정답과 풀이

01 지수와 로그

유제

본문 5~13쪽

1 ②	2 6	3 ④	4 ①	5 ①
6 ④	7 ①	8 8	9 ②	10 6

Level 1 기초 연습

본문 14~15쪽

1 ②	2 ③	3 ①	4 ②	5 ④
6 ④	7 ②	8 ④	9 ⑤	

Level 2 기본 연습

본문 16~17쪽

1 ⑤	2 ③	3 ③	4 17	5 ①
6 174	7 ④	8 36		

Level 3 실력 완성

본문 18쪽

1 ④	2 9	3 ③

02 지수함수와 로그함수

유제

본문 21~29쪽

1 ②	2 5	3 ④	4 14	5 3
6 17	7 8	8 ①	9 ⑤	10 4

Level 1 기초 연습

본문 30~31쪽

1 ①	2 ③	3 ②	4 ④	5 ③
6 3	7 ④	8 ⑤	9 ②	

Level 2 기본 연습

본문 32~33쪽

1 ②	2 ⑤	3 ④	4 ①	5 30
6 ④	7 ③			

Level 3 실력 완성

본문 34쪽

1 ②	2 11	3 ③

03 삼각함수

유제

본문 37~45쪽

1 ⑤	2 150	3 ②	4 ⑤	5 2
6 26	7 ④	8 40	9 20	10 ②

Level 1 기초 연습

본문 46~47쪽

1 ⑤	2 ①	3 ④	4 ②	5 ①
6 ④	7 ④	8 ②		

Level 2 기본 연습

본문 48~50쪽

1 4	2 ①	3 ④	4 12	5 ⑤
6 ③	7 ④	8 ④	9 ②	10 ③
11 11	12 113			

Level 3 실력 완성

본문 51쪽

1 87	2 98	3 11

04 사인법칙과 코사인법칙

유제 본문 55~61쪽

1 ③ 2 75 3 ② 4 55 5 12
6 1 7 ③ 8 4

Level 1 기초 연습 본문 62~63쪽

1 ⑤ 2 ① 3 ④ 4 ⑤ 5 ④
6 ② 7 ④ 8 ⑤

Level 2 기본 연습 본문 64~66쪽

1 ② 2 ⑤ 3 ② 4 ⑤ 5 ②
6 ② 7 ④ 8 ④ 9 ③

Level 3 실력 완성 본문 67쪽

1 128 2 ⑤ 3 ④

05 등차수열과 등비수열

유제 본문 71~77쪽

1 ② 2 ④ 3 ③ 4 ④ 5 ②
6 6 7 ⑤ 8 62

Level 1 기초 연습 본문 78~80쪽

1 ③ 2 ④ 3 ① 4 ⑤ 5 ⑤
6 ③ 7 ③ 8 ③ 9 ① 10 ④
11 ① 12 15

Level 2 기본 연습 본문 81~83쪽

1 ② 2 ④ 3 ④ 4 ① 5 ②
6 ③ 7 ⑤ 8 ① 9 ① 10 ⑤
11 19 12 ①

Level 3 실력 완성 본문 84쪽

1 3 2 ④ 3 768

06 수열의 합과 수학적 귀납법

유제 본문 87~97쪽

1 ① 2 80 3 ④ 4 ① 5 58
6 ② 7 ③ 8 89 9 ② 10 503
11 ③

Level 1 기초 연습 본문 98~99쪽

1 ⑤ 2 ③ 3 ③ 4 ④ 5 7
6 ⑤ 7 ① 8 24

Level 2 기본 연습 본문 100~101쪽

1 ④ 2 110 3 ② 4 ④ 5 ④
6 ② 7 ③

Level 3 실력 완성 본문 102쪽

1 17 2 ④ 3 101

01 지수와 로그

유제 본문 5~13쪽

1 ②	2 6	3 ④	4 ①	5 ①
6 ④	7 ①	8 8	9 ②	10 6

1 $\sqrt[3]{-64}=\sqrt[3]{(-4)^3}=-4$

$\dfrac{\sqrt[4]{162}}{\sqrt{\sqrt{2}}}=\dfrac{\sqrt[4]{162}}{\sqrt[4]{2}}=\sqrt[4]{\dfrac{162}{2}}=\sqrt[4]{3^4}=3$

따라서 $\sqrt[3]{-64}+\dfrac{\sqrt[4]{162}}{\sqrt{\sqrt{2}}}=-4+3=-1$

답 ②

2 a는 2의 여섯제곱근 중 양수이므로

$a=\sqrt[6]{2}$ ...... ㉠

$a\times\sqrt[6]{18}$은 자연수 n의 세제곱근이므로

$(a\times\sqrt[6]{18})^3=n$ ...... ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면

$n=(\sqrt[6]{2}\times\sqrt[6]{18})^3$

$=(\sqrt[6]{36})^3$

$=(\sqrt[3]{6})^3$

$=6$

답 6

3 $\sqrt[3]{24}\times 9^{-\frac{2}{3}}=(2^3\times 3)^{\frac{1}{3}}\times(3^2)^{-\frac{2}{3}}$

$=(2^{3\times\frac{1}{3}}\times 3^{\frac{1}{3}})\times 3^{2\times\left(-\frac{2}{3}\right)}$

$=2\times 3^{\frac{1}{3}}\times 3^{-\frac{4}{3}}$

$=2\times 3^{\frac{1}{3}+\left(-\frac{4}{3}\right)}$

$=2\times 3^{-1}$

$=\dfrac{2}{3}$

답 ④

4 $3^x=4$에서 $3=4^{\frac{1}{x}}=2^{\frac{2}{x}}$

$36^y=8$에서 $36=8^{\frac{1}{y}}=2^{\frac{3}{y}}$

따라서 $2^{\frac{4}{x}-\frac{3}{y}}=\dfrac{2^{\frac{4}{x}}}{2^{\frac{3}{y}}}=\dfrac{(2^{\frac{2}{x}})^2}{2^{\frac{3}{y}}}=\dfrac{3^2}{36}=\dfrac{1}{4}$

답 ①

5 $\log_3 12+2\log_3\dfrac{3}{2}=\log_3 12+\log_3\dfrac{9}{4}$

$=\log_3\left(12\times\dfrac{9}{4}\right)$

$=\log_3 3^3$

$=3\log_3 3$

$=3$

답 ①

6 $\dfrac{1}{2}\log_2 a=\log_2\dfrac{b}{a}$에서

$\dfrac{1}{2}\log_2 a=\log_2 b-\log_2 a$

$\dfrac{3}{2}\log_2 a=\log_2 b$

$\log_2 a^{\frac{3}{2}}=\log_2 b$

$a^{\frac{3}{2}}=b$ ...... ㉠

또 $b^3=c^4$에서

$c=b^{\frac{3}{4}}$ ...... ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면

$c=(a^{\frac{3}{2}})^{\frac{3}{4}}=a^{\frac{9}{8}}$

따라서 $\log_a c=\log_a a^{\frac{9}{8}}=\dfrac{9}{8}\log_a a=\dfrac{9}{8}$

답 ④

7 $\log_5 16\times\log_2\dfrac{1}{5}=\log_5 16\times(-\log_2 5)$

$=\dfrac{\log_2 16}{\log_2 5}\times(-\log_2 5)$

$=-\log_2 16$

$=-4\log_2 2$

$=-4$

답 ①

8 $\dfrac{\log_a c}{\log_a b}=\log_b c=\dfrac{2}{3}$

따라서

$b^{\log_c 4}=4^{\log_c b}=4^{\frac{1}{\log_b c}}$

$=4^{\frac{3}{2}}=(2^2)^{\frac{3}{2}}$

$=2^3=8$

답 8

9 $\log \sqrt[3]{8.1}=\log \sqrt[3]{\frac{81}{10}}$
$=\log \left(\frac{81}{10}\right)^{\frac{1}{3}}$
$=\frac{1}{3}(\log 81-\log 10)$
$=\frac{1}{3}(4 \log 3-1)$
$=\frac{1}{3}(4\times 0.4771-1)$
$=\frac{1}{3}\times 0.9084$
$=0.3028$

답 ②

10 $\log \sqrt[5]{N^3}=\log (N^3)^{\frac{1}{5}}=\log N^{\frac{3}{5}}=\frac{3}{5}\log N$이므로
$\log \sqrt[5]{N^3}=1.5612$에서
$\frac{3}{5}\log N=1.5612$
$\log N=1.5612\times\frac{5}{3}$
$=2.6020$
$=2+2\times 0.3010$
$=\log 10^2+2\log 2$
$=\log (4\times 10^2)$
$N=4\times 10^2$
따라서 $a=4$, $n=2$이므로
$a+n=4+2=6$

답 6

Level 1 기초 연습 본문 14~15쪽

1 ②	2 ③	3 ①	4 ②	5 ④
6 ④	7 ②	8 ④	9 ⑤	

1 $\sqrt[3]{8^5}\times 4^{-3}=\{(2^3)^5\}^{\frac{1}{3}}\times(2^2)^{-3}$
$=2^5\times 2^{-6}$
$=2^{5+(-6)}$
$=2^{-1}$
$=\frac{1}{2}$

답 ②

2 $3^{\sqrt{3}+1}\times\frac{1}{9}=3^{\sqrt{3}+1}\times 3^{-2}$
$=3^{(\sqrt{3}+1)-2}$
$=3^{\sqrt{3}-1}$
따라서
$\left(3^{\sqrt{3}+1}\times\frac{1}{9}\right)^{\sqrt{3}+1}=(3^{\sqrt{3}-1})^{\sqrt{3}+1}$
$=3^{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)}$
$=3^{3-1}$
$=3^2$
$=9$

답 ③

3 a는 -64의 세제곱근 중에서 실수이므로
$a=\sqrt[3]{-64}=\sqrt[3]{(-4)^3}=-4$
또 실수 b의 네제곱근 중에서 양수인 것이 $\sqrt{5}$이므로
방정식 $x^4=b$의 근 중에서 양수인 것이 $\sqrt{5}$이다.
즉, $b=(\sqrt{5})^4=(5^{\frac{1}{2}})^4=5^2=25$
따라서 $a+b=-4+25=21$

답 ①

참고
-64의 세제곱근을 x라 하면
$x^3=-64$
$x^3+64=0$
$(x+4)(x^2-4x+16)=0$
$x=-4$ 또는 $x=2\pm 2\sqrt{3}i$

4 $6^x=27$에서 $27^{\frac{1}{x}}=6$
$4^y=27$에서 $27^{\frac{1}{y}}=4$
따라서
$27^{\frac{2}{x}-\frac{1}{y}}=\frac{(27^{\frac{1}{x}})^2}{27^{\frac{1}{y}}}=\frac{6^2}{4}=9$
이므로
$3^{3\left(\frac{2}{x}-\frac{1}{y}\right)}=3^2$
즉, $3\left(\frac{2}{x}-\frac{1}{y}\right)=2$이므로
$\frac{2}{x}-\frac{1}{y}=\frac{2}{3}$

답 ②

5 $\log_x(-x^2+4x+12)$에서
x가 로그의 밑이므로
$x>0$, $x\neq 1$ …… ㉠

$-x^2+4x+12$가 로그의 진수이므로
$-x^2+4x+12>0$
$x^2-4x-12<0$
$(x+2)(x-6)<0$
$-2<x<6$ …… ㉡
㉠, ㉡에서
$0<x<1$ 또는 $1<x<6$
따라서 정수 x는 2, 3, 4, 5이고, 그 합은
$2+3+4+5=14$

답 ④

6 $\log_3 54-\log_3 \frac{2}{3}=\log_3\left(54\times\frac{3}{2}\right)$
$=\log_3 81$
$=4\log_3 3$
$=4$

답 ④

7 $(\log_2 9+4\log_4 2)\times\log_6 4$
$=(\log_2 9+2\log_2 2)\times\log_6 4$
$=(\log_2 9+\log_2 4)\times\log_6 4$
$=\log_2 36\times\log_6 4$
$=\frac{2\log 6}{\log 2}\times\frac{2\log 2}{\log 6}$
$=4$

답 ②

8 $3^a=\sqrt[4]{7}=7^{\frac{1}{4}}$
$b=\log_7 64=6\log_7 2$
따라서
$9^{ab}=(3^a)^{2b}=(7^{\frac{1}{4}})^{12\log_7 2}$
$=7^{\frac{1}{4}\times 12\log_7 2}$
$=7^{3\log_7 2}$
$=7^{\log_7 8}$
$=8^{\log_7 7}$
$=8$

답 ④

9 $1210=1.21\times10^3=1.1^2\times10^3$
따라서
$\log 1210=\log(1.1^2\times10^3)$
$=2\log 1.1+3\log 10$
$=2a+3$

답 ⑤

Level 2 기본 연습

본문 16~17쪽

1 ⑤	2 ③	3 ③	4 17	5 ①
6 174	7 ④	8 36		

1 $(\sqrt[3]{2^{10}})^{\frac{n}{8}}=\{(2^{10})^{\frac{1}{3}}\}^{\frac{n}{8}}=2^{\frac{10}{3}\times\frac{n}{8}}=2^{\frac{5n}{12}}$
n이 자연수이므로 $(\sqrt[3]{2^{10}})^{\frac{n}{8}}$, 즉 $2^{\frac{5n}{12}}$의 값이 자연수이려면
$\frac{5n}{12}$은 자연수이어야 한다.
즉, n은 12의 배수이다.
따라서 구하는 자연수 n의 최솟값은 12이다.

답 ⑤

2 a는 64의 n제곱근이므로
$a^n=64=2^6$
a가 정수이므로 2 이상의 자연수 n은 6의 약수이다.
즉, $n=2$ 또는 $n=3$ 또는 $n=6$이다.
(i) $n=2$일 때
$a^2=64$에서
$a=-8$ 또는 $a=8$
따라서 두 수 n, a의 순서쌍 (n, a)는 $(2, -8)$, $(2, 8)$이고, 그 개수는 2이다.
(ii) $n=3$일 때
$a^3=64$에서
$a^3-64=0$
$(a-4)(a^2+4a+16)=0$
$a=4$ 또는 $a=-2\pm2\sqrt{3}i$
a는 정수이므로 $a=4$
따라서 두 수 n, a의 순서쌍 (n, a)는 $(3, 4)$이고, 그 개수는 1이다.
(iii) $n=6$일 때
$a^6=64$에서
$a^6-64=0$
$(a^3+8)(a^3-8)=0$
$(a+2)(a-2)(a^2-2a+4)(a^2+2a+4)=0$
$a=-2$ 또는 $a=2$ 또는 $a=1\pm\sqrt{3}i$ 또는
$a=-1\pm\sqrt{3}i$
a는 정수이므로 $a=-2$ 또는 $a=2$

따라서 두 수 n, a의 순서쌍 (n, a)는 $(6, -2)$, $(6, 2)$이고, 그 개수는 2이다.

(i), (ii), (iii)에서 구하는 순서쌍 (n, a)의 개수는

$2+1+2=5$

답 ③

3 $a^{-\frac{1}{2}}+b^{-\frac{1}{2}}=3$의 양변을 제곱하면

$a^{-1}+2a^{-\frac{1}{2}}b^{-\frac{1}{2}}+b^{-1}=9$

이때 $a^{-1}+b^{-1}=5$이므로

$5+2a^{-\frac{1}{2}}b^{-\frac{1}{2}}=9$

$a^{-\frac{1}{2}}b^{-\frac{1}{2}}=2$

$(ab)^{-\frac{1}{2}}=2$

$\{(ab)^{-\frac{1}{2}}\}^{-2}=2^{-2}$

$ab=\frac{1}{4}$

따라서

$$\begin{aligned}a^{\frac{1}{2}}b^{-\frac{1}{2}}+a^{-\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}}&=a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}}(b^{-1}+a^{-1})\\&=(ab)^{\frac{1}{2}}(a^{-1}+b^{-1})\\&=\left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{2}}\times 5\\&=\frac{1}{2}\times 5\\&=\frac{5}{2}\end{aligned}$$

답 ③

4 함수 $y=\frac{1}{2}\sqrt{x}$의 그래프 위의 점 B의 y좌표가 $\sqrt[4]{8}$이므로 점 B의 x좌표는

$\frac{1}{2}\sqrt{x}=\sqrt[4]{8}$에서

$x^{\frac{1}{2}}=2\times 2^{\frac{3}{4}}$

$x=2^{\frac{7}{2}}$

삼각형 AOB의 넓이 S는

$$\begin{aligned}S&=\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{OA}}\times\overline{\mathrm{AB}}\\&=\frac{1}{2}\times\sqrt[4]{8}\times 2^{\frac{7}{2}}\\&=2^{-1+\frac{3}{4}+\frac{7}{2}}\\&=2^{\frac{13}{4}}\end{aligned}$$

$\log_2 S=\log_2 2^{\frac{13}{4}}=\frac{13}{4}$

따라서 $p=4$, $q=13$이므로

$p+q=4+13=17$

답 17

5 이차방정식 $x^2-\left(\log_a\frac{a^3}{4}\right)x-2=0$의 두 근이 $\log_2 a$, $\log_a b$이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\log_2 a+\log_a b=\log_a\frac{a^3}{4}$ …… ㉠

$\log_2 a\times\log_a b=-2$ …… ㉡

㉡에서

$\frac{\log a}{\log 2}\times\frac{\log b}{\log a}=-2$

$\log b=-2\log 2=\log\frac{1}{4}$

$b=\frac{1}{4}$

$b=\frac{1}{4}$을 ㉠에 대입하면

$\log_2 a+\log_a\frac{1}{4}=\log_a\frac{a^3}{4}$

$\log_2 a-2\log_a 2=3-2\log_a 2$

$\log_2 a=3$

$a=2^3=8$

따라서 $ab=8\times\frac{1}{4}=2$

답 ①

6 두 점 $\mathrm{A}(-1, 1)$, $\mathrm{B}(\log_3 a, \log_3 b)$를 지나는 직선과 직선 $y=\frac{1}{2}x-1$이 서로 평행하므로 직선 AB의 기울기는 $\frac{1}{2}$이다.

$\frac{\log_3 b-1}{\log_3 a-(-1)}=\frac{1}{2}$에서

$2\log_3 b-2=\log_3 a+1$

$2\log_3 b-\log_3 a=3$

$\log_3\frac{b^2}{a}=3$

$\frac{b^2}{a}=3^3$

$a=\frac{b^2}{27}$ …… ㉠

또 $\log_2 a+\log_2 27b=3$에서

$\log_2 27ab=3$

$27ab=2^3=8$ …… ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면

$27\times\frac{b^2}{27}\times b=8$

$b^3=8$

$b>0$이므로 $b=2$

$b=2$를 ㉠에 대입하면

$a=\frac{4}{27}$

따라서 $81(a+b)=81\left(\frac{4}{27}+2\right)=174$

답 174

7 $81^x=12^y=k\ (k>0)$이라 하자.

$81^x=k$에서 $3^{4x}=k$, $3=k^{\frac{1}{4x}}$

$12^y=k$에서 $12=k^{\frac{1}{y}}$

$\frac{1}{4x}+\frac{1}{y}=\frac{2}{3}$이고

$k^{\frac{1}{4x}+\frac{1}{y}}=k^{\frac{1}{4x}}\times k^{\frac{1}{y}}=3\times 12=36$이므로

$k^{\frac{2}{3}}=6^2$

$k=(6^2)^{\frac{3}{2}}=6^{2\times\frac{3}{2}}=6^3=216$

$81^x=216$에서 $x=\log_{81}216$

$12^y=216$에서 $y=\log_{12}216$

따라서

$$\begin{aligned}4x\log_6 9&=4\times\log_{81}216\times\log_6 9\\&=4\times\frac{3\log 6}{4\log 3}\times\frac{2\log 3}{\log 6}=6,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}y\log_6 12&=\log_{12}216\times\log_6 12\\&=\frac{3\log 6}{\log 12}\times\frac{\log 12}{\log 6}=3\end{aligned}$$

이므로 $4x\log_6 9+y\log_6 12=6+3=9$

답 ④

8 조건 (가)에서

$\log_{10}314-\log_{10}3.14=\log_{10}\frac{314}{3.14}=\log_{10}100=2$

이므로

$\log_2 a-\log_2 b=2$

$\log_2\frac{a}{b}=2$

$\frac{a}{b}=2^2=4$

$a=4b$ ...... ㉠

조건 (나)에서

$\sqrt[4]{2^a}\times\sqrt[3]{4^{-b}}=6$

$2^{\frac{a}{4}}\times 2^{-\frac{2b}{3}}=6$

$2^{\frac{a}{4}-\frac{2b}{3}}=6$ ...... ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면

$2^{b-\frac{2b}{3}}=6$

$2^{\frac{b}{3}}=6$

$\frac{b}{3}=\log_2 6$

$b=3\log_2 6$

$b=3\log_2 6$을 ㉠에 대입하면

$a=12\log_2 6$

따라서

$a+b=12\log_2 6+3\log_2 6=15\log_2 6$

이므로

$$\begin{aligned}(\sqrt[15]{4})^{a+b}&=4^{\frac{a+b}{15}}=4^{\frac{15\log_2 6}{15}}=4^{\log_2 6}\\&=6^{\log_2 4}=6^{2\log_2 2}=6^2=36\end{aligned}$$

답 36

Level 3 실력 완성 본문 18쪽

1 ④ 2 9 3 ③

1 원 $(x-\log_2 a)^2+(y-\log_2 b)^2=2$와 직선 $x+y-1=0$이 접하므로 원의 중심 $(\log_2 a, \log_2 b)$와 직선 $x+y-1=0$ 사이의 거리는 원의 반지름의 길이와 같다.

즉, $\frac{|\log_2 a+\log_2 b-1|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\sqrt{2}$에서

$|\log_2 a+\log_2 b-1|=2$

$\log_2 a+\log_2 b-1=2$ 또는 $\log_2 a+\log_2 b-1=-2$

$\log_2 ab=3$ 또는 $\log_2 ab=-1$

$ab=8$ 또는 $ab=\frac{1}{2}$

이때 $a>1$, $b>1$이므로 $ab>1$이다.

즉, $ab=8$ ...... ㉠

또 $5\log_a 2=\log_b 2$에서

$\frac{5}{\log_2 a}=\frac{1}{\log_2 b}$

$\frac{\log_2 a}{\log_2 b}=5$

$\log_b a=5$

$a=b^5$ ...... ㉡

㉡을 ㉠에 대입하면

$b^5\times b=8$

$b^6=2^3$

$b>1$이므로 $b=2^{\frac{1}{2}}$

$b=2^{\frac{1}{2}}$을 ㉡에 대입하면

$a=(2^{\frac{1}{2}})^5=2^{\frac{5}{2}}$

따라서

$$\begin{aligned}(\sqrt[5]{a}\times\sqrt[4]{b})^8&=a^{\frac{8}{5}}\times b^2\\&=(2^{\frac{5}{2}})^{\frac{8}{5}}\times(2^{\frac{1}{2}})^2\\&=2^{4+1}\\&=2^5=32\end{aligned}$$

답 ④

2 직각삼각형 QAO에서 $\overline{\mathrm{OQ}}=x$라 하면 $\angle\mathrm{PAB}=30°$이므로

$\overline{\mathrm{AQ}}=\dfrac{\overline{\mathrm{OQ}}}{\tan 30°}=\sqrt{3}x$

삼각형 QAO의 넓이가 $\dfrac{\sqrt[4]{27}}{2}$이므로

$\dfrac{1}{2}\times\overline{\mathrm{AQ}}\times\overline{\mathrm{OQ}}=\dfrac{\sqrt[4]{27}}{2}$

$\dfrac{1}{2}\times\sqrt{3}x\times x=\dfrac{\sqrt[4]{27}}{2}$

$x^2=\sqrt[4]{3}$

$x=\sqrt[8]{3}$

직각삼각형 QAO에서

$\overline{\mathrm{AO}}=\dfrac{\overline{\mathrm{OQ}}}{\sin 30°}=2\sqrt[8]{3}$

$\angle\mathrm{POB}=2\angle\mathrm{PAB}=60°$이므로 삼각형 POB는 정삼각형이다.

이때 $\overline{\mathrm{PR}}\perp\overline{\mathrm{OB}}$이므로 $\overline{\mathrm{BR}}=\overline{\mathrm{OR}}$이다.

$\overline{\mathrm{BR}}=\dfrac{1}{2}\overline{\mathrm{OB}}=\dfrac{1}{2}\overline{\mathrm{AO}}=\sqrt[8]{3}$,

$\overline{\mathrm{AR}}=2\overline{\mathrm{AO}}-\overline{\mathrm{BR}}=4\sqrt[8]{3}-\sqrt[8]{3}=3\sqrt[8]{3}$

이므로

$\log_3(\overline{\mathrm{AR}}\times\overline{\mathrm{BR}})=\log_3(3\sqrt[8]{3}\times\sqrt[8]{3})=\log_3 3^{\frac{5}{4}}=\dfrac{5}{4}$

따라서 $p=4$, $q=5$이므로

$p+q=4+5=9$

답 9

다른 풀이

직각삼각형 QAO에서 $\overline{\mathrm{OQ}}=x$라 하면 $\angle\mathrm{PAB}=30°$이므로

$\overline{\mathrm{AQ}}=\dfrac{\overline{\mathrm{OQ}}}{\tan 30°}=\sqrt{3}x$

삼각형 QAO의 넓이가 $\dfrac{\sqrt[4]{27}}{2}$이므로

$\dfrac{1}{2}\times\overline{\mathrm{AQ}}\times\overline{\mathrm{OQ}}=\dfrac{\sqrt[4]{27}}{2}$

$\dfrac{1}{2}\times\sqrt{3}x\times x=\dfrac{\sqrt[4]{27}}{2}$

$x^2=\sqrt[4]{3}$

$x=\sqrt[8]{3}$

직각삼각형 QAO에서

$\overline{\mathrm{AO}}=\dfrac{\overline{\mathrm{OQ}}}{\sin 30°}=2\sqrt[8]{3}$

$\triangle\mathrm{AOQ}\backsim\triangle\mathrm{ABP}$이고 $\overline{\mathrm{AB}}=2\overline{\mathrm{AO}}$이므로

$\overline{\mathrm{BP}}=2\overline{\mathrm{OQ}}=2\sqrt[8]{3}$

$\triangle\mathrm{AOQ}\equiv\triangle\mathrm{PBR}$이므로

$\overline{\mathrm{BR}}=\overline{\mathrm{OQ}}=\sqrt[8]{3}$

이때

$\overline{\mathrm{AR}}=2\overline{\mathrm{AO}}-\overline{\mathrm{BR}}=4\sqrt[8]{3}-\sqrt[8]{3}=3\sqrt[8]{3}$

이므로

$\log_3(\overline{\mathrm{AR}}\times\overline{\mathrm{BR}})=\log_3(3\sqrt[8]{3}\times\sqrt[8]{3})=\log_3 3^{\frac{5}{4}}=\dfrac{5}{4}$

따라서 $p=4$, $q=5$이므로

$p+q=4+5=9$

3 조건 (가)에서

$\log_2(8a-a^2)=m$ (m은 자연수)라 하면

$8a-a^2=2^m$ ...... ㉠

한편, $\log_2(8a-a^2)$에서

$8a-a^2>0$이어야 하므로

$a(a-8)<0$

$0<a<8$

$8a-a^2=-(a-4)^2+16$이므로

$0<8a-a^2\le16$ ...... ㉡

㉠, ㉡에서 $0<2^m\le16$

m이 자연수이므로 m의 값은 1, 2, 3, 4이다.

(i) $m=1$일 때

$8a-a^2=2$

조건 (나)에서 b는 2의 n제곱근이므로

$b^n=2$

위 등식을 만족시키는 정수 b와 2 이상의 자연수 n은 존재하지 않는다.

(ii) $m=2$일 때

$8a-a^2=4$

조건 (나)에서 b는 4의 n제곱근이므로

$b^n=4$

$n=2$일 때, $b^2=4$에서 $b=-2$ 또는 $b=2$

$n\ge3$일 때, $b^n=4$를 만족시키는 정수 b와 3 이상의 자연수 n은 존재하지 않는다.

한편, 이차방정식 $8a-a^2=4$, 즉 $a^2-8a+4=0$의 판별식을 D_1이라 하면

$\frac{D_1}{4}=(-4)^2-4=12>0$

이므로 이차방정식 $a^2-8a+4=0$은 서로 다른 두 실근을 갖는다.

이때 세 수 a, b, n의 순서쌍 (a, b, n)의 개수는 4이다.

(iii) $m=3$일 때

$8a-a^2=8$

조건 (나)에서 b는 8의 n제곱근이므로

$b^n=8$

$n=2$일 때, $b^2=8$을 만족시키는 정수 b는 존재하지 않는다.

$n=3$일 때, $b^3=8$에서 $b=2$

$n\geq 4$일 때, $b^n=8$을 만족시키는 정수 b와 4 이상의 자연수 n은 존재하지 않는다.

한편, 이차방정식 $8a-a^2=8$, 즉 $a^2-8a+8=0$의 판별식을 D_2라 하면

$\frac{D_2}{4}=(-4)^2-8=8>0$

이므로 이차방정식 $a^2-8a+8=0$은 서로 다른 두 실근을 갖는다.

이때 세 수 a, b, n의 순서쌍 (a, b, n)의 개수는 2이다.

(iv) $m=4$일 때

$8a-a^2=16$

조건 (나)에서 b는 16의 n제곱근이므로

$b^n=16$

$n=2$일 때, $b^2=16$에서 $b=-4$ 또는 $b=4$

$n=3$일 때, $b^3=16$을 만족시키는 정수 b는 존재하지 않는다.

$n=4$일 때, $b^4=16$에서 $b=-2$ 또는 $b=2$

$n\geq 5$일 때, $b^n=16$을 만족시키는 정수 b와 5 이상의 자연수 n은 존재하지 않는다.

한편, 이차방정식 $8a-a^2=16$, 즉 $a^2-8a+16=0$에서 $(a-4)^2=0$, 즉 $a=4$

이때 세 수 a, b, n의 순서쌍 (a, b, n)의 개수는 4이다.

(i)~(iv)에서 구하는 모든 순서쌍 (a, b, n)의 개수는

$4+2+4=10$

답 ③

02 지수함수와 로그함수

유제 본문 21~29쪽

1 ②	2 5	3 ④	4 14	5 3
6 17	7 8	8 ①	9 ⑤	10 4

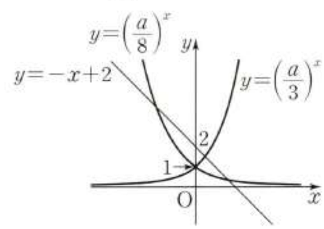
1 함수 $y=\left(\frac{a}{8}\right)^x$의 그래프가 점 $(0, 1)$을 지나므로 이 곡선과 직선 $y=-x+2$가 서로 다른 두 점에서 만나려면

$0<\frac{a}{8}<1$이어야 한다.

즉, $0<a<8$ …… ㉠

함수 $y=\left(\frac{a}{3}\right)^x$의 그래프가 점 $(0, 1)$을 지나므로 이 곡선과 직선 $y=-x+2$가 한 점에서 만나려면 $\frac{a}{3}>1$이어야 한다.

즉, $a>3$ …… ㉡



㉠, ㉡에서 $3<a<8$

따라서 자연수 a는 4, 5, 6, 7이고, 그 개수는 4이다.

답 ②

2 $\overline{AB}=1$이므로 양수 k에 대하여 $A(k, 64)$, $B(k+1, 64)$로 놓을 수 있다.

점 A가 함수 $y=(2a)^x$의 그래프 위의 점이므로

$(2a)^k=64$ …… ㉠

점 B가 함수 $y=a^x$의 그래프 위의 점이므로

$a^{k+1}=64$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 $(2a)^k=a^{k+1}$

$a^k>0$이므로 $2^k=a$

$a=2^k$을 ㉡에 대입하면

$(2^k)^{k+1}=64$

$2^{k^2+k}=2^6$

$k^2+k=6$

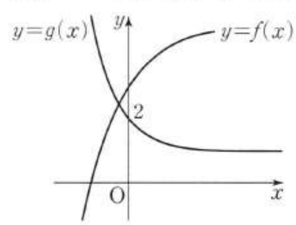
$(k+3)(k-2)=0$

$k>0$이므로 $k=2$

따라서 A(2, 64), B(3, 64)이므로
$\overline{OB}^2-\overline{OA}^2=(3^2+64^2)-(2^2+64^2)=5$

답 5

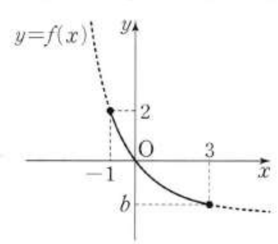
3 함수 $f(x)=-2^{-3x+6}+k$, 즉 $f(x)=-\left(\frac{1}{8}\right)^{x-2}+k$의 그래프는 함수 $y=\left(\frac{1}{8}\right)^x$의 그래프를 x축에 대하여 대칭이동한 후, 다시 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 k만큼 평행이동한 것이다.
또 함수 $g(x)=\left(\frac{1}{3}\right)^x+1$의 그래프는 함수 $y=\left(\frac{1}{3}\right)^x$의 그래프를 y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이다.



함수 $f(x)=-2^{-3x+6}+k$의 그래프와 함수
$g(x)=\left(\frac{1}{3}\right)^x+1$의 그래프가 제2사분면에서 만나려면
$f(0)>2$이어야 한다.
즉, $f(0)=-\left(\frac{1}{8}\right)^{-2}+k=-64+k>2$에서
$k>66$
따라서 구하는 자연수 k의 최솟값은 67이다.

답 ④

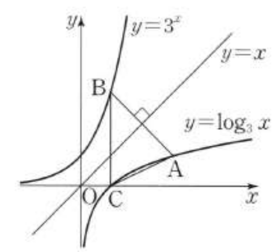
4 함수 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^{x-1}+a$의 그래프는 함수 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$의 그래프를 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 a만큼 평행이동한 것이다.
함수 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$은 x의 값이 증가하면 y의 값은 감소하므로 정의역이 $\{x\,|\,-1\le x\le 3\}$인 함수 $f(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^{x-1}+a$는 $x=-1$일 때 최댓값을 갖고, $x=3$일 때 최솟값을 갖는다.



함수 $f(x)$의 최댓값이 2이므로
$f(-1)=\left(\frac{1}{2}\right)^{-2}+a=2$에서
$4+a=2$
$a=-2$
함수 $f(x)$의 최솟값이 b이므로
$b=f(3)=\left(\frac{1}{2}\right)^2-2=-\frac{7}{4}$
따라서 $4ab=4\times(-2)\times\left(-\frac{7}{4}\right)=14$

답 14

5 함수 $y=\log_3 x$의 역함수가 함수 $y=3^x$이므로 점 B는 점 A를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 점이다.
즉, B(1, 3)이다.
함수 $y=\log_3 x$의 그래프와 x축이 만나는 점이 C이므로 C(1, 0)이다.



따라서 삼각형 ABC의 넓이는
$\frac{1}{2}\times3\times2=3$

답 3

6 두 점 A, B의 x좌표를 각각 x_1, x_2 $(0<x_1<x_2)$라 하면
$A(x_1, \log_a x_1)$, $B(x_2, \log_a x_2)$로 놓을 수 있다.
선분 AB의 중점이 x축 위에 있고 직선 $y=8x-17$과 x축이 만나는 점의 좌표가 $\left(\frac{17}{8}, 0\right)$이므로 선분 AB의 중점의 좌표는 $\left(\frac{17}{8}, 0\right)$이다.
$\frac{x_1+x_2}{2}=\frac{17}{8}$에서
$x_1+x_2=\frac{17}{4}$
$\frac{\log_a x_1+\log_a x_2}{2}=0$에서
$\log_a x_1x_2=0$이므로
$x_1x_2=1$
이때 x_1, x_2는 이차방정식 $t^2-\frac{17}{4}t+1=0$의 두 근이다.

즉, $4t^2-17t+4=0$에서

$(4t-1)(t-4)=0$

$t=\frac{1}{4}$ 또는 $t=4$

이므로 $x_1=\frac{1}{4}$, $x_2=4$

한편, 점 $B(4, \log_a 4)$는 직선 $y=8x-17$ 위의 점이므로

$\log_a 4=15$

$\log_a 2=\frac{15}{2}$

$\log_2 a=\frac{1}{\log_a 2}=\frac{2}{15}$

따라서 $p=15$, $q=2$이므로

$p+q=15+2=17$

답 17

7 $y=4^{-x+a}+2$에서

$4^{-x+a}=y-2$

$-x+a=\log_4 (y-2)$

$x=-\log_4 (y-2)+a$

x와 y를 서로 바꾸면

$y=-\log_4 (x-2)+a$

즉, $g(x)=-\log_4 (x-2)+a$

함수 $y=g(x)$의 그래프가 점 $(6, 3)$을 지나므로

$-\log_4 (6-2)+a=3$

$-1+a=3$

$a=4$

한편, 함수 $g(x)=-\log_4 (x-2)+4$의 그래프는 함수 $y=\log_4 x$의 그래프를 x축에 대하여 대칭이동한 후, 다시 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 4만큼 평행이동한 것이다.

함수 $y=g(x)$의 그래프의 점근선은 직선 $x=2$이므로

$b=2$

따라서 $ab=4\times2=8$

답 8

다른 풀이

함수 $y=g(x)$의 그래프가 점 $(6, 3)$을 지나므로

함수 $y=f(x)$의 그래프는 점 $(3, 6)$을 지난다.

$f(3)=4^{-3+a}+2=6$에서 $4^{-3+a}=4$

$-3+a=1$, $a=4$

함수 $y=g(x)$의 그래프의 점근선인 직선 $x=b$를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동하면 직선 $y=b$이고, 함수 $y=f(x)$의 그래프의 점근선은 직선 $y=2$이므로 $b=2$

따라서 $ab=4\times2=8$

8 함수 $y=a+\log_{\frac{1}{2}} x$의 그래프는 함수 $y=\log_{\frac{1}{2}} x$의 그래프를 y축의 방향으로 a만큼 평행이동한 것이다.

함수 $y=a+\log_{\frac{1}{2}} x$는 x의 값이 증가하면 y의 값은 감소하므로 정의역이 $\left\{x \middle| \frac{1}{4}\le x\le 8\right\}$인 함수 $f(x)=a+\log_{\frac{1}{2}} x$는 $x=\frac{1}{4}$일 때 최댓값을 갖고, $x=8$일 때 최솟값을 갖는다.

$f\left(\frac{1}{4}\right)=a+\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{4}=a+\log_{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2}\right)^2=a+2$이므로

$a+2=4$에서 $a=2$

$f(8)=2+\log_{\frac{1}{2}} 8=2+\log_{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2}\right)^{-3}=2-3=-1$이므로

$b=-1$

따라서 $a+b=2+(-1)=1$

답 ①

9 부등식 $(x-1)(4^{x-4}-32)<0$에서

$x-1<0$, $4^{x-4}-32>0$ 또는 $x-1>0$, $4^{x-4}-32<0$

(i) $x-1<0$, $4^{x-4}-32>0$일 때

$x-1<0$에서

$x<1$ …… ㉠

$4^{x-4}-32>0$에서

$2^{2x-8}>2^5$

밑 2가 $2>1$이므로

$2x-8>5$

$x>\frac{13}{2}$ …… ㉡

㉠, ㉡을 동시에 만족시키는 x의 값은 존재하지 않는다.

(ii) $x-1>0$, $4^{x-4}-32<0$일 때

$x-1>0$에서

$x>1$ …… ㉢

$4^{x-4}-32<0$에서

$2^{2x-8}<2^5$

밑 2가 $2>1$이므로

$2x-8<5$

$x<\frac{13}{2}$ …… ㉣

㉢, ㉣에서 $1<x<\frac{13}{2}$

(i), (ii)에서 $1<x<\frac{13}{2}$

따라서 정수 x는 2, 3, 4, 5, 6이고, 그 합은

$2+3+4+5+6=20$

답 ⑤

10 부등식 $\log_3 f\left(\frac{x}{2}\right) \le \log_3 g\left(\frac{x}{2}\right)$에서

$\frac{x}{2}=t$로 놓으면

$\log_3 f(t) \le \log_3 g(t)$

로그의 진수 조건에 의하여

$f(t)>0$, $g(t)>0$이므로

$t>4$ ······ ㉠

부등식 $\log_3 f(t) \le \log_3 g(t)$에서 밑 3이 $3>1$이므로

$f(t) \le g(t)$

$-2 \le t \le 6$ ······ ㉡

㉠, ㉡에서

$4<t \le 6$

즉, $4<\frac{x}{2} \le 6$이므로

$8<x \le 12$

따라서 정수 x는 9, 10, 11, 12이고, 그 개수는 4이다.

답 4

Level 1 기초 연습

본문 30~31쪽

1 ①	2 ③	3 ②	4 ④	5 ③
6 3	7 ④	8 ⑤	9 ②	

1 함수 $y=2^{x-a}+b$의 그래프가 점 A$(-3,\ 0)$을 지나므로

$2^{-3-a}+b=0$ ······ ㉠

함수 $y=2^{x-a}+b$의 그래프는 함수 $y=2^x$의 그래프를 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 b만큼 평행이동한 것이므로 함수 $y=2^{x-a}+b$의 그래프의 점근선은 직선 $y=b$이다. 점 A와 함수 $y=2^{x-a}+b$의 그래프의 점근선 사이의 거리가 4이고 ㉠에서 $b=-2^{-3-a}<0$이므로

$b=-4$

$b=-4$를 ㉠에 대입하면

$2^{-3-a}-4=0$

$2^{-3-a}=2^2$

$-3-a=2$

$a=-5$

따라서 $a+b=-5+(-4)=-9$

답 ①

2 함수 $y=-2+\left(\frac{1}{3}\right)^{x-1}$의 그래프는 함수 $y=\left(\frac{1}{3}\right)^x$의 그래프를 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 -2만큼 평행이동한 것이다.

함수 $y=-2+\left(\frac{1}{3}\right)^{x-1}$의 그래프는 x의 값이 증가하면 y의 값은 감소하므로 정의역이 $\{x\,|\,-1 \le x \le 2\}$인 함수 $f(x)=-2+\left(\frac{1}{3}\right)^{x-1}$은 $x=-1$일 때 최댓값을 갖는다.

따라서 구하는 최댓값은

$$f(-1)=-2+\left(\frac{1}{3}\right)^{-1-1}=-2+\left(\frac{1}{3}\right)^{-2}$$
$$=-2+9=7$$

답 ③

3 방정식 $3^{2x}-2\times 3^{x+1}+8=0$에서

$(3^x)^2-6\times 3^x+8=0$

$3^x=t\ (t>0)$으로 놓으면

$t^2-6t+8=0$

$(t-2)(t-4)=0$

$t=2$ 또는 $t=4$

$3^x=2$ 또는 $3^x=4$

$x=\log_3 2$ 또는 $x=\log_3 4$

따라서

$\alpha=\log_3 2$, $\beta=\log_3 4$ 또는 $\alpha=\log_3 4$, $\beta=\log_3 2$

이므로

$$4^{\frac{1}{\alpha}}+4^{\frac{1}{\beta}}=4^{\frac{1}{\log_3 2}}+4^{\frac{1}{\log_3 4}}$$
$$=4^{\log_2 3}+4^{\log_4 3}$$
$$=3^{\log_2 4}+3^{\log_4 4}$$
$$=3^2+3$$
$$=12$$

답 ②

다른 풀이

방정식 $3^{2x}-2\times 3^{x+1}+8=0$에서

$(3^x)^2-6\times 3^x+8=0$

$3^x=t\ (t>0)$으로 놓으면

$t^2-6t+8=0$

$(t-2)(t-4)=0$

$t=2$ 또는 $t=4$

$3^x=2$ 또는 $3^x=4$

$3^x=2$에서 $x\ne 0$이므로 $2^{\frac{1}{x}}=3$, $4^{\frac{1}{x}}=9$

$3^x=4$에서 $x\ne 0$이므로 $4^{\frac{1}{x}}=3$

따라서 $4^{\frac{1}{\alpha}}=9$, $4^{\frac{1}{\beta}}=3$ 또는 $4^{\frac{1}{\alpha}}=3$, $4^{\frac{1}{\beta}}=9$이므로

$4^{\frac{1}{\alpha}}+4^{\frac{1}{\beta}}=9+3=12$

4 부등식 $8^{x-5}\le\left(\frac{1}{4}\right)^{x-3}$에서

$2^{3x-15}\le 2^{-2x+6}$

밑 2가 $2>1$이므로

$3x-15\le -2x+6$

$5x\le 21$

$x\le\frac{21}{5}$

따라서 주어진 부등식을 만족시키는 자연수 x는 1, 2, 3, 4이고, 그 개수는 4이다.

답 ④

5 함수 $y=a+\log_3 x$의 그래프가 점 $(9, 10)$을 지나므로

$10=a+\log_3 9$

$10=a+2$

$a=8$

함수 $y=a+\log_3 x$의 그래프가 점 $\left(\frac{1}{9}, b\right)$를 지나므로

$b=a+\log_3 \frac{1}{9}$

$=8+\log_3 3^{-2}$

$=8+(-2)$

$=6$

따라서 $a+b=8+6=14$

답 ③

6 $y=\log_5 (4x-1)$

$=\log_5 4\left(x-\frac{1}{4}\right)$

$=\log_5 \left(x-\frac{1}{4}\right)+\log_5 4$

함수 $y=\log_5 (4x-1)$의 그래프는 함수 $y=\log_5 x$의 그래프를 x축의 방향으로 $\frac{1}{4}$만큼, y축의 방향으로 $\log_5 4$만큼 평행이동한 것이므로 함수 $y=\log_5 (4x-1)$의 그래프의 점근선은 직선 $x=\frac{1}{4}$이다.

$\log_{\frac{1}{4}} \frac{1}{4}=1$이므로

점 A의 좌표는 $\left(\frac{1}{4}, 1\right)$이다.

$\log_2 \frac{1}{4}=\log_2 2^{-2}=-2$이므로

점 B의 좌표는 $\left(\frac{1}{4}, -2\right)$이다.

따라서 $\overline{AB}=3$

답 3

7 진수 조건에서

$x>0$, $x+2>0$, $x^2-x>0$

이므로

$x>1$ ...... ㉠

방정식 $2\log_2 x+\log_2 (x+2)=3+\log_2 (x^2-x)$에서

$\log_2 (x^3+2x^2)=\log_2 (8x^2-8x)$

$x^3+2x^2=8x^2-8x$

$x(x-2)(x-4)=0$

$x=0$ 또는 $x=2$ 또는 $x=4$ ...... ㉡

㉠, ㉡에서

$x=2$ 또는 $x=4$

따라서 모든 실수 x의 값의 곱은

$2\times 4=8$

답 ④

8 진수 조건에서

$x+4>0$

$x>-4$ ...... ㉠

$\log_{\frac{1}{5}} (x+4)>-2$, 즉 $\log_{\frac{1}{5}} (x+4)>\log_{\frac{1}{5}} \left(\frac{1}{5}\right)^{-2}$에서

밑 $\frac{1}{5}$이 $0<\frac{1}{5}<1$이므로

$x+4<\left(\frac{1}{5}\right)^{-2}$

$x+4<25$

$x<21$ ...... ㉡

㉠, ㉡에서

$-4<x<21$

따라서 $\alpha=-4$, $\beta=21$이므로

$\alpha+\beta=-4+21=17$

답 ⑤

9 이차부등식 $3x^2-(4\log_3 a)x+4\log_3 a>0$이 모든 실수 x에 대하여 성립하려면 이차방정식

$3x^2-(4\log_3 a)x+4\log_3 a=0$의 판별식을 D라 할 때, $D<0$이어야 한다.

$\frac{D}{4}=(-2\log_3 a)^2-12\log_3 a<0$에서

$4\log_3 a\times(\log_3 a-3)<0$

$0<\log_3 a<3$

$1<a<27$

따라서 자연수 a는 2, 3, 4, $\cdots$, 26이고, 그 개수는 25이다.

답 ②

Level 2 기본 연습

본문 32~33쪽

1 ②	2 ⑤	3 ④	4 ①	5 30
6 ④	7 ③			

1 함수 $f(x)=\log_2(x-1)+3$의 그래프의 점근선은 직선 $x=1$이다.

$g(1)=\left(\frac{1}{3}\right)^0+2=3$

점 A의 좌표는 $(1, 3)$이고 점 B의 좌표는 $(0, 3)$이다.

함수 $g(x)=\left(\frac{1}{3}\right)^{x-1}+2$의 그래프의 점근선은 직선 $y=2$이다.

$\log_2(x-1)+3=2$에서

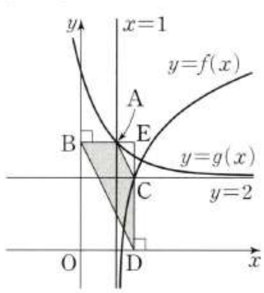
$\log_2(x-1)=-1$

$x-1=\frac{1}{2}$, $x=\frac{3}{2}$

점 C의 좌표는 $\left(\frac{3}{2}, 2\right)$이고 점 D의 좌표는 $\left(\frac{3}{2}, 0\right)$이다.

직선 AB와 직선 CD가 만나는 점을 E라 하면

점 E의 좌표는 $\left(\frac{3}{2}, 3\right)$이다.



따라서

(사각형 ABDC의 넓이)

=(삼각형 EBD의 넓이)−(삼각형 EAC의 넓이)

$=\frac{1}{2}\times\overline{EB}\times\overline{ED}-\frac{1}{2}\times\overline{EA}\times\overline{EC}$

$=\frac{1}{2}\times\frac{3}{2}\times3-\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times1$

$=2$

답 ②

2 (i) $\log_4(x+k)=\log_{\frac{1}{4}}x$에서

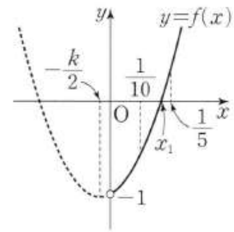
$\log_4(x+k)+\log_4 x=0$

$\log_4 x(x+k)=0$

$x^2+kx=1$

$x^2+kx-1=0$

이때 $x>0$이므로 $f(x)=x^2+kx-1\ (x>0)$이라 하자.



이차방정식 $f(x)=0$의 한 근이 x_1이므로

$f\left(\frac{1}{10}\right)<0$, $f\left(\frac{1}{5}\right)>0$

이어야 한다.

$f\left(\frac{1}{10}\right)=\left(\frac{1}{10}\right)^2+k\times\frac{1}{10}-1<0$에서

$k<\frac{99}{10}$ …… ㉠

$f\left(\frac{1}{5}\right)=\left(\frac{1}{5}\right)^2+k\times\frac{1}{5}-1>0$에서

$k>\frac{24}{5}$ …… ㉡

㉠, ㉡에서

$\frac{24}{5}<k<\frac{99}{10}$

(ii) $\log_4(x+k)=\log_2 x$에서

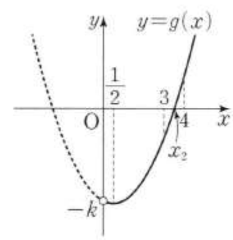
$\frac{1}{2}\log_2(x+k)=\log_2 x$

$\log_2(x+k)=\log_2 x^2$

$x+k=x^2$

$x^2-x-k=0$

이때 $x>0$이므로 $g(x)=x^2-x-k\ (x>0)$이라 하자.



이차방정식 $g(x)=0$의 한 근이 x_2이므로

$g(3)<0$, $g(4)>0$

이어야 한다.

$g(3)=3^2-3-k<0$에서

$k>6$ …… ㉢

$g(4)=4^2-4-k>0$에서

$k<12$ …… ㉣

㉢, ㉣에서

$6<k<12$

(i), (ii)에서

$6<k<\frac{99}{10}$

따라서 자연수 k는 7, 8, 9이고, 그 합은

$7+8+9=24$

답 ⑤

3 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프는 원점에 대하여 대칭이고 점 A가 직선 $y=3x$ 위의 점이므로 점 A의 좌표를 $(k, 3k)$ $(k>0)$이라 하면 점 B의 좌표는 $(-k, -3k)$이다.

한편, 두 함수 $y=f(x)$, $y=h(x)$의 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이고 두 직선 $y=3x$, $y=\frac{1}{3}x$도 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로 점 C의 좌표는 $(3k, k)$이다.

$\overline{BC}=8\sqrt{2}$, 즉 $\overline{BC}^2=128$이므로

$\{3k-(-k)\}^2+\{k-(-3k)\}^2=128$

$32k^2=128$

$k^2=4$

$k>0$이므로 $k=2$

함수 $f(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^{x-3}+a$의 그래프가 점 A(2, 6)을 지나므로

$6=\left(\frac{1}{2}\right)^{2-3}+a$

$6=2+a$

$a=4$

한편, 함수 $h(x)$는 함수 $f(x)$의 역함수이므로

$y=\left(\frac{1}{2}\right)^{x-3}+4$에서

$y-4=\left(\frac{1}{2}\right)^{x-3}$

$x-3=\log_{\frac{1}{2}}(y-4)$

$x=\log_{\frac{1}{2}}(y-4)+3$

x와 y를 서로 바꾸면

$y=\log_{\frac{1}{2}}(x-4)+3$

즉, $h(x)=\log_{\frac{1}{2}}(x-4)+3$

$f(a)=f(4)=\left(\frac{1}{2}\right)^{4-3}+4=\frac{9}{2}$

$g\left(-\frac{a}{2}\right)=g(-2)=-2^{-2+3}-4=-6$

$h(2a)=h(8)=\log_{\frac{1}{2}}(8-4)+3=-2+3=1$

따라서 $f(a)+g\left(-\frac{a}{2}\right)+h(2a)=\frac{9}{2}+(-6)+1=-\frac{1}{2}$

답 ④

참고

함수 $f(x)$의 역함수 $h(x)$를 구하지 않고 역함수의 성질을 이용하여 $h(2a)$의 값을 구할 수 있다.

함수 $h(x)$는 함수 $f(x)$의 역함수이므로

$h(2a)=b$라 하면 $f(b)=2a$이다.

즉, $\left(\frac{1}{2}\right)^{b-3}+4=8$이므로

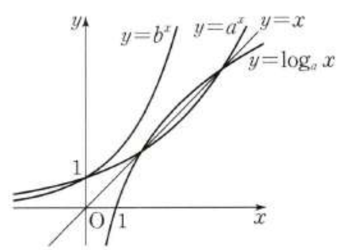
$2^{-b+3}=2^2$

$-b+3=2$, $b=1$

따라서 $h(2a)=1$

4 함수 $y=\log_a x$의 그래프와 직선 $y=x$가 서로 다른 두 점에서 만나므로 함수 $y=\log_a x$의 역함수 $y=a^x$의 그래프와 직선 $y=x$는 서로 다른 두 점에서 만난다.

한편, 함수 $y=b^x$의 그래프와 직선 $y=x$는 만나지 않으므로 $1<a<b$이다.



$0<\frac{a}{b}<1$이므로 함수 $f(x)=\left(\frac{a}{b}\right)^x$의 그래프는 x의 값이 증가하면 y의 값은 감소한다.

함수 $f(x)=\left(\frac{a}{b}\right)^x$은 $x=-1$일 때 최댓값 4를 가지므로

$\left(\frac{a}{b}\right)^{-1}=4$, 즉 $\frac{a}{b}=\frac{1}{4}$

함수 $f(x)=\left(\frac{a}{b}\right)^x$은 $x=2$일 때 최솟값을 갖는다.

따라서 구하는 최솟값은

$f(2)=\left(\frac{a}{b}\right)^2=\left(\frac{1}{4}\right)^2=\frac{1}{16}$

답 ①

5 부등식 $\left(\frac{1}{3}\right)^{f(x)g(x)}<\left(\frac{1}{81}\right)^{g(x)}$에서

$\left(\frac{1}{3}\right)^{f(x)g(x)}<\left(\frac{1}{3}\right)^{4g(x)}$

밑 $\frac{1}{3}$이 $0<\frac{1}{3}<1$이므로

$f(x)g(x)>4g(x)$

$\{f(x)-4\}g(x)>0$

$f(x)>4$, $g(x)>0$ 또는 $f(x)<4$, $g(x)<0$

(i) $f(x)>4$, $g(x)>0$일 때

$f(x)>4$에서 $x>3$ …… ㉠

$g(x)>0$에서 $x<9$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 $3<x<9$

(ii) $f(x)<4$, $g(x)<0$일 때

$f(x)<4$에서 $x<3$ …… ㉢

$g(x)<0$에서 $x>9$ …… ㉣

㉢, ㉣을 동시에 만족시키는 x의 값은 존재하지 않는다.

(i), (ii)에서 $3<x<9$

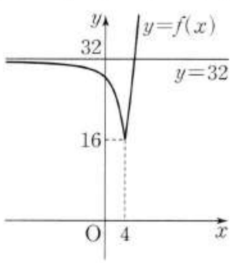
따라서 정수 x는 4, 5, 6, 7, 8이고, 그 합은

$4+5+6+7+8=30$

답 30

6 함수 $y=-2^x+32$의 그래프는 함수 $y=2^x$의 그래프를 x축에 대하여 대칭이동한 후, 다시 y축의 방향으로 32만큼 평행이동한 것이다.

함수 $y=-2^x+32$의 그래프의 점근선은 직선 $y=32$이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 그림과 같다.



$\{\log f(x)\}^2-\log\{n(n+10)\}\times\log f(x)$
$+\log n\times\log(n+10)=0$

에서

$\{\log f(x)-\log n\}\{\log f(x)-\log(n+10)\}=0$

$\log f(x)=\log n$ 또는 $\log f(x)=\log(n+10)$

$f(x)=n$ 또는 $f(x)=n+10$

(i) $n<16$일 때

$16<n+10<32$이면 주어진 방정식의 서로 다른 실근의 개수가 2이다.

즉, $16<n+10<32$에서 $6<n<22$

따라서 $6<n<16$이므로 자연수 n은 7, 8, 9, …, 15이고, 그 개수는 9이다.

(ii) $n=16$일 때

주어진 방정식의 서로 다른 실근의 개수가 3이므로 주어진 조건을 만족시키지 않는다.

(iii) $16<n<32$일 때

주어진 방정식의 서로 다른 실근의 개수는 3 이상이므로 주어진 조건을 만족시키지 않는다.

(iv) $n\geq32$일 때

$n+10\geq42>32$이므로 주어진 방정식의 서로 다른 실근의 개수는 2이다.

이때 $n\leq50$이므로

$32\leq n\leq50$

따라서 자연수 n은 32, 33, 34, …, 50이고, 그 개수는 19이다.

(i)~(iv)에서 구하는 자연수 n의 개수는

$9+19=28$

답 ④

7 부등식 $x^2-x\log_2 4n+\log_2 n^2\leq0$에서

$x^2-x(2+\log_2 n)+2\log_2 n\leq0$

$(x-2)(x-\log_2 n)\leq0$

(i) $1\leq n<4$일 때

$0\leq\log_2 n<2$이므로

$\log_2 n\leq x\leq2$

주어진 부등식을 만족시키는 정수 x의 개수는 3 이하이다.

(ii) $n=4$일 때

$(x-2)^2\leq0$

$x=2$

주어진 부등식을 만족시키는 정수 x의 개수는 1이다.

(iii) $n>4$일 때

$\log_2 n>2$이므로 $2\leq x\leq\log_2 n$

부등식을 만족시키는 정수 x의 개수가 4이므로

$5\leq\log_2 n<6$

$32\leq n<64$

(i), (ii), (iii)에서

$32\leq n<64$

따라서 구하는 자연수 n의 개수는 32이다.

답 ③

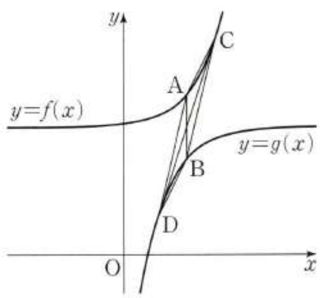
Level **3** **실력** 완성 본문 34쪽

1 ② **2** 11 **3** ③

1 $\mathrm{P}(k,\ 3^{k-2}+4)$, $\mathrm{Q}(k,\ -3^{-k+2}+4)$이므로

$\overline{\mathrm{PQ}}=3^{k-2}+3^{-k+2}\geq2\sqrt{3^{k-2}\times3^{-k+2}}=2$

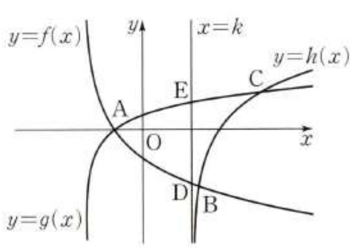
(단, 등호는 $3^{k-2}=3^{-k+2}$, 즉 $k=2$일 때 성립한다.)



이때 A(2, 5), B(2, 3)이므로 선분 AB의 중점을 M이라 하면 M(2, 4)이다.
두 상수 c, d에 대하여
$C(c,\ 3^{c-2}+4)\ (c>2)$, $D(d,\ -3^{-d+2}+4)$라 하면
조건 (가)에서
$\frac{c+d}{2}=2$, 즉 $c+d=4$ …… ㉠
직선 CD의 기울기와 직선 CM의 기울기가 같으므로
조건 (나)에서
$\frac{(3^{c-2}+4)-4}{c-2}=\frac{3}{2}\times\frac{(3^{c-2}+4)-5}{c-2}$
$3^{c-2}=\frac{3}{2}(3^{c-2}-1)$
$\frac{3^{c-2}}{2}=\frac{3}{2}$
$c-2=1$, $c=3$
$c=3$을 ㉠에 대입하면
$3+d=4$에서 $d=1$
이므로 C(3, 7), D(1, 1)이다.
따라서
(사각형 ADBC의 넓이)
=(삼각형 ADB의 넓이)+(삼각형 ACB의 넓이)
$=\frac{1}{2}\times2\times1+\frac{1}{2}\times2\times1$
$=2$

답 ②

2



함수 $h(x)=\log_2(x-k)$의 그래프의 점근선은 직선 $x=k$이므로
$D(k,\ \log_{\frac{1}{2}}(k+2))$, $E(k,\ \log_4(k+2))$
$\overline{DE}=\log_4(k+2)-\log_{\frac{1}{2}}(k+2)$
$=\frac{1}{2}\log_2(k+2)+\log_2(k+2)$
$=\frac{3}{2}\log_2(k+2)$
이므로
$\frac{3}{2}\log_2(k+2)=\frac{3}{2}\log_2\frac{15}{4}$
$k+2=\frac{15}{4}$, $k=\frac{7}{4}$
두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프의 교점 A의 x좌표를 구해 보자.
$f(x)=g(x)$에서
$\log_{\frac{1}{2}}(x+2)=\log_4(x+2)$
$-\log_2(x+2)=\frac{1}{2}\log_2(x+2)$
$\frac{3}{2}\log_2(x+2)=0$
$x+2=1$, $x=-1$
즉, 점 A의 x좌표는 -1이다.
두 함수 $y=f(x)$, $y=h(x)$의 그래프의 교점 B의 x좌표를 구해 보자.
$f(x)=h(x)$에서
$\log_{\frac{1}{2}}(x+2)=\log_2\left(x-\frac{7}{4}\right)$
$-\log_2(x+2)=\log_2\left(x-\frac{7}{4}\right)$
$\log_2(x+2)\left(x-\frac{7}{4}\right)=0$
$(x+2)\left(x-\frac{7}{4}\right)=1$
$4x^2+x-18=0$
$(4x+9)(x-2)=0$
$x>\frac{7}{4}$이므로 $x=2$
즉, 점 B의 x좌표는 2이다.
두 함수 $y=g(x)$, $y=h(x)$의 그래프의 교점 C의 x좌표를 구해 보자.
$g(x)=h(x)$에서
$\log_4(x+2)=\log_2\left(x-\frac{7}{4}\right)$
$\log_4(x+2)=\log_4\left(x-\frac{7}{4}\right)^2$
$x+2=\left(x-\frac{7}{4}\right)^2$
$16x^2-72x+17=0$
$(4x-1)(4x-17)=0$

$x>\frac{7}{4}$이므로 $x=\frac{17}{4}$

즉, 점 C의 x좌표는 $\frac{17}{4}$이다.

그러므로 삼각형 ABC의 무게중심의 x좌표는

$$\frac{-1+2+\frac{17}{4}}{3}=\frac{7}{4}$$

따라서 $p=4$, $q=7$이므로

$p+q=4+7=11$

답 11

3 ㄱ. $f(4)=\left(\frac{1}{2}\right)^2+3=\frac{13}{4}$, $g(4)=\log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{4}=2$

이므로 $f(4)>g(4)$이다.

즉, $x_1<4$이다.

또 $f(3)=\left(\frac{1}{2}\right)^1+3=\frac{7}{2}$이고

함수 $y=g(x)$의 그래프의 점근선은 직선 $x=3$이므로

$x_1>3$이다.

따라서 $3<x_1<4$ (참)

ㄴ. $g(x)=\log_{\frac{1}{2}}\frac{x-3}{4}=\log_{\frac{1}{2}}(x-3)+2$

이므로 함수 $g(x)$는 함수 $f(x)$의 역함수이다.

함수 $y=f(x)$의 그래프와 함수 $y=g(x)$의 그래프는

직선 $y=x$에 대하여 대칭이고

두 점 B, C가 원 $x^2+y^2=49$ 위의 점이므로

점 B와 점 C도 직선 $y=x$에 대하여 대칭이다.

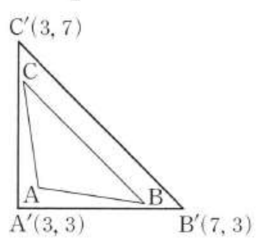
직선 BC와 직선 $y=x$는 서로 수직이므로

$\frac{y_3-y_2}{x_3-x_2}=-1$, 즉 $x_3-x_2=y_2-y_3$이다. (참)

ㄷ. 세 점 A′(3, 3), B′(7, 3), C′(3, 7)에 대하여

삼각형 A′B′C′의 넓이는

$\frac{1}{2}\times\overline{A'B'}\times\overline{A'C'}=\frac{1}{2}\times4\times4=8$



(삼각형 ABC의 넓이)<(삼각형 A′B′C′의 넓이)이므로

(삼각형 ABC의 넓이)<8 (거짓)

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

답 ③

03 삼각함수

유제

본문 37~45쪽

1 ⑤	**2** 150	**3** ②	**4** ⑤	**5** 2
6 26	**7** ④	**8** 40	**9** 20	**10** ②

1 $\angle DAB=\theta$라 하면 호 BD의 길이 l_1은

$l_1=6\theta$

마름모의 성질에 의하여

$\angle DAB+\angle ABC=\pi$

즉, $\angle ABC=\pi-\theta$이므로 호 AC의 길이 l_2는

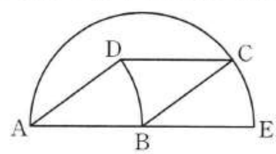
$l_2=6(\pi-\theta)$

따라서 $l_1+l_2=6\theta+6(\pi-\theta)=6\pi$

답 ⑤

다른 풀이

중심이 B이고 선분 AB가 반지름인 원과 선분 AB의 연장선이 만나는 점을 E라 하면 두 부채꼴 ABD, BEC는 같은 부채꼴이므로 호 BD의 길이와 호 EC의 길이는 서로 같다.



즉, 호 BD와 호 AC의 길이의 합은 호 EC와 호 AC의 길이의 합과 같으므로 호 AE의 길이와 같다.

따라서 $l_1+l_2=6\pi$

2 부채꼴의 호의 길이를 l이라 하면 부채꼴의 둘레의 길이는 $2r+l$이고, 조건 (가)에서 부채꼴의 둘레의 길이가 $\frac{7}{2}r$와 같으므로

$2r+l=\frac{7}{2}r$에서 $l=\frac{3}{2}r$

이때 $l=r\theta$이므로 $r\theta=\frac{3}{2}r$에서 $\theta=\frac{3}{2}$

부채꼴의 넓이는

$\frac{1}{2}rl=\frac{1}{2}r\times\frac{3}{2}r=\frac{3}{4}r^2$

이고, 조건 (나)에서 부채꼴의 넓이가 27이므로

$\frac{3}{4}r^2=27$에서 $r^2=36$

$r>0$이므로 $r=6$

따라서 $20(r+\theta)=20\left(6+\frac{3}{2}\right)=20\times\frac{15}{2}=150$

답 150

3 $\frac{1}{\sin^2\theta}+\frac{1}{\cos^2\theta}-2=\left(\frac{1}{\sin^2\theta}-1\right)+\left(\frac{1}{\cos^2\theta}-1\right)$

$=\frac{1-\sin^2\theta}{\sin^2\theta}+\frac{1-\cos^2\theta}{\cos^2\theta}$

$=\left(\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\right)^2+\left(\frac{\sin\theta}{\cos\theta}\right)^2$

$=\left(\frac{1}{\tan\theta}\right)^2+\tan^2\theta$

$=\left(\frac{1}{2}\right)^2+2^2$

$=\frac{17}{4}$

답 ②

다른 풀이

$\tan\theta=2>0$이므로 θ는 제1사분면 또는 제3사분면의 각이다.

좌표평면에서 원점 O와 점 P에 대하여 동경 OP가 나타내는 각의 크기를 θ라 하자.

(i) θ가 제1사분면의 각일 때

P$(a, 2a)$ $(a>0)$으로 놓을 수 있다.

이때 $\overline{\text{OP}}=\sqrt{a^2+(2a)^2}=\sqrt{5}a$이므로

$\sin\theta=\frac{2a}{\sqrt{5}a}=\frac{2}{\sqrt{5}}$, $\cos\theta=\frac{a}{\sqrt{5}a}=\frac{1}{\sqrt{5}}$

따라서 $\frac{1}{\sin^2\theta}+\frac{1}{\cos^2\theta}-2=\frac{5}{4}+5-2=\frac{17}{4}$

(ii) θ가 제3사분면의 각일 때

P$(a, 2a)$ $(a<0)$으로 놓을 수 있다.

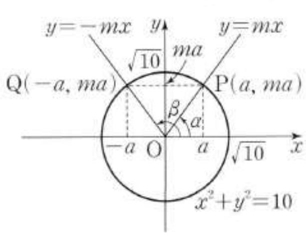
이때 $\overline{\text{OP}}=\sqrt{a^2+(2a)^2}=-\sqrt{5}a$이므로

$\sin\theta=\frac{2a}{-\sqrt{5}a}=-\frac{2}{\sqrt{5}}$, $\cos\theta=\frac{a}{-\sqrt{5}a}=-\frac{1}{\sqrt{5}}$

따라서 $\frac{1}{\sin^2\theta}+\frac{1}{\cos^2\theta}-2=\frac{5}{4}+5-2=\frac{17}{4}$

(i), (ii)에서 $\frac{1}{\sin^2\theta}+\frac{1}{\cos^2\theta}-2=\frac{17}{4}$

4 $m>0$이므로 $y=|mx|=\begin{cases}-mx\ (x<0)\\ mx\ (x\geq 0)\end{cases}$



P(a, ma), Q$(-a, ma)$ $(a>0)$이라 하면

$\overline{\text{OP}}=\sqrt{a^2+(ma)^2}=a\sqrt{1+m^2}$

$\overline{\text{OQ}}=\sqrt{(-a)^2+(ma)^2}=a\sqrt{1+m^2}$

이므로

$\sin\alpha=\frac{ma}{a\sqrt{1+m^2}}=\frac{m}{\sqrt{1+m^2}}$

$\cos\beta=\frac{-a}{a\sqrt{1+m^2}}=-\frac{1}{\sqrt{1+m^2}}$

이때

$\sin\alpha\times\cos\beta=\frac{m}{\sqrt{1+m^2}}\times\left(-\frac{1}{\sqrt{1+m^2}}\right)=-\frac{m}{1+m^2}$

이므로 $-\frac{m}{1+m^2}=-\frac{2}{5}$에서

$5m=2(1+m^2)$

$2m^2-5m+2=0$

$(2m-1)(m-2)=0$

$m=\frac{1}{2}$ 또는 $m=2$

따라서 서로 다른 모든 m의 값의 합은

$\frac{1}{2}+2=\frac{5}{2}$

답 ⑤

5 함수 $y=a\cos bx$의 그래프를 x축의 방향으로 $\frac{\pi}{6}$만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동하면

$y=a\cos b\left(x-\frac{\pi}{6}\right)+1$

즉, $f(x)=a\cos b\left(x-\frac{\pi}{6}\right)+1$

이때 함수 $f(x)$의 주기는 $\frac{2\pi}{b}$이고 최댓값은 $a+1$이므로

$\frac{2\pi}{b}=8\pi$, $a+1=3$에서

$a=2$, $b=\frac{1}{4}$

따라서 $f(x)=2\cos\frac{1}{4}\left(x-\frac{\pi}{6}\right)+1$이므로

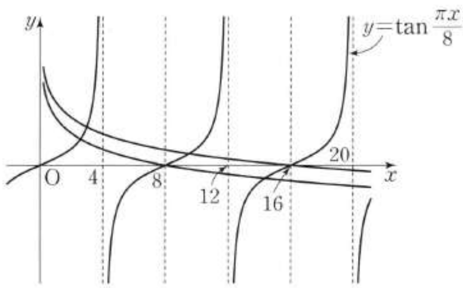
$f\left(\frac{3}{2}\pi\right)=2\cos\frac{1}{4}\left(\frac{3}{2}\pi-\frac{\pi}{6}\right)+1=2\cos\frac{\pi}{3}+1$

$=2\times\frac{1}{2}+1=2$

답 2

6 함수 $y=\tan\frac{\pi x}{8}$의 주기가 $\frac{\pi}{\frac{\pi}{8}}=8$이므로

함수 $y=\tan\frac{\pi x}{8}$의 그래프는 그림과 같다.



$a>0$이고, 함수 $y=\log_{\frac{1}{2}}\frac{x}{a}+1$에서 밑이 $\frac{1}{2}$이므로 두 함수 $y=\tan\frac{\pi x}{8}$, $y=\log_{\frac{1}{2}}\frac{x}{a}+1$의 그래프가 제1사분면에서 만나는 점의 개수가 2가 되려면 함수 $y=\log_{\frac{1}{2}}\frac{x}{a}+1$의 그래프와 x축의 교점의 x좌표가 8보다 크고 16보다 작거나 같아야 한다.

즉, $f(x)=\log_{\frac{1}{2}}\frac{x}{a}+1$이라 할 때, $f(8)>0$, $f(16)\le 0$을 만족시켜야 한다.

(i) $f(8)=\log_{\frac{1}{2}}\frac{8}{a}+1>0$일 때

$\log_{\frac{1}{2}}\frac{8}{a}>-1$

$\log_{\frac{1}{2}}\frac{8}{a}>\log_{\frac{1}{2}}2$

밑 $\frac{1}{2}$이 $0<\frac{1}{2}<1$이므로

$\frac{8}{a}<2$

$a>4$

(ii) $f(16)=\log_{\frac{1}{2}}\frac{16}{a}+1\le 0$일 때

$\log_{\frac{1}{2}}\frac{16}{a}\le -1$

$\log_{\frac{1}{2}}\frac{16}{a}\le\log_{\frac{1}{2}}2$

밑 $\frac{1}{2}$이 $0<\frac{1}{2}<1$이므로

$\frac{16}{a}\ge 2$

$0<a\le 8$

(i), (ii)에서 두 함수 $y=\tan\frac{\pi x}{8}$, $y=\log_{\frac{1}{2}}\frac{x}{a}+1$의 그래프가 제1사분면에서 만나는 점의 개수가 2가 되도록 하는 a의 값의 범위는 $4<a\le 8$이므로 자연수 a는 5, 6, 7, 8이고, 그 합은

$5+6+7+8=26$

답 26

7 $\cos\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)=-\sin\theta=\frac{2}{3}$에서 $\sin\theta=-\frac{2}{3}$

$\cos(\pi-\theta)=-\cos\theta<0$에서 $\cos\theta>0$이므로

$\cos\theta=\sqrt{1-\sin^2\theta}=\sqrt{1-\left(-\frac{2}{3}\right)^2}=\frac{\sqrt{5}}{3}$

따라서 $\tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=\frac{-\frac{2}{3}}{\frac{\sqrt{5}}{3}}=-\frac{2\sqrt{5}}{5}$

답 ④

8 모든 실수 θ에 대하여 $\sin\left(\frac{2n-1}{3}\pi-\theta\right)=\sin\theta$가 성립하려면

$\frac{2n-1}{3}\pi=(2m-1)\pi$ (m은 정수)

이어야 한다.

즉, $2n-1=3(2m-1)$이므로

$2n=6m-2$

$n=3m-1$ (m은 정수) …… ㉠

이때 n은 15 이하의 자연수이므로 ㉠에서 자연수 n은 2, 5, 8, 11, 14이고, 그 합은

$2+5+8+11+14=40$

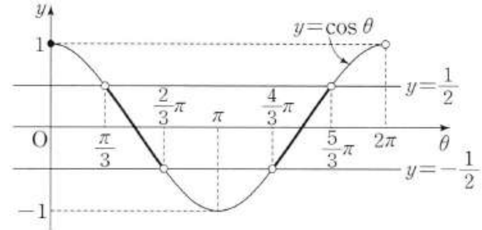
답 40

9 모든 실수 x에 대하여 부등식 $x^2+4x\cos\theta+1>0$이 성립하려면 x에 대한 이차방정식 $x^2+4x\cos\theta+1=0$의 판별식을 D라 할 때, $D<0$이어야 하므로

$\frac{D}{4}=4\cos^2\theta-1<0$

$(2\cos\theta-1)(2\cos\theta+1)<0$

$-\frac{1}{2}<\cos\theta<\frac{1}{2}$ …… ㉠



$0\le\theta<2\pi$일 때,

방정식 $\cos\theta=-\frac{1}{2}$의 해는 $\theta=\frac{2}{3}\pi$ 또는 $\theta=\frac{4}{3}\pi$

방정식 $\cos\theta=\frac{1}{2}$의 해는 $\theta=\frac{\pi}{3}$ 또는 $\theta=\frac{5}{3}\pi$

이때 부등식 ㉠의 해는 함수 $y=\cos\theta$의 그래프가 직선 $y=-\frac{1}{2}$보다 위쪽에 있고 직선 $y=\frac{1}{2}$보다 아래쪽에 있는 θ의 값의 범위이므로

$\frac{\pi}{3}<\theta<\frac{2}{3}\pi$ 또는 $\frac{4}{3}\pi<\theta<\frac{5}{3}\pi$

따라서 $a=\frac{\pi}{3}$, $b=\frac{2}{3}\pi$, $c=\frac{4}{3}\pi$, $d=\frac{5}{3}\pi$이므로

$\frac{12}{\pi}(a+c)=\frac{12}{\pi}\left(\frac{\pi}{3}+\frac{4}{3}\pi\right)=\frac{12}{\pi}\times\frac{5}{3}\pi=20$

답 20

10 함수 $y=\sin 2x$의 그래프를 x축의 방향으로 $\frac{\pi}{4}$만큼 평행이동하면

$y=\sin 2\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\sin\left(2x-\frac{\pi}{2}\right)=-\cos 2x$

이므로

$g(x)=-\cos 2x$

방정식 $\{f(x)\}^2=\frac{3}{2}g(x)$에서

$\sin^2 2x=-\frac{3}{2}\cos 2x$

$1-\cos^2 2x=-\frac{3}{2}\cos 2x$

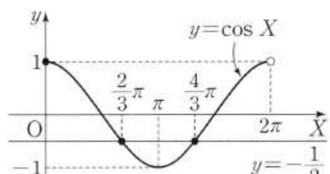
$2\cos^2 2x-3\cos 2x-2=0$

$(2\cos 2x+1)(\cos 2x-2)=0$ …… ㉠

$0\le x<\pi$, 즉 $0\le 2x<2\pi$일 때, $\cos 2x-2<0$이므로

㉠에서 $2\cos 2x+1=0$

$\cos 2x=-\frac{1}{2}$



이때 $2x=X$라 하면 $0\le X<2\pi$이고,

$\cos X=-\frac{1}{2}$이므로

$X=\frac{2}{3}\pi$ 또는 $X=\frac{4}{3}\pi$

즉, $2x=\frac{2}{3}\pi$ 또는 $2x=\frac{4}{3}\pi$이므로

$x=\frac{\pi}{3}$ 또는 $x=\frac{2}{3}\pi$

따라서 주어진 방정식을 만족시키는 서로 다른 모든 실수 x의 값의 합은

$\frac{\pi}{3}+\frac{2}{3}\pi=\pi$

답 ②

Level 1 기초 연습

본문 46~47쪽

1 ⑤	2 ①	3 ④	4 ②	5 ①
6 ④	7 ④	8 ②		

1 $70^\circ=70\times1^\circ=70\times\frac{\pi}{180}=\frac{7}{18}\pi$

$\frac{2}{5}\pi=\frac{2}{5}\pi\times1=\frac{2}{5}\pi\times\frac{180^\circ}{\pi}=72^\circ$

따라서 $a=\frac{7}{18}$, $b=72$이므로

$ab=\frac{7}{18}\times72=28$

답 ⑤

2 $\sin\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\cos\frac{2}{3}\pi=\cos\left(\pi-\frac{\pi}{3}\right)=-\cos\frac{\pi}{3}=-\frac{1}{2}$

$\tan\frac{4}{3}\pi=\tan\left(\pi+\frac{\pi}{3}\right)=\tan\frac{\pi}{3}=\sqrt{3}$

따라서

$\sin\frac{\pi}{3}\times\cos\frac{2}{3}\pi\times\tan\frac{4}{3}\pi=\frac{\sqrt{3}}{2}\times\left(-\frac{1}{2}\right)\times\sqrt{3}=-\frac{3}{4}$

답 ①

3 점 $\mathrm{P}(a,\ 2\sqrt{a+1})$에 대하여

$\overline{\mathrm{OP}}=\sqrt{a^2+(2\sqrt{a+1})^2}$

$=\sqrt{a^2+4a+4}$

$=\sqrt{(a+2)^2}$

$=a+2$

이므로 $\cos\theta=\frac{a}{a+2}$

따라서 $\frac{a}{a+2}=\frac{3}{4}$에서

$4a=3(a+2)$

$a=6$

답 ④

4 $a>0$, $b>0$이므로

함수 $y=\cos\frac{ax}{3}$의 주기는 $\frac{2\pi}{\frac{a}{3}}=\frac{6}{a}\pi$이고,

함수 $y=\tan\frac{4x}{b}$의 주기는 $\frac{\pi}{\frac{4}{b}}=\frac{b}{4}\pi$이다.

두 함수 $y=\cos\frac{ax}{3}$, $y=\tan\frac{4x}{b}$의 주기가 서로 같으므로

$\frac{6}{a}\pi=\frac{b}{4}\pi$에서 $ab=24$ ...... ㉠

이때 a, b는 자연수이므로 ㉠을 만족시키는 순서쌍 (a, b)는

$(1, 24)$, $(2, 12)$, $(3, 8)$, $(4, 6)$, $(6, 4)$, $(8, 3)$, $(12, 2)$, $(24, 1)$

따라서 $a+b$의 최솟값은 순서쌍 (a, b)가 $(4, 6)$ 또는 $(6, 4)$인 경우이므로 10이다.

답 ②

5 $\sin\theta<0$, $\tan\theta>0$을 만족시키는 θ는 제3사분면의 각이므로 $\cos\theta<0$이다.

따라서

$$\cos\theta=-\sqrt{1-\sin^2\theta}$$
$$=-\sqrt{1-\left(-\frac{1}{4}\right)^2}$$
$$=-\frac{\sqrt{15}}{4}$$

답 ①

6 $0\le x<2\pi$일 때, 부등식 $\tan x>0$을 만족시키는 실수 x의 값의 범위는

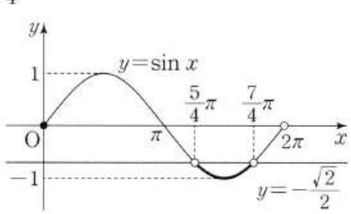
$0<x<\frac{\pi}{2}$ 또는 $\pi<x<\frac{3}{2}\pi$ ...... ㉠

$0\le x<2\pi$일 때, 부등식 $\sqrt{2}\sin x+1<0$, 즉

$\sin x<-\frac{\sqrt{2}}{2}$의 해는 함수 $y=\sin x$의 그래프가 직선

$y=-\frac{\sqrt{2}}{2}$보다 아래쪽에 있는 x의 값의 범위이므로

$\frac{5}{4}\pi<x<\frac{7}{4}\pi$ ...... ㉡



㉠, ㉡의 공통인 범위를 구하면

$\frac{5}{4}\pi<x<\frac{3}{2}\pi$

따라서 $\alpha=\frac{5}{4}\pi$, $\beta=\frac{3}{2}\pi$이므로

$\alpha+\beta=\frac{5}{4}\pi+\frac{3}{2}\pi=\frac{11}{4}\pi$

답 ④

7 $x=\frac{\pi}{6}$가 방정식 $2\cos^2x+a\sin x-1=0$의 근이므로

$2\cos^2\frac{\pi}{6}+a\sin\frac{\pi}{6}-1=0$

$2\times\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2+a\times\frac{1}{2}-1=0$

$\frac{1}{2}+\frac{1}{2}a=0$

$a=-1$

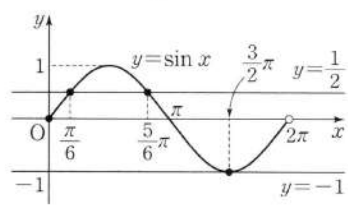
방정식 $2\cos^2x-\sin x-1=0$에서

$2(1-\sin^2x)-\sin x-1=0$

$2\sin^2x+\sin x-1=0$

$(\sin x+1)(2\sin x-1)=0$

$\sin x=-1$ 또는 $\sin x=\frac{1}{2}$



$0\le x<2\pi$일 때,

방정식 $\sin x=-1$의 해는 $x=\frac{3}{2}\pi$

방정식 $\sin x=\frac{1}{2}$의 해는 $x=\frac{\pi}{6}$ 또는 $x=\frac{5}{6}\pi$

따라서 $\alpha=\frac{5}{6}\pi$, $\beta=\frac{3}{2}\pi$이므로

$\alpha\beta=\frac{5}{6}\pi\times\frac{3}{2}\pi=\frac{5}{4}\pi^2$

답 ④

8 $\overline{AP}=x$라 하면 $\overline{PB}=\overline{QC}=12-x$이고,

$\angle A=\angle B=\angle C=\frac{\pi}{3}$이므로 호 PQ의 길이는 $\frac{\pi}{3}x$이고,

호 PR와 호 QS의 길이는 모두 $\frac{\pi}{3}(12-x)$이다.

이때 세 호 PQ, PR, QS의 길이의 합이 $\frac{17}{3}\pi$이므로

$\frac{\pi}{3}x+2\times\frac{\pi}{3}(12-x)=\frac{17}{3}\pi$

$x+2(12-x)=17$

$x=7$

따라서 선분 AP의 길이는 7이다.

답 ②

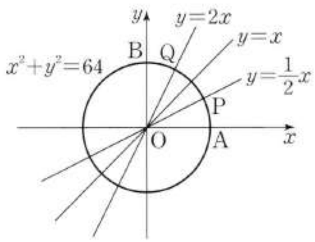
Level 2 기본 연습

본문 48~50쪽

1 4	2 ①	3 ④	4 12	5 ⑤
6 ③	7 ④	8 ④	9 ②	10 ③
11 11	12 113			

1 두 함수 $y=\frac{1}{2}x$, $y=2x$는 서로 역함수 관계에 있으므로

두 함수 $y=\frac{1}{2}x$, $y=2x$의 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이다.



이때 점 B(0, 8)에 대하여 호 AP의 길이와 호 BQ의 길이는 서로 같으므로

(호 AQ의 길이)=(호 AB의 길이)−(호 BQ의 길이)

$=8\times\frac{\pi}{2}-$(호 AP의 길이)

$=4\pi-$(호 AP의 길이)

따라서 $l_2=4\pi-l_1$에서 $l_1+l_2=4\pi$이므로

$\frac{l_1+l_2}{\pi}=\frac{4\pi}{\pi}=4$

답 4

참고

두 부채꼴 OAP, OBQ는 같은 부채꼴이므로 호 AP와 호 BQ의 길이가 같다.

2 $\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)+\cos(-\theta)=\cos\theta+\cos\theta=2\cos\theta$

이므로

$2\cos\theta=\frac{4}{3}$에서 $\cos\theta=\frac{2}{3}$

따라서

$\frac{\sin\theta}{\cos^2\theta}-\frac{1}{1-\sin\theta}$

$=\frac{(1-\sin\theta)\sin\theta}{(1-\sin\theta)\cos^2\theta}-\frac{\cos^2\theta}{(1-\sin\theta)\cos^2\theta}$

$=\frac{\sin\theta-(\sin^2\theta+\cos^2\theta)}{(1-\sin\theta)\cos^2\theta}$

$=\frac{-(1-\sin\theta)}{(1-\sin\theta)\cos^2\theta}$

$=-\frac{1}{\cos^2\theta}$

$=-\frac{1}{\left(\frac{2}{3}\right)^2}$

$=-\frac{9}{4}$

답 ①

3 함수 $y=2\sin 3x$의 그래프를 x축의 방향으로 $-\frac{\pi}{3}$만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동하면

$y=2\sin 3\left(x+\frac{\pi}{3}\right)+1$

$=2\sin(3x+\pi)+1$

$=-2\sin 3x+1$

즉, $f(x)=-2\sin 3x+1$이므로

$f\left(\frac{\pi}{6}\right)=-2\sin\frac{\pi}{2}+1=-2\times1+1=-1$

$f\left(\frac{\pi}{2}\right)=-2\sin\frac{3}{2}\pi+1=-2\times(-1)+1=3$

따라서 두 점 $\left(\frac{\pi}{6}, -1\right)$, $\left(\frac{\pi}{2}, 3\right)$을 지나는 직선의 기울기는

$\frac{3-(-1)}{\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{6}}=\frac{4}{\frac{\pi}{3}}=\frac{12}{\pi}$

답 ④

4 함수 $y=3\tan\frac{\pi x}{8}$의 주기는 $\frac{\pi}{\frac{\pi}{8}}=8$이고,

$x=-2$일 때,

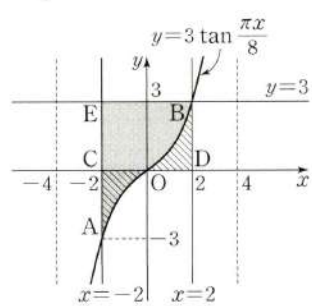
$y=3\tan\left(-\frac{\pi}{4}\right)=-3\tan\frac{\pi}{4}=-3$

$y=3$일 때,

$3=3\tan\frac{\pi x}{8}$, $\tan\frac{\pi x}{8}=1$

$-4<x<4$이므로 $\frac{\pi x}{8}=\frac{\pi}{4}$에서 $x=2$

함수 $y=3\tan\frac{\pi x}{8}$ $(-4<x<4)$의 그래프는 그림과 같다.



두 점 A$(-2,\ -3)$, B$(2,\ 3)$은 원점에 대하여 대칭이고, 함수 $y=3\tan\frac{\pi x}{8}$의 그래프도 원점에 대하여 대칭이므로

함수 $y=3\tan\frac{\pi x}{8}\ (-4<x<4)$의 그래프와 x축 및 직선 $x=-2$로 둘러싸인 부분의 넓이를 S,

함수 $y=3\tan\frac{\pi x}{8}\ (-4<x<4)$의 그래프와 x축 및 직선 $x=2$로 둘러싸인 부분의 넓이를 T라 하면 $S=T$이다.

따라서 세 점 C$(-2,\ 0)$, D$(2,\ 0)$, E$(-2,\ 3)$에 대하여

함수 $y=3\tan\frac{\pi x}{8}\ (-4<x<4)$의 그래프와 두 직선 $x=-2$, $y=3$으로 둘러싸인 부분의 넓이는 직사각형 CDBE의 넓이와 같으므로 구하는 넓이는

$4\times3=12$

답 12

5 조건 (가)에서 함수 $f(x)=\tan(ax+b)$의 주기가 $\frac{\pi}{2}$이므로

$\frac{\pi}{a}=\frac{\pi}{2}$에서 $a=2$

함수 $y=\tan 2x$의 그래프의 점근선의 방정식은

$2x=n\pi+\frac{\pi}{2}$ (n은 정수)에서

$x=\frac{n}{2}\pi+\frac{\pi}{4}$

함수 $f(x)=\tan(2x+b)=\tan 2\left(x+\frac{b}{2}\right)$의 그래프는

함수 $y=\tan 2x$의 그래프를 x축의 방향으로

$-\frac{b}{2}\left(-\frac{\pi}{4}<-\frac{b}{2}<0\right)$만큼 평행이동한 것이므로

함수 $f(x)=\tan(2x+b)$의 그래프의 점근선의 방정식은

$x=\frac{n}{2}\pi+\frac{\pi}{4}-\frac{b}{2}$

조건 (나)에서 함수 $y=f(x)$의 그래프와 만나지 않는 직선 $x=k$는 함수 $y=f(x)$의 그래프의 점근선이고, 양의 실수 k의 최솟값이 $\frac{\pi}{12}$이므로

$\frac{\pi}{4}-\frac{b}{2}=\frac{\pi}{12}$에서 $b=\frac{\pi}{3}$

따라서 $f(x)=\tan\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$이므로

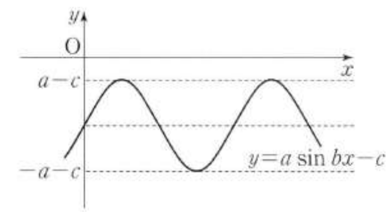
$f\left(-\frac{\pi}{24}\right)=\tan\left(-\frac{\pi}{12}+\frac{\pi}{3}\right)=\tan\frac{\pi}{4}=1$

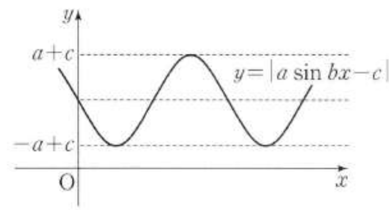
답 ⑤

6 함수 $y=|a\sin bx-c|$의 최솟값이 양수이므로

함수 $y=a\sin bx-c$의 그래프는 x축과 만나지 않는다.

또한 함수 $y=a\sin bx-c$의 그래프는 함수 $y=a\sin bx$의 그래프를 y축의 방향으로 $-c$만큼 평행이동한 것이고, $-c<0$이므로 함수 $y=a\sin bx-c$의 그래프와 함수 $y=|a\sin bx-c|$의 그래프는 그림과 같다.





함수 $y=|a\sin bx-c|$의 주기가 4π이므로 함수 $y=a\sin bx-c$의 주기도 4π이다.

즉, $\frac{2\pi}{b}=4\pi$에서 $b=\frac{1}{2}$

함수 $y=|a\sin bx-c|$의 최댓값이 $a+c$, 최솟값이 $-a+c$이므로

$a+c=5$, $-a+c=1$

두 식을 연립하여 풀면 $a=2$, $c=3$

따라서 $abc=2\times\frac{1}{2}\times3=3$

답 ③

7 조건 (나)에서 $(x_1-x_2)^2+(y_1+y_2)^2=0$이므로

$x_1-x_2=0$, $y_1+y_2=0$

즉, $x_1=x_2$, $y_1=-y_2$이고, $x_1y_1>0$이므로 두 점 P, Q는 x축에 대하여 대칭이다.

따라서 정수 n에 대하여

$\theta_1+\theta_2=2n\pi$

이고, 조건 (가)에서 $\theta_2=\frac{1}{2}\theta_1$이므로

$\theta_1+\frac{1}{2}\theta_1=2n\pi$, $\theta_1=\frac{4n}{3}\pi$

정수 m에 대하여

$n=3m$일 때, $\theta_1=\frac{4\times3m}{3}\pi=4m\pi$

$n=3m+1$일 때, $\theta_1=\frac{4\times(3m+1)}{3}\pi=4m\pi+\frac{4}{3}\pi$

$n=3m+2$일 때, $\theta_1=\frac{4\times(3m+2)}{3}\pi=4m\pi+\frac{8}{3}\pi$

이때 $x_1y_1>0$을 만족시키는 점 P는 제1사분면 또는 제3사분면에 있는 점이므로

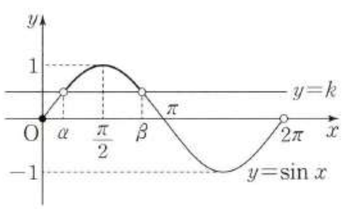
$\theta_1=4m\pi+\frac{4}{3}\pi$, $\theta_2=2m\pi+\frac{2}{3}\pi$

따라서

$$\begin{aligned}\sin\theta_2&=\sin\left(2m\pi+\frac{2}{3}\pi\right)\\&=\sin\frac{2}{3}\pi\\&=\sin\left(\pi-\frac{\pi}{3}\right)\\&=\sin\frac{\pi}{3}\\&=\frac{\sqrt{3}}{2}\end{aligned}$$

답 ④

8 $0\le x<2\pi$에서 부등식 $\sin x>k$의 해는 함수 $y=\sin x$의 그래프가 직선 $y=k$ $(0<k<1)$보다 위쪽에 있는 x의 값의 범위이므로 $0\le x<2\pi$에서 함수 $y=\sin x$의 그래프와 직선 $y=k$가 만나는 점의 x좌표가 α, β $(\alpha<\beta)$이다.



$\frac{\alpha+\beta}{2}=\frac{\pi}{2}$에서 $\alpha+\beta=\pi$ ...... ㉠

그림에서 $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{2}<\beta<\pi$이므로

$0<\beta-\alpha<\pi$

따라서 $\cos(\beta-\alpha)=\frac{1}{2}$에서 $\beta-\alpha=\frac{\pi}{3}$ ...... ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $\alpha=\frac{\pi}{3}$, $\beta=\frac{2}{3}\pi$이므로

$\alpha\beta=\frac{\pi}{3}\times\frac{2}{3}\pi=\frac{2}{9}\pi^2$

답 ④

9 함수 $f(x)=a\cos bx+c$의 그래프에서 함수 $f(x)$의 최댓값이 3, 최솟값이 -1이고, $a>0$이므로

$a+c=3$, $-a+c=-1$

두 식을 연립하여 풀면 $a=2$, $c=1$

함수 $y=2\cos bx+1$의 그래프가 x축과 만나는 점의 x좌표는 방정식 $2\cos bx+1=0$의 해와 같다.

$2\cos bx+1=0$에서 $\cos bx=-\frac{1}{2}$

이때 $0<x<\frac{2\pi}{b}$에서 $0<bx<2\pi$이므로

$bx=\frac{2}{3}\pi$ 또는 $bx=\frac{4}{3}\pi$

$x=\frac{2}{3b}\pi$ 또는 $x=\frac{4}{3b}\pi$

즉, $\mathrm{A}\left(\frac{2}{3b}\pi,\ 0\right)$, $\mathrm{B}\left(\frac{4}{3b}\pi,\ 0\right)$이므로

$\overline{\mathrm{AB}}=\frac{4}{3b}\pi-\frac{2}{3b}\pi=\frac{2}{3b}\pi$

이고, 삼각형 ABC의 넓이가 $\frac{2}{3}\pi$이므로

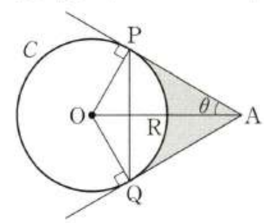
$\frac{1}{2}\times\frac{2}{3b}\pi\times1=\frac{2}{3}\pi$에서 $b=\frac{1}{2}$

따라서

$abc=2\times\frac{1}{2}\times1=1$

답 ②

10 원 C의 반지름의 길이를 r, $\angle\mathrm{OAP}=\theta$라 하자.



점 R가 선분 OA의 중점이므로 $\overline{\mathrm{OA}}=2r$

삼각형 OAP에서 $\angle\mathrm{OPA}=\frac{\pi}{2}$이므로

$\sin\theta=\frac{\overline{\mathrm{OP}}}{\overline{\mathrm{OA}}}=\frac{r}{2r}=\frac{1}{2}$

이때 $0<\theta<\frac{\pi}{2}$이므로 $\theta=\frac{\pi}{6}$, $\angle\mathrm{PAQ}=\frac{\pi}{3}$

따라서 삼각형 APQ에서 $\overline{\mathrm{AP}}=\overline{\mathrm{AQ}}$이고 $\angle\mathrm{PAQ}=\frac{\pi}{3}$이므로 삼각형 APQ는 정삼각형이다.

삼각형 APQ의 둘레의 길이가 $9\sqrt{2}$이므로

$\overline{\mathrm{AP}}=\overline{\mathrm{AQ}}=3\sqrt{2}$

$\overline{\mathrm{OP}}=\overline{\mathrm{AP}}\tan\theta=\overline{\mathrm{AP}}\tan\frac{\pi}{6}=3\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{3}}{3}=\sqrt{6}$

한편,

$\angle\mathrm{POQ}=\pi-\angle\mathrm{PAQ}=\pi-\frac{\pi}{3}=\frac{2}{3}\pi$

이므로 부채꼴 OPQ의 넓이는

$\frac{1}{2}\times(\sqrt{6})^2\times\frac{2}{3}\pi=2\pi$

또 두 직각삼각형 OPA, OQA의 넓이는 모두

$\frac{1}{2}\times\sqrt{6}\times3\sqrt{2}=3\sqrt{3}$이다.

두 선분 AP, AQ와 호 PQ로 둘러싸인 부분의 넓이는 사각형 OPAQ의 넓이에서 부채꼴 OPQ의 넓이를 뺀 값과 같으므로

$2\times3\sqrt{3}-2\pi=6\sqrt{3}-2\pi$

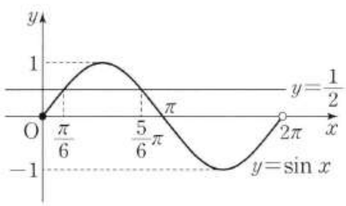
답 ③

11 부등식 $(2\sin x-1)(2\cos x-1)>0$에서

$2\sin x-1>0$, $2\cos x-1>0$ 또는

$2\sin x-1<0$, $2\cos x-1<0$

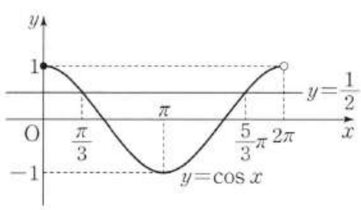
즉, $\sin x>\frac{1}{2}$, $\cos x>\frac{1}{2}$ 또는 $\sin x<\frac{1}{2}$, $\cos x<\frac{1}{2}$



$0\le x<2\pi$일 때, 함수 $y=\sin x$의 그래프와 직선 $y=\frac{1}{2}$의 교점의 x좌표는 $x=\frac{\pi}{6}$ 또는 $x=\frac{5}{6}\pi$이므로

부등식 $\sin x>\frac{1}{2}$의 해는 $\frac{\pi}{6}<x<\frac{5}{6}\pi$

부등식 $\sin x<\frac{1}{2}$의 해는 $0\le x<\frac{\pi}{6}$ 또는 $\frac{5}{6}\pi<x<2\pi$



$0\le x<2\pi$일 때, 함수 $y=\cos x$의 그래프와 직선 $y=\frac{1}{2}$의 교점의 x좌표는 $x=\frac{\pi}{3}$ 또는 $x=\frac{5}{3}\pi$이므로

부등식 $\cos x>\frac{1}{2}$의 해는 $0\le x<\frac{\pi}{3}$ 또는 $\frac{5}{3}\pi<x<2\pi$

부등식 $\cos x<\frac{1}{2}$의 해는 $\frac{\pi}{3}<x<\frac{5}{3}\pi$

(i) 두 부등식 $\sin x>\frac{1}{2}$, $\cos x>\frac{1}{2}$을 동시에 만족시키는 x의 값의 범위는

$\frac{\pi}{6}<x<\frac{\pi}{3}$

(ii) 두 부등식 $\sin x<\frac{1}{2}$, $\cos x<\frac{1}{2}$을 동시에 만족시키는 x의 값의 범위는

$\frac{5}{6}\pi<x<\frac{5}{3}\pi$

(i), (ii)에서 부등식 $(2\sin x-1)(2\cos x-1)>0$을 만족시키는 모든 x의 값의 범위는

$\frac{\pi}{6}<x<\frac{\pi}{3}$ 또는 $\frac{5}{6}\pi<x<\frac{5}{3}\pi$

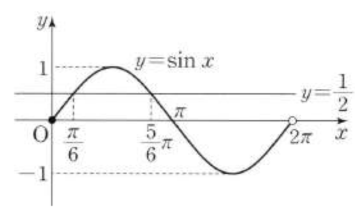
따라서 $a=\frac{\pi}{6}$, $b=\frac{\pi}{3}$, $c=\frac{5}{6}\pi$, $d=\frac{5}{3}\pi$이므로

$$\frac{6(a+d)}{\pi}=\frac{6\left(\frac{\pi}{6}+\frac{5}{3}\pi\right)}{\pi}=\frac{6\times\frac{11}{6}\pi}{\pi}=11$$

답 11

다른 풀이

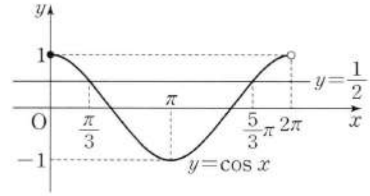
$0\le x<2\pi$에서 함수 $y=\sin x$의 그래프와 직선 $y=\frac{1}{2}$은 그림과 같다.



$0\le x<2\pi$에서 x의 값에 따른 $2\sin x-1=2\left(\sin x-\frac{1}{2}\right)$의 값의 부호는 다음 표와 같다.

x	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{6}$	$\cdots$	$\frac{5}{6}\pi$	$\cdots$	(2π)
$2\sin x-1$	$-$	$-$	0	$+$	0	$-$	

$0\le x<2\pi$에서 함수 $y=\cos x$의 그래프와 직선 $y=\frac{1}{2}$은 그림과 같다.



$0\le x<2\pi$에서 x의 값에 따른 $2\cos x-1=2\left(\cos x-\frac{1}{2}\right)$의 값의 부호는 다음 표와 같다.

x	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{3}$	$\cdots$	$\frac{5}{3}\pi$	$\cdots$	(2π)
$2\cos x-1$	$+$	$+$	0	$-$	0	$+$	

$0 \le x < 2\pi$에서 x의 값에 따른 $(2\sin x-1)(2\cos x-1)$의 값의 부호는 다음 표와 같다.

x	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{6}$	$\cdots$	$\frac{\pi}{3}$	$\cdots$	$\frac{5}{6}\pi$	$\cdots$	$\frac{5}{3}\pi$	$\cdots$	(2π)
$(2\sin x-1)(2\cos x-1)$	$-$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	

즉, 부등식 $(2\sin x-1)(2\cos x-1)>0$을 만족시키는 모든 x의 값의 범위는

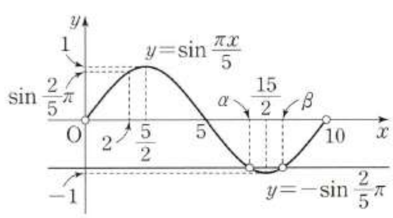
$\frac{\pi}{6}<x<\frac{\pi}{3}$ 또는 $\frac{5}{6}\pi<x<\frac{5}{3}\pi$

따라서 $a=\frac{\pi}{6}$, $b=\frac{\pi}{3}$, $c=\frac{5}{6}\pi$, $d=\frac{5}{3}\pi$이므로

$$\frac{6(a+d)}{\pi}=\frac{6\left(\frac{\pi}{6}+\frac{5}{3}\pi\right)}{\pi}=\frac{6\times\frac{11}{6}\pi}{\pi}=11$$

12 함수 $y=\sin\frac{\pi x}{5}$의 주기는 $\frac{2\pi}{\frac{\pi}{5}}=10$이므로

$0<x<10$에서 함수 $y=\sin\frac{\pi x}{5}$의 그래프는 그림과 같다.



$\sin^2\frac{\pi x}{5}-\sin\frac{\pi x}{5}-\left(\sin\frac{2}{5}\pi+1\right)\sin\frac{2}{5}\pi=0$에서

$\left(\sin\frac{\pi x}{5}-\sin\frac{2}{5}\pi-1\right)\left(\sin\frac{\pi x}{5}+\sin\frac{2}{5}\pi\right)=0$

$\sin\frac{\pi x}{5}=\sin\frac{2}{5}\pi+1$ 또는 $\sin\frac{\pi x}{5}=-\sin\frac{2}{5}\pi$

(i) $\sin\frac{\pi x}{5}=\sin\frac{2}{5}\pi+1$에서 $1<\sin\frac{2}{5}\pi+1<2$이므로 방정식 $\sin\frac{\pi x}{5}=\sin\frac{2}{5}\pi+1$을 만족시키는 실수 x의 값은 없다.

(ii) $\sin\frac{\pi x}{5}=-\sin\frac{2}{5}\pi$를 만족시키는 실수 x의 값은 함수 $y=\sin\frac{\pi x}{5}$의 그래프와 직선 $y=-\sin\frac{2}{5}\pi$의 교점의 x좌표와 같으므로 이 값이 α, β이다.

이때 함수 $y=\sin\frac{\pi x}{5}$의 그래프는 점 $(5, 0)$에 대하여 대칭이므로 $\alpha<\beta$라 하면

$\alpha=5+2=7$, $\beta=10-2=8$

따라서 $\alpha^2+\beta^2=7^2+8^2=49+64=113$

답 113

Level 3 실력 완성

본문 51쪽

1 87　**2** 98　**3** 11

1 n보다 작은 자연수 k에 대하여

$k\theta+(n-k)\theta=n\theta=\frac{\pi}{2}$이므로

$(n-k)\theta=\frac{\pi}{2}-k\theta$

따라서

$\sin^2(n-k)\theta=\sin^2\left(\frac{\pi}{2}-k\theta\right)=\cos^2 k\theta$이고,

$\sin^2 k\theta+\sin^2(n-k)\theta=\sin^2 k\theta+\cos^2 k\theta=1$ …… ㉠

(i) $n=2m-1$ (m은 자연수)일 때

㉠에서

$\sin^2 k\theta+\sin^2(2m-k-1)\theta=1$

이므로

$\sin^2\theta+\sin^2 2\theta+\sin^2 3\theta+\cdots+\sin^2 n\theta$

$=\sin^2\theta+\sin^2 2\theta+\sin^2 3\theta+\cdots+\sin^2(2m-1)\theta$

$=\{\sin^2\theta+\sin^2(2m-2)\theta\}$

$\quad+\{\sin^2 2\theta+\sin^2(2m-3)\theta\}+\cdots$

$\quad+\{\sin^2(m-1)\theta+\sin^2 m\theta\}+\sin^2(2m-1)\theta$

$=1\times(m-1)+\sin^2\frac{\pi}{2}$

$=1\times(m-1)+1^2$

$=m$

따라서 $14<m<16$을 만족시키는 자연수 m은 15이므로

$n=2\times15-1=29$

(ii) $n=2m$ (m은 자연수)일 때

㉠에서

$\sin^2 k\theta+\sin^2(2m-k)\theta=1$

이므로

$\sin^2\theta+\sin^2 2\theta+\sin^2 3\theta+\cdots+\sin^2 n\theta$

$=\sin^2\theta+\sin^2 2\theta+\sin^2 3\theta+\cdots+\sin^2 2m\theta$

$=\{\sin^2\theta+\sin^2(2m-1)\theta\}$

$\quad+\{\sin^2 2\theta+\sin^2(2m-2)\theta\}+\cdots$

$+\{\sin^2(m-1)\theta+\sin^2(m+1)\theta\}$

$+\sin^2 m\theta+\sin^2 2m\theta$

$=1\times(m-1)+\sin^2\frac{\pi}{4}+\sin^2\frac{\pi}{2}$

$=1\times(m-1)+\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+1^2$

$=m+\frac{1}{2}$

따라서 $14<m+\frac{1}{2}<16$에서 $13.5<m<15.5$를 만족시키는 자연수 m은 14, 15이므로 n은 28, 30이다.

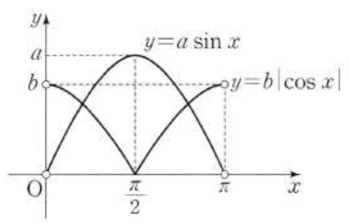
(i), (ii)에서 자연수 n은 28, 29, 30이고, 그 합은

$28+29+30=87$

답 87

2 $0<x<\pi$에서 두 함수 $y=a\sin x$, $y=b|\cos x|$의 그래프는 a, b의 부호에 따라 다음과 같다.

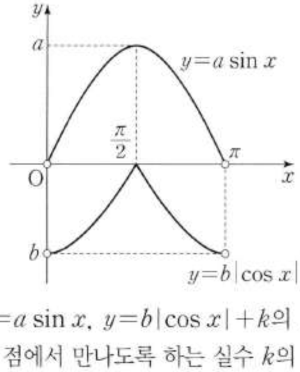
(i) $a>0$, $b>0$일 때



함수 $y=b|\cos x|+k$의 그래프는 함수 $y=b|\cos x|$의 그래프를 y축의 방향으로 k만큼 평행이동한 것이므로 두 함수 $y=a\sin x$, $y=b|\cos x|+k$의 그래프가 서로 다른 두 점에서 만나도록 하는 모든 실수 k의 값의 범위는 $-b<k<a$이다.

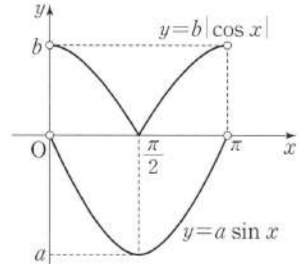
따라서 $a=4$, $b=3$

(ii) $a>0$, $b<0$일 때



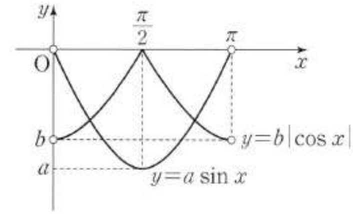
두 함수 $y=a\sin x$, $y=b|\cos x|+k$의 그래프가 서로 다른 두 점에서 만나도록 하는 실수 k의 값은 음수가 될 수 없으므로 실수 k의 값의 범위가 $-3<k<4$가 될 수 없다.

(iii) $a<0$, $b>0$일 때



두 함수 $y=a\sin x$, $y=b|\cos x|+k$의 그래프가 서로 다른 두 점에서 만나도록 하는 실수 k의 값은 양수가 될 수 없으므로 실수 k의 값의 범위가 $-3<k<4$가 될 수 없다.

(iv) $a<0$, $b<0$일 때



두 함수 $y=a\sin x$, $y=b|\cos x|+k$의 그래프가 서로 다른 두 점에서 만나도록 하는 모든 실수 k의 값의 범위는 $a<k<-b$이다.

따라서 $a=-3$, $b=-4$

(i)~(iv)에서 두 실수 a, b의 순서쌍 (a, b)는

$(-3, -4)$, $(4, 3)$이므로

$a_1=-3$, $b_1=-4$, $a_2=4$, $b_2=3$

따라서

$(a_1-a_2)^2+(b_1-b_2)^2=(-3-4)^2+(-4-3)^2=98$

답 98

3 함수 $y=\tan x$의 그래프의 점근선의 방정식은 $x=n\pi+\frac{\pi}{2}$ (n은 정수)이므로 함수 $y=\tan 3x$의 그래프의 점근선의 방정식은

$3x=n\pi+\frac{\pi}{2}$에서 $x=\frac{n}{3}\pi+\frac{\pi}{6}$

이때 함수 $y=\tan\left(3x-\frac{\pi}{4}\right)=\tan 3\left(x-\frac{\pi}{12}\right)$의 그래프는 함수 $y=\tan 3x$의 그래프를 x축의 방향으로 $\frac{\pi}{12}$만큼 평행이동한 것이므로 함수 $y=\tan\left(3x-\frac{\pi}{4}\right)$의 그래프의

점근선의 방정식은

$x-\frac{\pi}{12}=\frac{n}{3}\pi+\frac{\pi}{6}$에서 $x=\frac{n}{3}\pi+\frac{\pi}{4}$

따라서 함수 $y=4\cos 2x-1$의 그래프와 직선

$x=\frac{n}{3}\pi+\frac{\pi}{4}$가 만나는 점의 y좌표는

$$\begin{aligned}y&=4\cos 2\left(\frac{n}{3}\pi+\frac{\pi}{4}\right)-1\\&=4\cos\left(\frac{2n}{3}\pi+\frac{\pi}{2}\right)-1\\&=-4\sin\frac{2n}{3}\pi-1 \quad \cdots\cdots ㉠\end{aligned}$$

(i) $n=3k-2$ (k는 정수)일 때

㉠에서

$$\begin{aligned}y&=-4\sin\frac{6k-4}{3}\pi-1\\&=-4\sin\left(2k\pi-\frac{4}{3}\pi\right)-1\\&=4\sin\frac{4}{3}\pi-1\\&=4\sin\left(\pi+\frac{\pi}{3}\right)-1\\&=-4\sin\frac{\pi}{3}-1\\&=-4\times\frac{\sqrt{3}}{2}-1\\&=-(2\sqrt{3}+1)\end{aligned}$$

(ii) $n=3k-1$ (k는 정수)일 때

㉠에서

$$\begin{aligned}y&=-4\sin\frac{6k-2}{3}\pi-1\\&=-4\sin\left(2k\pi-\frac{2}{3}\pi\right)-1\\&=4\sin\frac{2}{3}\pi-1\\&=4\sin\left(\pi-\frac{\pi}{3}\right)-1\\&=4\sin\frac{\pi}{3}-1\\&=4\times\frac{\sqrt{3}}{2}-1\\&=2\sqrt{3}-1\end{aligned}$$

(iii) $n=3k$ (k는 정수)일 때

㉠에서

$$\begin{aligned}y&=-4\sin\frac{6k}{3}\pi-1\\&=-4\sin 2k\pi-1\\&=-1\end{aligned}$$

(i), (ii), (iii)에서 함수 $y=4\cos 2x-1$의 그래프와 함수 $y=\tan\left(3x-\frac{\pi}{4}\right)$의 그래프의 점근선이 만나는 모든 점의 y좌표 중에서 서로 다른 모든 y좌표의 곱은

$-(2\sqrt{3}+1)\times(2\sqrt{3}-1)\times(-1)=11$

답 11

04 사인법칙과 코사인법칙

유제 본문 55~61쪽

1 ③	2 75	3 ②	4 55	5 12
6 1	7 ③	8 4		

1 $\cos B=\frac{3}{5}>0$에서 $0<B<\frac{\pi}{2}$이므로

$\sin B=\sqrt{1-\cos^2 B}=\sqrt{1-\left(\frac{3}{5}\right)^2}=\frac{4}{5}$

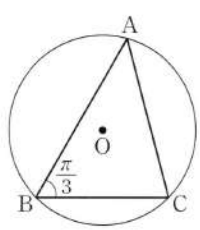
삼각형 ABC에서 사인법칙에 의하여

$\frac{\overline{BC}}{\sin A}=\frac{\overline{AC}}{\sin B}$이므로

$$\overline{BC}=\frac{\overline{AC}}{\sin B}\times\sin A=\frac{4}{\sin B}\times\sin\frac{\pi}{6}=\frac{4}{\frac{4}{5}}\times\frac{1}{2}=\frac{5}{2}$$

답 ③

2 삼각형 ABC의 외접원의 중심을 O, 반지름의 길이를 R라 하자.



삼각형 ABC에서 사인법칙에 의하여

$\frac{\overline{AC}}{\sin B}=\frac{\overline{BC}}{\sin A}=2R$이므로

$$R=\frac{1}{2}\times\frac{\overline{AC}}{\sin B}=\frac{1}{2}\times\frac{9}{\sin\frac{\pi}{3}}=\frac{1}{2}\times\frac{9}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=3\sqrt{3}$$

$$\sin A=\overline{BC}\times\frac{\sin B}{\overline{AC}}=3\sqrt{6}\times\frac{\sin\frac{\pi}{3}}{9}=3\sqrt{6}\times\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{9}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

이때 $0<A<\frac{\pi}{2}$이므로 $\angle A=\frac{\pi}{4}$

$\angle C=\pi-\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{5}{12}\pi$

$\angle AOB=2\angle C=2\times\frac{5}{12}\pi=\frac{5}{6}\pi$

따라서 점 C를 포함하지 않는 호 AB의 길이 l은

$l=3\sqrt{3}\times\frac{5}{6}\pi=\frac{5\sqrt{3}}{2}\pi$이므로

$\frac{4l^2}{\pi^2}=\frac{4}{\pi^2}\times\left(\frac{5\sqrt{3}}{2}\pi\right)^2=75$

답 75

3 두 직선 $y=\frac{1}{2}x$, $y=-x+3$이 만나는 점 A의 x좌표는

$\frac{1}{2}x=-x+3$에서 $\frac{3}{2}x=3$, $x=2$

이므로 A(2, 1)이다.

이때 $\overline{OA}=\sqrt{2^2+1^2}=\sqrt{5}$이고, 점 B(0, 3)에 대하여

$\overline{OB}=3$

$\overline{AB}=\sqrt{(2-0)^2+(1-3)^2}=2\sqrt{2}$

삼각형 OAB에서 $\angle OAB=\theta$이므로 코사인법칙에 의하여

$\overline{OB}^2=\overline{OA}^2+\overline{AB}^2-2\times\overline{OA}\times\overline{AB}\times\cos\theta$

$3^2=(\sqrt{5})^2+(2\sqrt{2})^2-2\times\sqrt{5}\times2\sqrt{2}\times\cos\theta$

$\cos\theta=\frac{(\sqrt{5})^2+(2\sqrt{2})^2-3^2}{2\times\sqrt{5}\times2\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{10}}=\frac{\sqrt{10}}{10}$

답 ②

4 삼각형 ABC에서 $\angle C=\frac{2}{3}\pi$이므로 코사인법칙에 의하여

$$\overline{AB}^2=\overline{AC}^2+\overline{BC}^2-2\times\overline{AC}\times\overline{BC}\times\cos\frac{2}{3}\pi=2^2+6^2-2\times2\times6\times\left(-\frac{1}{2}\right)=52$$

$\overline{AB}=2\sqrt{13}$

삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R라 하면 사인법칙에 의하여 $\frac{\overline{AB}}{\sin C}=2R$이므로

$$R=\frac{1}{2}\times\frac{\overline{AB}}{\sin C}=\frac{1}{2}\times\frac{2\sqrt{13}}{\sin\frac{2}{3}\pi}=\frac{1}{2}\times\frac{2\sqrt{13}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{2\sqrt{13}}{\sqrt{3}}$$

그러므로 삼각형 ABC의 외접원의 넓이는

$\pi\times\left(\frac{2\sqrt{13}}{\sqrt{3}}\right)^2=\frac{52}{3}\pi$

따라서 $a=3$, $b=52$이므로

$a+b=3+52=55$

답 55

5 삼각형 ABC에서 $\overline{AB}=c$, $\overline{BC}=a$, $\overline{CA}=b$라 하자.

$\sin(A+B)=\sin B$에서

$\sin(\pi-C)=\sin B$

$\sin B=\sin C$ …… ㉠

이때 삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R라 하면

사인법칙에 의하여 $\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}=2R$이므로

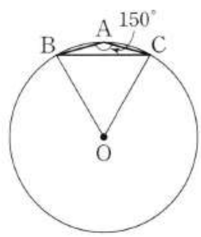
$\sin B=\dfrac{b}{2R}$, $\sin C=\dfrac{c}{2R}$

㉠에서 $\dfrac{b}{2R}=\dfrac{c}{2R}$이므로 $b=c$

따라서 삼각형 ABC는 $\overline{AB}=\overline{AC}$인 이등변삼각형이다.

이때 $\angle B=\angle C=15^\circ$이므로

$\angle A=180^\circ-(15^\circ+15^\circ)=150^\circ$



삼각형 ABC에서 사인법칙에 의하여 $\dfrac{a}{\sin A}=2R$이므로

$R=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{a}{\sin 150^\circ}=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{a}{\frac{1}{2}}=a$

즉, 삼각형 OBC는 정삼각형이다.

이때 정삼각형 OBC의 둘레의 길이가 36이므로 선분 BC의 길이는

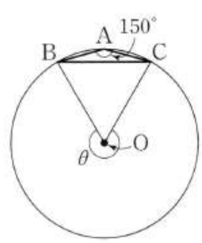
$\dfrac{1}{3}\times 36=12$

답 12

참고

그림과 같이 $\angle A=150^\circ$이면 원주각의 성질에 의하여 $\theta=300^\circ$임을 알 수 있다.

따라서 삼각형 OBC에서 $\angle BOC=60^\circ$이므로 삼각형 OBC는 정삼각형이다.



6 삼각형 ABC에서 $\overline{AB}=c$, $\overline{BC}=a$, $\overline{CA}=b$라 하자.

$\sin(A+B)+\sin(B+C)\cos(A+C)=0$에서

$\sin(\pi-C)+\sin(\pi-A)\cos(\pi-B)=0$

$\sin C-\sin A\cos B=0$ …… ㉠

이때 삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R라 하면

사인법칙에 의하여 $\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{c}{\sin C}=2R$이므로

$\sin A=\dfrac{a}{2R}$, $\sin C=\dfrac{c}{2R}$

이고, 코사인법칙에 의하여

$\cos B=\dfrac{c^2+a^2-b^2}{2ca}$

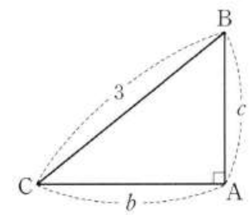
이므로 ㉠에서

$\dfrac{c}{2R}-\dfrac{a}{2R}\times\dfrac{c^2+a^2-b^2}{2ca}=0$

$-\dfrac{1}{2c}(a^2-b^2-c^2)=0$

$a^2=b^2+c^2$

따라서 삼각형 ABC는 $\angle A=90^\circ$인 직각삼각형이다.



이때 $a=\overline{BC}=3$이므로

$b^2+c^2=9$ …… ㉡

삼각형 ABC의 넓이가 $\sqrt{2}$이므로

$\dfrac{1}{2}bc=\sqrt{2}$에서

$b=\dfrac{2\sqrt{2}}{c}$ …… ㉢

㉢을 ㉡에 대입하면

$\left(\dfrac{2\sqrt{2}}{c}\right)^2+c^2=9$

$c^4-9c^2+8=0$

$(c^2-1)(c^2-8)=0$

$c>0$이므로 $c=1$ 또는 $c=2\sqrt{2}$

㉢에서 $b=2\sqrt{2}$, $c=1$ 또는 $b=1$, $c=2\sqrt{2}$이므로

$\cos B+\cos C=\dfrac{c}{3}+\dfrac{b}{3}=\dfrac{b+c}{3}=\dfrac{1+2\sqrt{2}}{3}=\dfrac{1}{3}+\dfrac{2}{3}\sqrt{2}$

따라서 $p=\dfrac{1}{3}$, $q=\dfrac{2}{3}$이므로

$p+q=\dfrac{1}{3}+\dfrac{2}{3}=1$

답 1

7 삼각형 ABC에서 $\angle B=30^\circ$이므로

$\overline{BC}=x$라 하면 코사인법칙에 의하여

$\overline{AC}^2=\overline{AB}^2+\overline{BC}^2-2\times\overline{AB}\times\overline{BC}\times\cos 30^\circ$

$2^2=4^2+x^2-2\times 4\times x\times \frac{\sqrt{3}}{2}$

$x^2-4\sqrt{3}x+12=0$

$(x-2\sqrt{3})^2=0$

$x=2\sqrt{3}$, 즉 $\overline{BC}=2\sqrt{3}$

따라서 삼각형 ABC의 넓이는

$\frac{1}{2}\times\overline{AB}\times\overline{BC}\times\sin 30^\circ=\frac{1}{2}\times 4\times 2\sqrt{3}\times\frac{1}{2}=2\sqrt{3}$

답 ③

8 정삼각형 ABC의 한 변의 길이를 a라 하자.

직각삼각형 CBD에서 $\angle BCD=30^\circ$이므로

$\overline{DC}=\frac{\overline{BC}}{\cos 30^\circ}=\frac{a}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{2\sqrt{3}}{3}a$

$\overline{BD}=\overline{DC}\times\sin 30^\circ=\frac{2\sqrt{3}}{3}a\times\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{3}}{3}a$

삼각형 ABD에서

$\angle ABD=\angle ABC+\angle CBD=60^\circ+90^\circ=150^\circ$

이므로 삼각형 ABD의 넓이 S는

$S=\frac{1}{2}\times\overline{AB}\times\overline{BD}\times\sin 150^\circ$

$=\frac{1}{2}\times a\times\frac{\sqrt{3}}{3}a\times\frac{1}{2}$

$=\frac{\sqrt{3}}{12}a^2$

삼각형 ADC에서

$\angle ACD=\angle ACB+\angle BCD=60^\circ+30^\circ=90^\circ$

이므로 삼각형 ADC의 넓이 T는

$T=\frac{1}{2}\times\overline{DC}\times\overline{AC}$

$=\frac{1}{2}\times\frac{2\sqrt{3}}{3}a\times a$

$=\frac{\sqrt{3}}{3}a^2$

따라서 $\frac{T}{S}=\frac{\frac{\sqrt{3}}{3}a^2}{\frac{\sqrt{3}}{12}a^2}=4$

답 4

Level 1 기초 연습

본문 62~63쪽

1 ⑤	2 ①	3 ④	4 ⑤	5 ④
6 ②	7 ④	8 ⑤		

1 삼각형 ABC의 세 내각의 크기의 합이 π이므로

$A+B+C=\pi$에서 $A+B=\pi-C$

$\cos(A+B)=\cos(\pi-C)=-\cos C=-\frac{3}{4}$

즉, $\cos C=\frac{3}{4}$이고 $0<C<\frac{\pi}{2}$이므로

$\sin C=\sqrt{1-\cos^2 C}=\sqrt{1-\left(\frac{3}{4}\right)^2}=\frac{\sqrt{7}}{4}$

삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이가 12이므로 사인법칙에 의하여

$\frac{\overline{AB}}{\sin C}=2\times 12$

따라서 $\overline{AB}=2\times 12\times\sin C=2\times 12\times\frac{\sqrt{7}}{4}=6\sqrt{7}$

답 ⑤

2 삼각형 ABC의 세 변의 길이에서

$a-2>0$이고 $a+(a-2)>a+2$이므로

$a>4$

삼각형 ABC에서 $\angle B=120^\circ$이므로 코사인법칙에 의하여

$\overline{AC}^2=\overline{AB}^2+\overline{BC}^2-2\times\overline{AB}\times\overline{BC}\times\cos 120^\circ$

$(a+2)^2=(a-2)^2+a^2-2\times(a-2)\times a\times\left(-\frac{1}{2}\right)$

$a^2+4a+4=(a^2-4a+4)+a^2+(a^2-2a)$

$2a^2-10a=0$

$2a(a-5)=0$

이때 $a>4$이므로 $a=5$

답 ①

3 $\overline{OA}=\sqrt{2^2+1^2}=\sqrt{5}$

$\overline{OB}=\sqrt{1^2+2^2}=\sqrt{5}$

$\overline{AB}=\sqrt{(2-1)^2+(1-2)^2}=\sqrt{2}$

삼각형 OAB에서 $\angle AOB=\theta$이므로 코사인법칙에 의하여

$\cos\theta=\frac{\overline{OA}^2+\overline{OB}^2-\overline{AB}^2}{2\times\overline{OA}\times\overline{OB}}$

$=\frac{(\sqrt{5})^2+(\sqrt{5})^2-(\sqrt{2})^2}{2\times\sqrt{5}\times\sqrt{5}}$

$=\frac{4}{5}$

답 ④

4 삼각형 ABC의 넓이는

$\frac{1}{2}\times\overline{AB}\times\overline{AC}\times\sin A=\frac{1}{2}\times 3\times 2\times\sin A=3\sin A$

이므로

$3\sin A=1$에서 $\sin A=\frac{1}{3}$

이때 $0<A<\frac{\pi}{2}$이므로

$\cos A=\sqrt{1-\sin^2 A}$

$=\sqrt{1-\left(\frac{1}{3}\right)^2}=\frac{2\sqrt{2}}{3}$

답 ⑤

5 삼각형 ABC에서 $\angle A=60^\circ$이므로 코사인법칙에 의하여

$\overline{BC}^2=\overline{AB}^2+\overline{AC}^2-2\times\overline{AB}\times\overline{AC}\times\cos 60^\circ$

$=6^2+4^2-2\times6\times4\times\frac{1}{2}$

$=28$

$\overline{BC}=2\sqrt{7}$

삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R라 하면 사인법칙에 의하여 $\frac{\overline{BC}}{\sin A}=2R$이므로

$R=\frac{1}{2}\times\frac{\overline{BC}}{\sin A}$

$=\frac{1}{2}\times\frac{2\sqrt{7}}{\sin 60^\circ}$

$=\frac{1}{2}\times\frac{2\sqrt{7}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{2\sqrt{21}}{3}$

답 ④

6 삼각형 ABC에서 $\overline{BC}=a$, $\overline{AC}=b$라 하고 외접원의 반지름의 길이를 k라 하면 사인법칙에 의하여

$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=2k$

즉, $\sin A=\frac{a}{2k}$, $\sin B=\frac{b}{2k}$이므로

$\sin A : \sin B=\frac{a}{2k} : \frac{b}{2k}=a : b=1 : 3$에서

$b=3a$

$\angle C=60^\circ$인 삼각형 ABC의 넓이는

$\frac{1}{2}\times\overline{AC}\times\overline{BC}\times\sin 60^\circ=\frac{1}{2}\times3a\times a\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{3\sqrt{3}}{4}a^2$

이므로

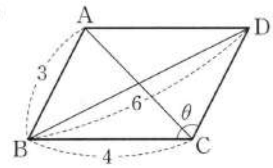
$\frac{3\sqrt{3}}{4}a^2=12\sqrt{3}$에서 $a^2=16$

이때 $a>0$이므로 $a=4$

따라서 선분 BC의 길이는 4이다.

답 ②

7 삼각형 BCD에서 $\angle BCD=\theta$라 하면 코사인법칙에 의하여



$\cos\theta=\frac{\overline{BC}^2+\overline{CD}^2-\overline{BD}^2}{2\times\overline{BC}\times\overline{CD}}$

$=\frac{4^2+3^2-6^2}{2\times4\times3}$

$=-\frac{11}{24}$

삼각형 ABC에서 $\angle ABC=\pi-\theta$이므로 코사인법칙에 의하여

$\overline{AC}^2=\overline{AB}^2+\overline{BC}^2-2\times\overline{AB}\times\overline{BC}\times\cos(\pi-\theta)$

$=3^2+4^2+2\times3\times4\times\cos\theta$

$=9+16+2\times3\times4\times\left(-\frac{11}{24}\right)$

$=14$

따라서 $\overline{AC}=\sqrt{14}$

답 ④

8 $\angle BAC=75^\circ$이면 원주각의 성질에 의하여

$\angle BOC=2\angle BAC=2\times75^\circ=150^\circ$

삼각형 OBC의 넓이가 9이므로

$\frac{1}{2}\times\overline{OB}\times\overline{OC}\times\sin 150^\circ=9$

$\frac{1}{2}\times\overline{OB}\times\overline{OC}\times\frac{1}{2}=9$

$\overline{OB}\times\overline{OC}=36$

이때 $\overline{OB}=\overline{OC}$이므로 $\overline{OB}=\overline{OC}=6$

따라서 삼각형 OBC에서 코사인법칙에 의하여

$\overline{BC}^2=\overline{OB}^2+\overline{OC}^2-2\times\overline{OB}\times\overline{OC}\times\cos 150^\circ$

$=6^2+6^2-2\times6\times6\times\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

$=72+36\sqrt{3}$

답 ⑤

Level 2 기본 연습

본문 64~66쪽

1 ②	2 ⑤	3 ②	4 ⑤	5 ②
6 ②	7 ④	8 ④	9 ③	

1 점 D가 선분 BC를 3 : 1로 외분하므로

$\overline{CD}=\frac{1}{2}\overline{BC}=\frac{1}{2}\times2=1$, $\overline{BD}=3$

삼각형 ABD에서 코사인법칙에 의하여

$\overline{AD}^2=\overline{AB}^2+\overline{BD}^2-2\times\overline{AB}\times\overline{BD}\times\cos(\angle ABD)$

$=2^2+3^2-2\times2\times3\times\cos\frac{\pi}{3}$

$=4+9-2\times2\times3\times\frac{1}{2}$

$=7$

$\overline{AD}=\sqrt{7}$

삼각형 ACD의 외접원의 반지름의 길이를 R라 하면

사인법칙에 의하여 $\frac{\overline{AD}}{\sin(\angle ACD)}=2R$이므로

$R=\frac{1}{2}\times\frac{\overline{AD}}{\sin(\angle ACD)}=\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{7}}{\sin\frac{2}{3}\pi}$

$=\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{7}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{\sqrt{21}}{3}$

따라서 삼각형 ACD의 외접원의 넓이는

$\pi\times\left(\frac{\sqrt{21}}{3}\right)^2=\frac{7}{3}\pi$

답 ②

2 직각삼각형 ABC에서 $\overline{AB}=8$, $\overline{AC}=6$이므로

$\overline{BC}=\sqrt{8^2+6^2}=10$

선분 AB의 중점이 M, 선분 AC의 중점이 N이므로

$\overline{AM}=\frac{1}{2}\overline{AB}=\frac{1}{2}\times8=4$

$\overline{MN}=\frac{1}{2}\overline{BC}=\frac{1}{2}\times10=5$

$\overline{AN}=\frac{1}{2}\overline{AC}=\frac{1}{2}\times6=3$

직각삼각형 MCA에서

$\overline{MC}=\sqrt{\overline{AM}^2+\overline{AC}^2}=\sqrt{4^2+6^2}=2\sqrt{13}$

삼각형 MCA의 넓이는

$\frac{1}{2}\times\overline{AM}\times\overline{AC}=\frac{1}{2}\times4\times6=12$

삼각형 MCN의 넓이는

$\frac{1}{2}\times\overline{MC}\times\overline{MN}\times\sin(\angle NMC)$

$=\frac{1}{2}\times2\sqrt{13}\times5\times\sin(\angle NMC)$

$=5\sqrt{13}\times\sin(\angle NMC)$

이때 $\overline{AN}=\overline{NC}$이므로 삼각형 MCN의 넓이는 삼각형 MCA의 넓이의 $\frac{1}{2}$과 같다.

즉, $5\sqrt{13}\times\sin(\angle NMC)=\frac{1}{2}\times12=6$이므로

$\sin(\angle NMC)=\frac{6}{5\sqrt{13}}=\frac{6\sqrt{13}}{65}$

답 ⑤

다른 풀이

직각삼각형 ABC에서 $\overline{AB}=8$, $\overline{AC}=6$이므로

$\overline{BC}=\sqrt{8^2+6^2}=10$

선분 AB의 중점이 M, 선분 AC의 중점이 N이므로

$\overline{AM}=\frac{1}{2}\overline{AB}=\frac{1}{2}\times8=4$

$\overline{MN}=\frac{1}{2}\overline{BC}=\frac{1}{2}\times10=5$

$\overline{NC}=\frac{1}{2}\overline{AC}=\frac{1}{2}\times6=3$

직각삼각형 MCA에서

$\overline{MC}=\sqrt{\overline{AM}^2+\overline{AC}^2}=\sqrt{4^2+6^2}=2\sqrt{13}$

삼각형 MCN에서 코사인법칙에 의하여

$\overline{NC}^2=\overline{MN}^2+\overline{MC}^2-2\times\overline{MN}\times\overline{MC}\times\cos(\angle NMC)$

이므로

$\cos(\angle NMC)=\frac{\overline{MN}^2+\overline{MC}^2-\overline{NC}^2}{2\times\overline{MN}\times\overline{MC}}$

$=\frac{5^2+(2\sqrt{13})^2-3^2}{2\times5\times2\sqrt{13}}$

$=\frac{17}{5\sqrt{13}}$

따라서 $\sin(\angle NMC)=\sqrt{1-\left(\frac{17}{5\sqrt{13}}\right)^2}=\frac{6\sqrt{13}}{65}$

3 $\overline{AP}=\overline{BQ}=a\ (a>0)$이라 하자.

삼각형 APC에서

$\overline{AC}=\frac{\overline{AP}}{\cos\frac{\pi}{3}}=\frac{a}{\frac{1}{2}}=2a$

$\overline{CP}=\overline{AC}\times\sin\frac{\pi}{3}=2a\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}a$

삼각형 ABC에서 $\angle ACB=\frac{\pi}{2}$이므로

$\overline{AB}=\frac{\overline{AC}}{\cos\frac{\pi}{3}}=\frac{2a}{\frac{1}{2}}=4a$

$\overline{PQ}=\overline{AB}-(\overline{AP}+\overline{BQ})=4a-(a+a)=2a$

$\overline{AQ}=\overline{AP}+\overline{PQ}=a+2a=3a$

직각삼각형 CPQ에서

$\overline{CQ}=\sqrt{\overline{CP}^2+\overline{PQ}^2}=\sqrt{(\sqrt{3}a)^2+(2a)^2}=\sqrt{7}a$

따라서 삼각형 AQC에서

$\cos(\angle ACQ)=\frac{\overline{AC}^2+\overline{CQ}^2-\overline{AQ}^2}{2\times\overline{AC}\times\overline{CQ}}$

$=\dfrac{(2a)^2+(\sqrt{7}a)^2-(3a)^2}{2\times 2a\times\sqrt{7}a}$

$=\dfrac{1}{2\sqrt{7}}=\dfrac{\sqrt{7}}{14}$

답 ②

4 삼각형 ABC의 외접원의 중심을 O, 반지름의 길이를 R, $\angle BAD=\angle CAD=\theta$라 하면
$\overline{BD}=k$일 때 $R=2k$, 즉 $\overline{OB}=\overline{OD}=2k$이고
$\angle BAC=2\theta$, $\angle BOD=2\theta$이다.
삼각형 ABC에서 사인법칙에 의하여

$\dfrac{\overline{BC}}{\sin(\angle BAC)}=2R$이므로

$\dfrac{12}{\sin 2\theta}=2R$에서 $\sin 2\theta=\dfrac{6}{R}=\dfrac{6}{2k}=\dfrac{3}{k}$

삼각형 OBD에서 코사인법칙에 의하여

$\cos(\angle BOD)=\dfrac{\overline{OB}^2+\overline{OD}^2-\overline{BD}^2}{2\times\overline{OB}\times\overline{OD}}$

$=\dfrac{(2k)^2+(2k)^2-k^2}{2\times 2k\times 2k}=\dfrac{7}{8}$

즉, $\cos 2\theta=\dfrac{7}{8}$이므로 $\sin^2 2\theta+\cos^2 2\theta=1$에서

$\left(\dfrac{3}{k}\right)^2+\left(\dfrac{7}{8}\right)^2=1$

$k^2=\dfrac{9\times 64}{15}$

따라서 $k=\dfrac{24}{\sqrt{15}}=\dfrac{8\sqrt{15}}{5}$

답 ⑤

5 $\angle BAD=\angle ADC-\angle ABD=75^\circ-45^\circ=30^\circ$
삼각형 ABD에서 사인법칙에 의하여

$\dfrac{\overline{AD}}{\sin(\angle ABD)}=\dfrac{\overline{BD}}{\sin(\angle BAD)}$이므로

$\overline{AD}=\dfrac{\overline{BD}}{\sin(\angle BAD)}\times\sin(\angle ABD)$

$=\dfrac{2}{\sin 30^\circ}\times\sin 45^\circ=\dfrac{2}{\frac{1}{2}}\times\dfrac{\sqrt{2}}{2}=2\sqrt{2}$

$\angle CAD=\angle BAC-\angle BAD=75^\circ-30^\circ=45^\circ$

$\angle ACB=180^\circ-(\angle ABC+\angle BAC)$

$=180^\circ-(45^\circ+75^\circ)=60^\circ$

삼각형 ADC에서 사인법칙에 의하여

$\dfrac{\overline{CD}}{\sin(\angle CAD)}=\dfrac{\overline{AD}}{\sin(\angle ACD)}$이므로

$\overline{CD}=\dfrac{\overline{AD}}{\sin(\angle ACD)}\times\sin(\angle CAD)$

$=\dfrac{2\sqrt{2}}{\sin 60^\circ}\times\sin 45^\circ$

$=\dfrac{2\sqrt{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\times\dfrac{\sqrt{2}}{2}=\dfrac{4\sqrt{3}}{3}$

따라서 $a=\overline{AD}=2\sqrt{2}$, $b=\overline{CD}=\dfrac{4\sqrt{3}}{3}$이므로

$a^2+3b^2=(2\sqrt{2})^2+3\times\left(\dfrac{4\sqrt{3}}{3}\right)^2=24$

답 ②

6 삼각형 ABC에서 $\overline{AB}=c$, $\overline{BC}=a$, $\overline{CA}=b$라 하자.
$\overline{AB}\cos B+\overline{AC}\cos(A+B)=0$에서
$c\cos B+b\cos(\pi-C)=0$
$c\cos B-b\cos C=0$ ⋯⋯ ㉠
삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의하여

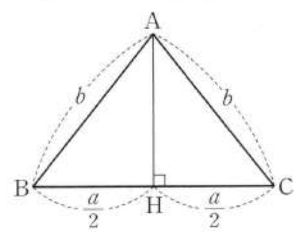
$\cos B=\dfrac{c^2+a^2-b^2}{2ca}$, $\cos C=\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$

이므로 ㉠에서

$c\times\dfrac{c^2+a^2-b^2}{2ca}-b\times\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=0$

$c^2-b^2=0$, $c=b$

즉, 삼각형 ABC는 $\overline{AB}=\overline{AC}$인 이등변삼각형이다.



꼭짓점 A에서 선분 BC에 내린 수선의 발을 H라 하면

$\overline{BH}=\overline{CH}=\dfrac{a}{2}$이므로 직각삼각형 ACH에서

$\cos C=\dfrac{\frac{a}{2}}{b}=\dfrac{a}{2b}$

$\dfrac{a}{2b}=\dfrac{5}{8}$에서 $a=\dfrac{5}{4}b$

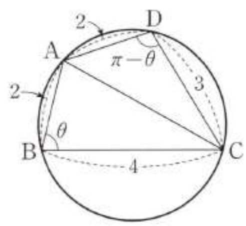
즉, $\overline{BC}=\dfrac{5}{4}b$

따라서 삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의하여

$\cos A=\dfrac{\overline{AB}^2+\overline{AC}^2-\overline{BC}^2}{2\times\overline{AB}\times\overline{AC}}=\dfrac{b^2+b^2-\left(\frac{5}{4}b\right)^2}{2\times b\times b}=\dfrac{7}{32}$

답 ②

7



$\angle ABC=\theta$라 하자.

사각형 ABCD는 원에 내접하므로

$\angle ABC+\angle ADC=\pi$

$\angle ADC=\pi-\angle ABC=\pi-\theta$

삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의하여

$\overline{AC}^2=\overline{AB}^2+\overline{BC}^2-2\times\overline{AB}\times\overline{BC}\times\cos\theta$

$\quad=2^2+4^2-2\times2\times4\times\cos\theta$

$\quad=20-16\cos\theta$ ······ ㉠

삼각형 ADC에서 코사인법칙에 의하여

$\overline{AC}^2=\overline{AD}^2+\overline{CD}^2-2\times\overline{AD}\times\overline{CD}\times\cos(\pi-\theta)$

$\quad=2^2+3^2-2\times2\times3\times\cos(\pi-\theta)$

$\quad=13+12\cos\theta$ ······ ㉡

㉠, ㉡에서

$20-16\cos\theta=13+12\cos\theta$

$28\cos\theta=7$

$\cos\theta=\frac{1}{4}$ ······ ㉢

㉢을 ㉠에 대입하면

$\overline{AC}^2=20-16\times\frac{1}{4}=16$

$\overline{AC}=4$

또 $0<\theta<\frac{\pi}{2}$이므로

$\sin\theta=\sqrt{1-\cos^2\theta}=\sqrt{1-\left(\frac{1}{4}\right)^2}=\frac{\sqrt{15}}{4}$

이때 사각형 ABCD에 외접하는 원과 삼각형 ABC에 외접하는 원이 일치한다.

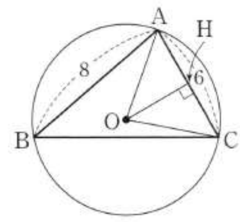
따라서 구하는 원의 반지름의 길이를 R라 하면 삼각형 ABC에서 사인법칙에 의하여

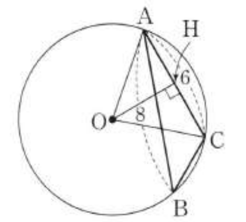
$\frac{\overline{AC}}{\sin\theta}=2R$이므로

$R=\frac{1}{2}\times\frac{\overline{AC}}{\sin\theta}=\frac{1}{2}\times\frac{4}{\frac{\sqrt{15}}{4}}=\frac{8\sqrt{15}}{15}$

답 ④

8 점 O에서 선분 AC에 내린 수선의 발을 H라 하자.





삼각형 OAC의 넓이가 12이므로

$\frac{1}{2}\times\overline{AC}\times\overline{OH}=\frac{1}{2}\times6\times\overline{OH}=3\times\overline{OH}=12$

에서 $\overline{OH}=4$

삼각형 OAC가 $\overline{OA}=\overline{OC}$인 이등변삼각형이므로

$\overline{AH}=\frac{1}{2}\overline{AC}=\frac{1}{2}\times6=3$

$\overline{OA}=\sqrt{\overline{OH}^2+\overline{AH}^2}=\sqrt{4^2+3^2}=5$

한편,

$\angle AOH=\frac{1}{2}\angle AOC=\frac{1}{2}\times2\angle ABC=\angle ABC$

이므로

$\cos(\angle ABC)=\cos(\angle AOH)=\frac{\overline{OH}}{\overline{OA}}=\frac{4}{5}$

$\overline{BC}=a$이므로 삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의하여

$\overline{AC}^2=\overline{AB}^2+\overline{BC}^2-2\times\overline{AB}\times\overline{BC}\times\cos(\angle ABC)$

$6^2=8^2+a^2-2\times8\times a\times\frac{4}{5}$

$5a^2-64a+140=0$

$(5a-14)(a-10)=0$

$a=\frac{14}{5}$ 또는 $a=10$

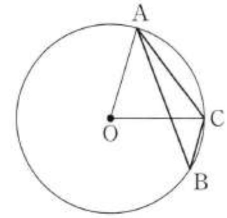
따라서 서로 다른 모든 실수 a의 값의 합은

$\frac{14}{5}+10=\frac{64}{5}$

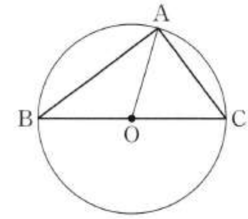
답 ④

참고

(i) $\overline{BC}=\frac{14}{5}$일 때



(ii) $\overline{BC}=10$일 때



9 점 F가 선분 BC를 3 : 1로 내분하므로 $\overline{FC}=1$이고, $\overline{AC}=2$, $\overline{AE}=\overline{AG}=\overline{AD}=1$

$\overline{AF}=\sqrt{\overline{FC}^2+\overline{AC}^2}=\sqrt{1^2+2^2}=\sqrt{5}$이므로

$\angle FAC=\alpha$라 하면

$\sin\alpha=\frac{\overline{FC}}{\overline{AF}}=\frac{1}{\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{5}}{5}$

삼각형 AGE의 넓이는

$\frac{1}{2}\times\overline{AG}\times\overline{AE}\times\sin\alpha=\frac{1}{2}\times1\times1\times\frac{\sqrt{5}}{5}=\frac{\sqrt{5}}{10}$

삼각형 AFC의 넓이는

$\frac{1}{2}\times\overline{FC}\times\overline{AC}=\frac{1}{2}\times1\times2=1$

그러므로 사각형 CEGF의 넓이 S는

$S=1-\frac{\sqrt{5}}{10}$

한편, $\overline{BF}=3$이고,

$\overline{AB}=\sqrt{\overline{AC}^2+\overline{BC}^2}=\sqrt{2^2+4^2}=2\sqrt{5}$

삼각형 ABF에서 $\angle BAF=\beta$라 하면 코사인법칙에 의하여

$\overline{BF}^2=\overline{AB}^2+\overline{AF}^2-2\times\overline{AB}\times\overline{AF}\times\cos\beta$이므로

$3^2=(2\sqrt{5})^2+(\sqrt{5})^2-2\times2\sqrt{5}\times\sqrt{5}\times\cos\beta$

$\cos\beta=\frac{(2\sqrt{5})^2+(\sqrt{5})^2-3^2}{2\times2\sqrt{5}\times\sqrt{5}}=\frac{4}{5}$

이때 $0<\beta<\frac{\pi}{2}$이므로

$\sin\beta=\sqrt{1-\left(\frac{4}{5}\right)^2}=\frac{3}{5}$

그러므로 삼각형 ADG의 넓이 T는

$T=\frac{1}{2}\times\overline{AD}\times\overline{AG}\times\sin\beta$

$=\frac{1}{2}\times1\times1\times\frac{3}{5}$

$=\frac{3}{10}$

따라서 $S+T=\left(1-\frac{\sqrt{5}}{10}\right)+\frac{3}{10}=\frac{13-\sqrt{5}}{10}$

답 ③

Level 3 실력 완성

본문 67쪽

1 128 2 ⑤ 3 ④

1 삼각형 ABC에서 $\overline{AB}=\overline{AC}$이므로

$\angle ABC=\angle ACB=\frac{1}{2}\left(\pi-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{5}{12}\pi$

삼각형 CDB에서 $\overline{CB}=\overline{CD}$이므로

$\angle CDB=\angle CBD=\frac{5}{12}\pi$이고

$\angle DCB=\pi-(\angle CDB+\angle CBD)$

$=\pi-\left(\frac{5}{12}\pi+\frac{5}{12}\pi\right)$

$=\frac{\pi}{6}$

따라서 $\angle ACD=\angle ACB-\angle DCB=\frac{5}{12}\pi-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{4}$

삼각형 ADC에서 사인법칙에 의하여

$\frac{\overline{CD}}{\sin(\angle CAD)}=\frac{\overline{AD}}{\sin(\angle ACD)}$이므로

$\overline{AD}=\sin(\angle ACD)\times\frac{\overline{CD}}{\sin(\angle CAD)}=\sin\frac{\pi}{4}\times\frac{8}{\sin\frac{\pi}{6}}$

$=\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{8}{\frac{1}{2}}=8\sqrt{2}$

$\overline{BD}=x$라 하면 두 삼각형 ABC, CDB는 서로 닮은 도형이므로

$\overline{AB}:\overline{BC}=\overline{CD}:\overline{DB}$

$(8\sqrt{2}+x):8=8:x$

$(8\sqrt{2}+x)x=8^2$

$x^2+8\sqrt{2}x-64=0$

$x=-4\sqrt{2}-4\sqrt{6}$ 또는 $x=-4\sqrt{2}+4\sqrt{6}$

이때 $x>0$이므로 $x=4\sqrt{6}-4\sqrt{2}$

즉, $\overline{BD}=4\sqrt{6}-4\sqrt{2}$

그러므로

$\overline{AD}\times\overline{BD}=8\sqrt{2}\times(4\sqrt{6}-4\sqrt{2})$

$=64\sqrt{3}-64$

따라서 $a=64$, $b=64$이므로

$a+b=64+64=128$

답 128

다른 풀이

삼각형 ABC에서 $\overline{AB}=\overline{AC}$이므로

$\angle ABC=\angle ACB=\frac{1}{2}\left(\pi-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{5}{12}\pi$

삼각형 CDB에서 $\overline{CB}=\overline{CD}$이므로

$\angle CDB=\angle CBD=\frac{5}{12}\pi$이고

$\angle DCB=\pi-(\angle CDB+\angle CBD)$

$=\pi-\left(\frac{5}{12}\pi+\frac{5}{12}\pi\right)$

$=\frac{\pi}{6}$

삼각형 CDB에서 코사인법칙에 의하여

$\overline{BD}^2=\overline{BC}^2+\overline{CD}^2-2\times\overline{BC}\times\overline{CD}\times\cos(\angle DCB)$

$=8^2+8^2-2\times8\times8\times\frac{\sqrt{3}}{2}$

$=128-64\sqrt{3}$

두 삼각형 ABC, CDB는 서로 닮은 도형이므로

$\overline{AB} : \overline{BC} = \overline{CD} : \overline{DB}$

$(\overline{AD} + \overline{DB}) : \overline{BC} = \overline{CD} : \overline{DB}$

$(\overline{AD} + \overline{DB}) \times \overline{DB} = \overline{BC} \times \overline{CD}$

$\overline{AD} \times \overline{DB} + \overline{DB}^2 = 8 \times 8$

$$\begin{aligned}\overline{AD} \times \overline{DB} &= 64 - \overline{DB}^2 \\ &= 64 - (128 - 64\sqrt{3}) \\ &= 64\sqrt{3} - 64\end{aligned}$$

따라서 $a=64$, $b=64$이므로

$a+b=64+64=128$

2 $\angle BAC = \theta \left(0 < \theta < \frac{\pi}{2}\right)$라 하자.

삼각형 ABC의 넓이는

$\frac{1}{2} \times \overline{AB} \times \overline{AC} \times \sin\theta = \frac{1}{2} \times 5 \times 5 \times \sin\theta = \frac{25}{2}\sin\theta$

이므로

$\frac{25}{2}\sin\theta = 10$에서 $\sin\theta = \frac{4}{5}$

이때 $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$이므로

$\cos\theta = \sqrt{1-\sin^2\theta} = \sqrt{1-\left(\frac{4}{5}\right)^2} = \frac{3}{5}$

삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의하여

$$\begin{aligned}\overline{BC}^2 &= \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 - 2 \times \overline{AB} \times \overline{AC} \times \cos\theta \\ &= 5^2 + 5^2 - 2 \times 5 \times 5 \times \frac{3}{5} \\ &= 20\end{aligned}$$

이므로 $\overline{BC} = 2\sqrt{5}$

삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R라 하면 사인법칙에 의하여 $\frac{\overline{BC}}{\sin\theta} = 2R$이므로

$R = \frac{1}{2} \times \frac{\overline{BC}}{\sin\theta} = \frac{1}{2} \times \frac{2\sqrt{5}}{\frac{4}{5}} = \frac{5\sqrt{5}}{4}$

즉, $\overline{OA} = \overline{OB} = \overline{OC} = \frac{5\sqrt{5}}{4}$

삼각형 ABC가 이등변삼각형이므로 선분 OA는 $\angle BAC$를 이등분한다.

즉, $\angle OAC = \frac{1}{2}\angle BAC = \frac{\theta}{2}$이고, 삼각형 OCA는 이등변삼각형이므로 $\angle OCA = \frac{\theta}{2}$이다.

$$\begin{aligned}\angle AOC &= \pi - (\angle OAC + \angle OCA) \\ &= \pi - \left(\frac{\theta}{2} + \frac{\theta}{2}\right) \\ &= \pi - \theta\end{aligned}$$

따라서 삼각형 OCM에서 코사인법칙에 의하여

$$\begin{aligned}\overline{CM}^2 &= \overline{OC}^2 + \overline{OM}^2 - 2 \times \overline{OC} \times \overline{OM} \times \cos(\pi - \theta) \\ &= \left(\frac{5\sqrt{5}}{4}\right)^2 + \left(\frac{5\sqrt{5}}{8}\right)^2 + 2 \times \frac{5\sqrt{5}}{4} \times \frac{5\sqrt{5}}{8} \times \frac{3}{5} \\ &= \frac{925}{64}\end{aligned}$$

이므로 $\overline{CM} = \frac{5\sqrt{37}}{8}$

답 ⑤

3 ㄱ. 두 삼각형 ARS, APQ에서 사인법칙에 의하여

$\frac{\overline{RS}}{\sin(\angle RAS)} = 4$, $\frac{\overline{PQ}}{\sin(\angle PAQ)} = 6$

$\overline{RS} = 4\sin(\angle RAS)$, $\overline{PQ} = 6\sin(\angle PAQ)$

이때 $\sin(\angle RAS) = \sin(\angle PAQ)$이므로

$\overline{PQ} : \overline{RS} = 3 : 2$

따라서 $\overline{PQ} = \frac{3}{2}\overline{RS}$ (참)

ㄴ. [그림 1]에서 $\angle O_1AQ = \theta_1$이라 하면

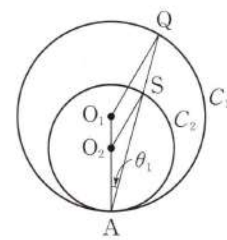
이등변삼각형 O_1AQ에서

$$\begin{aligned}\overline{AQ} &= 2 \times \overline{O_1A} \times \cos\theta_1 \\ &= 6\cos\theta_1\end{aligned}$$

이등변삼각형 O_2AS에서

$$\begin{aligned}\overline{AS} &= 2 \times \overline{O_2A} \times \cos\theta_1 \\ &= 4\cos\theta_1\end{aligned}$$

따라서 $\overline{AQ} : \overline{AS} = 3 : 2$



[그림 1]

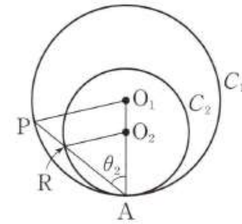
[그림 2]에서 $\angle O_1AP = \theta_2$라 하면

이등변삼각형 O_1AP에서

$$\begin{aligned}\overline{AP} &= 2 \times \overline{O_1A} \times \cos\theta_2 \\ &= 6\cos\theta_2\end{aligned}$$

이등변삼각형 O_2AR에서

$$\begin{aligned}\overline{AR} &= 2 \times \overline{O_2A} \times \cos\theta_2 \\ &= 4\cos\theta_2\end{aligned}$$



[그림 2]

따라서 $\overline{AP} : \overline{AR} = 3 : 2$

그러므로 두 삼각형 ARS, APQ는 서로 닮은 도형이고, 두 선분 PQ, RS는 서로 평행하다.

이때 두 선분 RS, O_2B의 교점을 V라 하면

두 삼각형 O_1AU, O_1VO_2는 각각 $\angle O_1AU = 90°$, $\angle O_1VO_2 = 90°$인 직각삼각형이고, 서로 닮은 도형이다.

따라서

$\sin(\angle O_1O_2V) = \sin(\angle O_1UA) = \frac{\overline{O_1A}}{\overline{O_1U}} = \frac{3}{\overline{O_1U}}$

이므로 삼각형 O_1BO_2의 넓이는

$$\frac{1}{2}\times\overline{O_1O_2}\times\overline{O_2B}\times\sin(\angle O_1O_2V)$$

$$=\frac{1}{2}\times1\times2\times\frac{3}{\overline{O_1U}}$$

$$=\frac{3}{\overline{O_1U}}\text{ (거짓)}$$

ㄷ. 삼각형 O_1O_2B에서 코사인법칙에 의하여

$$\overline{O_1B}^2$$

$$=\overline{O_1O_2}^2+\overline{O_2B}^2-2\times\overline{O_1O_2}\times\overline{O_2B}\times\cos(\angle O_1O_2B)$$

$$=1^2+2^2-2\times1\times2\times\cos(\angle O_1O_2B)$$

$$=5-4\cos(\angle O_1O_2B)$$

$$=5-4\cos(\angle O_1UA)$$

$$=5-4\times\frac{\overline{AU}}{\overline{O_1U}}$$

삼각형 O_1O_2T에서 코사인법칙에 의하여

$$\overline{O_2T}^2$$

$$=\overline{O_1O_2}^2+\overline{O_1T}^2-2\times\overline{O_1O_2}\times\overline{O_1T}\times\cos(\angle O_2O_1T)$$

$$=1^2+3^2-2\times1\times3\times\cos(90^\circ+\angle O_1O_2B)$$

$$=10+6\sin(\angle O_1O_2B)$$

$$=10+6\sin(\angle O_1UA)$$

$$=10+6\times\frac{\overline{O_1A}}{\overline{O_1U}}$$

따라서

$$\left(\frac{\overline{O_1B}^2-5}{4}\right)^2+\left(\frac{\overline{O_2T}^2-10}{6}\right)^2$$

$$=\left(-\frac{\overline{AU}}{\overline{O_1U}}\right)^2+\left(\frac{\overline{O_1A}}{\overline{O_1U}}\right)^2$$

$$=\frac{\overline{AU}^2+\overline{O_1A}^2}{\overline{O_1U}^2}$$

$$=\frac{\overline{O_1U}^2}{\overline{O_1U}^2}$$

$$=1\text{ (참)}$$

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

답 ④

05 등차수열과 등비수열

유제

본문 71~77쪽

1 ②	2 ④	3 ③	4 ④	5 ②
6 6	7 ⑤	8 62		

1 등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d라 하면

$a_4=5$에서 $a_1+3d=5$ ⋯⋯ ㉠

$a_8-a_5=(a_1+7d)-(a_1+4d)=3d=6$에서 $d=2$

$d=2$를 ㉠에 대입하면

$a_1+6=5$, $a_1=-1$

따라서 $a_7=a_1+6d=-1+6\times2=11$

답 ②

다른 풀이

등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d라 하면

$a_8-a_5=(a_1+7d)-(a_1+4d)=3d=6$에서

$d=2$

따라서 $a_7=a_4+3d=5+3\times2=11$

2 등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d라 하자.

세 수 6, a_2^2, $2a_3^2$이 이 순서대로 등차수열을 이루므로

$2\times a_2^2=6+2a_3^2$

즉, $a_2^2=3+a_3^2$이므로

$(a_1+d)^2=3+(a_1+2d)^2$

$d(2a_1+3d)=-3$

모든 항이 정수이므로 a_1, d는 모두 정수이고 $2a_1+3d$도 정수이다.

(i) $d=1$, $2a_1+3d=-3$일 때

$2a_1+3=-3$, $a_1=-3$이므로 a_1이 자연수라는 조건을 만족시키지 않는다.

(ii) $d=-1$, $2a_1+3d=3$일 때

$2a_1-3=3$, $a_1=3$

(iii) $d=3$, $2a_1+3d=-1$일 때

$2a_1+9=-1$, $a_1=-5$이므로 a_1이 자연수라는 조건을 만족시키지 않는다.

(iv) $d=-3$, $2a_1+3d=1$일 때

$2a_1-9=1$, $a_1=5$

(i)~(iv)에서 모든 a_1의 값의 합은

$3+5=8$

답 ④

3 등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d라 하면

$a_2=5$에서

$a_1+d=5$ …… ㉠

$S_8=\dfrac{8(2a_1+7d)}{2}=12$에서

$2a_1+7d=3$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a_1=\dfrac{32}{5}$, $d=-\dfrac{7}{5}$

따라서 $a_7-a_2=5d=-7$

답 ③

다른 풀이

등차수열 $\{a_n\}$에서

$a_1+a_8=(a_2-d)+(a_7+d)=a_2+a_7$

이므로

$S_8=\dfrac{8(a_1+a_8)}{2}=\dfrac{8(a_2+a_7)}{2}=12$

$a_2+a_7=3$

이때 $a_2=5$이므로 $a_7=-2$

따라서 $a_7-a_2=-2-5=-7$

4 $a_n=4n-7$이므로

$S_{20}-S_8=a_9+a_{10}+a_{11}+\cdots+a_{20}$

$=\dfrac{12(a_9+a_{20})}{2}$

$=\dfrac{12(29+73)}{2}=612$

답 ④

5 등비수열 $\{a_n\}$의 공비를 r라 하자.

$a_2=a_1r=12$이므로 $a_1\neq0$, $r\neq0$이다.

$a_4=2a_5$에서 $a_5=\dfrac{1}{2}a_4$이므로 $r=\dfrac{1}{2}$

따라서 $a_3=a_2r=12\times\dfrac{1}{2}=6$

답 ②

6 등비수열 $\{a_n\}$에 대하여 세 수 a_2, a_6, a_{10}이 이 순서대로 등비수열을 이루므로

$a_6^{\,2}=a_2a_{10}$

또한 세 수 a_4, a_6, a_8이 이 순서대로 등비수열을 이루므로

$a_6^{\,2}=a_4a_8$

따라서 $a_6^{\,4}=a_2a_{10}\times a_4a_8=a_2a_4\times a_8a_{10}=\dfrac{4}{3}\times27=36$

$a_6^{\,2}\geq0$이므로 $a_6^{\,2}=6$

답 6

다른 풀이

등비수열 $\{a_n\}$에서 등비중항을 이용하면

$a_3^{\,2}=a_2a_4=\dfrac{4}{3}$

$a_9^{\,2}=a_8a_{10}=27$

세 수 $a_3^{\,2}$, $a_6^{\,2}$, $a_9^{\,2}$이 이 순서대로 등비수열을 이루므로

$a_6^{\,4}=a_3^{\,2}\times a_9^{\,2}=\dfrac{4}{3}\times27=36$

$a_6^{\,2}\geq0$이므로 $a_6^{\,2}=6$

참고

등비수열 $\{a_n\}$의 일반항이 $a_n=ar^{n-1}$ $(r\neq0)$이면

$a_n^{\,2}=a^2(r^{n-1})^2=a^2(r^2)^{n-1}$

이므로 수열 $\{a_n^{\,2}\}$은 공비가 r^2인 등비수열이다.

7 등비수열 $\{a_n\}$의 공비를 r라 하자.

주어진 두 조건에서 $a_1\neq0$이므로

$a_2=\sqrt{2}a_1$에서 $r=\sqrt{2}$

$a_2+a_4+a_6+a_8+a_{10}$

$=a_1r+a_1r^3+a_1r^5+a_1r^7+a_1r^9$

$=(\sqrt{2}+2\sqrt{2}+4\sqrt{2}+8\sqrt{2}+16\sqrt{2})a_1$

$=31\sqrt{2}a_1$

이고 $a_2+a_4+a_6+a_8+a_{10}=93\sqrt{2}$이므로

$31\sqrt{2}a_1=93\sqrt{2}$

$a_1=3$

답 ⑤

8 등비수열 $\{a_n\}$의 공비를 r라 하자.

$r=1$이면

$S_2=2a_1$, $S_8-S_4=8a_1-4a_1=4a_1$

이므로 조건을 만족시킬 수 없다.

그러므로 $r\neq1$이다.

$S_2=\dfrac{a_1(r^2-1)}{r-1}=2$ …… ㉠

$S_8-S_4=a_5+a_6+a_7+a_8$

$=\dfrac{a_5(r^4-1)}{r-1}$

$=\dfrac{a_1r^4(r^2+1)(r^2-1)}{r-1}$

$=\dfrac{a_1(r^2-1)}{r-1}\times r^4(r^2+1)$

$=2\times r^4(r^2+1)=300$

$r^6+r^4-150=0$

$r^2=t$ $(t\geq0)$으로 놓으면

$t^3+t^2-150=0$

$(t-5)(t^2+6t+30)=0$

이때 $t^2+6t+30=(t+3)^2+21>0$이므로

$t=5$, 즉 $r^2=5$

$r^2=5$를 ㉠에 대입하면

$\frac{a_1}{r-1}\times(5-1)=2$

$\frac{a_1}{r-1}=\frac{1}{2}$

따라서

$S_6=\frac{a_1(r^6-1)}{r-1}=\frac{a_1}{r-1}\times\{(r^2)^3-1\}$

$=\frac{1}{2}\times(5^3-1)=62$

답 62

다른 풀이

등비수열 $\{a_n\}$의 공비를 r라 하면

$S_2=a_1+a_1r=a_1(1+r)=2$

$S_8-S_4=a_5+a_6+a_7+a_8$

$=(a_5+a_6)+(a_7+a_8)$

$=a_1(1+r)\times r^4+a_1(1+r)\times r^6$

$=2r^4+2r^6=300$

$r^6+r^4-150=0$

$r^2=t\ (t\geq0)$으로 놓으면

$t^3+t^2-150=0$

$(t-5)(t^2+6t+30)=0$

이때 $t^2+6t+30=(t+3)^2+21>0$이므로

$t=5$, 즉 $r^2=5$

따라서

$S_6=a_1+a_2+a_3+a_4+a_5+a_6$

$=(a_1+a_2)+(a_3+a_4)+(a_5+a_6)$

$=a_1(1+r)+a_1(1+r)\times r^2+a_1(1+r)\times r^4$

$=2+2\times5+2\times25=62$

Level 1 **기초 연습** 본문 78~80쪽

1 ③	2 ④	3 ①	4 ⑤	5 ⑤
6 ③	7 ③	8 ③	9 ①	10 ④
11 ①	12 15			

1 등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d라 하면

$a_4=a_1+3d$이므로

$9=3+3d$, $d=2$

따라서 $a_8=a_1+7d=3+7\times2=17$

답 ③

2 등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d라 하면

$a_5-a_3=(a_1+4d)-(a_1+2d)=2d=12$

$d=6$

따라서 $a_{10}-a_5=(a_1+9d)-(a_1+4d)=5d=30$

답 ④

3 등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d라 하면

$a_4-a_5=3$에서 $a_5-a_4=-3$이므로 $d=-3$

$a_1=a_2-d=5-(-3)=8$

따라서 $S_{10}=\frac{10\{2\times8+9\times(-3)\}}{2}=-55$

답 ①

4 6개의 수 4, x_1, x_2, x_3, x_4, 10이 이 순서대로 등차수열을 이루므로 이 6개의 수의 합은

$4+x_1+x_2+x_3+x_4+10=\frac{6(4+10)}{2}=42$

따라서 $x_1+x_2+x_3+x_4=28$

답 ⑤

다른 풀이

6개의 수 4, x_1, x_2, x_3, x_4, 10이 이 순서대로 등차수열을 이루므로

$x_1-4=10-x_4$에서 $x_1+x_4=14$

$x_2-4=10-x_3$에서 $x_2+x_3=14$

따라서 $x_1+x_2+x_3+x_4=28$

5 $S_{n+1}-S_n=a_{n+1}$이므로 $S_{n+1}-S_n=-5n+40$에서

$a_{n+1}=-5n+40$

n 대신 $n-1$을 대입하면

$a_n=-5(n-1)+40$

$=-5n+45\ (n\geq2)$

이때 수열 $\{a_n\}$이 등차수열이려면 $a_1=40$이고

$a_n=-5n+45\ (n\geq1)$이어야 한다.

$a_k=-5k+45<0$에서 $k>9$이므로 자연수 k의 최솟값은 10이다.

따라서 a_1+k의 최솟값은 50이다.

답 ⑤

6 $S_3=S_5$에서 $S_5-S_3=0$
$S_5-S_3=a_4+a_5$이므로
$a_4+a_5=0$
$a_2=-5$이므로 등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d라 하면
$a_4=a_2+2d=-5+2d$
$a_5=a_2+3d=-5+3d$
$a_4+a_5=0$에서
$(-5+2d)+(-5+3d)=0$
$d=2$
그러므로 $a_4=-1$, $a_5=1$
$a_1<a_2<a_3<a_4<0<a_5<\cdots$이므로 $n=4$일 때 S_n이 최소이다.
$a_1=a_2-d=-5-2=-7$, $a_4=-1$이므로
$S_4=\frac{4(a_1+a_4)}{2}=\frac{4(-7-1)}{2}=-16$

답 ③

7 등비수열 $\{a_n\}$의 공비를 r라 하면
$a_2=a_1r=3$ ...... ㉠
이때 $a_1\neq0$, $r\neq0$이다.
$\frac{a_4}{a_1}=\frac{a_1r^3}{a_1}=r^3=8$에서
$r^3-8=0$
$(r-2)(r^2+2r+4)=0$
이때 $r^2+2r+4=(r+1)^2+3>0$이므로
$r=2$
㉠에서 $a_1=\frac{3}{2}$
따라서 $a_6=a_1r^5=\frac{3}{2}\times32=48$

답 ③

8 세 수 a_1, a_3, a_5가 이 순서대로 등비수열을 이루므로
${a_3}^2=a_1a_5$ ...... ㉠
세 수 a_2, a_4, a_6이 이 순서대로 등비수열을 이루므로
${a_4}^2=a_2a_6$ ...... ㉡
㉠, ㉡에서
${a_3}^2{a_4}^2=a_1a_5\times a_2a_6=a_1a_2\times a_5a_6=12\times27=18^2$
이때 수열 $\{a_n\}$의 모든 항이 양수이므로
$a_3a_4=18$

답 ③

다른 풀이

등비수열 $\{a_n\}$의 공비를 r라 하면
$\frac{a_5a_6}{a_1a_2}=\frac{a_5}{a_1}\times\frac{a_6}{a_2}=r^4\times r^4=r^8$에서
$r^8=\frac{27}{12}=\frac{9}{4}$
$r^4=\frac{3}{2}$
따라서 $a_3a_4=a_1r^2\times a_2r^2=a_1a_2r^4=12\times\frac{3}{2}=18$

9 등비수열 $\{a_n\}$의 공비를 r라 하자.
모든 항이 음수인 등비수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여 $a_n<a_{n+1}$을 만족시키려면 $0<r<1$이어야 한다.
$\frac{a_2+a_4}{a_3}=\frac{10}{3}$에서
$\frac{a_2}{a_3}+\frac{a_4}{a_3}=\frac{10}{3}$
$\frac{a_2}{a_2r}+\frac{a_3r}{a_3}=\frac{10}{3}$
$\frac{1}{r}+r=\frac{10}{3}$
$3r^2-10r+3=0$
$(r-3)(3r-1)=0$
$0<r<1$이므로 $r=\frac{1}{3}$
따라서 $\frac{a_6}{a_4}=\frac{a_4r^2}{a_4}=r^2=\frac{1}{9}$

답 ①

10 등비수열 $\{a_n\}$의 공비를 r라 하자.
$r=1$이면 $S_6=6\times3=18$, $S_3=3\times3=9$이므로
$8S_6=35S_3$을 만족시키지 않는다.
그러므로 $r\neq1$이다.
$8S_6=35S_3$에서 $a_1=3$이므로
$8\times\frac{3(r^6-1)}{r-1}=35\times\frac{3(r^3-1)}{r-1}$
$8\times\frac{3(r^3-1)(r^3+1)}{r-1}=35\times\frac{3(r^3-1)}{r-1}$
$r^3+1=\frac{35}{8}$
$r^3=\frac{27}{8}$
r는 실수이므로 $r=\frac{3}{2}$
따라서 $a_2=a_1r=3\times\frac{3}{2}=\frac{9}{2}$

답 ④

11 등비수열 $\{a_n\}$의 공비를 r라 하면 모든 항이 양수이므로
$a_1>0$, $r>0$이다.
$r=1$이면 $S_1=a_1$, $S_2=2a_1$, $S_4=4a_1$이고
$S_2-S_1\neq S_4-S_2$이므로 세 수 S_1, S_2, S_4가 이 순서대로 등차수열을 이룬다는 조건을 만족시키지 않는다.
$r\neq1$일 때, 세 수 S_1, S_2, S_4가 이 순서대로 등차수열을 이루므로
$2S_2=S_1+S_4$
$2(a_1+a_2)=a_1+(a_1+a_2+a_3+a_4)$
$a_2-a_3-a_4=0$
$a_1r-a_1r^2-a_1r^3=0$
$a_1r(r^2+r-1)=0$
$a_1>0$, $r>0$이므로 $r^2+r-1=0$
$r=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$

답 ①

12 첫째항이 -2, 공차가 3인 등차수열 $\{a_n\}$의 일반항은
$a_n=-2+(n-1)\times3=3n-5$
$b_n=2^{a_n}$이므로
$b_5+b_6+b_7+b_8+b_9$
$=2^{a_5}+2^{a_6}+2^{a_7}+2^{a_8}+2^{a_9}$
$=2^{10}+2^{13}+2^{16}+2^{19}+2^{22}$
$=\dfrac{2^{10}\times\{(2^3)^5-1\}}{2^3-1}$
$=\dfrac{2^{10}}{7}(2^{15}-1)$
따라서 $m=15$

답 15

Level 2 기본 연습

본문 81~83쪽

1 ②	2 ④	3 ④	4 ①	5 ②
6 ③	7 ⑤	8 ①	9 ①	10 ⑤
11 19	12 ①			

1 $a_2-1=1-a_4$에서 $a_2+a_4=2$
등차수열 $\{a_n\}$에서 등차중항을 이용하면
$2a_3=a_2+a_4=2$, 즉 $a_3=1$
$|a_4-5|=|5-a_6|$에서
$a_4-5=5-a_6$ 또는 $a_4-5=a_6-5$
$a_4+a_6=10$ 또는 $a_4=a_6$
이때 공차가 0이 아니므로 $a_4+a_6=10$
등차중항을 이용하면
$2a_5=a_4+a_6=10$, 즉 $a_5=5$
세 수 a_1, a_3, a_5가 이 순서대로 등차수열을 이루므로
$2a_3=a_1+a_5$
따라서 $a_1=2a_3-a_5=2\times1-5=-3$

답 ②

2 공차가 2인 등차수열 $\{a_n\}$에서
$a_6-a_4=2\times2=4$
첫째항과 공비가 같은 등비수열 $\{b_n\}$의 첫째항과 공비를 모두 r라 하면
$b_4=r^4$, $b_6=r^6$
이때 $a_4=b_4$, $a_6=b_6$이므로
$r^6-r^4=4$
$r^2=t$라 하면 $r\neq0$이므로 $t>0$이고
$t^3-t^2-4=0$
$(t-2)(t^2+t+2)=0$
$t>0$일 때, $t^2+t+2>0$이므로 $t=2$
즉, $r^2=2$
따라서
$a_2=a_4-4=b_4-4=r^4-4=4-4=0$,
$b_2=r^2=2$
이므로
$a_2+b_2=0+2=2$

답 ④

3 등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d라 하면
$a_2a_4-a_1a_3=8$에서
$(a_1+d)(a_1+3d)-a_1(a_1+2d)=8$
$d(2a_1+3d)=8$ …… ㉠
$a_1+a_2+a_3+a_4=4$에서
$\dfrac{4(2a_1+3d)}{2}=4$
$2a_1+3d=2$ …… ㉡
㉠, ㉡에서
$d=4$, $a_1=-5$
따라서 $a_2=-1$, $a_3=3$, $a_4=7$이므로
$a_1a_2a_3a_4=(-5)\times(-1)\times3\times7=105$

답 ④

4 등비수열 $\{a_n\}$의 공비를 r라 하면 모든 항이 서로 다른 양수이므로
$r>0$, $r\neq1$

$S_6=\frac{15}{4}(a_7+a_8+a_9)$에서

$(a_1+a_2+a_3)+(a_4+a_5+a_6)=\frac{15}{4}(a_7+a_8+a_9)$

$(a_1+a_2+a_3)+r^3(a_1+a_2+a_3)=\frac{15}{4}r^6(a_1+a_2+a_3)$

$a_1+a_2+a_3>0$이므로

$1+r^3=\frac{15}{4}r^6$

$15r^6-4r^3-4=0$

$r^3=t\ (t>0)$이라 하면

$15t^2-4t-4=0$

$(3t-2)(5t+2)=0$

$t=\frac{2}{3}$ 또는 $t=-\frac{2}{5}$

$t>0$이므로 $t=\frac{2}{3}$

즉, $r^3=\frac{2}{3}$ …… ㉠

$S_6=1$에서

$\frac{a_1(r^6-1)}{r-1}=1$ …… ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면

$\frac{a_1}{r-1}\times\left(\frac{4}{9}-1\right)=1$

$\frac{a_1}{r-1}=-\frac{9}{5}$

답 ①

5 등비수열 $\{a_n\}$의 공비를 r라 하면

$$\frac{S_4}{S_3-S_1}=\frac{a_1+a_2+a_3+a_4}{a_2+a_3}$$
$$=\frac{a_1+a_2}{a_2+a_3}+\frac{a_3+a_4}{a_2+a_3}$$
$$=\frac{a_1+a_2}{r(a_1+a_2)}+\frac{r(a_2+a_3)}{a_2+a_3}$$
$$=\frac{1}{r}+r$$

$\frac{S_4}{S_3-S_1}=\frac{13}{6}$이므로

$\frac{1}{r}+r=\frac{13}{6}$

$6r^2-13r+6=0$

$(2r-3)(3r-2)=0$

$r>1$이므로 $r=\frac{3}{2}$

따라서 $\frac{a_4}{a_3-a_1}=\frac{a_1r^3}{a_1r^2-a_1}=\frac{r^3}{r^2-1}=\frac{\frac{27}{8}}{\frac{5}{4}}=\frac{27}{10}$

답 ②

6 등비수열 $\{a_n\}$의 공비를 r라 하면

$a_2a_4=3$이므로

$a_3a_5=a_2r\times a_4r=a_2a_4\times r^2=3r^2$

$a_3a_6=a_2r\times a_4r^2=a_2a_4\times r^3=3r^3$

$a_3a_5=a_3a_6-54$에서

$3r^2=3r^3-54,\ r^3-r^2-18=0$

$(r-3)(r^2+2r+6)=0$

이때 $r^2+2r+6=(r+1)^2+5>0$이므로 $r=3$

따라서 $a_1a_6=\frac{a_2}{r}\times a_4r^2=a_2a_4\times r=3r=9$

답 ③

7 등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d라 하면

$$S_{n+2}-S_n=a_{n+1}+a_{n+2}$$
$$=(a_1+nd)+\{a_1+(n+1)d\}$$
$$=2dn+2a_1+d$$

$|S_{n+2}-S_n|=|2dn+2a_1+d|=|6n-19|$에서

S_n의 최댓값이 존재하므로 $d\le0$이다.

a_1, d는 상수이므로

$2d=-6,\ 2a_1+d=19$

$d=-3,\ a_1=11$

따라서 $a_3=a_1+2d=11+2\times(-3)=5$

답 ⑤

8 조건 (가)에서 $n=7$일 때,

$S_8=S_7$, 즉 $S_8-S_7=0$

$S_8-S_7=b_8$이므로 $b_8=0$

즉, $b_8=a_8+a_6=0$

등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d라 하면

$(a_1+7d)+(a_1+5d)=0$

$a_1=-6d$

그러므로

$a_n=-6d+(n-1)d=(n-7)d$ …… ㉠

$b_n=a_n+a_6=(n-7)d+(-d)=(n-8)d$

또한 조건 (가)에서 $n=1$일 때, $S_1=S_{14}$이므로

$$S_{16}=S_{14}+b_{15}+b_{16}$$
$$=S_1+b_{15}+b_{16}$$
$$=b_1+b_{15}+b_{16}$$
$$=-7d+7d+8d$$
$$=8d$$

조건 (나)에서 $8d=40,\ d=5$

따라서 ㉠에서 $a_6=-d=-5$

답 ①

9 조건 (가)에서 세 수 2, k, $3k-4$가 이 순서대로 등비수열을 이루므로

$k^2=2(3k-4)$, $k^2-6k+8=0$

$(k-2)(k-4)=0$

$k\geq 3$이므로 $k=4$ …… ㉠

조건 (나)에서 세 수 a_3, a_5, a_9가 이 순서대로 등비수열을 이루므로

$a_5{}^2=a_3a_9$

등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d라 하면

$(a_1+4d)^2=(a_1+2d)(a_1+8d)$

$a_1{}^2+8a_1d+16d^2=a_1{}^2+10a_1d+16d^2$

$2a_1d=0$

$d\neq 0$이므로 $a_1=0$

그러므로 $a_n=0+(n-1)d=(n-1)d$ …… ㉡

㉠, ㉡에서

$a_k{}^2=a_4{}^2=(3d)^2=9d^2$

$a_k{}^2>100$에서

$9d^2>100$

따라서 자연수 d의 최솟값은 4이고 $a_2-a_1=d$이므로 a_2-a_1의 최솟값은 4이다.

답 ①

10 $b_n=a_n-|a_n|$에서

$a_n\geq 0$이면 $b_n=a_n-a_n=0$

$a_n<0$이면 $b_n=a_n+a_n=2a_n$

$b_6=a_6-|a_6|$이고 $b_6=a_6$이므로

$|a_6|=0$, 즉 $a_6=0$

그러므로 $a_6=b_6=0$

등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d라 하자.

$a_6=0$이므로 $d\leq 0$이면 $1\leq n\leq 5$인 모든 자연수 n에 대하여 $a_n\geq 0$이다.

이때 S_n의 최댓값은 0이 되어 S_n의 최댓값이 -2라는 조건을 만족시키지 않는다.

그러므로 $d>0$이다.

$1\leq n\leq 5$인 모든 자연수 n에 대하여 $a_n<0$이고, $n\geq 6$인 모든 자연수 n에 대하여 $a_n\geq 0$이다.

이때 $1\leq n\leq 5$인 모든 자연수 n에 대하여 $b_n<0$이고 $n\geq 6$인 모든 자연수 n에 대하여 $b_n=0$이므로

$S_1>S_2>S_3>S_4>S_5=S_6=S_7=\cdots$ …… ㉠

따라서 S_n은 $n=1$일 때 최대이고, S_n의 최댓값이 -2이므로

$S_1=b_1=2a_1=-2$

$a_1=-1$

㉠에서 S_n은 $n\geq 5$일 때 최소이고 $b_6=a_6=0$이므로 S_n의 최솟값은

$S_6=b_1+b_2+b_3+b_4+b_5+b_6$

$=2a_1+2a_2+2a_3+2a_4+2a_5+2a_6$

$=2\times\dfrac{6(a_1+a_6)}{2}$

$=6(-1+0)=-6$

답 ⑤

다른 풀이

등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d라 하자.

$b_6=a_6-|a_6|=a_6$에서

$|a_6|=0$, 즉 $a_6=a_1+5d=0$ …… ㉠

모든 자연수 n에 대하여 $b_n\leq 0$이므로 S_n은 $n=1$일 때 최댓값을 갖는다.

S_n의 최댓값이 -2이므로

$a_1-|a_1|=-2$에서 $a_1=-1$

$a_1=-1$을 ㉠에 대입하면 $d=\dfrac{1}{5}$이므로

$a_n=-1+(n-1)\times\dfrac{1}{5}=\dfrac{n}{5}-\dfrac{6}{5}$이고,

$1\leq n\leq 5$이면 $b_n=2a_n$, $n\geq 6$이면 $b_n=0$

따라서 S_n의 최솟값은

$S_5=2(a_1+a_2+a_3+a_4+a_5)$

$=2\times\dfrac{5(a_1+a_5)}{2}$

$=5\left(-1-\dfrac{1}{5}\right)=-6$

11 등비수열 $\{a_n\}$의 공비를 r라 하면 모든 항이 서로 다르므로

$r\neq 0$, $r\neq 1$, $r\neq -1$

조건 (가)에서 $n=2$일 때 $0<S_2\leq S_1$

이때 $S_1=a_1=2$, $S_2=a_1+a_2=2+2r$이므로

$0<2+2r\leq 2$에서 $-1<r\leq 0$

$r\neq 0$이므로 $-1<r<0$

조건 (나)에서

$|2r^{m-1}|+|2r^{m+1}|=5|r|^m$

$2|r|^{m-1}+2|r|^{m+1}=5|r|^m$

양변을 $|r|^{m-1}$으로 나누면

$2+2|r|^2=5|r|$

$2|r|^2-5|r|+2=0$

$(2|r|-1)(|r|-2)=0$

$|r|=\dfrac{1}{2}$ 또는 $|r|=2$

$-1<r<0$이므로 $r=-\dfrac{1}{2}$

따라서

$$S_5=\frac{2\times\left\{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^5\right\}}{1-\left(-\frac{1}{2}\right)}=\frac{4}{3}\times\frac{33}{32}=\frac{11}{8}$$

에서 $p=8$, $q=11$이므로

$p+q=8+11=19$

답 19

참고

모든 자연수 n에 대하여

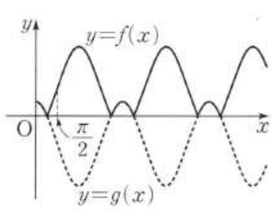
$$S_n=\frac{2\left\{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right\}}{1-\left(-\frac{1}{2}\right)}=\frac{4}{3}\left\{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right\}$$

$$\le\frac{4}{3}\left\{1-\left(-\frac{1}{2}\right)\right\}=2=S_1$$

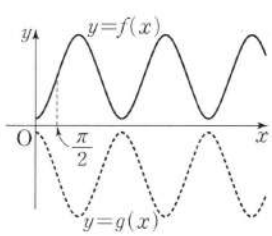
12 $g(x)=p\cos x+q$라 하면 $f(x)=|g(x)|$이다.

$0\le x\le\frac{\pi}{2}$에서 함수 $g(x)$가 감소하므로 $f(0)<f\left(\frac{\pi}{2}\right)$, 즉 $|g(0)|<\left|g\left(\frac{\pi}{2}\right)\right|$를 만족시키려면 $g\left(\frac{\pi}{2}\right)<0$이어야 한다.

함수 $g(x)$의 최댓값 $g(0)=p+q$의 부호에 따라 함수 $y=f(x)$의 그래프는 다음과 같은 경우가 있다.



[$p+q>0$일 때]



[$p+q\le0$일 때]

(i) $p+q>0$일 때

직선 $y=t$가 곡선 $y=f(x)$와 만나는 모든 점의 x좌표를 나열한 수열은 $t=f\left(\frac{\pi}{2}\right)$이면 첫째항이 $\frac{\pi}{2}$이고 공차가 π인 등차수열이고, $t=f(\pi)$이면 첫째항이 π이고 공차가 2π인 등차수열이다.

한편, 나머지 경우에는 직선 $y=t$가 곡선 $y=f(x)$와 만나는 모든 점의 x좌표를 나열한 수열은 연속하는 두 항 사이의 차가 π보다 큰 값과 π보다 작은 값이 모두 있으므로 등차수열이 되지 않는다.

$g\left(\frac{\pi}{2}\right)=q<0$, $g(\pi)=p\cos\pi+q=-p+q<0$이므로

$\alpha=f\left(\frac{\pi}{2}\right)=|q|=-q$, $\beta=f(\pi)=|-p+q|=p-q$

이때 $\alpha+\beta=7$이므로

$-q+(p-q)=7$, 즉 $p-2q=7$ …… ㉠

수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 $\frac{\pi}{2}$이고 공차가 π인 등차수열이므로

$a_3=\frac{\pi}{2}+2\times\pi=\frac{5}{2}\pi$

수열 $\{b_n\}$은 첫째항이 π이고 공차가 2π인 등차수열이므로

$b_2=\pi+1\times2\pi=3\pi$

$\frac{f(b_2)}{a_3}=\frac{2}{\pi}$, 즉 $f(b_2)=\frac{2}{\pi}\times a_3$이고

$|p\cos3\pi+q|=\frac{2}{\pi}\times\frac{5}{2}\pi$

$|-p+q|=5$

$p-q=5$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $p=3$, $q=-2$

(ii) $p+q\le0$일 때

직선 $y=t$가 곡선 $y=f(x)$와 만나는 모든 점의 x좌표를 나열한 수열은 $t=f(0)$이면 공차가 2π인 등차수열, $t=f\left(\frac{\pi}{2}\right)$이면 공차가 π인 등차수열, $t=f(\pi)$이면 공차가 2π인 등차수열이다.

이때 등차수열이 되도록 하는 t의 값이 2개뿐이라는 조건을 만족시키지 않는다.

(i), (ii)에서 $p=3$, $q=-2$

따라서 $5p+4q=5\times3+4\times(-2)=7$

답 ①

Level 3 실력 완성

본문 84쪽

1 3 **2** ④ **3** 768

1 $n(B)=10$이고 $B=(A\cap B)\cup(B-A)$, $(A\cap B)\cap(B-A)=\varnothing$이므로 조건 (나)에서

$n(A\cap B)=n(B-A)=5$

집합 $A\cap B$는 두 등차수열의 공통인 항의 집합이므로 집합 $A\cap B$의 모든 원소를 작은 수부터 나열하면 이 순서대로 등차수열을 이룬다.

이 등차수열을 $\{c_n\}$이라 하고, 등차수열 $\{c_n\}$의 공차를 d라 하면 d도 자연수이고 d_1, d_2의 공배수이다.

이때 $a_5=b_5=3$에서 $3\in A\cap B$, 즉 3은 수열 $\{c_n\}$의 항이고, $d=1$ 또는 $d=2$이면 수열 $\{c_n\}$의 항의 개수가 5보다

크게 되어 조건을 만족시키지 않는다.
그러므로 $d\geq 3$
이때 $c_1=3$이고, $c_5\leq 20<c_6$이므로
$3+4d\leq 20<3+5d$
$\frac{17}{5}<d\leq\frac{17}{4}$
d는 자연수이므로 $d=4$
그러므로 $A\cap B=\{3, 7, 11, 15, 19\}$ ······ ㉠
한편, d_1과 d_2는 모두 d, 즉 4의 약수이다.
그런데 d_1, d_2가 모두 1 또는 2의 값을 가지면
$n(A\cap B)>5$가 되어 조건을 만족시키지 않는다.
또한 $c_5-c_1=19-3=16$이므로
$d_2=1$이면 $19=b_{21}$, $d_2=2$이면 $19=b_{13}$이 되어 $19\not\in B$,
즉 $19\not\in A\cap B$가 되어 ㉠을 만족시키지 않는다.
그러므로 $d_2=4$
따라서 두 자연수 d_1, d_2의 모든 순서쌍 (d_1, d_2)는
$(4, 4)$, $(1, 4)$, $(2, 4)$
이고, 그 개수는 3이다.

답 3

2 등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d라 하면 조건 (가)에서 $d>0$이다.
이때 수열 $\{b_n\}$에서
$$b_{n+1}-b_n=(a_{n+1}+a_{n+2})-(a_n+a_{n+1})$$
$$=a_{n+2}-a_n=2d$$
이므로 수열 $\{b_n\}$은 공차가 $2d$인 등차수열이다.
세 점 $P_{12}(12, a_{12})$, $Q_{10}(10, a_{10}+a_{11})$, $Q_k(k, a_k+a_{k+1})$에 대하여 직선 $Q_{10}Q_k$의 기울기가 $2d$이고 두 직선 $Q_{10}Q_k$, $Q_{10}P_{12}$는 서로 수직이므로
$$2d\times\frac{a_{12}-(a_{10}+a_{11})}{12-10}=-1$$
$$a_{12}-(a_{10}+a_{11})=-\frac{1}{d}$$
$$(a_1+11d)-\{(a_1+9d)+(a_1+10d)\}=-\frac{1}{d}$$
$$-a_1-8d=-\frac{1}{d}$$
$$8d^2+a_1d-1=0$$
$d>0$이므로
$$d=\frac{-a_1+\sqrt{a_1^{\,2}+32}}{16} \quad \cdots\cdots ㉠$$
첫째항이 정수이고 모든 항이 유리수이므로 공차 d는 유리수이다.
a_1이 정수이므로 $a_1^{\,2}+32$는 자연수이고 ㉠에서 $\sqrt{a_1^{\,2}+32}$는 유리수이다.
그러므로 자연수 l에 대하여 $a_1^{\,2}+32=l^2$으로 놓을 수 있다.
이때
$$d=\frac{-a_1+l}{16}$$
이고 $d>0$이므로 $l-a_1>0$이다.
$l^2-a_1^{\,2}=32$에서
$(l-a_1)(l+a_1)=32$
따라서 l, a_1, d는 다음 표와 같은 경우가 있다.

$l-a_1$	$l+a_1$	l	a_1	d
1	32	×	×	×
2	16	9	7	$\frac{1}{8}$
4	8	6	2	$\frac{1}{4}$
8	4	6	-2	$\frac{1}{2}$
16	2	9	-7	1
32	1	×	×	×

$b_{10}=a_{10}+a_{11}=(a_1+9d)+(a_1+10d)=2a_1+19d$이므로 각 경우에서 b_{10}은
$\frac{131}{8}$, $\frac{35}{4}$, $\frac{11}{2}$, 5
이다.
따라서 b_{10}의 최댓값 $M=\frac{131}{8}$, 최솟값 $m=5$이므로
$$M+m=\frac{131}{8}+5=\frac{171}{8}$$

답 ④

3 등비수열 $\{a_n\}$의 공비를 r라 하면 모든 항이 서로 다르므로
$a_1\neq 0$, $r\neq 0$, $r\neq 1$, $r\neq -1$이다. ······ ㉠
수열 $\{a_n^{\,2}\}$은 모든 항이 양수이고 공비가 r^2인 등비수열이므로
$|r|>1$이면 n의 값이 커질 때 $a_n^{\,2}$의 값이 커지고,
$0<|r|<1$이면 n의 값이 커질 때 $a_n^{\,2}$의 값이 작아진다.
따라서 $\alpha_1=a_{10}^{\,2}$, $\alpha_2=a_9^{\,2}$ 또는 $\alpha_1=a_1^{\,2}$, $\alpha_2=a_2^{\,2}$이므로
$\frac{\alpha_1}{\alpha_2}=r^2$ 또는 $\frac{\alpha_1}{\alpha_2}=\frac{1}{r^2}$
수열 $\{(-1)^na_n\}$은 공비가 $-r$인 등비수열이다.
모든 자연수 n에 대하여
$(-1)^{2n-1}a_{2n-1}=-a_1r^{2n-2}$, $(-1)^{2n}a_{2n}=a_1r^{2n-1}$ ······ ㉡
이므로 $r>0$이면 부호가 양, 음 또는 음, 양으로 교대로 바뀌어 나타나고, $r<0$이면 모든 항이 양수이거나 모든 항이 음수이다.

$r>0$이면 부호가 양, 음 또는 음, 양으로 교대로 바뀌어 나타나고 β_1, β_2는 양수이므로

$\dfrac{\beta_1}{\beta_2}=r^2$ 또는 $\dfrac{\beta_1}{\beta_2}=\dfrac{1}{r^2}$

이때 ㉠인 r에 대하여 $\dfrac{\alpha_1}{\alpha_2}=\left(\dfrac{\beta_1}{\beta_2}\right)^2$을 만족시키지 않는다.

그러므로 $r<0$이다.

또한 $r<0$일 때, ㉡에서 $a_1>0$이면 모든 항이 음수이므로 $\beta_2<0$이 되어 $\beta_2=8$이라는 조건을 만족시키지 않는다.

그러므로 $a_1<0$이다.

(i) $a_1<0$, $-1<r<0$일 때

$\alpha_1=a_1^2$, $\alpha_2=a_2^2=a_1^2r^2$

$\beta_1=(-1)^1a_1=-a_1$, $\beta_2=(-1)^2a_2=a_1r$

$\beta_2=8$에서 $a_1r=8$ …… ㉢

$\dfrac{\alpha_1-\alpha_2}{\beta_1+\beta_2}=4$에서

$\dfrac{a_1^2-a_1^2r^2}{-a_1+a_1r}=4$

$\dfrac{a_1^2(1-r)(1+r)}{-a_1(1-r)}=4$

$-a_1(1+r)=4$

$-a_1-a_1r=4$ …… ㉣

㉢, ㉣에서

$a_1=-12$, $r=-\dfrac{2}{3}$

(ii) $a_1<0$, $r<-1$일 때

$\alpha_1=a_{10}^2=a_1^2r^{18}$, $\alpha_2=a_9^2=a_1^2r^{16}$

$\beta_1=(-1)^{10}a_{10}=a_1r^9$, $\beta_2=(-1)^9a_9=-a_1r^8$

$b_1=-a_1r^9$, $r'=\dfrac{1}{r}$이라 하면

$\alpha_1=b_1^2$, $\alpha_2=b_1^2(r')^2$, $\beta_1=-b_1$, $\beta_2=b_1r'$

이므로 (i)에 의하여

$b_1=-a_1r^9=-12$, $r'=\dfrac{1}{r}=-\dfrac{2}{3}$

이때 $a_1=12\times\left(-\dfrac{2}{3}\right)^9$이므로 a_1이 정수라는 조건을 만족시키지 않는다.

(i), (ii)에서

$a_1=-12$, $r=-\dfrac{2}{3}$

따라서

$$\begin{aligned}a_1\times\beta_3&=a_1^2\times(-a_1r^2)\\&=-a_1\times(a_1r)^2\\&=12\times8^2\\&=768\end{aligned}$$

답 768

06 수열의 합과 수학적 귀납법

유제 본문 87~97쪽

1 ①	2 80	3 ④	4 ①	5 58
6 ②	7 ③	8 89	9 ②	10 503
11 ③				

1 $\sum_{k=1}^{10}(a_k-b_k)=4$에서 $\sum_{k=1}^{10}a_k-\sum_{k=1}^{10}b_k=4$ …… ㉠

$\sum_{k=1}^{9}a_k=\sum_{k=1}^{9}(b_k+1)$에서

$\sum_{k=1}^{9}a_k=\sum_{k=1}^{9}b_k+\sum_{k=1}^{9}1$

$\sum_{k=1}^{9}a_k-\sum_{k=1}^{9}b_k=9$ …… ㉡

㉠, ㉡에서

$\left(\sum_{k=1}^{10}a_k-\sum_{k=1}^{9}a_k\right)-\left(\sum_{k=1}^{10}b_k-\sum_{k=1}^{9}b_k\right)=4-9$

따라서 $a_{10}-b_{10}=-5$

답 ①

2 등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d라 하면

$a_3=a_1+2d=4$ …… ㉠

$\sum_{k=1}^{8}a_k=\dfrac{8(2a_1+7d)}{2}=44$에서

$2a_1+7d=11$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a_1=2$, $d=1$

그러므로 $a_n=2+(n-1)\times1=n+1$

이때 수열 $\{a_{2n}\}$도 등차수열이므로

$\sum_{k=1}^{8}a_{2k}=\dfrac{8(a_2+a_{16})}{2}=\dfrac{8(3+17)}{2}=80$

답 80

3 $$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{8}\frac{k^3-k}{k+1}&=\sum_{k=1}^{8}\frac{k(k+1)(k-1)}{k+1}\\&=\sum_{k=1}^{8}(k^2-k)\\&=\frac{8\times9\times17}{6}-\frac{8\times9}{2}\\&=204-36=168\end{aligned}$$

답 ④

4 $\displaystyle\sum_{k=1}^{20} a_k=\sum_{k=1}^{10}(a_{2k-1}+a_{2k})$

$\displaystyle=\sum_{k=1}^{10}\{(-1)^{2k-1}\times(2k-1)^2+(-1)^{2k}\times(2k)^2\}$

$\displaystyle=\sum_{k=1}^{10}\{-(2k-1)^2+(2k)^2\}$

$\displaystyle=\sum_{k=1}^{10}(4k-1)$

$\displaystyle=4\times\frac{10\times11}{2}-1\times10$

$=220-10=210$

답 ①

5 이차방정식 $n(n+2)x^2-x-2=0$의 근과 계수의 관계에 의하여 두 실근의 합은

$\displaystyle a_n=\frac{1}{n(n+2)}$

$\displaystyle\sum_{k=1}^{8} a_k=\sum_{k=1}^{8}\frac{1}{k(k+2)}$

$\displaystyle=\sum_{k=1}^{8}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+2}\right)$

$\displaystyle=\frac{1}{2}\left\{\left(1-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{7}-\frac{1}{9}\right)+\left(\frac{1}{8}-\frac{1}{10}\right)\right\}$

$\displaystyle=\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{9}-\frac{1}{10}\right)$

$\displaystyle=\frac{29}{45}$

따라서 $\displaystyle 90\times\sum_{k=1}^{8} a_k=90\times\frac{29}{45}=58$

답 58

6 $\displaystyle\sum_{k=1}^{4}\frac{5}{a_{2k}a_{2k+2}}$

$\displaystyle=\sum_{k=1}^{4}\frac{5}{a_{2k+2}-a_{2k}}\left(\frac{1}{a_{2k}}-\frac{1}{a_{2k+2}}\right)$

$\displaystyle=\sum_{k=1}^{4}\frac{5}{2d}\left(\frac{1}{a_{2k}}-\frac{1}{a_{2k+2}}\right)$

$\displaystyle=\frac{5}{2d}\left\{\left(\frac{1}{a_2}-\frac{1}{a_4}\right)+\left(\frac{1}{a_4}-\frac{1}{a_6}\right)+\left(\frac{1}{a_6}-\frac{1}{a_8}\right)+\left(\frac{1}{a_8}-\frac{1}{a_{10}}\right)\right\}$

$\displaystyle=\frac{5}{2d}\left(\frac{1}{a_2}-\frac{1}{a_{10}}\right)$

$\displaystyle=\frac{5}{2d}\left(\frac{1}{3+d}-\frac{1}{3+9d}\right)$

$\displaystyle=\frac{5}{2d}\times\frac{8d}{(3+d)(3+9d)}$

$\displaystyle=\frac{20}{(3+d)(3+9d)}=1$

$9d^2+30d-11=0$

$(3d-1)(3d+11)=0$

$d>0$이므로 $d=\frac{1}{3}$

답 ②

7 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여 $a_{n+1}=a_n-4$를 만족시키므로 공차가 -4인 등차수열이다.

$a_1=21$이므로

$a_n=21+(n-1)\times(-4)=-4n+25$

$a_m>0$에서

$-4m+25>0$, $m<\frac{25}{4}$

따라서 자연수 m은 1, 2, 3, 4, 5, 6이므로 모든 m의 값의 합은

$\frac{6\times7}{2}=21$

답 ③

8 조건 (나)에서

$\displaystyle\frac{S_{n+1}-S_n}{a_{n+1}-a_n}=3$

$\displaystyle\frac{a_{n+1}}{a_{n+1}-a_n}=3$

$a_{n+1}=3a_{n+1}-3a_n$

$a_{n+1}=\frac{3}{2}a_n$

즉, 수열 $\{a_n\}$은 공비가 $\frac{3}{2}$인 등비수열이다.

$a_2=\frac{3}{2}a_1$이고 조건 (가)에서 $a_2-a_1=1$이므로

$\frac{3}{2}a_1-a_1=1$

$a_1=2$

그러므로 $a_5=2\times\left(\frac{3}{2}\right)^4=\frac{81}{8}$

따라서 $p=8$, $q=81$이므로

$p+q=8+81=89$

답 89

9 $a_n+a_{n+1}=2n+1$ ...... ㉠

㉠에 $n=3$을 대입하면

$a_3+a_4=7$

두 식 $a_3-a_4=1$, $a_3+a_4=7$에서 $a_3=4$, $a_4=3$

㉠에 $n=2$를 대입하면

$a_2+a_3=5$, $a_2=5-a_3=1$

㉠에 $n=1$을 대입하면

$a_1+a_2=3$, $a_1=3-a_2=2$

답 ②

10 $(a_{n+1}-a_n)^2-(a_{n+1}-a_n)-2=0$에서

$(a_{n+1}-a_n-2)(a_{n+1}-a_n+1)=0$

$a_{n+1}-a_n-2=0$ 또는 $a_{n+1}-a_n+1=0$

$a_{n+1}=a_n+2$ 또는 $a_{n+1}=a_n-1$ …… ㉠

$\sum_{k=1}^{20}a_k$의 최댓값 M은 첫째항 $a_1=4$이고 모든 자연수 n에 대하여 $a_{n+1}=a_n+2$, 즉 공차가 2인 등차수열일 때이므로

$M=\frac{20(2\times4+19\times2)}{2}=460$

㉠을 만족시키면서 모든 항이 자연수인 수열 $\{a_n\}$에 대하여 $\sum_{k=1}^{20}a_k$의 값이 최소가 되도록 첫째항부터 나열하면

4, 3, 2, 1, 3, 2, 1, …

이므로

$m=4+3+(2+1+3)\times6=43$

따라서 $M+m=460+43=503$

답 503

11 (i) $n=2$일 때

$(\text{좌변})=\sum_{k=1}^{2}\sqrt{k}\times\sum_{k=1}^{2}\frac{1}{\sqrt{k}}$

$=(1+\sqrt{2})\times\left(1+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

$=2+\frac{3\sqrt{2}}{2}$,

$(\text{우변})=2^2=4$

이므로 (∗)이 성립한다.

(ii) $n=m\ (m\geq2)$일 때, (∗)이 성립한다고 가정하면

$\sum_{k=1}^{m}\sqrt{k}\times\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{\sqrt{k}}>m^2$이므로

$\sum_{k=1}^{m+1}\sqrt{k}\times\sum_{k=1}^{m+1}\frac{1}{\sqrt{k}}$

$=\left(\sum_{k=1}^{m}\sqrt{k}+\sqrt{m+1}\right)\times\left(\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{\sqrt{k}}+\frac{1}{\sqrt{m+1}}\right)$

$=\sum_{k=1}^{m}\sqrt{k}\times\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{\sqrt{k}}+\sum_{k=1}^{m}\boxed{\left(\frac{\sqrt{k}}{\sqrt{m+1}}+\frac{\sqrt{m+1}}{\sqrt{k}}\right)}+1$

$>m^2+1+\sum_{k=1}^{m}\boxed{\left(\frac{\sqrt{k}}{\sqrt{m+1}}+\frac{\sqrt{m+1}}{\sqrt{k}}\right)}$

이때

$\frac{\sqrt{k}}{\sqrt{m+1}}+\frac{\sqrt{m+1}}{\sqrt{k}}=\left(\frac{\sqrt[4]{k}}{\sqrt[4]{m+1}}-\frac{\sqrt[4]{m+1}}{\sqrt[4]{k}}\right)^2+2$이고

$k<m+1$이므로

$\frac{\sqrt{k}}{\sqrt{m+1}}+\frac{\sqrt{m+1}}{\sqrt{k}}=\left(\frac{\sqrt[4]{k}}{\sqrt[4]{m+1}}-\frac{\sqrt[4]{m+1}}{\sqrt[4]{k}}\right)^2+2>2$

그러므로

$\sum_{k=1}^{m+1}\sqrt{k}\times\sum_{k=1}^{m+1}\frac{1}{\sqrt{k}}$

$>m^2+1+\sum_{k=1}^{m}\left(\frac{\sqrt{k}}{\sqrt{m+1}}+\frac{\sqrt{m+1}}{\sqrt{k}}\right)$

$>m^2+1+\sum_{k=1}^{m}\boxed{2}$

$=m^2+1+2m$

$=(m+1)^2$

즉, $n=m+1$일 때도 (∗)이 성립한다.

(i), (ii)에 의하여 모든 자연수 n에 대하여 (∗)이 성립한다.

따라서 (가)에 알맞은 식 $\frac{\sqrt{k}}{\sqrt{m+1}}+\frac{\sqrt{m+1}}{\sqrt{k}}$에 $k=4$, $m=8$을 대입한 값은

$p=\frac{2}{3}+\frac{3}{2}=\frac{13}{6}$

이고 $q=2$이므로

$p+q=\frac{13}{6}+2=\frac{25}{6}$

답 ③

Level 1 **기초 연습** 본문 98~99쪽

1 ⑤	2 ③	3 ③	4 ④	5 7
6 ⑤	7 ①	8 24		

1 $\sum_{k=1}^{10}(a_k+1)^2=\sum_{k=1}^{10}(a_k^2+2a_k+1)$

$=\sum_{k=1}^{10}a_k^2+2\sum_{k=1}^{10}a_k+\sum_{k=1}^{10}1$

$=8+2\times5+1\times10=28$

답 ⑤

2 $\sum_{k=1}^{6}k^2=\frac{6\times7\times13}{6}=91$

$\sum_{k=1}^{6}ak=a\sum_{k=1}^{6}k=a\times\frac{6\times7}{2}=21a$

$\sum_{k=1}^{6}k^2=\sum_{k=1}^{6}ak$에서

$91=21a$

따라서 $a=\frac{13}{3}$

답 ③

3 $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k}}$

$\displaystyle=\sum_{k=1}^{n}\frac{\sqrt{k+1}-\sqrt{k}}{(\sqrt{k+1}+\sqrt{k})(\sqrt{k+1}-\sqrt{k})}$

$\displaystyle=\sum_{k=1}^{n}(\sqrt{k+1}-\sqrt{k})$

$=(\sqrt{2}-\sqrt{1})+(\sqrt{3}-\sqrt{2})+(\sqrt{4}-\sqrt{3})+\cdots$
$+(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$

$=\sqrt{n+1}-1\geq 6$

$\sqrt{n+1}\geq 7$

$n+1\geq 49$

$n\geq 48$

따라서 n의 최솟값은 48이다.

답 ③

4 $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(a_{k+1}-a_k)$

$=(a_2-a_1)+(a_3-a_2)+(a_4-a_3)+\cdots+(a_{n+1}-a_n)$

$=a_{n+1}-a_1$

$=a_{n+1}-3$

이므로 $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(a_{k+1}-a_k)=2^n+n$에서

$a_{n+1}-3=2^n+n$

$a_{n+1}=2^n+n+3$

$n=7$을 대입하면

$a_8=2^7+7+3=138$

답 ④

5 모든 자연수 n에 대하여 $a_{n+1}-a_n=3$이므로 수열 $\{a_n\}$은 공차가 3인 등차수열이다.

이때 $a_5=a_1+4\times 3=a_1+12$

모든 자연수 n에 대하여 $\dfrac{b_{n+1}}{b_n}=3$이므로 수열 $\{b_n\}$은 공비가 3인 등비수열이다.

이때 $b_5=b_1\times 3^4=81b_1$

$a_1=b_1$, $a_5=b_5$이므로

$a_1+12=81a_1$

$80a_1=12$

$a_1=\dfrac{3}{20}$

따라서

$a_2=a_1+3=\dfrac{3}{20}+3=\dfrac{63}{20}$,

$b_2=b_1\times 3=\dfrac{3}{20}\times 3=\dfrac{9}{20}$

이므로 $\dfrac{a_2}{b_2}=7$

답 7

6 $a_2=\dfrac{1}{2}$이므로

$a_3=-a_2+2=-\dfrac{1}{2}+2=\dfrac{3}{2}$

(i) $0<a_1\leq 1$일 때

$a_2=-a_1+2$이므로

$\dfrac{1}{2}=-a_1+2$, $a_1=\dfrac{3}{2}$

그런데 이 값은 $0<a_1\leq 1$을 만족시키지 않는다.

(ii) $1<a_1<2$일 때

$a_2=2(a_1-1)$이므로

$\dfrac{1}{2}=2(a_1-1)$, $a_1=\dfrac{5}{4}$

(i), (ii)에서 $a_1=\dfrac{5}{4}$

따라서 $a_1+a_3=\dfrac{5}{4}+\dfrac{3}{2}=\dfrac{11}{4}$

답 ⑤

7 $a_2=\dfrac{1}{a_1}$, $a_3=2a_2=\dfrac{2}{a_1}$, $a_4=\dfrac{1}{a_3}=\dfrac{a_1}{2}$,

$a_5=2a_4=a_1$, $a_6=a_2$, $\cdots$

이므로 모든 자연수 n에 대하여

$a_{4n-3}=a_1$, $a_{4n-2}=\dfrac{1}{a_1}$, $a_{4n-1}=\dfrac{2}{a_1}$, $a_{4n}=\dfrac{a_1}{2}$

$a_9=a_1$, $a_{12}=\dfrac{a_1}{2}$이고 $a_9+a_{12}=6$이므로

$a_1+\dfrac{a_1}{2}=6$

$a_1=4$

따라서

$\displaystyle\sum_{k=1}^{16}a_k=4\times(a_1+a_2+a_3+a_4)$

$=4\times\left(a_1+\dfrac{1}{a_1}+\dfrac{2}{a_1}+\dfrac{a_1}{2}\right)$

$=4\times\left(4+\dfrac{1}{4}+\dfrac{2}{4}+\dfrac{4}{2}\right)$

$=27$

답 ①

8 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여 $a_{n+1}{}^2=a_na_{n+2}$를 만족시키므로 수열 $\{a_n\}$은 등비수열이다.

등비수열 $\{a_n\}$의 공비를 r라 하면 모든 항이 서로 다르므로

$r\neq 0$, $r\neq 1$, $r\neq -1$

모든 자연수 n에 대하여

$\dfrac{a_{n+1}{}^2}{a_n{}^2}=\left(\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right)^2=r^2$

이므로 수열 $\{a_n{}^2\}$은 첫째항이 $a_1{}^2$이고 공비가 r^2인 등비수열이다.

또한 모든 자연수 n에 대하여

$$\frac{a_{2n+1}-a_{2n+2}}{a_{2n-1}-a_{2n}}=\frac{r^2(a_{2n-1}-a_{2n})}{a_{2n-1}-a_{2n}}=r^2$$

이므로 수열 $\{a_{2n-1}-a_{2n}\}$은 첫째항이 $a_1-a_2=a_1(1-r)$이고 공비가 r^2인 등비수열이다.

$\sum_{k=1}^{5}a_k{}^2=2\sum_{k=1}^{5}(a_{2k-1}-a_{2k})$에서

$$\frac{a_1{}^2\{1-(r^2)^5\}}{1-r^2}=2\times\frac{a_1(1-r)\{1-(r^2)^5\}}{1-r^2}$$

$$\frac{36(1-r^{10})}{1-r^2}=2\times\frac{6(1-r)(1-r^{10})}{1-r^2}$$

$36=12(1-r)$

$1-r=3$

$r=-2$

따라서 $a_3=a_1r^2=6\times(-2)^2=24$

답 24

Level 2 기본 연습

본문 100~101쪽

1 ④　2 110　3 ②　4 ④　5 ④
6 ②　7 ③

1 $\sum_{k=1}^{9}\frac{(k+1)^2}{k^2(k+1)}-\sum_{k=1}^{9}\frac{(k-1)^2}{k^2(k+1)}$

$=\sum_{k=1}^{9}\frac{(k+1)^2-(k-1)^2}{k^2(k+1)}$

$=\sum_{k=1}^{9}\frac{4k}{k^2(k+1)}$

$=\sum_{k=1}^{9}\frac{4}{k(k+1)}$

$=4\times\sum_{k=1}^{9}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)$

$=4\times\left\{\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{9}-\frac{1}{10}\right)\right\}$

$=4\times\left(1-\frac{1}{10}\right)$

$=\frac{18}{5}$

답 ④

2 $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k}=3^n+6$에서

(i) $n=1$일 때

$\frac{1}{a_1}=3+6=9$, 즉 $a_1=\frac{1}{9}$

(ii) $n\ge2$일 때

$\frac{1}{a_n}=(3^n+6)-(3^{n-1}+6)$

$=3^{n-1}\times(3-1)$

$=2\times3^{n-1}$

$a_n=\frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$

(i), (ii)에서 $a_1=\frac{1}{9}$, $a_n=\frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$ $(n\ge2)$이므로

$\sum_{k=1}^{5}a_k=a_1+\sum_{k=2}^{5}a_k$

$=\frac{1}{9}+\frac{\frac{1}{6}\times\left\{1-\left(\frac{1}{3}\right)^4\right\}}{1-\frac{1}{3}}$

$=\frac{1}{9}+\frac{20}{81}=\frac{29}{81}$

따라서 $p=81$, $q=29$이므로

$p+q=81+29=110$

답 110

3 $|a_5|=|a_6|$에서

$a_5=a_6$ 또는 $a_5=-a_6$

공차가 음수이므로 $a_5=-a_6$

이때

$a_5=a_1+4\times(-2)=a_1-8$, $a_6=a_1+5\times(-2)=a_1-10$ …… ㉠

이므로 $a_5=-a_6$에서

$a_1-8=-a_1+10$

$a_1=9$

㉠에서 $a_5=1$, $a_6=-1$이므로

$a_1>a_2>a_3>a_4>a_5>0>a_6>a_7>a_8>\cdots$

이고, $|a_1|=|a_{10}|$, $|a_2|=|a_9|$, $|a_3|=|a_8|$, $|a_4|=|a_7|$, $|a_5|=|a_6|$이다.

따라서

$\sum_{k=1}^{9}\frac{1}{\sqrt{|a_{k+1}|}+\sqrt{|a_k|}}$

$=2\times\sum_{k=1}^{4}\frac{1}{\sqrt{|a_{k+1}|}+\sqrt{|a_k|}}+\frac{1}{\sqrt{|a_6|}+\sqrt{|a_5|}}$

$=2\times\sum_{k=1}^{4}\frac{\sqrt{a_{k+1}}-\sqrt{a_k}}{(\sqrt{a_{k+1}}+\sqrt{a_k})(\sqrt{a_{k+1}}-\sqrt{a_k})}+\frac{1}{2\sqrt{a_5}}$

$=2\times\sum_{k=1}^{4}\frac{\sqrt{a_{k+1}}-\sqrt{a_k}}{a_{k+1}-a_k}+\frac{1}{2\sqrt{a_5}}$

$=2\times\sum_{k=1}^{4}\frac{\sqrt{a_{k+1}}-\sqrt{a_k}}{-2}+\frac{1}{2\sqrt{a_5}}$

$=\sum_{k=1}^{4}(\sqrt{a_k}-\sqrt{a_{k+1}})+\frac{1}{2\sqrt{a_5}}$

$=\{(\sqrt{a_1}-\sqrt{a_2})+(\sqrt{a_2}-\sqrt{a_3})+(\sqrt{a_3}-\sqrt{a_4})$
$+(\sqrt{a_4}-\sqrt{a_5})\}+\frac{1}{2\sqrt{a_5}}$

$=\sqrt{a_1}-\sqrt{a_5}+\frac{1}{2\sqrt{a_5}}$

$=3-1+\frac{1}{2}=\frac{5}{2}$

답 ②

4 $n\geq 2$일 때, $a_n=S_n-S_{n-1}$, $a_{n+1}=S_{n+1}-S_n$

$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{S_{n+1}}{S_n}$에서

$\frac{S_{n+1}-S_n}{S_n-S_{n-1}}=\frac{S_{n+1}}{S_n}$

$S_nS_{n+1}-S_n^2=S_nS_{n+1}-S_{n-1}S_{n+1}$

$S_n^2=S_{n-1}S_{n+1}$

그러므로 수열 $\{S_n\}$은 등비수열이다.

$S_1=a_1=1$, $S_2=a_1+a_2=1+1=2$에서

$\frac{S_2}{S_1}=2$이므로

$S_n=S_1\times 2^{n-1}=2^{n-1}$

$n\geq 2$일 때,

$a_n=S_n-S_{n-1}=2^{n-1}-2^{n-2}=2^{n-2}$

따라서 $a_8=2^6=64$

답 ④

5 $a_n\leq 0$이면 $a_{n+1}=-a_n+4$에서

$a_n=-a_{n+1}+4$ …… ㉠

$a_n>0$이면 $a_{n+1}=a_n-2$에서

$a_n=a_{n+1}+2$ …… ㉡

$a_4\leq 0$이면 $a_5=-a_4+4$, $a_4+a_5=4$가 되어

$a_4+a_5=8$이라는 조건을 만족시키지 않는다.

$a_4>0$이면 $a_5=a_4-2$이므로

$a_4+a_5=a_4+(a_4-2)=8$, $a_4=5$

$a_4=5$이면

㉠에서 $a_3=-1$, ㉡에서 $a_3=7$

$a_3=-1$이면

㉠에서 $a_2=5$이고 $a_2\leq 0$이라는 조건을 만족시키지 않는다.

㉡에서 $a_2=1$

$a_3=7$이면

㉠에서 $a_2=-3$, ㉡에서 $a_2=9$

그러므로 $a_2=-3$ 또는 $a_2=1$ 또는 $a_2=9$이다.

$a_2=-3$이면

㉠에서 $a_1=7$이고 $a_1\leq 0$이라는 조건을 만족시키지 않는다.

㉡에서 $a_1=-1$이고 $a_1>0$이라는 조건을 만족시키지 않는다.

$a_2=1$이면

㉠에서 $a_1=3$이고 $a_1\leq 0$이라는 조건을 만족시키지 않는다.

㉡에서 $a_1=3$

$a_2=9$이면

㉠에서 $a_1=-5$

㉡에서 $a_1=11$

따라서 $a_1=-5$ 또는 $a_1=3$ 또는 $a_1=11$이므로 모든 a_1의 값의 합은

$-5+3+11=9$

답 ④

6 $\sum_{k=1}^{6}k^2(a_k-a_{k+1})$

$=1^2(a_1-a_2)+2^2(a_2-a_3)+3^2(a_3-a_4)+4^2(a_4-a_5)$
$+5^2(a_5-a_6)+6^2(a_6-a_7)$

$=a_1+(2^2-1^2)a_2+(3^2-2^2)a_3+(4^2-3^2)a_4+(5^2-4^2)a_5$
$+(6^2-5^2)a_6-6^2a_7$

$=a_1+3a_2+5a_3+7a_4+9a_5+11a_6-36a_7$

$=\sum_{k=1}^{6}\left\{(2k-1)\times\frac{k}{2k-1}\right\}-36a_7$

$=\sum_{k=1}^{6}k-36a_7$

이므로 $\sum_{k=1}^{6}k-36a_7=pa_7$에서

$\sum_{k=1}^{6}k=(p+36)\times a_7$

$a_n=\frac{n}{2n-1}$에서 $a_7=\frac{7}{13}$이므로

$\sum_{k=1}^{6}k=(p+36)\times\frac{7}{13}$

$\frac{6\times 7}{2}=(p+36)\times\frac{7}{13}$

$p+36=39$

따라서 $p=3$

답 ②

7 모든 자연수 n에 대하여 두 점 P_n, Q_n의 x좌표를 각각 a_n, b_n이라 하면 점 P_n은 x축 위의 점이고 점 Q_n은 곡선 $y=\sqrt{x}$ $(x>0)$ 위의 점이므로

$\mathrm{P}_n(a_n, 0)$, $\mathrm{Q}_n(b_n, \sqrt{b_n})$

두 점 O, Q_n은 점 P_n을 중심으로 하는 원 위에 있으므로

$\overline{\mathrm{OP}_n}=\overline{\mathrm{P}_n\mathrm{Q}_n}$에서

$a_n=\sqrt{(b_n-a_n)^2+b_n}$

$a_n^2=b_n^2-2a_nb_n+a_n^2+b_n$

$b_n^2=(2a_n-1)b_n$

$b_n>0$이므로

$b_n=\boxed{2}\times a_n-1$

두 점 P_n, P_{n+1}은 점 Q_n을 중심으로 하는 원 위에 있으므로 현의 성질에 의하여

$a_{n+1}-a_n=2(b_n-a_n)$

$a_{n+1}-a_n=2\{(2a_n-1)-a_n\}$

$a_{n+1}=\boxed{3}\times a_n-2$

삼각형 ABP_n의 넓이 S_n은

$S_n=\frac{1}{2}\times\overline{AP_n}\times\overline{OB}=\frac{1}{2}\times(a_n-1)\times 2=a_n-1$

$S_{n+1}=a_{n+1}-1=(3a_n-2)-1=3(a_n-1)=3S_n$

에서 $\frac{S_{n+1}}{S_n}=3$이므로 수열 $\{S_n\}$은 공비가 3인 등비수열이다.

$S_1=a_1-1=3-1=2$이므로

$S_n=\boxed{2\times 3^{n-1}}$

따라서 $p=2$, $q=3$, $f(n)=2\times 3^{n-1}$이므로

$p+q+f(6)=2+3+2\times 3^5=2+3+486=491$

답 ③

Level 3 **실력** 완성 본문 102쪽

1 17　　2 ④　　3 101

1 자연수 m에 대하여 $a_m=0<m$이므로

$a_{m+1}=m+a_m=m$

$a_{m+1}=m<m+1$이므로

$a_{m+2}=(m+1)+a_{m+1}=2m+1$

$2m+1-(m+2)=m-1\geq 0$, 즉 $2m+1\geq m+2$이므로

$a_{m+3}=a_{m+2}-p=2m+1-p$

$2m+1-p-(m+3)=m-2-p$이므로 다음과 같은 경우로 나누어 구한다.

(i) $m-2<p$, 즉 $2m+1-p<m+3$일 때

$a_{m+4}=(m+3)+a_{m+3}=3m+4-p$

$a_{m+4}=0$에서

$3m+4-p=0$

$p=3m+4$

$p=3m+4\leq 10$에서 $m\leq 2$

$m-2<p$에서 $m-2<3m+4$, $m>-3$

따라서 조건을 만족시키는 m의 값은 1, 2이고, $m=1$이면 $p=7$, $m=2$이면 $p=10$이다.

(ii) $m-2\geq p$, 즉 $2m+1-p\geq m+3$일 때

$a_{m+4}=a_{m+3}-p=2m+1-2p$

$a_{m+4}=0$에서

$2m+1-2p=0$

$2p=2m+1$

이 등식을 만족시키는 두 자연수 p, m은 존재하지 않는다.

(i), (ii)에서 p의 값은 7, 10이므로 구하는 모든 p의 값의 합은

$7+10=17$

답 17

2 $2\sin^2\frac{\pi x}{2}<1-\sin\frac{\pi x}{2}$에서

$2\sin^2\frac{\pi x}{2}+\sin\frac{\pi x}{2}-1<0$

$\left(2\sin\frac{\pi x}{2}-1\right)\left(\sin\frac{\pi x}{2}+1\right)<0$

$-1<\sin\frac{\pi x}{2}<\frac{1}{2}$

자연수 n에 대하여 n이 홀수이면

$\sin\frac{\pi n}{2}=1$ 또는 $\sin\frac{\pi n}{2}=-1$

이므로 $n\notin A$이고 $f(n)=-1$이다.

또 n이 짝수이면

$\sin\frac{\pi n}{2}=0$

이므로 $n\in A$이고 $f(n)=2$이다.

그러므로

$\sum_{k=1}^{10}4kf(4k)=\sum_{k=1}^{10}4k\times 2=8\sum_{k=1}^{10}k$

$=8\times\frac{10\times 11}{2}=440$ …… ㉠

한편, 모든 자연수 k에 대하여

$(4k-3)\times f(4k-3)=-(4k-3)=-4k+3<0$

$(4k-3)\times f(4k-3)+(4k-2)\times f(4k-2)$

$=-(4k-3)+2(4k-2)=4k-1$

$\{(4k-3)\times f(4k-3)+(4k-2)\times f(4k-2)\}+(4k-1)\times f(4k-1)$

$=(4k-1)-(4k-1)=0$

$\{(4k-3)\times f(4k-3)+(4k-2)\times f(4k-2)+(4k-1)\times f(4k-1)\}+4k\times f(4k)$

$=0+2\times 4k=8k$ …… ㉡

이고 $4k-1<8k$이므로 $l\leq 4n$인 모든 자연수 l에 대하여

$\sum_{k=1}^{l}kf(k)\leq\sum_{k=1}^{n}4kf(4k)$

그러므로 $\sum_{k=1}^{m} kf(k) \le \sum_{k=1}^{10} 4kf(4k)$에서 $m \le 40$이면 조건을 만족시킨다.

또한 ㉡에서

$$\sum_{k=1}^{40} kf(k) = \sum_{k=1}^{10} 4kf(4k) \qquad \cdots\cdots ㉢$$

한편,

$$\sum_{k=1}^{41} kf(k) = \sum_{k=1}^{40} kf(k) + 41f(41)$$
$$= \sum_{k=1}^{40} kf(k) - 41 < \sum_{k=1}^{10} 4kf(4k)$$

$$\sum_{k=1}^{42} kf(k) = \sum_{k=1}^{40} kf(k) + 41f(41) + 42f(42)$$
$$= \sum_{k=1}^{40} kf(k) + 43 > \sum_{k=1}^{10} 4kf(4k)$$

$$\sum_{k=1}^{43} kf(k) = \sum_{k=1}^{40} kf(k) + 41f(41) + 42f(42) + 43f(43)$$
$$= \sum_{k=1}^{40} kf(k) + 0 = \sum_{k=1}^{10} 4kf(4k) \qquad \cdots\cdots ㉣$$

$$\sum_{k=1}^{44} kf(k) = \sum_{k=1}^{40} kf(k) + 41f(41) + 42f(42) + 43f(43) + 44f(44)$$
$$= \sum_{k=1}^{40} kf(k) + 0 + 88 > \sum_{k=1}^{10} 4kf(4k)$$

$$\sum_{k=1}^{45} kf(k) = \sum_{k=1}^{40} kf(k) + 44f(44) + 45f(45)$$
$$= \sum_{k=1}^{40} kf(k) + 43 > \sum_{k=1}^{10} 4kf(4k)$$

$n \ge 45$인 모든 자연수 n에 대하여

$$\sum_{k=1}^{n} kf(k) \ge \sum_{k=1}^{45} kf(k) > \sum_{k=1}^{10} 4kf(4k)$$

그러므로 $\sum_{k=1}^{m} kf(k) \le \sum_{k=1}^{10} 4kf(4k)$를 만족시키는 자연수 m의 최댓값 $M=43$

㉠, ㉢, ㉣에서

$$\sum_{k=1}^{M} kf(k) = \sum_{k=1}^{43} kf(k) = 440$$

따라서 $M + \sum_{k=1}^{M} kf(k) = 43 + 440 = 483$

답 ④

3 정삼각형 $A_nB_nC_n$의 한 변의 길이를 a_n이라 하자.

삼각형 $A_{n+1}B_nD_n$에서 $\angle D_nA_{n+1}B_n = \angle D_nB_nA_{n+1} = \frac{\pi}{3}$이므로 삼각형 $A_{n+1}B_nD_n$은 정삼각형이다.

선분 B_nC_n을 2 : 5로 내분하는 점이 D_n이므로

$$\overline{B_nD_n} = \overline{A_{n+1}D_n} = \frac{2}{7}a_n,\ \overline{C_nD_n} = \frac{5}{7}a_n$$

$$\overline{D_nC_{n+1}} = a_{n+1} - \frac{2}{7}a_n$$

두 정삼각형 $A_{n+1}B_nD_n$, $A_{n+1}B_{n+1}C_{n+1}$의 넓이는 각각 $\frac{\sqrt{3}}{4}\times\left(\frac{2}{7}\right)^2 a_n^{\ 2}$, $\frac{\sqrt{3}}{4}a_{n+1}^{\ 2}$ 이고,

삼각형 $C_nD_nC_{n+1}$의 넓이는

$$\frac{1}{2}\times\overline{C_nD_n}\times\overline{D_nC_{n+1}}\times\sin(\angle C_nD_nC_{n+1})$$
$$= \frac{1}{2}\times\frac{5}{7}a_n\times\left(a_{n+1}-\frac{2}{7}a_n\right)\times\sin\frac{\pi}{3}$$
$$= \frac{\sqrt{3}}{4}\times\frac{5}{7}a_n\left(a_{n+1}-\frac{2}{7}a_n\right)$$

세 삼각형 $A_{n+1}B_nD_n$, $C_nD_nC_{n+1}$, $A_{n+1}B_{n+1}C_{n+1}$의 넓이가 이 순서대로 등차수열을 이루므로

2×(삼각형 $C_nD_nC_{n+1}$의 넓이)

=(삼각형 $A_{n+1}B_nD_n$의 넓이)

+(삼각형 $A_{n+1}B_{n+1}C_{n+1}$의 넓이)

$$2\times\frac{\sqrt{3}}{4}\times\frac{5}{7}a_n\left(a_{n+1}-\frac{2}{7}a_n\right) = \frac{\sqrt{3}}{4}\times\left(\frac{2}{7}\right)^2 a_n^{\ 2} + \frac{\sqrt{3}}{4}a_{n+1}^{\ 2}$$

$$49a_{n+1}^{\ 2} - 70a_na_{n+1} + 24a_n^{\ 2} = 0$$

$$(7a_{n+1} - 4a_n)(7a_{n+1} - 6a_n) = 0$$

$$a_{n+1} = \frac{4}{7}a_n \text{ 또는 } a_{n+1} = \frac{6}{7}a_n$$

$\overline{A_{n+1}B_n} = \overline{A_{n+1}D_n} = \frac{2}{7}a_n$이고

$\overline{B_nB_{n+1}} = \overline{D_nC_{n+1}} = a_{n+1} - \frac{2}{7}a_n$이므로

$a_{n+1} = \frac{4}{7}a_n$이면 $\overline{B_nB_{n+1}} = \frac{2}{7}a_n$이 되어 조건 (다)를 만족시키지 않고,

$a_{n+1} = \frac{6}{7}a_n$이면 $\overline{B_nB_{n+1}} = \frac{4}{7}a_n$이 되어 조건 (다)를 만족시킨다.

그러므로 $a_{n+1} = \frac{6}{7}a_n$이다.

이때 $a_1 = \overline{A_1B_1} = 1$이므로

$$a_n = 1\times\left(\frac{6}{7}\right)^{n-1} = \left(\frac{6}{7}\right)^{n-1}$$

$$\overline{B_nB_{n+1}} = \frac{4}{7}a_n = \frac{4}{7}\times\left(\frac{6}{7}\right)^{n-1}$$

따라서

$$\overline{A_1B_3} = \overline{A_1B_1} + \overline{B_1B_2} + \overline{B_2B_3}$$
$$= 1 + \frac{4}{7} + \frac{4}{7}\times\frac{6}{7}$$
$$= \frac{101}{49}$$

이므로 $49\times\overline{A_1B_3} = 101$

답 101