 곡선 $y=2\ln ax$, $y=\frac{2}{x}$는 항상 한 점에서 만난다.




[그림 1]

(ii) $a<0$일 때

함수 $y=2\ln ax$의 정의역은 $\{x\mid x<0\}$이다. 두 곡선 $y=f(x)$, $y=f'(x)$가 만나려면 $x$에 대한 방정식 $2\ln ax=\frac{2}{x}$, 즉 $x\ln ax=1$의 실근이 존재해야 한다.

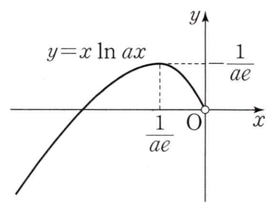
따라서 $g(x)=x\ln ax$라 하면 곡선 $y=g(x)$가 직선 $y=1$과 만나야 한다.

$$g'(x)=\ln ax+x\times\frac{a}{ax}=\ln ax+1$$

이므로 $g'(x)=0$에서 $\ln ax=-1$, 즉 $x=\frac{1}{ae}$이다.

따라서 함수 $g(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같고, 곡선 $y=g(x)$는 [그림 2]와 같다.

| $x$ | $\cdots$ | $\frac{1}{ae}$ | $\cdots$ | $(0)$ |
|---|---|---|---|---|
| $g'(x)$ | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $g(x)$ | $\nearrow$ | $-\frac{1}{ae}$ | $\searrow$ | |




[그림 2]

이때 함수 $g(x)$는 $x=\frac{1}{ae}$에서 극대인 동시에 최대이므로 곡선 $y=g(x)$가 직선 $y=1$과 만나려면 $-\frac{1}{ae}\geq1$, 즉 $-\frac{1}{e}\leq a<0$이어야 한다.

(i), (ii)에서 $a>0$ 또는 $-\frac{1}{e}\leq a<0$이므로 실수 $a$의 최솟값은 $-\frac{1}{e}$이다.

답 ③

## 유제

정답과 풀이 38쪽

**7** [23011-0098]

$a>0$, $a\neq1$일 때, $x$에 대한 부등식 $a^{x-1}-3x>b$의 해의 집합을 $A$라 하자.

$A=\{x\mid x$는 $x\neq1$인 실수$\}$

일 때, $ab$의 값은? (단, $a$, $b$는 상수이다.)

① $-2e^3$ ② $-3e^2$ ③ $-2e^2$ ④ $-3e$ ⑤ $-2e$

# 05 도함수의 활용

## 9. 속도와 가속도

일반적으로 좌표평면 위를 움직이는 점 P의 시각 $t$에서의 위치 $(x, y)$는 $t$를 매개변수로 하는 두 함수

$x=f(t),\ y=g(t)$

로 나타낼 수 있다. 이때 점 P의 시각 $t$에서의 속도와 속력, 가속도와 가속도의 크기는 다음과 같다.

(1) 점 P의 시각 $t$에서의 속도와 속력

① 속도: $\left(\dfrac{dx}{dt},\ \dfrac{dy}{dt}\right)$ 또는 $(f'(t),\ g'(t))$

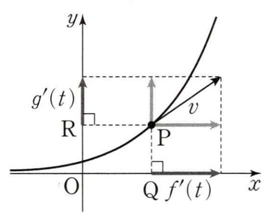
② 속력: $\sqrt{\left(\dfrac{dx}{dt}\right)^2+\left(\dfrac{dy}{dt}\right)^2}=\sqrt{\{f'(t)\}^2+\{g'(t)\}^2}$

(2) 점 P의 시각 $t$에서의 가속도와 가속도의 크기

① 가속도: $\left(\dfrac{d^2x}{dt^2},\ \dfrac{d^2y}{dt^2}\right)$ 또는 $(f''(t),\ g''(t))$

② 가속도의 크기: $\sqrt{\left(\dfrac{d^2x}{dt^2}\right)^2+\left(\dfrac{d^2y}{dt^2}\right)^2}=\sqrt{\{f''(t)\}^2+\{g''(t)\}^2}$

**설명** 점 P에서 $x$축, $y$축에 내린 수선의 발을 각각 Q, R라 하면 점 P가 움직일 때 두 점 Q, R는 각각 $x$축, $y$축 위에서 직선 운동을 한다.




(1) 두 점 Q, R의 시각 $t$에서의 속도를 각각 $v_x$, $v_y$라 하면

$v_x=\dfrac{dx}{dt}=f'(t),\ v_y=\dfrac{dy}{dt}=g'(t)$

이다. 이때 순서쌍 $(v_x,\ v_y)$를 점 P의 시각 $t$에서의 속도라 하고, $\sqrt{{v_x}^2+{v_y}^2}$을 점 P의 시각 $t$에서의 속도의 크기 또는 속력이라고 한다.

(2) 두 점 Q, R의 시각 $t$에서의 가속도를 각각 $a_x$, $a_y$라 하면

$a_x=\dfrac{dv_x}{dt}=\dfrac{d^2x}{dt^2}=f''(t),\ a_y=\dfrac{dv_y}{dt}=\dfrac{d^2y}{dt^2}=g''(t)$

이다. 이때 순서쌍 $(a_x,\ a_y)$를 점 P의 시각 $t$에서의 가속도라 하고, $\sqrt{{a_x}^2+{a_y}^2}$을 점 P의 시각 $t$에서의 가속도의 크기라고 한다.

**예** 좌표평면 위를 움직이는 점 P의 시각 $t$에서의 위치 $(x, y)$가

$x=2t+1,\ y=t^2+t$

일 때, 시각 $t$에서의 점 P의 속도, 속력, 가속도, 가속도의 크기를 구해 보자.

$\dfrac{dx}{dt}=2,\ \dfrac{dy}{dt}=2t+1$이므로 속도는 $(2,\ 2t+1)$

따라서 속력은 $\sqrt{\left(\dfrac{dx}{dt}\right)^2+\left(\dfrac{dy}{dt}\right)^2}=\sqrt{2^2+(2t+1)^2}=\sqrt{4t^2+4t+5}$

$\dfrac{d^2x}{dt^2}=0,\ \dfrac{d^2y}{dt^2}=2$이므로 가속도는 $(0,\ 2)$

따라서 가속도의 크기는 $\sqrt{\left(\dfrac{d^2x}{dt^2}\right)^2+\left(\dfrac{d^2y}{dt^2}\right)^2}=\sqrt{0^2+2^2}=2$

## 예제 5 속도와 가속도

좌표평면 위를 움직이는 점 P의 시각 $t$ ($t>0$)에서의 위치 $(x, y)$가

$$x=\cos t+t\sin t,\ y=\sin t-t\cos t$$

이다. 점 P의 속력이 3이 되는 시각에서의 점 P의 가속도의 크기는?

① $\sqrt{6}$ ② $\sqrt{7}$ ③ $2\sqrt{2}$ ④ 3 ⑤ $\sqrt{10}$

**길잡이** 좌표평면 위를 움직이는 점 P의 시각 $t$에서의 위치 $(x, y)$가 $x=f(t)$, $y=g(t)$일 때, 점 P의 시각 $t$에서의 속력과 가속도의 크기는 각각

$$\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}=\sqrt{\{f'(t)\}^2+\{g'(t)\}^2},\ \sqrt{\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)^2+\left(\frac{d^2y}{dt^2}\right)^2}=\sqrt{\{f''(t)\}^2+\{g''(t)\}^2}$$

**풀이** $x=\cos t+t\sin t$, $y=\sin t-t\cos t$에서

$$\frac{dx}{dt}=-\sin t+(\sin t+t\cos t)=t\cos t,\ \frac{dy}{dt}=\cos t-(\cos t-t\sin t)=t\sin t$$

따라서 점 P의 시각 $t$에서의 속력은

$$\sqrt{(t\cos t)^2+(t\sin t)^2}=t\sqrt{\cos^2 t+\sin^2 t}=t$$

이므로 점 P의 속력이 3이 되는 시각은 $t=3$이다.

$$\frac{d^2x}{dt^2}=\cos t-t\sin t,\ \frac{d^2y}{dt^2}=\sin t+t\cos t$$

이므로 점 P의 시각 $t$에서의 가속도의 크기는

$$\sqrt{(\cos t-t\sin t)^2+(\sin t+t\cos t)^2}$$
$$=\sqrt{(\cos^2 t-2t\sin t\cos t+t^2\sin^2 t)+(\sin^2 t+2t\sin t\cos t+t^2\cos^2 t)}$$
$$=\sqrt{(1+t^2)(\cos^2 t+\sin^2 t)}=\sqrt{1+t^2}$$

따라서 점 P의 시각 $t=3$에서의 가속도의 크기는 $\sqrt{1+3^2}=\sqrt{10}$

답 ⑤

## 유제

정답과 풀이 39쪽

**8** [23011-0099]

좌표평면 위를 움직이는 점 P의 시각 $t$ ($t>0$)에서의 위치 $(x, y)$가

$$x=t^2,\ y=e^{t-1}-e^{-t+1}$$

이다. 점 P의 시각 $t=1$에서의 가속도의 크기는?

① $\sqrt{2}$ ② $\sqrt{e}$ ③ 2 ④ $e$ ⑤ $e^2$

**9** [23011-0100]

좌표평면 위를 움직이는 점 P의 시각 $t$ ($0<t<2$)에서의 위치 $(x, y)$가

$$x=\ln(2-t),\ y=(t+a)^{\frac{3}{2}}$$

이고, 점 P는 원점 O를 지난다. 점 P가 점 O를 지나는 순간의 점 P의 속력은? (단, $a$는 상수이다.)

① 1 ② $\sqrt{2}$ ③ $\sqrt{3}$ ④ 2 ⑤ $\sqrt{5}$

[23011-0101]

**1** 곡선 $y=\cos 2x$ 위의 점 $\left(\frac{\pi}{6}, \frac{1}{2}\right)$에서의 접선의 $x$절편은?

① $\frac{\pi-\sqrt{3}}{6}$ ② $\frac{\pi-\sqrt{2}}{6}$ ③ $\frac{\pi+\sqrt{2}}{6}$ ④ $\frac{\pi+\sqrt{3}}{6}$ ⑤ $\frac{\pi+2\sqrt{2}}{6}$

[23011-0102]

**2** 곡선 $y=\ln|x-1|$에 접하고 기울기가 $-\frac{1}{e}$인 직선과 $x$축 및 $y$축으로 둘러싸인 부분의 넓이는?

① $\frac{1}{2e^2}$ ② $\frac{1}{e^2}$ ③ $\frac{1}{2e}$ ④ $\frac{1}{e}$ ⑤ $\frac{1}{2}$

[23011-0103]

**3** 함수 $f(x)=(x^2+a)e^x$의 역함수가 존재하도록 하는 실수 $a$의 최솟값은?

① $-2$ ② $-1$ ③ $0$ ④ $1$ ⑤ $2$

[23011-0104]

**4** 열린구간 $(-\pi, \pi)$에서 정의된 함수 $f(x)=\frac{e^{\sin x}}{e^{\cos x}}$의 극솟값을 $m$, 극댓값을 $M$이라 할 때, $\frac{M}{m}$의 값은?

① $e^{\sqrt{2}}$ ② $e^2$ ③ $e^{2\sqrt{2}}$ ④ $e^4$ ⑤ $e^{4\sqrt{2}}$

[23011-0105]

**5** 곡선 $y=\dfrac{2^x}{2^x+1}$의 변곡점에서의 접선의 기울기는?

① $\dfrac{\ln 2}{4}$ ② $\dfrac{\ln 2}{2}$ ③ $\ln 2$ ④ $2\ln 2$ ⑤ $4\ln 2$

[23011-0106]

**6** 닫힌구간 $[2, 4]$에서 함수 $f(x)=\dfrac{e^x}{x^2-3}$의 최댓값을 $M$, 최솟값을 $m$이라 하자. $\dfrac{m}{M}$의 값은?

① $\dfrac{e}{7}$ ② $\dfrac{e}{6}$ ③ $\dfrac{e}{5}$ ④ $\dfrac{e}{4}$ ⑤ $\dfrac{e}{3}$

[23011-0107]

**7** 방정식 $\dfrac{\sqrt{x}}{2}+\dfrac{2}{x}=k$가 오직 하나의 실근을 갖도록 하는 상수 $k$의 값은?

① $\dfrac{1}{2}$ ② $1$ ③ $\dfrac{3}{2}$ ④ $2$ ⑤ $\dfrac{5}{2}$

[23011-0108]

**8** 좌표평면 위를 움직이는 점 P의 시각 $t$ $(t>0)$에서의 위치 $(x, y)$가

$x=t+\ln t^2$, $y=t^2+\ln t$

이다. 점 P의 시각 $t=1$에서의 속력은?

① $\sqrt{10}$ ② $2\sqrt{3}$ ③ $\sqrt{14}$ ④ $4$ ⑤ $3\sqrt{2}$

[23011-0109]

**1** 점 $(n, 0)$을 지나고 곡선 $y=(x-1)e^{x}$에 접하는 직선이 존재하도록 하는 음의 정수 $n$의 최댓값은?

① $-5$ ② $-4$ ③ $-3$ ④ $-2$ ⑤ $-1$

[23011-0110]

**2** 열린구간 $(0, 2\pi)$에서 정의된 함수 $f(x)=\ln(1+|\sin x|)$가 $x=a$에서 극값을 갖도록 하는 모든 실수 $a$의 값의 합은?

① $2\pi$ ② $\frac{5}{2}\pi$ ③ $3\pi$ ④ $\frac{7}{2}\pi$ ⑤ $4\pi$

[23011-0111]

**3** 함수 $f(x)=xe^{ax}$에 대하여 곡선 $y=f(-x+5)$의 변곡점의 $x$좌표가 3일 때, 곡선 $y=f(x)$의 변곡점의 $x$좌표는 $b$이다. $a+b$의 값은? (단, $a$는 0이 아닌 상수이다.)

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

[23011-0112]

**4** 실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $f(x)$가 모든 실수 $x$에 대하여

$$|f(x)|=e^{-x^2}$$

을 만족시킨다. 곡선 $y=f(x)$가 열린구간 $(-a, a)$에서 아래로 볼록할 때, $f(a)$의 최댓값은?

(단, $a$는 양수이다.)

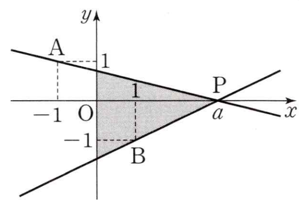
① $-\frac{1}{\sqrt{e}}$ ② $-\frac{1}{e}$ ③ $\frac{1}{4e}$ ④ $\frac{1}{e}$ ⑤ $\frac{1}{\sqrt{e}}$

[23011-0113]

**5** 함수 $f(x)=(x^3+4)e^{-x}$이 있다. 자연수 $k$에 대하여 함수 $|f(x)-f(k)|$가 $x=a$에서 미분가능하지 않은 실수 $a$의 개수를 $a_k$라 할 때, $\sum_{k=1}^{10} ka_k$의 값을 구하시오.

[23011-0114]

**6** 그림과 같이 1보다 큰 실수 $a$와 세 점 $A(-1, 1)$, $B(1, -1)$, $P(a, 0)$에 대하여 두 직선 AP, BP 및 $y$축으로 둘러싸인 부분의 넓이의 최솟값은?




① $\frac{3\sqrt{3}}{2}$　② $2\sqrt{2}$　③ $2\sqrt{3}$

④ $\frac{5\sqrt{2}}{2}$　⑤ $\frac{5\sqrt{3}}{2}$

[23011-0115]

**7** 실수 $t$에 대하여 $-\pi \leq x \leq \pi$에서 $x$에 대한 방정식

$$\sin(\pi \cos x)=t$$

의 서로 다른 실근의 개수를 $f(t)$라 하자. 함수 $f(t)$의 치역의 모든 원소의 합을 구하시오.

[23011-0116]

**8** 좌표평면 위를 움직이는 점 P의 시각 $t$ $(t \geq 0)$에서의 위치 $(x, y)$가

$$x=k-\cos t,\ y=2\sin t \ (k\text{는 상수})$$

이다. 점 P가 시각 $t=0$일 때 원점을 출발한 다음, 다시 원점을 지나는 모든 시각을 작은 수부터 크기순으로 나열한 것을

$$t_1,\ t_2,\ t_3,\ \cdots$$

이라 하자. $t_1<t<t_2$에서 점 P의 속력과 가속도의 크기가 서로 같은 시각 $t$의 개수는 $m$이다. $k+m$의 값은?

① 1　② 2　③ 3　④ 4　⑤ 5

[23011-0117]

**1** 양의 실수 $t$에 대하여 원점을 지나고 곡선 $y=\frac{1}{e^x}+t$에 접하는 직선의 기울기를 $f(t)$라 하자. $f(t_1)=-e\sqrt{e}$를 만족시키는 상수 $t_1$에 대하여 $60\times|f'(t_1)|$의 값을 구하시오.

[23011-0118]

**2** 함수 $f(x)=4\sin^2 x+k\cos x$에 대하여 다음 조건을 만족시키는 정수 $k$의 개수는?

(가) $-10\le k\le 10$
(나) 함수 $f(x)$의 극댓값은 정수이다.

① 5 ② 7 ③ 9 ④ 11 ⑤ 13

[23011-0119]

**3** 양의 실수 $a$와 함수

$$f(x)=\begin{cases}-a\{\log_4(x+1)\}^2+a & (-1<x<3)\\ 2e^{3-x}+1 & (x\ge 3)\end{cases}$$

에 대하여 $x$에 대한 방정식 $f(f(x))=f(x)$의 서로 다른 실근의 개수를 $g(a)$라 하자. 함수 $g(a)$가 $a=k$에서 불연속인 모든 양수 $k$의 값의 합은 $\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, $p$와 $q$는 서로소인 자연수이다.)

# 대표 기출 문제

EBS

출제 경향 삼각함수, 지수함수, 로그함수에 대하여 함수의 그래프의 접선의 방정식, 함수의 극댓값과 극솟값, 최댓값과 최솟값을 구하는 문제, 함수의 증가와 감소, 곡선의 변곡점, 방정식과 부등식에 활용하는 문제, 속력과 가속도의 크기를 구하는 문제 등이 출제되고 있다.

2022학년도 대수능

함수 $f(x)=6\pi(x-1)^2$에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x)=3f(x)+4\cos f(x)$$

라 하자. $0<x<2$에서 함수 $g(x)$가 극소가 되는 $x$의 개수는? [4점]

① 6　② 7　③ 8　④ 9　⑤ 10

출제 의도 합성함수의 미분법을 이용하여 극소가 되는 $x$의 개수를 구할 수 있는지를 묻는 문제이다.

풀이 $f'(x)=12\pi(x-1)$,

$$g'(x)=3f'(x)-4f'(x)\sin f(x)=f'(x)\{3-4\sin f(x)\}=12\pi(x-1)[3-4\sin\{6\pi(x-1)^2\}]$$

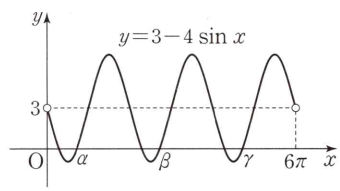
이므로 $g'(x)=0$에서 $x=1$ 또는 $\sin\{6\pi(x-1)^2\}=\frac{3}{4}$

(i) $x=1$일 때

$x=1$의 좌우에서 $3-4\sin\{6\pi(x-1)^2\}$의 값이 양수이고 $x-1$의 값이 음에서 양으로 변하므로 $g'(x)$의 값도 음에서 양으로 변한다. 따라서 함수 $g(x)$는 $x=1$에서 극소이다.

(ii) $1<x<2$일 때

함수 $f(x)$는 열린구간 $(1, 2)$에서 $0<f(x)<6\pi$이고, 열린구간 $(0, 6\pi)$에서 함수 $y=3-4\sin x$의 그래프는 오른쪽과 같으므로 $x=\alpha$, $\beta$, $\gamma$의 좌우에서 $3-4\sin x$의 값은 각각 음에서 양으로 변한다.




함수 $f(x)$는 열린구간 $(1, 2)$에서 증가하는 함수이므로 $f(x)=\alpha$, $\beta$, $\gamma$인 $x$의 값은 각각 1개씩이고 그 값을 각각 $\alpha'$, $\beta'$, $\gamma'$이라 하면 $x=\alpha'$, $\beta'$, $\gamma'$의 좌우에서 $3-4\sin f(x)$의 값은 각각 음에서 양으로 변하고 $1<x<2$에서 $12\pi(x-1)>0$이므로 함수 $g(x)$는 $x=\alpha'$, $\beta'$, $\gamma'$에서 극소이다.

따라서 $1<x<2$에서 함수 $g(x)$가 극소가 되는 $x$의 개수는 3이다.

(iii) $0<x<1$일 때

함수 $y=f(x)$의 그래프는 직선 $x=1$에 대하여 대칭이므로 모든 실수 $x$에 대하여 $f(1-x)=f(1+x)$가 성립한다.

이때 $g(1-x)=3f(1-x)+4\cos f(1-x)=3f(1+x)+4\cos f(1+x)=g(1+x)$

이므로 함수 $y=g(x)$의 그래프도 직선 $x=1$에 대하여 대칭이다.

따라서 (ii)와 같이 $0<x<1$에서 함수 $g(x)$가 극소가 되는 $x$의 개수는 3이다.

(i), (ii), (iii)에서 구하는 $x$의 개수는 $1+3+3=7$이다.

답 ②

# 06 여러 가지 적분법

## 1. 함수 $y=x^n$($n$은 실수)의 적분

(1) $n\neq-1$일 때, $\int x^n\,dx=\frac{1}{n+1}x^{n+1}+C$ (단, $C$는 적분상수)

(2) $n=-1$일 때, $\int x^{-1}\,dx=\int\frac{1}{x}dx=\ln|x|+C$ (단, $C$는 적분상수)

**설명** (1) $n\neq-1$일 때, 함수 $y=x^n$의 미분법에서 $\left(\frac{1}{n+1}x^{n+1}\right)'=x^n$이므로

$$\int x^n\,dx=\frac{1}{n+1}x^{n+1}+C$$

(2) $n=-1$일 때, 로그함수의 미분법에서 $(\ln|x|)'=\frac{1}{x}$이므로

$$\int x^{-1}\,dx=\int\frac{1}{x}\,dx=\ln|x|+C$$

**예** (1) $\int_1^4\sqrt{x^3}dx=\int_1^4 x^{\frac{3}{2}}\,dx=\left[\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}\right]_1^4=\frac{64}{5}-\frac{2}{5}=\frac{62}{5}$

(2) $\int_1^e\frac{1}{x}\,dx=\Big[\ln|x|\Big]_1^e=\ln e-\ln 1=1$

## 2. 지수함수의 적분

(1) $\int e^x\,dx=e^x+C$ (단, $C$는 적분상수)

(2) $a>0$, $a\neq1$일 때, $\int a^x\,dx=\frac{a^x}{\ln a}+C$ (단, $C$는 적분상수)

**예** (1) $\int_0^1 e^x\,dx=\Big[e^x\Big]_0^1=e-1$

(2) $\int_1^3 2^x\,dx=\left[\frac{2^x}{\ln 2}\right]_1^3=\frac{8}{\ln 2}-\frac{2}{\ln 2}=\frac{6}{\ln 2}$

## 3. 삼각함수의 적분

(1) $\int\sin x\,dx=-\cos x+C$ (단, $C$는 적분상수)

(2) $\int\cos x\,dx=\sin x+C$ (단, $C$는 적분상수)

(3) $\int\sec^2 x\,dx=\tan x+C$ (단, $C$는 적분상수)

(4) $\int\csc^2 x\,dx=-\cot x+C$ (단, $C$는 적분상수)

**예** (1) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\,dx=\Big[-\cos x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}=-\cos\frac{\pi}{2}+\cos 0=0+1=1$

(2) $\int_0^{\frac{\pi}{6}}\cos x\,dx=\Big[\sin x\Big]_0^{\frac{\pi}{6}}=\sin\frac{\pi}{6}-\sin 0=\frac{1}{2}-0=\frac{1}{2}$

(3) $\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sec^2 x\,dx=\Big[\tan x\Big]_0^{\frac{\pi}{4}}=\tan\frac{\pi}{4}-\tan 0=1-0=1$

(4) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\csc^2 x\,dx=\Big[-\cot x\Big]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}=-\cot\frac{\pi}{3}+\cot\frac{\pi}{4}=-\frac{\sqrt{3}}{3}+1$

## 예제 1 여러 가지 함수의 적분법

www.ebsi.co.kr

양의 실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $f(x)$에 대하여 $0<x<1$일 때 $f'(x)=\sqrt{x}$이고, $x>1$일 때 $f'(x)=\frac{1}{x^3}$이다.

$f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{\sqrt{2}}{6}$일 때, $f(3)$의 값은?

① $\frac{8}{9}$ ② $\frac{10}{9}$ ③ $\frac{4}{3}$ ④ $\frac{14}{9}$ ⑤ $\frac{16}{9}$

**길잡이** $n \neq -1$일 때, $\int x^n dx = \frac{1}{n+1}x^{n+1}+C$ ($C$는 적분상수)임을 이용한다.

**풀이** (i) $0<x<1$일 때, $f(x)=\int f'(x)\,dx=\int \sqrt{x}\,dx=\int x^{\frac{1}{2}}\,dx=\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}+C_1$ (단, $C_1$은 적분상수)

(ii) $x>1$일 때, $f(x)=\int f'(x)\,dx=\int \frac{1}{x^3}\,dx=\int x^{-3}\,dx=-\frac{1}{2}x^{-2}+C_2=-\frac{1}{2x^2}+C_2$ (단, $C_2$는 적분상수)

(i), (ii)에 의하여 $f(x)=\begin{cases} \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}+C_1 & (0<x<1) \\ -\frac{1}{2x^2}+C_2 & (x>1) \end{cases}$

이때 $f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{\sqrt{2}}{6}$이므로 $\frac{2}{3}\times\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{3}{2}}+C_1=\frac{\sqrt{2}}{6}+C_1=\frac{\sqrt{2}}{6}$, 즉 $C_1=0$

또 함수 $f(x)$가 $x=1$에서 연속이어야 하므로 $\lim_{x\to 1-} f(x)=\lim_{x\to 1+} f(x)$이어야 한다.

즉, $\lim_{x\to 1-}\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}=\lim_{x\to 1+}\left(-\frac{1}{2x^2}+C_2\right)$에서 $\frac{2}{3}=-\frac{1}{2}+C_2$이므로 $C_2=\frac{2}{3}+\frac{1}{2}=\frac{7}{6}$

따라서 $x>1$일 때 $f(x)=-\frac{1}{2x^2}+\frac{7}{6}$이므로

$f(3)=-\frac{1}{18}+\frac{7}{6}=\frac{10}{9}$

답 ②

## 유제

정답과 풀이 48쪽

**1** [23011-0120]

$\int_{-1}^{1}|9^x-3^x|\,dx$의 값은?

① $\frac{2}{\ln 3}$ ② $\frac{20}{9\ln 3}$ ③ $\frac{22}{9\ln 3}$ ④ $\frac{8}{3\ln 3}$ ⑤ $\frac{26}{9\ln 3}$

**2** [23011-0121]

$0<\theta<\frac{\pi}{4}$인 실수 $\theta$에 대하여 $\int_{\theta}^{\frac{\pi}{2}-\theta}\frac{1}{\sin^2 x\cos^2 x}\,dx=3$일 때, $\sin^2\theta$의 값은?

① $\frac{1}{3}$ ② $\frac{1}{4}$ ③ $\frac{1}{5}$ ④ $\frac{1}{6}$ ⑤ $\frac{1}{7}$

## 4. 치환적분법

(1) 치환적분법을 이용한 부정적분

미분가능한 함수 $g(x)$에 대하여 $g(x)=t$로 놓으면

$$\int f(g(x))g'(x)\,dx=\int f(t)\,dt$$

(2) 치환적분법을 이용한 정적분

미분가능한 함수 $g(x)$의 도함수 $g'(x)$가 닫힌구간 $[a, b]$에서 연속이고 $g(a)=\alpha$, $g(b)=\beta$일 때, 함수 $f(t)$가 $\alpha$, $\beta$를 포함하는 구간에서 연속이면

$$\int_a^b f(g(x))g'(x)\,dx=\int_\alpha^\beta f(t)\,dt$$

**설명** 함수 $f(x)$의 한 부정적분을 $F(x)$라 하자.

(1) 합성함수의 미분법에서 $\dfrac{d}{dx}F(g(x))=F'(g(x))g'(x)=f(g(x))g'(x)$이므로

$$\int f(g(x))g'(x)\,dx=F(g(x))+C \text{ (단, } C\text{는 적분상수)} \quad \cdots\cdots ㉠$$

이때 $g(x)=t$로 놓으면 $F(g(x))=F(t)$이고, $\int f(t)\,dt=F(t)+C$ ($C$는 적분상수)이므로

$$\int f(g(x))g'(x)\,dx=\int f(t)dt$$

(2) $g(a)=\alpha$, $g(b)=\beta$일 때 ㉠에 의하여

$$\begin{aligned}\int_a^b f(g(x))g'(x)\,dx&=\Big[F(g(x))\Big]_a^b\\&=F(g(b))-F(g(a))\\&=F(\beta)-F(\alpha)\\&=\int_\alpha^\beta f(t)\,dt\end{aligned}$$

이므로

$$\int_a^b f(g(x))g'(x)\,dx=\int_\alpha^\beta f(t)\,dt$$

**참고** $\displaystyle\int\frac{f'(x)}{f(x)}dx$에서 $f(x)=t$로 놓으면 $f'(x)=\dfrac{dt}{dx}$이므로

$$\int\frac{f'(x)}{f(x)}dx=\int\frac{1}{t}dt=\ln|t|+C=\ln|f(x)|+C \text{ (단, } C\text{는 적분상수)}$$

**예** ① $\displaystyle\int_0^1 2xe^{x^2+3}dx$에서 $x^2+3=t$로 놓으면 $x=0$일 때 $t=3$, $x=1$일 때 $t=4$이고, $2x=\dfrac{dt}{dx}$이므로

$$\int_0^1 2xe^{x^2+3}dx=\int_3^4 e^t\,dt=\Big[e^t\Big]_3^4=e^4-e^3$$

② $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}}\tan x\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{\sin x}{\cos x}dx=-\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{(\cos x)'}{\cos x}dx=-\Big[\ln|\cos x|\Big]_0^{\frac{\pi}{3}}=-\ln\frac{1}{2}+\ln 1=\ln 2$

## 예제 2 치환적분법

www.ebsi.co.kr

1보다 큰 실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $f(x)$에 대하여 곡선 $y=f(x)$ 위의 임의의 점 $(x, y)$에서의 접선의 기울기가 $\dfrac{2\ln x+3}{x(\ln x)^2}$이다. $f(e)=0$일 때, 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(e^3, f(e^3))$에서의 접선의 $y$절편이 $k$이다. $e^k$의 값은?

① $e$　② $3e$　③ $5e$　④ $7e$　⑤ $9e$

**길잡이** $(\ln x)'=\dfrac{1}{x}$이므로 $\ln x=t$로 놓고 치환적분법을 이용한다.

**풀이** $x>1$일 때, $f'(x)=\dfrac{2\ln x+3}{x(\ln x)^2}$이므로

$$f(x)=\int \frac{2\ln x+3}{x(\ln x)^2}dx \quad \cdots\cdots ㉠$$

㉠에서 $\ln x=t$로 놓으면 $\dfrac{1}{x}=\dfrac{dt}{dx}$이므로

$$f(x)=\int \frac{2\ln x+3}{x(\ln x)^2}dx=\int \frac{2t+3}{t^2}dt=\int\left(\frac{2}{t}+\frac{3}{t^2}\right)dt$$

$$=2\ln|t|-\frac{3}{t}+C=2\ln|\ln x|-\frac{3}{\ln x}+C \text{ (단, } C\text{는 적분상수)}$$

$f(e)=-3+C=0$에서 $C=3$

즉, $f(x)=2\ln|\ln x|-\dfrac{3}{\ln x}+3$이므로

$$f(e^3)=2\ln 3-1+3=2\ln 3+2$$

이때 $f'(e^3)=\dfrac{2\times3+3}{e^3\times3^2}=\dfrac{1}{e^3}$이므로 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(e^3, f(e^3))$에서의 접선의 방정식은

$$y-(2\ln 3+2)=\frac{1}{e^3}(x-e^3),\ y=\frac{1}{e^3}x+2\ln 3+1$$

따라서 $k=2\ln 3+1=\ln 9e$이므로

$$e^k=e^{\ln 9e}=9e$$

답 ⑤

## 유제

정답과 풀이 48쪽

**3** [23011-0122]

$\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x\cos^5 x\,dx$의 값은?

① $\dfrac{1}{48}$　② $\dfrac{1}{24}$　③ $\dfrac{1}{16}$　④ $\dfrac{1}{12}$　⑤ $\dfrac{5}{48}$

**4** [23011-0123]

$\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\tan^3 x+\tan^5 x}{\cos x}dx$의 값은?

① $\dfrac{52}{15}$　② $\dfrac{18}{5}$　③ $\dfrac{56}{15}$　④ $\dfrac{58}{15}$　⑤ 4

## 5. 부분적분법

(1) 부분적분법을 이용한 부정적분

두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 미분가능할 때,

$$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx$$

(2) 부분적분법을 이용한 정적분

두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 미분가능하고 $f'(x)$, $g'(x)$가 닫힌구간 $[a, b]$에서 연속일 때,

$$\int_a^b f(x)g'(x)dx = \Big[f(x)g(x)\Big]_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)dx$$

**설명** (1) 두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 미분가능할 때, 곱의 미분법에 의하여

$$\{f(x)g(x)\}' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

이므로

$$f(x)g(x) = \int f'(x)g(x)dx + \int f(x)g'(x)dx \qquad \cdots\cdots ㉠$$

따라서

$$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx$$

(2) 두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 미분가능하고 $f'(x)$, $g'(x)$가 닫힌구간 $[a, b]$에서 연속일 때, ㉠에 의하여

$$\int_a^b f'(x)g(x)dx + \int_a^b f(x)g'(x)dx = \Big[f(x)g(x)\Big]_a^b$$

이므로

$$\int_a^b f(x)g'(x)dx = \Big[f(x)g(x)\Big]_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)dx$$

**참고** 두 함수의 곱으로 이루어진 함수를 부분적분법을 이용하여 적분할 때, 미분하면 간단해지는 함수를 $f(x)$로 놓고, 적분하기 쉬운 함수를 $g'(x)$로 놓는다.

로그함수 다항함수 삼각함수 지수함수

$f(x) \longleftrightarrow g'(x)$

**예** ① $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos x\,dx$에서 $f(x)=x$, $g'(x)=\cos x$로 놓으면 $f'(x)=1$, $g(x)=\sin x$이므로

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos x\,dx = \Big[x\sin x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\,dx$$
$$= \frac{\pi}{2} + \Big[\cos x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2} - 1$$

② $\int_e^{e^2} \ln x\,dx$에서 $f(x)=\ln x$, $g'(x)=1$로 놓으면 $f'(x)=\frac{1}{x}$, $g(x)=x$이므로

$$\int_e^{e^2} \ln x\,dx = \Big[x\ln x\Big]_e^{e^2} - \int_e^{e^2} 1\,dx = 2e^2 - e - \Big[x\Big]_e^{e^2}$$
$$= 2e^2 - e - (e^2 - e) = e^2$$

## 예제 3 부분적분법



$\int_0^{\frac{\pi}{4}}(x\tan^2 x+x)\,dx$의 값은?

① $\frac{\pi-2\ln 2}{4}$ ② $\frac{\pi-\ln 2}{4}$ ③ $\frac{\pi+\ln 2}{4}$ ④ $\frac{\pi+2\ln 2}{4}$ ⑤ $\frac{\pi+3\ln 2}{4}$

**길잡이** $\tan^2 x+1=\sec^2 x$임을 이용하여 식을 변형한 후 $u(x)=x$, $v'(x)=\sec^2 x$로 놓고 부분적분법을 이용하여 정적분의 값을 구한다.

**풀이**

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}}(x\tan^2 x+x)\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}x(\tan^2 x+1)\,dx$$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}x\sec^2 x\,dx \quad \cdots\cdots ㉠$$

㉠에서 $u(x)=x$, $v'(x)=\sec^2 x$로 놓으면 $u'(x)=1$, $v(x)=\tan x$이므로

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}}x\sec^2 x\,dx=\Big[x\tan x\Big]_0^{\frac{\pi}{4}}-\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan x\,dx$$
$$=\frac{\pi}{4}-\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sin x}{\cos x}dx$$
$$=\frac{\pi}{4}+\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{-\sin x}{\cos x}dx$$
$$=\frac{\pi}{4}+\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{(\cos x)'}{\cos x}dx$$
$$=\frac{\pi}{4}+\Big[\ln|\cos x|\Big]_0^{\frac{\pi}{4}}$$
$$=\frac{\pi}{4}+\ln\frac{1}{\sqrt{2}}$$
$$=\frac{\pi}{4}-\frac{\ln 2}{2}$$
$$=\frac{\pi-2\ln 2}{4}$$

답 ①

## 유제

정답과 풀이 49쪽

**5** [23011-0124]

$\int_0^3 27e^{3x}(2x^2+x-3)\,dx$의 값은?

① $125e^9+24$ ② $125e^9+26$ ③ $127e^9+24$ ④ $127e^9+26$ ⑤ $127e^9+28$

**6** [23011-0125]

$\int_0^{\pi}x^2\sin\left(\frac{3}{2}\pi+x\right)dx$의 값은?

① $\frac{\pi}{2}$ ② $\pi$ ③ $\frac{3}{2}\pi$ ④ $2\pi$ ⑤ $\frac{5}{2}\pi$

## 6. 정적분으로 표시된 함수의 미분과 극한

(1) 정적분으로 표시된 함수의 미분

연속함수 $f(x)$에 대하여

① $\dfrac{d}{dx}\displaystyle\int_a^x f(t)dt=f(x)$ (단, $a$는 상수)

② $\dfrac{d}{dx}\displaystyle\int_x^{x+a} f(t)dt=f(x+a)-f(x)$ (단, $a$는 상수)

③ 두 함수 $g(x)$, $h(x)$가 미분가능할 때,

$$\frac{d}{dx}\int_{g(x)}^{h(x)} f(t)dt=f(h(x))h'(x)-f(g(x))g'(x)$$

**설명** 함수 $f(x)$의 한 부정적분을 $F(x)$라 하면

① $\dfrac{d}{dx}\displaystyle\int_a^x f(t)dt=\dfrac{d}{dx}\Big[F(t)\Big]_a^x=\dfrac{d}{dx}\{F(x)-F(a)\}=F'(x)=f(x)$

② $\dfrac{d}{dx}\displaystyle\int_x^{x+a} f(t)dt=\dfrac{d}{dx}\Big[F(t)\Big]_x^{x+a}=\dfrac{d}{dx}\{F(x+a)-F(x)\}=F'(x+a)-F'(x)=f(x+a)-f(x)$

③ $\dfrac{d}{dx}\displaystyle\int_{g(x)}^{h(x)} f(t)dt=\dfrac{d}{dx}\Big[F(t)\Big]_{g(x)}^{h(x)}=\dfrac{d}{dx}\{F(h(x))-F(g(x))\}$

$=F'(h(x))h'(x)-F'(g(x))g'(x)$

$=f(h(x))h'(x)-f(g(x))g'(x)$

**예** ① $\dfrac{d}{dx}\displaystyle\int_1^x e^t dt=e^x$

② $\dfrac{d}{dx}\displaystyle\int_x^{x+1} \ln t\, dt=\ln(x+1)-\ln x=\ln\dfrac{x+1}{x}$

③ $\dfrac{d}{dx}\displaystyle\int_{2x}^{3x} \cos t\, dt=(\cos 3x)\times 3-(\cos 2x)\times 2=3\cos 3x-2\cos 2x$

(2) 정적분으로 표시된 함수의 극한

연속함수 $f(x)$에 대하여

① $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\int_a^{a+x} f(t)dt=f(a)$ (단, $a$는 상수)

② $\displaystyle\lim_{x\to a}\frac{1}{x-a}\int_a^x f(t)dt=f(a)$ (단, $a$는 상수)

**설명** 함수 $f(x)$의 한 부정적분을 $F(x)$라 하면

① $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\int_a^{a+x} f(t)dt=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\Big[F(t)\Big]_a^{a+x}=\lim_{x\to 0}\frac{F(a+x)-F(a)}{x}=F'(a)=f(a)$

② $\displaystyle\lim_{x\to a}\frac{1}{x-a}\int_a^x f(t)dt=\lim_{x\to a}\frac{1}{x-a}\Big[F(t)\Big]_a^x=\lim_{x\to a}\frac{F(x)-F(a)}{x-a}=F'(a)=f(a)$

## 예제 4 정적분으로 표시된 함수의 미분과 극한



실수 전체의 집합에서 미분가능한 두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 모든 실수 $x$에 대하여

$$f(g(x))=\int_{1}^{x} f(t)g'(t)\,dt+3g(x)$$

를 만족시킨다. $g(1)=1$일 때, $f(1)+f'(1)$의 값은? (단, $g'(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이고, $g'(1)\neq0$이다.)

① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

**길잡이** 연속함수 $f(x)$에 대하여 $\frac{d}{dx}\int_{a}^{x} f(t)dt=f(x)$ ($a$는 상수)임을 이용한다.

**풀이** $f(g(x))=\int_{1}^{x} f(t)g'(t)dt+3g(x)$ ······ ㉠

㉠의 양변에 $x=1$을 대입하면

$f(g(1))=3g(1)$

$g(1)=1$이므로 $f(1)=3$

㉠의 양변을 $x$에 대하여 미분하면

$f'(g(x))g'(x)=f(x)g'(x)+3g'(x)$ ······ ㉡

㉡의 양변에 $x=1$을 대입하면

$f'(g(1))g'(1)=f(1)g'(1)+3g'(1)$

$g'(1)\neq0$이므로

$f'(g(1))=f(1)+3$

$g(1)=1$, $f(1)=3$이므로

$f'(1)=3+3=6$

따라서

$f(1)+f'(1)=3+6=9$

답 ④

## 유제

정답과 풀이 49쪽

**7** [23011-0126]

실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $f(x)$가 모든 실수 $x$에 대하여

$$\int_{0}^{x} (x-t)f(t)\,dt=e^{3x^2+1}-e$$

를 만족시킬 때, $f(1)$의 값은?

① $42e^4$ ② $44e^4$ ③ $46e^4$ ④ $48e^4$ ⑤ $50e^4$

**8** [23011-0127]

함수 $f(x)=(2x+k)\sin\frac{\pi x}{6}$에 대하여

$$\lim_{x\to1}\frac{1}{x-1}\int_{1}^{x^2} f(t)dt=5$$

일 때, 상수 $k$의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

[23011-0128]

**1** $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sqrt[4]{x^3}+1}{\sqrt[4]{x}+1}dx$의 값은?

① $\frac{3}{5}$ ② $\frac{2}{3}$ ③ $\frac{11}{15}$ ④ $\frac{4}{5}$ ⑤ $\frac{13}{15}$

[23011-0129]

**2** $\displaystyle\int_1^{e^2} \frac{(\ln x)^2+x^3}{x}dx$의 값은?

① $\frac{e^6+5}{3}$ ② $\frac{e^6+6}{3}$ ③ $\frac{e^6+7}{3}$ ④ $\frac{e^9+5}{3}$ ⑤ $\frac{e^9+6}{3}$

[23011-0130]

**3** $\displaystyle\int_1^e (9x^2+1)\ln x\,dx$의 값은?

① $e^3+1$ ② $e^3+2$ ③ $2e^3+1$ ④ $2e^3+2$ ⑤ $2e^3+3$

[23011-0131]

**4** 실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $f(x)$가 모든 실수 $x$에 대하여

$$\int_1^x f(t)\,dt=f(x)+2e^{x-1}-5$$

를 만족시킬 때, $f'(1)$의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

정답과 풀이 51쪽

[23011-0132]

**1** $-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}$인 모든 실수 $x$에서 미분가능한 함수 $f(x)$에 대하여

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+2h)-f(x-h)}{h}=3\tan^2 x+6$$

이다. $f\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\pi}{2}$일 때, $f\left(-\frac{\pi}{4}\right)$의 값은?

① $-2$　② $-1$　③ $0$　④ $1$　⑤ $2$

[23011-0133]

**2** 실수 전체의 집합에서 미분가능하고 도함수가 연속인 함수 $f(x)$가 모든 실수 $x$에 대하여 $f(x+3)=f(x)$를 만족시킨다. $f(0)=0$, $f(1)=1$이고, $\int_0^1 f(3f(x))f'(x)\,dx=2$일 때, $\int_5^{\frac{13}{2}} f(2x-4)\,dx$의 값은?

① $1$　② $2$　③ $3$　④ $4$　⑤ $5$

[23011-0134]

**3** 일차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \{f(x)\sin x-f'(x)\cos x\}\,dx=1$
>
> (나) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \{f(x)\cos x+f'(x)\sin x\}\,dx=\frac{3}{2}\pi+1$

$\int_0^1 e^x f(x)\,dx$의 값은?

① $e-2$　② $e-1$　③ $e$　④ $e+1$　⑤ $e+2$

[23011-0135]

**4** 실수 전체의 집합에서 미분가능하고 도함수가 연속인 함수 $f(x)$가

$$\lim_{x\to 2}\frac{1}{x-2}\int_2^x f(t)f'(t)\,dt=10$$

을 만족시킨다. $f(2)=2$일 때, $\lim_{x\to 2}\frac{1}{x^2-4}\int_1^{\frac{x}{2}} f'(2t)\,dt$의 값은?

① $\frac{1}{8}$　② $\frac{1}{4}$　③ $\frac{3}{8}$　④ $\frac{1}{2}$　⑤ $\frac{5}{8}$

[23011-0136]

**1** 양의 실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $f(x)$가 모든 양의 실수 $x$에 대하여

$$xf'(x)-f(x)=\frac{x^3}{\sqrt{3x^2+1}}$$

을 만족시킨다. $f(1)=1$일 때, $\int_1^4 f(x)\,dx=\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오.

(단, $p$와 $q$는 서로소인 자연수이다.)

[23011-0137]

**2** 함수 $f(x)=(2x^2+3)e^x$의 역함수를 $g(x)$라 할 때,

$$\int_3^{5e}\frac{x}{f'(g(x))}dx$$

의 값은?

① $5e-1$ ② $5e-3$ ③ $5e-5$ ④ $5e-7$ ⑤ $5e-9$

[23011-0138]

**3** 실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $f(x)$가 모든 실수 $x$에 대하여

$$\int_0^x (x^3+x)f(xt)\,dt=a\sin x+b\cos x+c$$

를 만족시킨다. $f(0)=2$일 때, $a^2+b^2+c^2$의 값을 구하시오. (단, $a$, $b$, $c$는 상수이다.)

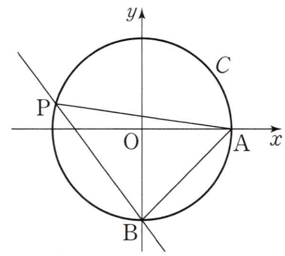
# 대표 기출 문제

EBS

**출제 경향** 여러 가지 함수의 부정적분을 구하는 문제, 지수함수, 로그함수, 삼각함수에 대하여 치환적분법이나 부분적분법을 이용하여 정적분의 값을 구하는 문제, 정적분으로 표시된 함수의 미분이나 극한과 관련된 문제 등이 출제되고 있다.

2022학년도 대수능 9월 모의평가

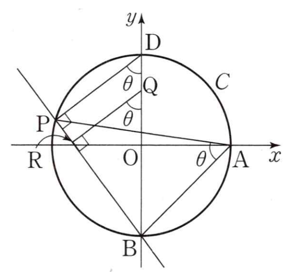
좌표평면에서 원점을 중심으로 하고 반지름의 길이가 2인 원 $C$와 두 점 $\mathrm{A}(2,\ 0)$, $\mathrm{B}(0,\ -2)$가 있다. 원 $C$ 위에 있고 $x$좌표가 음수인 점 P에 대하여 $\angle \mathrm{PAB}=\theta$라 하자. 점 $\mathrm{Q}(0,\ 2\cos\theta)$에서 직선 BP에 내린 수선의 발을 R라 하고, 두 점 P와 R 사이의 거리를 $f(\theta)$라 할 때, $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} f(\theta)\,d\theta$의 값은? **[4점]**




① $\dfrac{2\sqrt{3}-3}{2}$ ② $\sqrt{3}-1$ ③ $\dfrac{3\sqrt{3}-3}{2}$

④ $\dfrac{2\sqrt{3}-1}{2}$ ⑤ $\dfrac{4\sqrt{3}-3}{2}$

**출제 의도** 삼각함수의 적분법과 치환적분법을 이용하여 정적분의 값을 구할 수 있는지를 묻는 문제이다.




**풀이** 그림과 같이 점 $\mathrm{D}(0,\ 2)$에 대하여 $\angle \mathrm{PDB}=\angle \mathrm{PAB}=\theta$이고

$\angle \mathrm{BPD}=\dfrac{\pi}{2}$에서 $\overline{\mathrm{PD}} /\!/ \overline{\mathrm{RQ}}$이므로 $\angle \mathrm{RQB}=\theta$

직각삼각형 QRB에서 $\overline{\mathrm{QB}}=2+2\cos\theta$이므로

$$\overline{\mathrm{BR}}=\overline{\mathrm{QB}}\times\sin\theta=(2+2\cos\theta)\sin\theta$$

삼각형 APB의 외접원의 반지름의 길이가 2이므로 사인법칙에 의하여

$$\overline{\mathrm{BP}}=2\times2\times\sin\theta=4\sin\theta$$

그러므로 $f(\theta)=\overline{\mathrm{PR}}=\overline{\mathrm{BP}}-\overline{\mathrm{BR}}=4\sin\theta-(2+2\cos\theta)\sin\theta=2\sin\theta-2\sin\theta\cos\theta$이므로

$$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} f(\theta)\,d\theta=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}(2\sin\theta-2\sin\theta\cos\theta)\,d\theta=2\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\sin\theta\,d\theta-\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}2\sin\theta\cos\theta\,d\theta \quad \cdots\cdots ㉠$$

이때 $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}2\sin\theta\cos\theta\,d\theta$에서 $\sin\theta=t$로 놓으면

$\theta=\dfrac{\pi}{6}$일 때 $t=\dfrac{1}{2}$, $\theta=\dfrac{\pi}{3}$일 때 $t=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$이고, $\cos\theta=\dfrac{dt}{d\theta}$이므로

$$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}2\sin\theta\cos\theta\,d\theta=\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}}2t\,dt=\Big[t^2\Big]_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{3}{4}-\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$$

따라서 ㉠에서 $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} f(\theta)\,d\theta=2\Big[-\cos\theta\Big]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}-\dfrac{1}{2}=2\left(-\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)-\dfrac{1}{2}=\dfrac{2\sqrt{3}-3}{2}$

답 ①

# 07 정적분의 활용

## 1. 정적분과 급수

함수 $f(x)$가 닫힌구간 $[a, b]$에서 연속일 때,

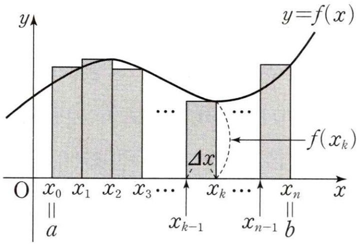
$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f\left(a+\frac{b-a}{n}k\right)\frac{b-a}{n}=\int_a^b f(x)\,dx$$

**설명** 함수 $f(x)$가 닫힌구간 $[a, b]$에서 연속이고 $f(x)\ge 0$일 때, 그림과 같이 닫힌구간 $[a, b]$를 $n$등분하여 양 끝 점과 각 분점의 $x$좌표를 차례대로

$$a=x_0,\ x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_{n-1},\ x_n=b$$

라 하고, 닫힌구간 $[x_{k-1}, x_k]$의 길이를 $\Delta x$라 하면

$$\Delta x=\frac{b-a}{n},\ x_k=a+k\Delta x\ (\text{단, } k=1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ n)$$




이때 그림과 같이 $n$개의 직사각형을 만들고, 이 직사각형의 넓이의 합을 $S_n$이라 하면

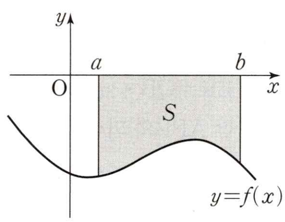
$$S_n=f(x_1)\Delta x+f(x_2)\Delta x+f(x_3)\Delta x+\cdots+f(x_n)\Delta x$$
$$=\sum_{k=1}^{n} f(x_k)\Delta x$$

$n$의 값이 한없이 커질 때 $S_n$은 곡선 $y=f(x)$와 $x$축 및 두 직선 $x=a$, $x=b$로 둘러싸인 부분의 넓이에 한없이 가까워지므로

$$\lim_{n\to\infty} S_n=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f(x_k)\Delta x$$
$$=\int_a^b f(x)\,dx$$

즉, $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f\left(a+\frac{b-a}{n}k\right)\frac{b-a}{n}=\int_a^b f(x)\,dx$가 성립한다.

한편, 함수 $f(x)$가 닫힌구간 $[a, b]$에서 연속이고 $f(x)\le 0$이면 $f(x_k)\le 0$, $\Delta x>0$이므로 곡선 $y=f(x)$와 $x$축 및 두 직선 $x=a$, $x=b$로 둘러싸인 도형의 넓이를 $S$라 하면




$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f(x_k)\Delta x=-S=-\int_a^b |f(x)|\,dx$$
$$=-\int_a^b \{-f(x)\}\,dx=\int_a^b f(x)\,dx$$

**참고** (1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\frac{1}{n}=\int_0^1 f(x)\,dx$

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{p}{n}k\right)\frac{p}{n}=\int_0^p f(x)\,dx$

$$=p\int_0^1 f(px)\,dx\ (\text{단, } p\text{는 상수})$$

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f\left(a+\frac{p}{n}k\right)\frac{p}{n}=\int_a^{a+p} f(x)dx=\int_0^p f(a+x)\,dx$

$$=p\int_0^1 f(a+px)\,dx\ (\text{단, } a,\ p\text{는 상수})$$

## 예제 1 정적분과 급수

www.ebsi.co.kr

$\lim_{n\to\infty} \frac{4}{n^2}\left(e^{\frac{1}{n}}+2e^{\frac{2}{n}}+3e^{\frac{3}{n}}+\cdots+ne\right)$의 값은?

① 1　② 2　③ 4　④ 8　⑤ 16

**길잡이** 주어진 급수를 정적분으로 변형한 후 부분적분법을 이용하여 정적분의 값을 구한다.

**풀이**

$$\lim_{n\to\infty} \frac{4}{n^2}\left(e^{\frac{1}{n}}+2e^{\frac{2}{n}}+3e^{\frac{3}{n}}+\cdots+ne\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{4}{n}\left(\frac{1}{n}e^{\frac{1}{n}}+\frac{2}{n}e^{\frac{2}{n}}+\frac{3}{n}e^{\frac{3}{n}}+\cdots+\frac{n}{n}e^{\frac{n}{n}}\right)$$
$$=4\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n}e^{\frac{k}{n}}$$
$$=4\int_0^1 xe^x\,dx$$

이때 $\int_0^1 xe^x\,dx$에서 $u(x)=x$, $v'(x)=e^x$으로 놓으면 $u'(x)=1$, $v(x)=e^x$이므로

$$\int_0^1 xe^x\,dx=\Big[xe^x\Big]_0^1-\int_0^1 e^x\,dx$$
$$=e-0-\Big[e^x\Big]_0^1$$
$$=e-(e-1)=1$$

따라서 $4\int_0^1 xe^x\,dx=4$

답 ③

## 유제

정답과 풀이 54쪽

**1** [23011-0139]

함수 $f(x)=x\ln x$에 대하여 $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f\left(1+\frac{(e^2-1)k}{n}\right)\frac{e+1}{n}=\frac{1}{e-1}(pe^4+q)$일 때, 두 유리수 $p$, $q$에 대하여 $p+q$의 값을 구하시오. (단, $e^4$은 무리수이다.)

**2** [23011-0140]

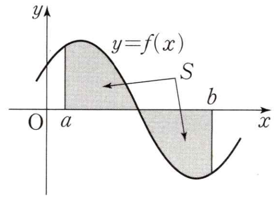
함수 $f(x)=(x+1)\log_2(x+1)$에 대하여 $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{nf\left(\frac{k}{n}\right)}{n^2+2nk+k^2}$의 값은?

① $\frac{1}{4}\ln 2$　② $\frac{1}{2}\ln 2$　③ $\ln 2$　④ $2\ln 2$　⑤ $4\ln 2$

## 2. 곡선과 $x$축 사이의 넓이

함수 $f(x)$가 닫힌구간 $[a, b]$에서 연속일 때, 곡선 $y=f(x)$와 $x$축 및 두 직선 $x=a$, $x=b$로 둘러싸인 부분의 넓이 $S$는

$$S=\int_a^b |f(x)|dx$$



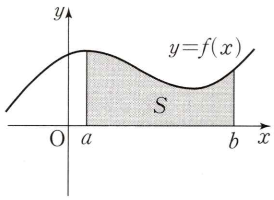

**설명** 함수 $f(x)$가 닫힌구간 $[a, b]$에서 연속일 때, 곡선 $y=f(x)$와 $x$축 및 두 직선 $x=a$, $x=b$로 둘러싸인 부분의 넓이 $S$를 각 경우로 나누어 구해 보면 다음과 같다.

(i) 닫힌구간 $[a, b]$에서 $f(x)\geq 0$인 경우

$$S=\int_a^b f(x)dx$$

이때 $f(x)=|f(x)|$이므로

$$S=\int_a^b f(x)dx$$
$$=\int_a^b |f(x)|dx$$

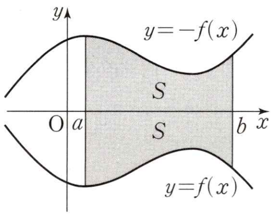



(ii) 닫힌구간 $[a, b]$에서 $f(x)\leq 0$인 경우

곡선 $y=f(x)$와 곡선 $y=-f(x)$는 $x$축에 대하여 대칭이므로 곡선 $y=-f(x)$와 $x$축 및 두 직선 $x=a$, $x=b$로 둘러싸인 부분의 넓이는 $S$이다.

이때 $-f(x)\geq 0$이고 $-f(x)=|f(x)|$이므로

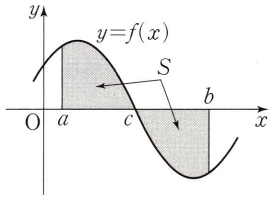
$$S=\int_a^b \{-f(x)\}dx$$
$$=\int_a^b |f(x)|dx$$




(iii) 닫힌구간 $[a, c]$에서 $f(x)\geq 0$, 닫힌구간 $[c, b]$에서 $f(x)\leq 0$인 경우

(i), (ii)에 의하여

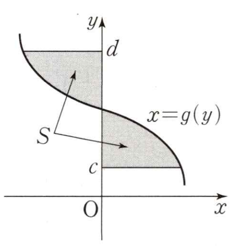
$$S=\int_a^c f(x)dx+\int_c^b \{-f(x)\}dx$$
$$=\int_a^c |f(x)|dx+\int_c^b |f(x)|dx$$
$$=\int_a^b |f(x)|dx$$




**참고** 곡선과 $y$축 사이의 넓이

함수 $x=g(y)$가 닫힌구간 $[c, d]$에서 연속일 때, 곡선 $x=g(y)$와 $y$축 및 두 직선 $y=c$, $y=d$로 둘러싸인 부분의 넓이 $S$는

$$S=\int_c^d |g(y)|dy$$



## 예제 2 곡선과 $x$축 사이의 넓이



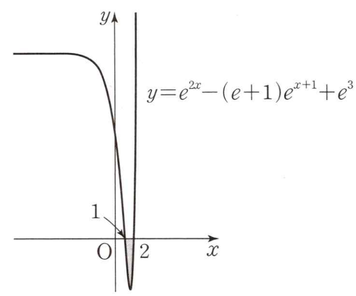
곡선 $y=e^{2x}-(e+1)e^{x+1}+e^3$과 $x$축으로 둘러싸인 부분의 넓이가 $pe^4+qe^3-\frac{1}{2}e^2$일 때, 두 유리수 $p$, $q$에 대하여 $10p+q$의 값을 구하시오.

**길잡이** 곡선과 $x$축이 만나는 점의 $x$좌표를 구하여 구간을 나눈 후 정적분을 이용하여 넓이를 구한다.

**풀이** $e^{2x}-(e+1)e^{x+1}+e^3=(e^x-e)(e^x-e^2)=0$에서

$e^x=e$ 또는 $e^x=e^2$이므로 $x=1$ 또는 $x=2$

이때 닫힌구간 $[1,\ 2]$에서 $f(x)\le 0$, 구간 $(-\infty,\ 1]$ 또는 구간 $[2,\ \infty)$에서 $f(x)\ge 0$이므로 닫힌구간 $[1,\ 2]$에서 곡선 $y=e^{2x}-(e+1)e^{x+1}+e^3$과 $x$축으로 둘러싸인 부분의 넓이는




$$\int_1^2 [-\{e^{2x}-(e+1)e^{x+1}+e^3\}]\,dx$$

$$=-\left[\frac{1}{2}e^{2x}-(e+1)e^{x+1}+e^3x\right]_1^2$$

$$=-\left[\left\{\frac{1}{2}e^4-(e+1)e^3+2e^3\right\}-\left\{\frac{1}{2}e^2-(e+1)e^2+e^3\right\}\right]$$

$$=-\left(-\frac{1}{2}e^4+e^3+\frac{1}{2}e^2\right)=\frac{1}{2}e^4-e^3-\frac{1}{2}e^2$$

즉, $\frac{1}{2}e^4-e^3-\frac{1}{2}e^2=pe^4+qe^3-\frac{1}{2}e^2$이므로 $\frac{1}{2}e-1=pe+q$

따라서 $p=\frac{1}{2}$, $q=-1$이므로 $10p+q=10\times\frac{1}{2}+(-1)=4$

답 4

## 유제

정답과 풀이 54쪽

**3** [23011-0141]

곡선 $y=\ln x$와 $x$축 및 직선 $x=\frac{1}{2}$로 둘러싸인 부분의 넓이를 $S_1$이라 하고 곡선 $y=\ln x$와 $x$축 및 직선 $x=2$로 둘러싸인 부분의 넓이를 $S_2$라 하자. $S_1+S_2$의 값은?

① $\frac{3}{2}\ln 2-\frac{5}{8}$  ② $\frac{3}{2}\ln 2-\frac{1}{2}$  ③ $\frac{3}{2}\ln 2-\frac{3}{8}$

④ $\frac{3}{2}\ln 2-\frac{1}{4}$  ⑤ $\frac{3}{2}\ln 2-\frac{1}{8}$

**4** [23011-0142]

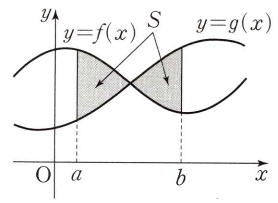
곡선 $y=2\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)+1\ \left(0\le x\le\frac{2}{3}\pi\right)$와 $y$축 및 직선 $y=3$으로 둘러싸인 부분의 넓이는?

① $\frac{2}{3}\pi-\sqrt{3}$  ② $\pi-\sqrt{3}$  ③ $\frac{4}{3}\pi-\sqrt{3}$  ④ $\frac{5}{3}\pi-\sqrt{3}$  ⑤ $2\pi-\sqrt{3}$

### 3. 두 곡선으로 둘러싸인 부분의 넓이

두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$가 닫힌구간 $[a, b]$에서 연속일 때, 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$ 및 두 직선 $x=a$, $x=b$로 둘러싸인 부분의 넓이 $S$는

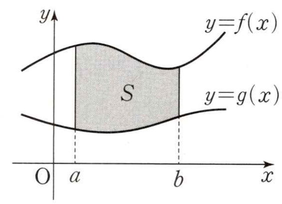
$$S=\int_a^b |f(x)-g(x)|dx$$




**설명** 두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 닫힌구간 $[a, b]$에서 연속일 때, 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$ 및 두 직선 $x=a$, $x=b$로 둘러싸인 부분의 넓이 $S$를 각 경우로 나누어 구해 보면 다음과 같다.

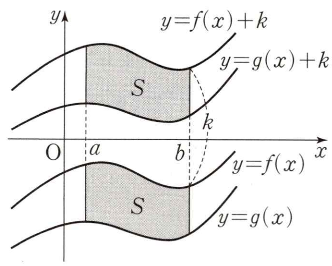
(i) 닫힌구간 $[a, b]$에서 $0\le g(x)\le f(x)$인 경우

$$S=\int_a^b f(x)dx-\int_a^b g(x)dx$$
$$=\int_a^b \{f(x)-g(x)\}dx$$
$$=\int_a^b |f(x)-g(x)|dx$$



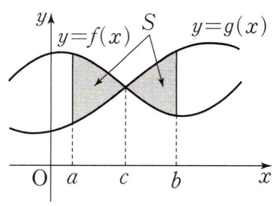

(ii) 닫힌구간 $[a, b]$에서 $g(x)\le f(x)\le 0$인 경우
두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$를 $y$축의 방향으로 $k$ $(k>0)$만큼 평행이동하여 닫힌구간 $[a, b]$에서 $0\le g(x)+k\le f(x)+k$가 되게 할 수 있다.
평행이동하여도 구하는 넓이 $S$는 변하지 않으므로

$$S=\int_a^b \{f(x)+k\}dx-\int_a^b \{g(x)+k\}dx$$
$$=\int_a^b [\{f(x)+k\}-\{g(x)+k\}]dx$$
$$=\int_a^b \{f(x)-g(x)\}dx$$
$$=\int_a^b |f(x)-g(x)|dx$$




(iii) 닫힌구간 $[a, c]$에서 $g(x)\le f(x)$이고, 닫힌구간 $[c, b]$에서 $f(x)\le g(x)$인 경우
(i), (ii)에 의하여

$$S=\int_a^c \{f(x)-g(x)\}dx+\int_c^b \{g(x)-f(x)\}dx$$
$$=\int_a^c |f(x)-g(x)|dx+\int_c^b |f(x)-g(x)|dx$$
$$=\int_a^b |f(x)-g(x)|dx$$



## 예제 3 두 곡선으로 둘러싸인 부분의 넓이



정의역이 $\left\{x \middle| 0\le x\le \frac{\pi}{2}\right\}$인 두 함수 $f(x)=x\sin x$, $g(x)=x\cos x$에 대하여 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$로 둘러싸인 부분의 넓이는?

① $\frac{\sqrt{2}}{4}\pi-1$ ② $\frac{\sqrt{2}}{2}\pi-1$ ③ $\sqrt{2}\pi-1$ ④ $\frac{\sqrt{2}}{4}\pi+1$ ⑤ $\frac{\sqrt{2}}{2}\pi+1$

**길잡이** 두 곡선이 만나는 점의 $x$좌표를 구한 후 정적분을 이용하여 넓이를 구한다.

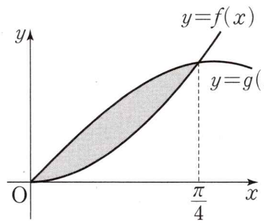
**풀이**

$0\le x\le \frac{\pi}{2}$에서 방정식 $x\sin x=x\cos x$ …… ㉠의 근을 구해 보자.

$x(\sin x-\cos x)=0$에서 $x=0$ 또는 $\sin x-\cos x=0$이고

$0\le x\le \frac{\pi}{2}$에서 방정식 $\sin x=\cos x$의 근은 $x=\frac{\pi}{4}$이므로

㉠의 근은 $x=0$ 또는 $x=\frac{\pi}{4}$




닫힌구간 $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$에서 $x\cos x\ge x\sin x$이므로 구하는 부분의 넓이를 $S$라 하면

$$S=\int_0^{\frac{\pi}{4}} x(\cos x-\sin x)\,dx$$

이때 $u(x)=x$, $v'(x)=\cos x-\sin x$로 놓으면 $u'(x)=1$, $v(x)=\sin x+\cos x$이므로

$$S=\int_0^{\frac{\pi}{4}} x(\cos x-\sin x)\,dx=\Big[x(\sin x+\cos x)\Big]_0^{\frac{\pi}{4}}-\int_0^{\frac{\pi}{4}}(\sin x+\cos x)\,dx$$

$$=\frac{\pi}{4}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)-\Big[-\cos x+\sin x\Big]_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{\sqrt{2}}{4}\pi-1$$

답 ①

## 유제

정답과 풀이 55쪽

**5** [23011-0143]

두 곡선 $y=x^2$과 $y=\sqrt{|x|}$로 둘러싸인 부분의 넓이는?

① $\frac{1}{6}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ $\frac{1}{2}$ ④ $\frac{2}{3}$ ⑤ $\frac{5}{6}$

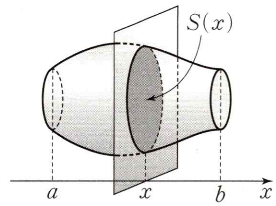
**6** [23011-0144]

$0<t<\sqrt{3}$인 실수 $t$에 대하여 곡선 $y=\tan x\left(0\le x<\frac{\pi}{2}\right)$와 $y$축 및 직선 $y=t$로 둘러싸인 부분의 넓이를 $S_1$이라 하고 곡선 $y=\tan x\left(0\le x<\frac{\pi}{2}\right)$와 두 직선 $y=t$, $x=\frac{\pi}{3}$로 둘러싸인 부분의 넓이를 $S_2$라 하자. $S_1=S_2$일 때, $t$의 값은?

① $\frac{2}{\pi}\ln 2$ ② $\frac{5}{2\pi}\ln 2$ ③ $\frac{3}{\pi}\ln 2$ ④ $\frac{7}{2\pi}\ln 2$ ⑤ $\frac{4}{\pi}\ln 2$

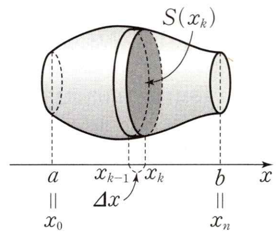
## 4. 입체도형의 부피

닫힌구간 $[a,\ b]$에서 $x$좌표가 $x$인 점을 지나고 $x$축에 수직인 평면으로 자른 단면의 넓이가 $S(x)$이고, 함수 $S(x)$가 닫힌구간 $[a,\ b]$에서 연속일 때, 이 입체도형의 부피 $V$는




$$V=\int_a^b S(x)dx$$

**설명** 그림과 같이 $x$축 위의 닫힌구간 $[a,\ b]$를 $n$등분하여 양 끝 점과 각 분점의 $x$좌표를 차례대로




$$a=x_0,\ x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_{n-1},\ x_n=b$$

라 하고, 닫힌구간 $[x_{k-1},\ x_k]$의 길이를 $\Delta x$라 하면

$$\Delta x=\frac{b-a}{n},\ x_k=a+k\Delta x\ (\text{단, } k=1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ n)$$

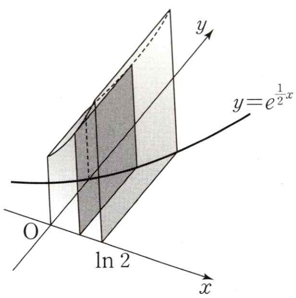
이때 각 점 $x_k$에서 $x$축에 수직인 평면으로 자른 단면의 넓이 $S(x_k)$를 밑면의 넓이로 하고 높이가 $\Delta x$인 $n$개의 기둥의 부피의 합을 $V_n$이라 하면

$$V_n=S(x_1)\Delta x+S(x_2)\Delta x+S(x_3)\Delta x+\cdots+S(x_n)\Delta x$$
$$=\sum_{k=1}^{n}S(x_k)\Delta x$$

입체도형의 부피 $V$는 정적분과 급수의 관계에 의하여

$$V=\lim_{n\to\infty}V_n=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}S(x_k)\Delta x$$
$$=\int_a^b S(x)dx$$

**예** 곡선 $y=e^{\frac{1}{2}x}$과 $x$축, $y$축 및 직선 $x=\ln 2$로 둘러싸인 부분을 밑면으로 하는 입체도형이 있다. 이 입체도형을 $x$축에 수직인 평면으로 자른 단면이 모두 정사각형일 때, 이 입체도형의 부피 $V$를 구해 보자.




$0\le t\le \ln 2$인 실수 $t$에 대하여 직선 $x=t$를 포함하고 $x$축에 수직인 평면으로 입체도형을 자른 단면의 넓이를 $S(t)$라 하면

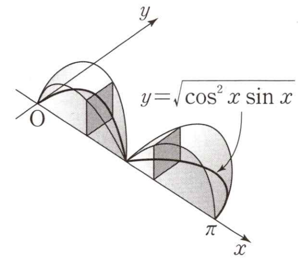
$$S(t)=\left(e^{\frac{1}{2}t}\right)^2=e^t$$

따라서 구하는 부피 $V$는

$$V=\int_0^{\ln 2}S(t)dt$$
$$=\int_0^{\ln 2}e^t dt$$
$$=\Big[e^t\Big]_0^{\ln 2}$$
$$=2-1=1$$

## 예제 4 입체도형의 부피

그림과 같이 곡선 $y=\sqrt{\cos^2 x \sin x}$ $(0\le x\le \pi)$와 $x$축으로 둘러싸인 부분을 밑면으로 하는 입체도형이 있다. 이 입체도형을 $x$축에 수직인 평면으로 자른 단면이 모두 정사각형일 때, 이 입체도형의 부피는?




① $\frac{1}{6}$　　② $\frac{1}{3}$　　③ $\frac{1}{2}$

④ $\frac{2}{3}$　　⑤ $\frac{5}{6}$

**길잡이** 입체도형을 $x$축에 수직인 평면으로 자른 단면의 넓이를 구하고, 치환적분법을 이용하여 입체도형의 부피를 구한다.

**풀이** $0\le t\le \pi$인 실수 $t$에 대하여 직선 $x=t$를 포함하고 $x$축에 수직인 평면으로 입체도형을 자른 단면의 넓이를 $S(t)$라 하면

$$S(t)=(\sqrt{\cos^2 t \sin t})^2=\cos^2 t \sin t$$

이므로 구하는 부피를 $V$라 하면

$$V=\int_0^{\pi} S(t)\,dt=\int_0^{\pi}\cos^2 t \sin t\,dt$$

이때 $\cos t=k$로 놓으면 $t=0$일 때 $k=1$, $t=\pi$일 때 $k=-1$이고, $-\sin t=\frac{dk}{dt}$이므로

$$\begin{aligned}V&=\int_0^{\pi}\cos^2 t \sin t\,dt\\&=-\int_1^{-1}k^2\,dk=\int_{-1}^{1}k^2\,dk\\&=2\int_0^1 k^2\,dk=2\left[\frac{1}{3}k^3\right]_0^1\\&=2\times\frac{1}{3}=\frac{2}{3}\end{aligned}$$

답 ④

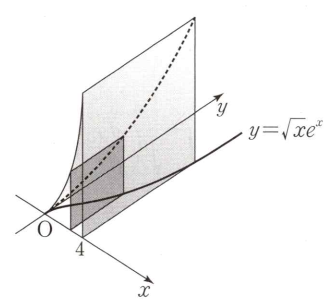
## 유제

정답과 풀이 56쪽

**7** [23011-0145]

그림과 같이 곡선 $y=\sqrt{x}e^x$과 $x$축 및 직선 $x=4$로 둘러싸인 부분을 밑면으로 하는 입체도형이 있다. 이 입체도형을 $x$축에 수직인 평면으로 자른 단면이 모두 정사각형일 때, 이 입체도형의 부피는 $pe^8+q$이다. 두 유리수 $p$, $q$에 대하여 $p+q$의 값을 구하시오.

(단, $e^8$은 무리수이다.)



## 5. 좌표평면 위를 움직이는 점이 움직인 거리

좌표평면 위를 움직이는 점 P의 시각 $t$에서의 위치 $(x, y)$가

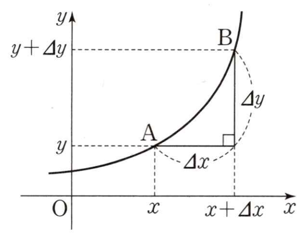
$x=f(t),\ y=g(t)$

일 때, 시각 $t=a$에서 $t=b$까지 점 P가 움직인 거리 $s$는

$$s=\int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt$$

$$=\int_a^b \sqrt{\{f'(t)\}^2+\{g'(t)\}^2}\,dt$$

설명 점 P가 움직인 거리는 시각 $t\ (a\le t\le b)$의 함수이므로 $s=s(t)$로 나타내기로 하자.
그림과 같이 시각 $t$에서 점 $\mathrm{A}(x, y)$에 있던 점 P가 시각 $t+\Delta t$에서
점 $\mathrm{B}(x+\Delta x, y+\Delta y)$로 이동했을 때 $s$의 증분 $\Delta s$는 $\Delta t$가 충분히 작으면
$\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}$에 가까워지므로




$$s'(t)=\frac{ds}{dt}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta s}{\Delta t}$$

$$=\lim_{\Delta t\to 0}\sqrt{\left(\frac{\Delta x}{\Delta t}\right)^2+\left(\frac{\Delta y}{\Delta t}\right)^2}$$

$$=\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}$$

따라서 시각 $t=a$에서 $t=b$까지 점 P가 움직인 거리 $s$는

$$s=s(b)-s(a)=\Big[\,s(t)\,\Big]_a^b$$

$$=\int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt$$

## 6. 곡선의 길이

(1) 곡선 위의 점 $(x, y)$가 각각 $x=f(t),\ y=g(t)$이고 겹쳐지는 부분이 없을 때, $a\le t\le b$에서 이 곡선의 길이 $l$은

$$l=\int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt$$

$$=\int_a^b \sqrt{\{f'(t)\}^2+\{g'(t)\}^2}\,dt$$

(2) $a\le x\le b$에서 곡선 $y=f(x)$의 길이 $l$은

$$l=\int_a^b \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx$$

$$=\int_a^b \sqrt{1+\{f'(x)\}^2}\,dx$$

## 예제 5 좌표평면 위를 움직이는 점이 움직인 거리



좌표평면 위를 움직이는 점 P의 시각 $t$에서의 위치 $(x, y)$가

$$x=\frac{1}{3}(t^2+4)^{\frac{3}{2}},\ \ y=2t$$

일 때, 시각 $t=0$에서 $t=3$까지 점 P가 움직인 거리를 구하시오.

**길잡이** 좌표평면 위를 움직이는 점 P의 시각 $t$에서의 위치 $(x, y)$가 $x=f(t)$, $y=g(t)$일 때, 시각 $t=a$에서 $t=b$까지 점 P가 움직인 거리가 $\int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt$임을 이용하여 구한다.

**풀이** $x=\frac{1}{3}(t^2+4)^{\frac{3}{2}}$에서 $\frac{dx}{dt}=\frac{1}{2}(t^2+4)^{\frac{1}{2}}\times 2t=t(t^2+4)^{\frac{1}{2}}$

$y=2t$에서 $\frac{dy}{dt}=2$

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2=\left\{t(t^2+4)^{\frac{1}{2}}\right\}^2+2^2=t^2(t^2+4)+4=t^4+4t^2+4=(t^2+2)^2$$

따라서 시각 $t=0$에서 $t=3$까지 점 P가 움직인 거리를 $s$라 하면

$$s=\int_0^3 \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt$$

$$=\int_0^3 \sqrt{(t^2+2)^2}\,dt=\int_0^3 (t^2+2)\,dt$$

$$=\left[\frac{1}{3}t^3+2t\right]_0^3$$

$$=9+6=15$$

답 15

## 유제

정답과 풀이 56쪽

**8** [23011-0146]

좌표평면 위를 움직이는 점 P의 시각 $t$에서의 위치 $(x, y)$가

$$x=t,\ y=\frac{4}{3}t^{\frac{3}{2}}$$

일 때, 시각 $t=0$에서 $t=2$까지 점 P가 움직인 거리는?

① $\frac{17}{4}$　② $\frac{13}{3}$　③ $\frac{53}{12}$　④ $\frac{9}{2}$　⑤ $\frac{55}{12}$

**9** [23011-0147]

매개변수 $t$로 나타낸 곡선 $x=e^{-t}\sin t$, $y=e^{-t}\cos t+2$에 대하여 $0\le t\le 1$에서 이 곡선의 길이는?

① $1-\frac{1}{e}$　② $\sqrt{2}\left(1-\frac{1}{e}\right)$　③ $\sqrt{2}$　④ $1+\frac{1}{e}$　⑤ $\sqrt{2}\left(1+\frac{1}{e}\right)$

## Level 1 기초 연습

[23011-0148]

**1** 함수 $f(x)=3x^2+2x$에 대하여 $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f\left(1+\frac{2k}{n}\right)\frac{3}{n}$의 값을 구하시오.

[23011-0149]

**2** $f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{x^2}{n}\sum_{k=1}^{n} e^{\frac{xk}{n}}$일 때, $f'(1)$의 값은?

① $-1$　② $\frac{1}{2}e-1$　③ $e-1$　④ $\frac{3}{2}e-1$　⑤ $2e-1$

[23011-0150]

**3** 함수 $f(x)=\sqrt{4-x}$에 대하여 곡선 $y=f(x)$와 $x$축 및 $y$축으로 둘러싸인 부분의 넓이는?

① $\frac{4}{3}$　② $\frac{8}{3}$　③ $4$　④ $\frac{16}{3}$　⑤ $\frac{20}{3}$

[23011-0151]

**4** 곡선 $y=\frac{1}{x}\ (x>0)$과 $y$축 및 두 직선 $y=1$, $y=a\ (a>1)$로 둘러싸인 부분의 넓이가 4가 되도록 하는 상수 $a$의 값은?

① $e^2$　② $e^3$　③ $e^4$　④ $e^5$　⑤ $e^6$

[23011-0152]

**5** $0<x<2\pi$에서 정의된 두 함수 $f(x)=\sin x$, $g(x)=\cos x$에 대하여 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$로 둘러싸인 부분의 넓이는?

① $\sqrt{2}$　② $\frac{3\sqrt{2}}{2}$　③ $2\sqrt{2}$　④ $\frac{5\sqrt{2}}{2}$　⑤ $3\sqrt{2}$

[23011-0153]

**6** 실수 전체의 집합에서 연속인 두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 모든 실수 $x$에 대하여

$$f(x)-g(x)=(x^2-4x)e^x$$

을 만족시킨다. 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$로 둘러싸인 부분의 넓이가 $ae^4+b$일 때, 두 정수 $a$, $b$에 대하여 $a+b$의 값을 구하시오. (단, $e^4$은 무리수이다.)

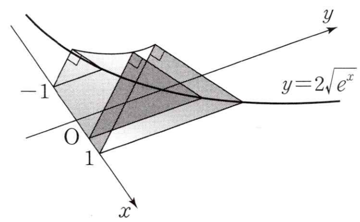
[23011-0154]

**7** 두 곡선 $y=\sqrt{1-x^2}$, $y=-\sqrt{1-x^2}$으로 둘러싸인 부분을 밑면으로 하는 입체도형을 $x$축에 수직인 평면으로 자른 단면이 모두 정사각형일 때, 이 입체도형의 부피는?

① $\frac{8}{3}$ ② $\frac{10}{3}$ ③ $4$ ④ $\frac{14}{3}$ ⑤ $\frac{16}{3}$

[23011-0155]

**8** 그림과 같이 곡선 $y=2\sqrt{e^x}$과 $x$축 및 두 직선 $x=-1$, $x=1$로 둘러싸인 부분을 밑면으로 하는 입체도형이 있다. 이 입체도형을 $x$축에 수직인 평면으로 자른 단면이 모두 빗변이 입체도형의 밑면 위에 놓이는 직각이등변삼각형일 때, 이 입체도형의 부피는?




① $e-\frac{1}{e}$ ② $e-\frac{1}{2e}$ ③ $e$

④ $e+\frac{1}{2e}$ ⑤ $e+\frac{1}{e}$

[23011-0156]

**9** 좌표평면 위를 움직이는 점 P의 시각 $t$에서의 위치 $(x, y)$가

$$x=e^t+e^{-t},\ y=2t$$

일 때, 시각 $t=0$에서 $t=\ln 4$까지 점 P가 움직인 거리는?

① $\frac{3}{2}$ ② $\frac{8}{3}$ ③ $\frac{15}{4}$ ④ $\frac{24}{5}$ ⑤ $\frac{35}{6}$

[23011-0157]

**10** 매개변수 $t$로 나타낸 곡선 $x=\sin t\cos t$, $y=\sin^2 t$에 대하여 $0\leq t\leq 3$에서 이 곡선의 길이를 구하시오.

[23011-0158]

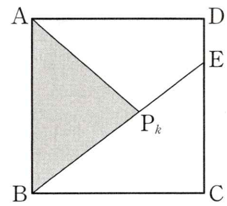
**1** $\lim_{n\to\infty} 2\left(\frac{1}{n+1}\ln\frac{n+1}{n}+\frac{1}{n+2}\ln\frac{n+2}{n}+\frac{1}{n+3}\ln\frac{n+3}{n}+\cdots+\frac{1}{n+n}\ln\frac{n+n}{n}\right)$의 값은?

① $\frac{1}{4}(\ln 2)^2$　② $\frac{1}{2}(\ln 2)^2$　③ $(\ln 2)^2$　④ $2(\ln 2)^2$　⑤ $4(\ln 2)^2$

[23011-0159]

**2** 그림과 같이 한 변의 길이가 4인 정사각형 ABCD가 있다. 선분 CD를 $3:1$로 내분하는 점을 E라 하고 2 이상의 자연수 $n$과 $1\le k\le n-1$인 자연수 $k$에 대하여 선분 BE를 $k:(n-k)$로 내분하는 점을 $\mathrm{P}_k$, $\mathrm{P}_n=\mathrm{E}$라 하자. 삼각형 $\mathrm{ABP}_k$의 넓이를 $S_k$라 할 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}e^{S_k}=pe^8+q$이다. 두 유리수 $p$, $q$에 대하여 $8(p-q)$의 값을 구하시오.

(단, $e^8$은 무리수이다.)



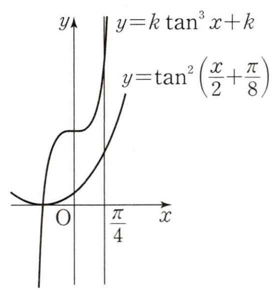

[23011-0160]

**3** 실수 $t$에 대하여 곡선 $y=\sin x+2$와 $x$축 및 두 직선 $x=t$, $x=t+\frac{\pi}{2}$로 둘러싸인 부분의 넓이의 최댓값은?

① $\pi$　② $1+\pi$　③ $\sqrt{2}+\pi$　④ $\sqrt{3}+\pi$　⑤ $2+\pi$

[23011-0161]

**4** 양수 $k$에 대하여 곡선 $y=k\tan^3 x+k$와 $x$축 및 직선 $x=\frac{\pi}{4}$로 둘러싸인 부분의 넓이를 $S_1$, 곡선 $y=\tan^2\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{8}\right)$와 $x$축 및 직선 $x=\frac{\pi}{4}$로 둘러싸인 부분의 넓이를 $S_2$라 하자. $S_1=4S_2$일 때, $k=\frac{a}{\pi}+b$이다. 두 정수 $a$, $b$에 대하여 $a+b$의 값을 구하시오.



[23011-0162]

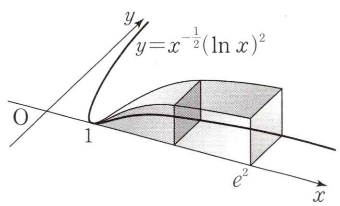
**5** 곡선 $y=\cos x$ $(0\le x\le \pi)$와 $y$축 및 직선 $y=-\frac{\sqrt{3}}{2}$으로 둘러싸인 부분의 넓이가 $a+b\sqrt{3}\pi$일 때, 두 유리수 $a$, $b$에 대하여 $12(a+b)$의 값을 구하시오. (단, $\sqrt{3}\pi$는 무리수이다.)

[23011-0163]

**6** 곡선 $y=e^x$ 위의 두 점 $(0, 1)$, $(1, e)$를 지나는 직선 $y=f(x)$에 대하여 곡선 $y=e^x$과 직선 $y=f(x)$로 둘러싸인 부분의 넓이가 $p+qe$이다. $10(p+q)$의 값을 구하시오. (단, $p$와 $q$는 유리수이다.)

[23011-0164]

**7** 그림과 같이 곡선 $y=x^{-\frac{1}{2}}(\ln x)^2$과 $x$축 및 직선 $x=e^2$으로 둘러싸인 부분을 밑면으로 하는 입체도형이 있다. 이 입체도형을 $x$축에 수직인 평면으로 자른 단면이 모두 정사각형일 때, 이 입체도형의 부피는?




① $\frac{24}{5}$ ② $\frac{26}{5}$ ③ $\frac{28}{5}$

④ 6 ⑤ $\frac{32}{5}$

[23011-0165]

**8** 좌표평면 위를 움직이는 점 P의 시각 $t$에서의 위치 $(x, y)$가

$$x=\frac{1}{2}\left(t^2-t+\frac{1}{2}\right)e^{2t}-t,\ y=2(t-1)e^t$$

이다. 점 P가 $x$축 위에 있는 시각을 $a$라 하자. 시각 $t=0$에서 $t=2a$까지 점 P가 움직인 거리가 $pe^4+q$일 때, 두 유리수 $p$, $q$에 대하여 $p+q$의 값을 구하시오. (단, $e^4$은 무리수이다.)

[23011-0166]

1 함수 $f(x)=a(x+1)^2+b$ $(a>0,\ b>0)$이 있다. $n\geq 2$인 자연수 $n$과 자연수 $m$에 대하여 닫힌구간 $[0,\ m]$을 $n$등분한 각 분점(양 끝 점도 포함)을 차례로 $0=x_0,\ x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_{n-1},\ x_n=m$이라 하자. 닫힌구간 $[x_{k-1},\ x_k]$를 밑변으로 하고 높이가 $f(x_k)$인 직사각형의 넓이를 $A_k$ $(k=1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ n)$이라 할 때, 함수 $g(m)$을 $g(m)=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{n^2}{(n+mk)^2}A_k$라 하자. $g(1)=7,\ g(2)=12$일 때, 두 상수 $a,\ b$에 대하여 $a+b$의 값을 구하시오.

[23011-0167]

2 실수 전체의 집합에서 연속이고 모든 실수 $x$에 대하여 $f(x)\geq 0$인 함수 $f(x)$가 있다. 양수 $t$에 대하여 곡선 $y=f(x)$ $(x\geq 0)$과 $x$축, $y$축 및 직선 $x=t$로 둘러싸인 부분을 밑면으로 하고 $x$축에 수직인 평면으로 자른 단면이 모두 정사각형인 입체도형의 부피가 $(t^2+1)e^t-1$이다. $t=2$일 때 이 입체도형의 밑면의 넓이, 즉 곡선 $y=f(x)$ $(x\geq 0)$과 $x$축, $y$축 및 직선 $x=2$로 둘러싸인 부분의 넓이는 $ae+b$이다. 두 정수 $a,\ b$에 대하여 $a+b$의 값을 구하시오.

[23011-0168]

3 좌표평면 위를 움직이는 점 P의 시각 $t$ $(t>0)$에서의 위치는 곡선 $y=2e^{-\frac{x}{2}}$ 위의 $x=\ln t$인 점이고 좌표평면 위를 움직이는 점 Q의 시각 $t$ $(t>0)$에서의 위치는 곡선 $y=\frac{2}{3}\sqrt{3x}$ 위의 $x=\frac{1}{3t}$인 점이다. 선분 PQ를 $3:1$로 내분하는 점을 R라 할 때, 시각 $t=1$에서 $t=e$까지 점 R가 움직인 거리는 $p+\frac{q}{e}$이다. 두 유리수 $p,\ q$에 대하여 $8(p+q)$의 값을 구하시오.

# 대표 기출 문제

EBS

**출제 경향** 정적분과 급수의 관계를 이용하는 문제, 정적분을 활용하여 곡선과 직선으로 둘러싸인 부분의 넓이, 입체도형의 부피를 구하는 문제, 좌표평면 위의 점이 움직인 거리를 구하는 문제 등이 출제되고 있다.

2022학년도 대수능

좌표평면 위를 움직이는 점 P의 시각 $t$ $(t>0)$에서의 위치가 곡선 $y=x^2$과 직선 $y=t^2x-\dfrac{\ln t}{8}$가 만나는 서로 다른 두 점의 중점일 때, 시각 $t=1$에서 $t=e$까지 점 P가 움직인 거리는? [3점]

① $\dfrac{e^4}{2}-\dfrac{3}{8}$　② $\dfrac{e^4}{2}-\dfrac{5}{16}$　③ $\dfrac{e^4}{2}-\dfrac{1}{4}$　④ $\dfrac{e^4}{2}-\dfrac{3}{16}$　⑤ $\dfrac{e^4}{2}-\dfrac{1}{8}$

**출제 의도** 좌표평면 위의 특정한 점의 위치를 식으로 나타내고 그 점이 움직인 거리를 구할 수 있는지를 묻는 문제이다.

**풀이** 곡선 $y=x^2$과 직선 $y=t^2x-\dfrac{\ln t}{8}$가 만나는 서로 다른 두 점의 $x$좌표를 각각 $\alpha$, $\beta$라 하면 두 점의 좌표는 각각 $(\alpha, \alpha^2)$, $(\beta, \beta^2)$이므로 이 두 점을 잇는 선분의 중점의 좌표는

$$\left(\frac{\alpha+\beta}{2}, \frac{\alpha^2+\beta^2}{2}\right) \quad \cdots\cdots ㉠$$

또 $\alpha$, $\beta$는 $x$에 대한 이차방정식 $x^2=t^2x-\dfrac{\ln t}{8}$, 즉 $x^2-t^2x+\dfrac{\ln t}{8}=0$의 서로 다른 두 실근이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha+\beta=t^2,\ \alpha\beta=\frac{\ln t}{8}$$

$\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=t^4-\dfrac{\ln t}{4}$이므로 ㉠에서

$$\frac{\alpha+\beta}{2}=\frac{1}{2}t^2,\ \frac{\alpha^2+\beta^2}{2}=\frac{1}{2}t^4-\frac{\ln t}{8}$$

그러므로 점 P의 시각 $t$에서의 위치 $(x, y)$는 $x=\dfrac{1}{2}t^2$, $y=\dfrac{1}{2}t^4-\dfrac{\ln t}{8}$이다.

$x=\dfrac{1}{2}t^2$에서 $\dfrac{dx}{dt}=t$이고, $y=\dfrac{1}{2}t^4-\dfrac{\ln t}{8}$에서 $\dfrac{dy}{dt}=2t^3-\dfrac{1}{8t}$이므로

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2=t^2+\left(2t^3-\frac{1}{8t}\right)^2=4t^6+\frac{1}{2}t^2+\frac{1}{64t^2}=\left(2t^3+\frac{1}{8t}\right)^2$$

따라서 시각 $t=1$에서 $t=e$까지 점 P가 움직인 거리는

$$\int_1^e \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt=\int_1^e \sqrt{\left(2t^3+\frac{1}{8t}\right)^2}\,dt=\int_1^e \left(2t^3+\frac{1}{8t}\right)dt=\left[\frac{1}{2}t^4+\frac{1}{8}\ln|t|\right]_1^e$$

$$=\left(\frac{e^4}{2}+\frac{1}{8}\right)-\left(\frac{1}{2}+0\right)=\frac{e^4}{2}-\frac{3}{8}$$

답 ①

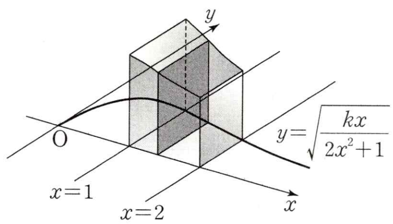
## 대표 기출 문제

EBS

**출제 경향** 정적분과 급수의 관계를 이용하는 문제, 정적분을 활용하여 곡선과 직선으로 둘러싸인 부분의 넓이, 입체도형의 부피를 구하는 문제, 좌표평면 위의 점이 움직인 거리를 구하는 문제 등이 출제되고 있다.

2023학년도 대수능 9월 모의평가

그림과 같이 양수 $k$에 대하여 곡선 $y=\sqrt{\dfrac{kx}{2x^2+1}}$와 $x$축 및 두 직선 $x=1$, $x=2$로 둘러싸인 부분을 밑면으로 하고 $x$축에 수직인 평면으로 자른 단면이 모두 정사각형인 입체도형의 부피가 $2\ln 3$일 때, $k$의 값은? [3점]




① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

**출제 의도** 입체도형의 단면의 넓이를 식으로 나타내고 정적분을 활용하여 입체도형의 부피를 구할 수 있는지를 묻는 문제이다.

**풀이** $1\le t\le 2$인 실수 $t$에 대하여 직선 $x=t$를 포함하고 $x$축에 수직인 평면으로 입체도형을 자른 단면의 넓이를 $S(t)$라 하면 정사각형의 한 변의 길이가 $\sqrt{\dfrac{kt}{2t^2+1}}$이므로

$$S(t)=\left(\sqrt{\frac{kt}{2t^2+1}}\right)^2$$
$$=\frac{kt}{2t^2+1}$$

구하는 부피를 $V$라 하면

$$V=\int_1^2 S(t)\,dt$$
$$=\int_1^2 \frac{kt}{2t^2+1}dt$$

이때 $2t^2+1=s$라 하면

$t=1$일 때 $s=3$, $t=2$일 때 $s=9$, $4t=\dfrac{ds}{dt}$이므로

$$V=\int_1^2 \frac{kt}{2t^2+1}dt$$
$$=\int_3^9 \frac{k}{4s}ds$$
$$=\frac{k}{4}\int_3^9 \frac{1}{s}ds$$
$$=\frac{k}{4}\Big[\ln|s|\Big]_3^9$$
$$=\frac{k}{4}(\ln 9-\ln 3)$$
$$=\frac{k}{4}\ln 3$$

즉, $\frac{k}{4}\ln 3=2\ln 3$이므로

$$\frac{k}{4}=2$$

따라서 $k=8$

답 ③

# 고2~N수 수능 집중 로드맵

수능 입문 → 기출 / 연습 → 연계+연계 보완 → 고난도 → 모의고사

**수능 입문**
- 윤혜정의 개념/패턴의 나비효과
- 수능 감(感)잡기
- 수능특강 Light
- 강의노트 수능개념

**기출 / 연습**
- 윤혜정의 기출의 나비효과
- 수능 기출의 미래
- 수능 기출의 미래 미니모의고사
- 수능특강Q 미니모의고사

**연계+연계 보완**
- 수능연계교재의 국어 어휘
- 수능연계교재의 VOCA 1800
- 수능연계 기출 Vaccine VOCA
- 연계: 수능특강
- 연계: 수능완성
- 수능특강 사용설명서
- 수능특강 연계 기출
- 수능 영어 간접연계 서치라이트
- 수능완성 사용설명서

**고난도**
- 수능연계완성 3/4주 특강 (고난도·신유형)
- 박봄의 사회 · 문화 표 분석의 패턴

**모의고사**
- FINAL 실전모의고사
- 만점마무리 봉투모의고사
- 고난도 시크릿X 봉투모의고사
- 수능 싱크로 100% 프리미엄 봉투모의고사

| 구분 | 시리즈명 | 특징 | 수준 | 영역 |
|---|---|---|---|---|
| 수능 입문 | 윤혜정의 개념/패턴의 나비효과 | 윤혜정 선생님과 함께하는 수능 국어 개념/패턴 학습 | | 국어 |
| | 수능 감(感) 잡기 | 동일 소재·유형의 내신과 수능 문항 비교로 수능 입문 | | 국/수/영 |
| | 수능특강 Light | 수능 연계교재 학습 전 연계교재 입문서 | | 국/영 |
| | 수능개념 | EBSi 대표 강사들과 함께하는 수능 개념 다지기 | | 전 영역 |
| 기출/연습 | 윤혜정의 기출의 나비효과 | 윤혜정 선생님과 함께하는 까다로운 국어 기출 완전 정복 | | 국어 |
| | 수능 기출의 미래 | 올해 수능에 딱 필요한 문제만 선별한 기출문제집 | | 전 영역 |
| | 수능 기출의 미래 미니모의고사 | 부담없는 실전 훈련, 고품질 기출 미니모의고사 | | 국/수/영 |
| | 수능특강Q 미니모의고사 | 매일 15분으로 연습하는 고품격 미니모의고사 | | 전 영역 |
| 연계 + 연계 보완 | 수능특강 | 최신 수능 경향과 기출 유형을 분석한 종합 개념서 | | 전 영역 |
| | 수능특강 사용설명서 | 수능 연계교재 수능특강의 지문·자료·문항 분석 | | 국/영 |
| | 수능특강 연계 기출 | 수능특강 수록 작품·지문과 연결된 기출문제 학습 | | 국/영 |
| | 수능완성 | 유형 분석과 실전모의고사로 단련하는 문항 연습 | | 전 영역 |
| | 수능완성 사용설명서 | 수능 연계교재 수능완성의 국어·영어 지문 분석 | | 국/영 |
| | 수능 영어 간접연계 서치라이트 | 출제 가능성이 높은 핵심만 모아 구성한 간접연계 대비 교재 | | 영어 |
| | 수능연계교재의 국어 어휘 | 수능 지문과 문항 이해에 필요한 어휘 학습서 | | 국어 |
| | 수능연계교재의 VOCA 1800 | 수능특강과 수능완성의 필수 중요 어휘 1800개 수록 | | 영어 |
| | 수능연계 기출 Vaccine VOCA | 수능-EBS 연계 및 평가원 최다 빈출 어휘 선별 수록 | | 영어 |
| 고난도 | 수능연계완성 3/4주 특강 | 단기간에 끝내는 수능 킬러 문항 대비서 | | 국/수/영/과 |
| | 박봄의 사회·문화 표 분석의 패턴 | 박봄 선생님과 사회·문화 표 분석 문항의 패턴 연습 | | 사회탐구 |
| 모의고사 | FINAL 실전모의고사 | 수능 동일 난도의 최다 분량, 최다 과목 모의고사 | | 전 영역 |
| | 만점마무리 봉투모의고사 | 실제 시험지 형태와 OMR 카드로 실전 훈련 모의고사 | | 전 영역 |
| | 고난도 시크릿X 봉투모의고사 | 제대로 어려운 최고난도 모의고사 | | 국/수/영 |
| | 수능 싱크로 100% 프리미엄 봉투모의고사 | 수능 직전에 만나는, 수능과 가장 가까운 고품격 프리미엄 모의고사 | | 국/수/영 |