수능특강 수학영역 **수학 II**

정답과 풀이

01 함수의 극한

유제 본문 5~11쪽

1 ④ 2 ② 3 6 4 15 5 ①
6 ③ 7 ② 8 ④

Level 1 기초 연습 본문 12~13쪽

1 ② 2 ② 3 ④ 4 4 5 ③
6 ③ 7 ② 8 ①

Level 2 기본 연습 본문 14~15쪽

1 ① 2 ③ 3 ④ 4 ③ 5 ①
6 ② 7 ②

Level 3 실력 완성 본문 16쪽

1 ③ 2 59 3 12

02 함수의 연속

유제 본문 19~23쪽

1 ③ 2 ② 3 ④ 4 20 5 51

Level 1 기초 연습 본문 24~25쪽

1 ③ 2 14 3 ② 4 ④ 5 ①
6 ⑤ 7 ③

Level 2 기본 연습 본문 26~27쪽

1 ⑤ 2 ③ 3 18 4 ④ 5 ⑤
6 ④

Level 3 실력 완성 본문 28쪽

1 18 2 ⑤ 3 ③

03 미분계수와 도함수

유제 본문 31~37쪽

1 ② 2 ③ 3 2 4 ② 5 ①
6 ⑤ 7 ④

Level 1 기초 연습 본문 38~39쪽

1 ⑤ 2 ⑤ 3 ④ 4 ① 5 ③
6 17 7 ④ 8 ①

Level 2 기본 연습 본문 40~41쪽

1 ⑤ 2 2 3 ② 4 ⑤ 5 ②
6 ① 7 ④ 8 ⑤

Level 3 실력 완성 본문 42쪽

1 180 2 ④ 3 ③

04 도함수의 활용(1)

유제 본문 45~51쪽

1 ③ 2 ③ 3 ⑤ 4 18 5 ④
6 67 7 ⑤ 8 ④

Level 1 기초 연습 본문 52~53쪽

1 ③ 2 ④ 3 ① 4 ① 5 ①
6 ② 7 ② 8 ④

Level 2 기본 연습

본문 54~55쪽

1 ⑤ 2 ⑤ 3 ⑤ 4 ⑤ 5 ③
6 59 7 ③ 8 ⑤

Level 3 실력 완성

본문 56~57쪽

1 ④ 2 ② 3 25 4 ⑤ 5 ⑤

05 도함수의 활용(2)

유제

본문 61~65쪽

1 ⑤ 2 8 3 ④ 4 ① 5 ④
6 ③

Level 1 기초 연습

본문 66~67쪽

1 ⑤ 2 ② 3 ⑤ 4 ④ 5 2
6 ③ 7 ③ 8 ①

Level 2 기본 연습

본문 68~69쪽

1 ④ 2 49 3 ④ 4 ② 5 ③
6 5 7 18 8 ⑤

Level 3 실력 완성

본문 70쪽

1 ④ 2 156 3 ②

06 부정적분과 정적분

유제

본문 73~79쪽

1 ③ 2 ② 3 ④ 4 48 5 ②
6 ① 7 ④ 8 ③

Level 1 기초 연습

본문 80~81쪽

1 ① 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5 ③
6 ③ 7 ⑤ 8 ①

Level 2 기본 연습

본문 82~83쪽

1 ① 2 ④ 3 56 4 ② 5 ④
6 ③ 7 ① 8 ⑤

Level 3 실력 완성

본문 84~85쪽

1 ② 2 52 3 ① 4 ⑤ 5 ③

07 정적분의 활용

유제

본문 89~95쪽

1 ③ 2 ② 3 ① 4 ④ 5 ③
6 35 7 ⑤ 8 ④

Level 1 기초 연습

본문 96~97쪽

1 ⑤ 2 ④ 3 ③ 4 ② 5 ③
6 ② 7 ① 8 ⑤

Level 2 기본 연습

본문 98~99쪽

1 ② 2 ⑤ 3 ④ 4 ④ 5 ②
6 ① 7 16 8 ③

Level 3 실력 완성

본문 100~101쪽

1 ② 2 ⑤ 3 8 4 ① 5 ④

01 함수의 극한

유제 본문 5~11쪽

1 ④	2 ②	3 6	4 15	5 ①
6 ③	7 ②	8 ④		

1 $\lim_{x\to1}f(x)$의 값이 존재하려면

$\lim_{x\to1-}f(x)=\lim_{x\to1+}f(x)$이어야 하므로

$\lim_{x\to1-}f(x)=\lim_{x\to1-}(3x+a^2)=3+a^2$,

$\lim_{x\to1+}f(x)=\lim_{x\to1+}4ax=4a$

에서 $3+a^2=4a$이어야 한다.

$a^2-4a+3=0$, $(a-1)(a-3)=0$

$a=1$ 또는 $a=3$

따라서 모든 실수 a의 값의 합은

$1+3=4$

답 ④

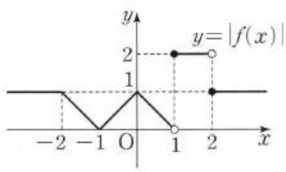
2 함수 $y=f(x)$의 그래프에서

$\lim_{x\to1+}f(x)=2$

$-x=t$로 놓으면 $x\to2-$일 때 $t\to-2+$이므로

$\lim_{x\to2-}f(-x)=\lim_{t\to-2+}f(t)=-1$

함수 $y=|f(x)|$의 그래프는 그림과 같다.



$\lim_{x\to0+}|f(x)|=1$, $\lim_{x\to0-}|f(x)|=1$이므로

$\lim_{x\to0}|f(x)|=1$

따라서

$\lim_{x\to1+}f(x)+\lim_{x\to2-}f(-x)+\lim_{x\to0}|f(x)|$

$=2+(-1)+1=2$

답 ②

3 $\lim_{x\to3}\{2f(x)+g(x)\}=7$, $\lim_{x\to3}\{f(x)-g(x)\}=-1$에서

$\lim_{x\to3}[\{2f(x)+g(x)\}+\{f(x)-g(x)\}]=7+(-1)$

즉, $\lim_{x\to3}3f(x)=6$이므로

$\lim_{x\to3}f(x)=2$

$\lim_{x\to3}g(x)=\lim_{x\to3}[\{2f(x)+g(x)\}-2f(x)]$

$=\lim_{x\to3}\{2f(x)+g(x)\}-\lim_{x\to3}2f(x)$

$=\lim_{x\to3}\{2f(x)+g(x)\}-2\lim_{x\to3}f(x)$

$=7-2\times2$

$=3$

따라서

$\lim_{x\to3}f(x)g(x)=\lim_{x\to3}f(x)\times\lim_{x\to3}g(x)$

$=2\times3=6$

답 6

4 $\lim_{x\to0}\{xf(x)-(x^2+2)\}=1$, $\lim_{x\to0}(x^2+2)=2$이므로

$\lim_{x\to0}xf(x)=\lim_{x\to0}[\{xf(x)-(x^2+2)\}+(x^2+2)]$

$=\lim_{x\to0}\{xf(x)-(x^2+2)\}+\lim_{x\to0}(x^2+2)$

$=1+2$

$=3$ …… ㉠

$\lim_{x\to0}\left\{\frac{g(x)}{x}+\frac{1}{x^2+1}\right\}=3$, $\lim_{x\to0}\frac{1}{x^2+1}=1$이므로

$\lim_{x\to0}\frac{g(x)}{x}=\lim_{x\to0}\left[\left\{\frac{g(x)}{x}+\frac{1}{x^2+1}\right\}-\frac{1}{x^2+1}\right]$

$=\lim_{x\to0}\left\{\frac{g(x)}{x}+\frac{1}{x^2+1}\right\}-\lim_{x\to0}\frac{1}{x^2+1}$

$=3-1$

$=2$ …… ㉡

㉠, ㉡에서

$\lim_{x\to0}f(x)g(x)=\lim_{x\to0}\left\{xf(x)\times\frac{g(x)}{x}\right\}$

$=\lim_{x\to0}xf(x)\times\lim_{x\to0}\frac{g(x)}{x}$

$=3\times2$

$=6$

따라서

$\lim_{x\to0}\{3f(x)g(x)-xf(x)\}$

$=3\lim_{x\to0}f(x)g(x)-\lim_{x\to0}xf(x)$

$=3\times6-3=15$

답 15

5 $\lim_{x\to2}\frac{x^3-8}{\sqrt{3x+3}-3}$

$=\lim_{x\to2}\frac{(x^3-8)(\sqrt{3x+3}+3)}{(\sqrt{3x+3}-3)(\sqrt{3x+3}+3)}$

$=\lim_{x\to2}\frac{(x-2)(x^2+2x+4)(\sqrt{3x+3}+3)}{3x-6}$

$=\lim_{x\to2}\frac{(x-2)(x^2+2x+4)(\sqrt{3x+3}+3)}{3(x-2)}$

$=\lim_{x\to2}\frac{(x^2+2x+4)(\sqrt{3x+3}+3)}{3}$

$=\frac{(2^2+2\times2+4)\times(\sqrt{3\times2+3}+3)}{3}$

$=\frac{12\times6}{3}$

$=24$

답 ①

6 $\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{4x^2+x}-x}{x+2}$에서 $x=-t$라 하면

$x\to-\infty$일 때 $t\to\infty$이므로

$\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{4x^2+x}-x}{x+2}=\lim_{t\to\infty}\frac{\sqrt{4(-t)^2-t}-(-t)}{-t+2}$

$=\lim_{t\to\infty}\frac{\sqrt{4t^2-t}+t}{-t+2}$

$=\lim_{t\to\infty}\frac{\sqrt{4-\frac{1}{t}}+1}{-1+\frac{2}{t}}$

$=\frac{\sqrt{4}+1}{-1+0}$

$=-3$

답 ③

7 $\lim_{x\to1}\frac{\sqrt{x^2+ax}-3}{x^2-1}=b$에서 $x\to1$일 때 (분모)$\to0$이고 극한값이 존재하므로 (분자)$\to0$이어야 한다.

즉, $\lim_{x\to1}(\sqrt{x^2+ax}-3)=\sqrt{1+a}-3=0$에서

$1+a=9$, $a=8$

$b=\lim_{x\to1}\frac{\sqrt{x^2+8x}-3}{x^2-1}$

$=\lim_{x\to1}\frac{(\sqrt{x^2+8x}-3)(\sqrt{x^2+8x}+3)}{(x^2-1)(\sqrt{x^2+8x}+3)}$

$=\lim_{x\to1}\frac{x^2+8x-9}{(x^2-1)(\sqrt{x^2+8x}+3)}$

$=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)(x+9)}{(x-1)(x+1)(\sqrt{x^2+8x}+3)}$

$=\lim_{x\to1}\frac{x+9}{(x+1)(\sqrt{x^2+8x}+3)}$

$=\frac{10}{2\times6}$

$=\frac{5}{6}$

따라서 $a=8$, $b=\frac{5}{6}$이므로

$a+b=8+\frac{5}{6}=\frac{53}{6}$

답 ②

8 $x>0$일 때 모든 실수 x에 대하여

$\frac{(x^2+1)(x-1)}{x(3x^2+2)}<\frac{f(x)}{x}<\frac{(x^2+1)(x+4)}{x(3x^2+1)}$

이때

$\lim_{x\to\infty}\frac{(x^2+1)(x-1)}{x(3x^2+2)}=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(1+\frac{1}{x^2}\right)\left(1-\frac{1}{x}\right)}{3+\frac{2}{x^2}}=\frac{1}{3}$,

$\lim_{x\to\infty}\frac{(x^2+1)(x+4)}{x(3x^2+1)}=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(1+\frac{1}{x^2}\right)\left(1+\frac{4}{x}\right)}{3+\frac{1}{x^2}}=\frac{1}{3}$

이므로 함수의 극한의 대소 관계에 의하여

$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\frac{1}{3}$

따라서

$\lim_{x\to\infty}\frac{4x+3f(x)}{2x-f(x)}=\lim_{x\to\infty}\frac{4+\frac{3f(x)}{x}}{2-\frac{f(x)}{x}}$

$=\frac{4+3\times\frac{1}{3}}{2-\frac{1}{3}}$

$=\frac{5}{\frac{5}{3}}$

$=3$

답 ④

Level 1 기초 연습

본문 12~13쪽

1 ②	2 ②	3 ④	4 4	5 ③
6 ③	7 ②	8 ①		

1 $\lim_{x\to a-}f(x)=\lim_{x\to a-}(3x-1)=3a-1$,

$\lim_{x\to a+}f(x)=\lim_{x\to a+}(-x+2)=-a+2$

이므로 $\lim_{x\to a-}f(x)=3\lim_{x\to a+}f(x)$에서

$3a-1=3(-a+2)$

$6a=7$

따라서 $a=\frac{7}{6}$

답 ②

2 $\lim_{x\to1}(x+a)f(x)=9$에서 $\lim_{x\to1}(x+a)=1+a$이고

$1+a>0$이므로

$$\lim_{x\to1}f(x)=\lim_{x\to1}\frac{(x+a)f(x)}{x+a}$$
$$=\frac{\lim_{x\to1}(x+a)f(x)}{\lim_{x\to1}(x+a)}$$
$$=\frac{9}{1+a}$$

$$\lim_{x\to1}\{f(x)\}^2=\lim_{x\to1}f(x)\times\lim_{x\to1}f(x)$$
$$=\frac{9}{1+a}\times\frac{9}{1+a}$$
$$=\left(\frac{9}{1+a}\right)^2$$

$\left(\frac{9}{1+a}\right)^2=9$에서

$(1+a)^2=9$

$1+a=3$ 또는 $1+a=-3$

$a>0$이므로 $a=2$

답 ②

3 $\lim_{x\to1}f(x)=-\infty$, $\lim_{x\to1}\{f(x)+3g(x)\}=4$에서

$\lim_{x\to1}\frac{f(x)+3g(x)}{f(x)}=0$이므로

$\lim_{x\to1}\left\{1+\frac{3g(x)}{f(x)}\right\}=0$

$\lim_{x\to1}\frac{g(x)}{f(x)}=-\frac{1}{3}$

따라서

$$\lim_{x\to1}\frac{f(x)-g(x)}{5f(x)+2g(x)}=\lim_{x\to1}\frac{1-\frac{g(x)}{f(x)}}{5+\frac{2g(x)}{f(x)}}$$
$$=\frac{1-\left(-\frac{1}{3}\right)}{5+2\times\left(-\frac{1}{3}\right)}$$
$$=\frac{\frac{4}{3}}{\frac{13}{3}}$$
$$=\frac{4}{13}$$

답 ④

4 $$\lim_{x\to0}\frac{1}{x}\left\{1-\frac{1}{(2x+1)^2}\right\}=\lim_{x\to0}\frac{1}{x}\left\{\frac{(2x+1)^2-1}{(2x+1)^2}\right\}$$
$$=\lim_{x\to0}\left\{\frac{1}{x}\times\frac{4x^2+4x}{(2x+1)^2}\right\}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{4x+4}{(2x+1)^2}$$
$$=\frac{0+4}{1^2}$$
$$=4$$

답 4

5 $\lim_{x\to a}\frac{x^2-4x+b}{x-a}=6$에서 $x\to a$일 때 (분모)$\to0$이고 극한값이 존재하므로 (분자)$\to0$이어야 한다.

즉, $\lim_{x\to a}(x^2-4x+b)=a^2-4a+b=0$에서

$b=-a^2+4a$

$$\lim_{x\to a}\frac{x^2-4x+b}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{x^2-4x-a^2+4a}{x-a}$$
$$=\lim_{x\to a}\frac{(x-a)(x+a-4)}{x-a}$$
$$=\lim_{x\to a}(x+a-4)$$
$$=2a-4$$

이므로 $2a-4=6$에서 $a=5$

$b=-5^2+4\times5=-5$

따라서 $a+b=5+(-5)=0$

답 ③

6 $\lim_{x\to3}\frac{x-3}{\sqrt{x+a}-\sqrt{2a}}=b$ $(b\neq0)$에서 $x\to3$일 때 (분자)$\to0$이고 0이 아닌 극한값이 존재하므로 (분모)$\to0$이어야 한다.

즉, $\lim_{x\to3}(\sqrt{x+a}-\sqrt{2a})=\sqrt{3+a}-\sqrt{2a}=0$에서

$3+a=2a$

$a=3$

$$b=\lim_{x\to3}\frac{x-3}{\sqrt{x+3}-\sqrt{6}}$$
$$=\lim_{x\to3}\frac{(x-3)(\sqrt{x+3}+\sqrt{6})}{(\sqrt{x+3}-\sqrt{6})(\sqrt{x+3}+\sqrt{6})}$$
$$=\lim_{x\to3}\frac{(x-3)(\sqrt{x+3}+\sqrt{6})}{x-3}$$
$$=\lim_{x\to3}(\sqrt{x+3}+\sqrt{6})=2\sqrt{6}$$

따라서 $a=3$, $b=2\sqrt{6}$이므로

$ab=3\times2\sqrt{6}=6\sqrt{6}$

답 ③

7 $\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)+x^2}{x-2}=3$을 만족시키는 다항함수 $f(x)+x^2$은 최고차항의 계수가 3인 일차함수이므로

$f(x)=-x^2+3x+b$ (단, b는 상수) …… ㉠

또한 $\lim_{x \to 2} \frac{f(x)-4}{x-2}=a$에서 $x \to 2$일 때 (분모) → 0이고 극한값이 존재하므로 (분자) → 0이어야 한다.

즉, $\lim_{x \to 2}\{f(x)-4\}=f(2)-4=0$에서

$f(2)=4$

㉠에서 $f(2)=-2^2+6+b=2+b$이므로

$2+b=4$, $b=2$

따라서

$$a=\lim_{x \to 2} \frac{f(x)-4}{x-2}$$
$$=\lim_{x \to 2} \frac{(-x^2+3x+2)-4}{x-2}$$
$$=\lim_{x \to 2} \frac{-x^2+3x-2}{x-2}$$
$$=\lim_{x \to 2} \frac{-(x-1)(x-2)}{x-2}$$
$$=\lim_{x \to 2}\{-(x-1)\}$$
$$=-(2-1)$$
$$=-1$$

답 ②

8 $\lim_{x \to 1} \frac{f(x)-f(0)}{x-1}=f(2)$에서 $x \to 1$일 때 (분모) → 0이고 극한값이 존재하므로 (분자) → 0이어야 한다.

즉, $\lim_{x \to 1}\{f(x)-f(0)\}=f(1)-f(0)=0$에서

$f(1)=f(0)$

$f(1)=1+a+b$, $f(0)=b$이므로

$1+a+b=b$에서 $a=-1$이고

$f(x)=x^2-x+b$

$$\lim_{x \to 1} \frac{f(x)-f(0)}{x-1}=\lim_{x \to 1} \frac{(x^2-x+b)-b}{x-1}$$
$$=\lim_{x \to 1} \frac{x^2-x}{x-1}$$
$$=\lim_{x \to 1} \frac{x(x-1)}{x-1}$$
$$=\lim_{x \to 1} x$$
$$=1$$

$f(2)=4-2+b=2+b$

이므로 $1=2+b$에서

$b=-1$

따라서 $f(x)=x^2-x-1$이므로

$f(-1)=(-1)^2-(-1)-1=1$

답 ①

Level 2 기본 연습

본문 14~15쪽

1 ①	2 ③	3 ④	4 ③	5 ①
6 ②	7 ②			

1 $\lim_{x \to 1} f(x)$의 값이 존재하지 않으므로

$\lim_{x \to 1-} f(x) \neq \lim_{x \to 1+} f(x)$이어야 한다.

$\lim_{x \to 1-} f(x)=\lim_{x \to 1-}(ax+2)=a+2$

$\lim_{x \to 1+} f(x)=\lim_{x \to 1+}(2ax^2-5)=2a-5$

즉, $a+2 \neq 2a-5$에서

$a \neq 7$ …… ㉠

$\lim_{x \to 1}|f(x)|$의 값이 존재하므로

$\lim_{x \to 1-}|f(x)|=\lim_{x \to 1+}|f(x)|$이어야 한다.

$\lim_{x \to 1-}|f(x)|=\lim_{x \to 1-}|ax+2|=|a+2|$

$\lim_{x \to 1+}|f(x)|=\lim_{x \to 1+}|2ax^2-5|=|2a-5|$

즉, $|a+2|=|2a-5|$에서

$a+2=\pm(2a-5)$

$a+2=2a-5$이면

$a=7$

$a+2=-(2a-5)$이면

$a=1$

㉠에서 $a \neq 7$이므로

$a=1$

답 ①

2 $a \leq 0$이면 주어진 극한은 양의 무한대로 발산하므로 $a>0$이다.

$$\lim_{x \to \infty}\{\sqrt{4x^2+10x+3}-(ax+b)\}$$
$$=\lim_{x \to \infty} \frac{(4x^2+10x+3)-(ax+b)^2}{\sqrt{4x^2+10x+3}+ax+b}$$
$$=\lim_{x \to \infty} \frac{(4-a^2)x^2+(10-2ab)x+(3-b^2)}{\sqrt{4x^2+10x+3}+ax+b} \quad \cdots\cdots ㉠$$

이때 $a>0$이므로 ㉠은 $4-a^2>0$이면 양의 무한대로 발산하고, $4-a^2<0$이면 음의 무한대로 발산한다.

즉, ㉠이 수렴하기 위해서는 $4-a^2=0$이어야 한다.

이때 $a>0$이므로

$a=2$

이때 ㉠은

$$\lim_{x\to\infty}\frac{(4-a^2)x^2+(10-2ab)x+(3-b^2)}{\sqrt{4x^2+10x+3}+ax+b}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{(10-4b)x+(3-b^2)}{\sqrt{4x^2+10x+3}+2x+b}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{10-4b+\frac{3-b^2}{x}}{\sqrt{4+\frac{10}{x}+\frac{3}{x^2}}+2+\frac{b}{x}}$$

$$=\frac{10-4b}{\sqrt{4}+2}$$

$$=\frac{5-2b}{2}$$

이므로

$\frac{5-2b}{2}=1$에서 $b=\frac{3}{2}$

따라서 $ab=2\times\frac{3}{2}=3$

답 ③

3 $$\lim_{x\to0}\frac{x^n(\sqrt{x+1}-1)}{\sqrt{x^4+16}-4}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{x^n(\sqrt{x+1}-1)(\sqrt{x+1}+1)(\sqrt{x^4+16}+4)}{(\sqrt{x^4+16}-4)(\sqrt{x^4+16}+4)(\sqrt{x+1}+1)}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{x^{n+1}(\sqrt{x^4+16}+4)}{x^4(\sqrt{x+1}+1)}\qquad\cdots\cdots ㉠$$

이때

$$\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{x^4+16}+4}{\sqrt{x+1}+1}=\frac{4+4}{1+1}=4$$

이므로 ㉠은 $n+1>4$이면 0으로 수렴하고, $n+1<4$이면 발산한다.

그러므로 ㉠이 0이 아닌 상수로 수렴하려면 $n+1=4$, 즉 $n=3$이어야 한다. 이때

$$a=\lim_{x\to0}\frac{x^4(\sqrt{x^4+16}+4)}{x^4(\sqrt{x+1}+1)}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{x^4+16}+4}{\sqrt{x+1}+1}$$

$$=4$$

따라서 $a+n=4+3=7$

답 ④

4 모든 양의 실수 x에 대하여

$$\frac{2}{x}-\frac{3}{x^2}\le f(x)\le\left(1-\frac{1}{x}\right)^2$$

이 성립하므로 모든 양의 실수 x에 대하여

$$x^2\left(\frac{2}{x}-\frac{3}{x^2}\right)\le x^2f(x)\le x^2\left(1-\frac{1}{x}\right)^2$$

즉, $2x-3\le x^2f(x)\le(x-1)^2$이 성립한다.

함수의 극한의 대소 관계에 의하여 $a>0$일 때

$$\lim_{x\to a}(2x-3)\le\lim_{x\to a}x^2f(x)\le\lim_{x\to a}(x-1)^2$$

이 성립하고, 이때 $\lim_{x\to a}x^2f(x)=1$이므로

$\lim_{x\to a}(2x-3)\le1$에서

$2a-3\le1$

$a\le2\qquad\cdots\cdots ㉠$

$\lim_{x\to a}(x-1)^2\ge1$에서

$(a-1)^2\ge1$

$a\le0$ 또는 $a\ge2\qquad\cdots\cdots ㉡$

㉠과 ㉡을 동시에 만족시키는 양수 a의 값은 2이다.

따라서 $a=2$

답 ③

5 $\{xf(x)\}^2-f(x)g(x)+g(x)-x^2=0$에서

$x\neq0$이면

$$\{f(x)\}^2-\frac{f(x)g(x)}{x^2}+\frac{g(x)}{x^2}-1=0$$

$$\{f(x)\}^2-1=\frac{g(x)\times\{f(x)-1\}}{x^2}$$

$\lim_{x\to0}f(x)=2$이므로

$$\lim_{x\to0}\frac{g(x)}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{\{f(x)\}^2-1}{f(x)-1}=\frac{2^2-1}{2-1}=3$$

따라서

$$\lim_{x\to0}\frac{2x^2f(x)-g(x)}{x^3f(x)+g(x)}=\lim_{x\to0}\frac{2f(x)-\frac{g(x)}{x^2}}{xf(x)+\frac{g(x)}{x^2}}$$

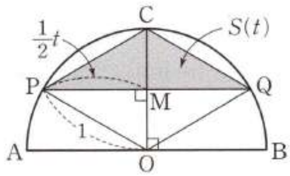
$$=\frac{2\lim_{x\to0}f(x)-\lim_{x\to0}\frac{g(x)}{x^2}}{\lim_{x\to0}xf(x)+\lim_{x\to0}\frac{g(x)}{x^2}}$$

$$=\frac{2\times2-3}{0+3}$$

$$=\frac{1}{3}$$

답 ①

6



선분 AB의 중점을 O라 하고, 선분 CO와 선분 PQ가 만나는 점을 M이라 하자.

$\overline{CO}\perp\overline{AB}$이고 $\overline{AB}/\!/\overline{PQ}$이므로 $\overline{OM}\perp\overline{PQ}$이다.

즉, 삼각형 POM과 삼각형 QOM은 서로 합동이므로

$\overline{PM}=\overline{QM}$이다.

$\overline{PM}=\frac{1}{2}\overline{PQ}=\frac{1}{2}t$이므로 직각삼각형 POM에서

$\overline{OM}=\sqrt{1^2-\left(\frac{1}{2}t\right)^2}=\sqrt{1-\frac{1}{4}t^2}$

$\overline{CM}=\overline{OC}-\overline{OM}=1-\sqrt{1-\frac{1}{4}t^2}$이므로

삼각형 CPQ의 넓이는

$$S(t)=\frac{1}{2}\times\overline{PQ}\times\overline{CM}$$
$$=\frac{1}{2}t\left(1-\sqrt{1-\frac{1}{4}t^2}\right)$$

따라서

$$\lim_{t\to0+}\frac{S(t)}{t^3}=\lim_{t\to0+}\frac{\frac{1}{2}t\left(1-\sqrt{1-\frac{1}{4}t^2}\right)}{t^3}$$
$$=\lim_{t\to0+}\frac{\left(1-\sqrt{1-\frac{1}{4}t^2}\right)\left(1+\sqrt{1-\frac{1}{4}t^2}\right)}{2t^2\left(1+\sqrt{1-\frac{1}{4}t^2}\right)}$$
$$=\lim_{t\to0+}\frac{\frac{1}{4}t^2}{2t^2\left(1+\sqrt{1-\frac{1}{4}t^2}\right)}$$
$$=\frac{1}{8}\lim_{t\to0+}\frac{1}{1+\sqrt{1-\frac{1}{4}t^2}}$$
$$=\frac{1}{8}\times\frac{1}{2}$$
$$=\frac{1}{16}$$

답 ②

7 조건 (가)에서 $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)-x^3}{4x^2+x}=1$을 만족시키는 다항함수 $f(x)-x^3$은 최고차항의 계수가 4인 이차함수이므로

$f(x)=x^3+4x^2+ax+b$ (a, b는 상수) …… ㉠

로 놓을 수 있다.

조건 (나)에서 $x\to-1$일 때 (분모)$\to0$이고 극한값이 존재하므로 (분자)$\to0$이어야 한다.

즉, $\lim_{x\to-1}f(x)=f(-1)=0$

이때 $f(x)$는 삼차함수이므로 $\lim_{x\to-1}\frac{f(x)}{(x+1)^k}$의 값이 존재하려면 $f(x)$는 $(x+1)^k$으로 나누어떨어져야 한다.

k가 2 이상의 자연수이므로

$k=2$ 또는 $k=3$

(i) $k=2$일 때

$f(x)$는 $(x+1)^2$으로 나누어떨어져야 하고 이때 $f(x)$는 최고차항의 계수가 1인 삼차함수이므로

$f(x)=(x+1)^2(x+c)$

$=x^3+(2+c)x^2+(2c+1)x+c$ (c는 상수) …… ㉡

로 놓을 수 있다.

이때 ㉠, ㉡에서 x^2의 계수를 비교하면

$4=2+c$

$c=2$

즉, $f(x)=(x+1)^2(x+2)$이므로

$$m=\lim_{x\to-1}\frac{f(x)}{(x+1)^2}$$
$$=\lim_{x\to-1}\frac{(x+1)^2(x+2)}{(x+1)^2}$$
$$=\lim_{x\to-1}(x+2)$$
$$=1$$

(ii) $k=3$일 때

$f(x)$는 $(x+1)^3$으로 나누어떨어져야 하고 이때 $f(x)$는 최고차항의 계수가 1인 삼차함수이므로

$f(x)=(x+1)^3=x^3+3x^2+3x+1$

그러나 ㉠에서 $f(x)$의 x^2의 계수는 4이므로 이는 불가능하다.

(i), (ii)에서 $f(x)=(x+1)^2(x+2)$, $m=1$이므로

$f(m)=f(1)=2^2\times3=12$

답 ②

Level **3** **실력 완성** 본문 16쪽

1 ③ **2** 59 **3** 12

1 조건 (가)에서 $x\to1$일 때 (분모)$\to1-a$이므로 $a=1$인 경우와 $a\neq1$인 경우로 나누어 생각하자.

(i) $a=1$인 경우

$$\lim_{x\to1}\frac{x-1}{x^2-1}=\lim_{x\to1}\frac{x-1}{(x-1)(x+1)}=\lim_{x\to1}\frac{1}{x+1}=\frac{1}{2}$$

이므로 $b=\frac{1}{2}$

$$\lim_{x\to0}\left|\frac{x^3+ax^2+bx}{x^k}\right|=\lim_{x\to0}\left|\frac{x^3+x^2+\frac{1}{2}x}{x^k}\right|$$

$k=1$일 때

$$\lim_{x\to0}\left|\frac{x^3+x^2+\frac{1}{2}x}{x}\right|=\lim_{x\to0}\left|x^2+x+\frac{1}{2}\right|=\frac{1}{2}$$

이므로 조건 (나)를 만족시킨다.

$k\geq2$일 때

$$\lim_{x\to0}\left|\frac{x^3+x^2+\frac{1}{2}x}{x^k}\right|=\infty$$

로 발산한다.

(ii) $a\neq1$인 경우

조건 (가)에서 $\lim_{x\to1}\frac{x-1}{x^2-a}=\frac{1-1}{1^2-a}=0$이므로 $b=0$

$a\neq1$, $b=0$일 때

$$\lim_{x\to0}\left|\frac{x^3+ax^2+bx}{x^k}\right|=\lim_{x\to0}\left|\frac{x^3+ax^2}{x^k}\right| \quad \cdots\cdots ㉠$$

이때 $a=0$이면 ㉠은 $\lim_{x\to0}\left|\frac{x^3}{x^k}\right|$이고

$k=1$일 때

$$\lim_{x\to0}\left|\frac{x^3}{x}\right|=\lim_{x\to0}|x^2|=0,$$

$k=2$일 때

$$\lim_{x\to0}\left|\frac{x^3}{x^2}\right|=\lim_{x\to0}|x|=0,$$

$k=3$일 때

$$\lim_{x\to0}\left|\frac{x^3}{x^3}\right|=\lim_{x\to0}|1|=1$$

로 각각 수렴하며

$k\geq4$일 때

$$\lim_{x\to0}\left|\frac{x^3}{x^k}\right|=\lim_{x\to0}\left|\frac{1}{x^{k-3}}\right|=\infty$$

로 발산하므로 ㉠이 $\frac{1}{2}$로 수렴하도록 하는 자연수 k의 값은 존재하지 않는다.

$a\neq0$이면 ㉠은

$k=1$일 때

$$\lim_{x\to0}\left|\frac{x^3+ax^2}{x}\right|=\lim_{x\to0}|x^2+ax|=0,$$

$k=2$일 때

$$\lim_{x\to0}\left|\frac{x^3+ax^2}{x^2}\right|=\lim_{x\to0}|x+a|=|a|$$

로 각각 수렴하며

$k\geq3$일 때

$$\lim_{x\to0}\left|\frac{x^3+ax^2}{x^k}\right|=\infty$$

로 발산한다.

즉, ㉠이 $\frac{1}{2}$로 수렴하는 경우는 $k=2$이고 $|a|=\frac{1}{2}$인 경우뿐이다.

(i), (ii)에서 구하는 순서쌍 (a, b)는

$\left(1, \frac{1}{2}\right)$, $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$, $\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$

으로 그 개수는 3이다.

답 ③

2 $\lim_{x\to2}\frac{f(x)-f(0)}{x-2}=a$에서 $x\to2$일 때 (분모)$\to0$이고 극한값이 존재하므로 (분자)$\to0$이어야 한다.

즉, $\lim_{x\to2}\{f(x)-f(0)\}=f(2)-f(0)=0$이므로

$f(2)=f(0)$

이차함수 $f(x)$가 최솟값을 가지므로 함수 $f(x)$의 최고차항의 계수를 k라 하면 $k>0$이다.

이때 $f(2)=f(0)$이므로 이차함수 $f(x)$는 $x=1$에서 최솟값을 갖는다.

함수 $f(x)$의 최솟값이 $\frac{7}{5}$이므로

$f(x)=k(x-1)^2+\frac{7}{5}$

로 놓을 수 있다.

$$\lim_{x\to2}\frac{f(x)-f(0)}{x-2}=\lim_{x\to2}\frac{\left\{k(x-1)^2+\frac{7}{5}\right\}-\left(k+\frac{7}{5}\right)}{x-2}=\lim_{x\to2}\frac{k(x^2-2x)}{x-2}=\lim_{x\to2}\frac{kx(x-2)}{x-2}=\lim_{x\to2}kx=2k$$

이므로 $2k=a$에서

$k=\frac{1}{2}a$이고 $k>0$이므로 $a>0$

즉, $f(x)=\frac{1}{2}a(x-1)^2+\frac{7}{5}$

이때

$$\lim_{x\to0}\frac{2f(x+2)}{f(x)}=\lim_{x\to0}\frac{2\left\{\frac{1}{2}a(x+1)^2+\frac{7}{5}\right\}}{\frac{1}{2}a(x-1)^2+\frac{7}{5}}$$
$$=\frac{2\left(\frac{1}{2}a+\frac{7}{5}\right)}{\frac{1}{2}a+\frac{7}{5}}$$
$$=2$$

이므로 $2=\frac{5}{18}a$에서

$a=\frac{36}{5}$

따라서 $f(x)=\frac{18}{5}(x-1)^2+\frac{7}{5}$이므로

$f(5)=\frac{18}{5}\times16+\frac{7}{5}=59$

답 59

다른 풀이

$\lim_{x\to2}\frac{f(x)-f(0)}{x-2}=a$에서 $x\to2$일 때 (분모) $\to0$이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\to0$이어야 한다.

즉, $\lim_{x\to2}\{f(x)-f(0)\}=f(2)-f(0)=0$이므로

$f(2)=f(0)$ …… ㉠

이차함수 $f(x)$가 최솟값을 가지므로 함수 $f(x)$의 최고차항의 계수를 k라 하면 $k>0$이다.

이때 $f(2)=f(0)$이므로

$f(x)=kx(x-2)+f(0)$

으로 놓을 수 있다.

$$\lim_{x\to2}\frac{f(x)-f(0)}{x-2}=\lim_{x\to2}\frac{kx(x-2)+f(0)-f(0)}{x-2}$$
$$=\lim_{x\to2}\frac{kx(x-2)}{x-2}$$
$$=\lim_{x\to2}kx$$
$$=2k$$

이므로 $2k=a$에서

$k=\frac{1}{2}a$

즉, $f(x)=\frac{1}{2}ax(x-2)+f(0)$

한편, 함수 $f(x)$의 최솟값이 $\frac{7}{5}$이므로

$f(0)\ge\frac{7}{5}$

즉, $f(0)\ne0$이므로

$\lim_{x\to0}\frac{2f(x+2)}{f(x)}=\frac{2f(2)}{f(0)}=\frac{5}{18}a$

㉠에서 $f(0)=f(2)$이므로

$2=\frac{5}{18}a$

$a=\frac{36}{5}$

즉, $f(x)=\frac{18}{5}x(x-2)+f(0)$

㉠에서 $f(2)=f(0)$이므로 이차함수 $f(x)$는 $x=1$에서 최솟값을 갖는다.

$f(1)=-\frac{18}{5}+f(0)=\frac{7}{5}$

$f(0)=5$

따라서 $f(x)=\frac{18}{5}x(x-2)+5$이므로

$f(5)=\frac{18}{5}\times5\times3+5=59$

3 곡선 $y=tx^2$ 위를 움직이는 제1사분면의 점 P의 좌표를 $(a,\ ta^2)$ $(a>0)$이라 하면 점 P와 직선 $y=x-1$, 즉 $x-y-1=0$ 사이의 거리는

$\frac{|a-ta^2-1|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\frac{|ta^2-a+1|}{\sqrt{2}}$ …… ㉠

이때 $ta^2-a+1=t\left(a-\frac{1}{2t}\right)^2-\frac{1}{4t}+1$이고 $t>\frac{1}{4}$이므로

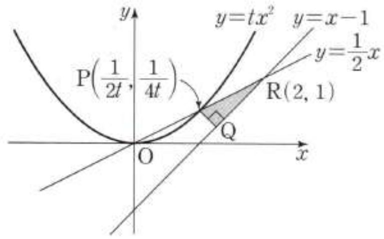
$ta^2-a+1>0$이다.

㉠은 $a=\frac{1}{2t}$일 때 최솟값 $\frac{1}{\sqrt{2}}\left(1-\frac{1}{4t}\right)$을 갖는다.

즉, 선분 PQ의 길이가 최소일 때, 점 P의 좌표는 $\left(\frac{1}{2t},\ \frac{1}{4t}\right)$이고

$\overline{PQ}=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(1-\frac{1}{4t}\right)$

한편, 점 P의 좌표가 $\left(\frac{1}{2t},\ \frac{1}{4t}\right)$일 때 직선 OP의 방정식은 $y=\frac{1}{2}x$이고, 점 R는 두 직선 $y=\frac{1}{2}x$, $y=x-1$의 교점이므로 점 R의 좌표는 $(2,\ 1)$이다.



이때

$\overline{PR}=\sqrt{\left(2-\frac{1}{2t}\right)^2+\left(1-\frac{1}{4t}\right)^2}$

$=\sqrt{5}\left(1-\frac{1}{4t}\right)$

이므로 직각삼각형 PQR에서

$$\overline{QR}=\sqrt{\overline{PR}^2-\overline{PQ}^2}$$
$$=\sqrt{\left\{\sqrt{5}\left(1-\frac{1}{4t}\right)\right\}^2-\left\{\frac{1}{\sqrt{2}}\left(1-\frac{1}{4t}\right)\right\}^2}$$
$$=\frac{3}{\sqrt{2}}\left(1-\frac{1}{4t}\right)$$

삼각형 PQR의 넓이는

$$S(t)=\frac{1}{2}\times\overline{PQ}\times\overline{QR}$$
$$=\frac{1}{2}\times\frac{1}{\sqrt{2}}\left(1-\frac{1}{4t}\right)\times\frac{3}{\sqrt{2}}\left(1-\frac{1}{4t}\right)$$
$$=\frac{3}{4}\left(1-\frac{1}{4t}\right)^2$$

따라서

$$\lim_{t\to\frac{1}{4}+}\frac{S(t)}{\left(t-\frac{1}{4}\right)^2}=\lim_{t\to\frac{1}{4}+}\frac{\frac{3}{4}\left(1-\frac{1}{4t}\right)^2}{\left(t-\frac{1}{4}\right)^2}$$
$$=\lim_{t\to\frac{1}{4}+}\frac{\frac{3}{4t^2}\left(t-\frac{1}{4}\right)^2}{\left(t-\frac{1}{4}\right)^2}$$
$$=\lim_{t\to\frac{1}{4}+}\frac{3}{4t^2}$$
$$=\frac{3}{4\times\left(\frac{1}{4}\right)^2}$$
$$=12$$

답 12

02 함수의 연속

유제 본문 19~23쪽

1 ③ **2** ② **3** ④ **4** 20 **5** 51

1 함수 $f(x)$가 $x=-1$에서 연속이므로

$\lim\limits_{x\to-1-}f(x)=\lim\limits_{x\to-1+}f(x)=f(-1)$이다.

$\lim\limits_{x\to-1-}f(x)=\lim\limits_{x\to-1-}(x^2-3x+a)=a+4$,

$\lim\limits_{x\to-1+}f(x)=\lim\limits_{x\to-1+}(2x+3a)=3a-2$,

$f(-1)=3a-2$

이므로

$a+4=3a-2$

따라서 $a=3$

답 ③

2 함수 $f(x)$가 $x=1$에서 연속이므로 $\lim\limits_{x\to1}f(x)=f(1)$이다.

즉, $\lim\limits_{x\to1}\frac{\sqrt{3x+a}-2}{x-1}=b$ ...... ㉠

㉠에서 $x\to1$일 때 (분모) $\to0$이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\to0$이어야 한다.

즉, $\lim\limits_{x\to1}(\sqrt{3x+a}-2)=\sqrt{3+a}-2=0$에서

$\sqrt{3+a}=2$

$a=1$

$a=1$을 ㉠에 대입하면

$$b=\lim_{x\to1}\frac{\sqrt{3x+1}-2}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to1}\frac{(\sqrt{3x+1}-2)(\sqrt{3x+1}+2)}{(x-1)(\sqrt{3x+1}+2)}$$
$$=\lim_{x\to1}\frac{3(x-1)}{(x-1)(\sqrt{3x+1}+2)}$$
$$=\lim_{x\to1}\frac{3}{\sqrt{3x+1}+2}$$
$$=\frac{3}{\sqrt{3+1}+2}$$
$$=\frac{3}{4}$$

따라서 $a+b=1+\frac{3}{4}=\frac{7}{4}$

답 ②

3 $f(x)=\begin{cases} 2x+3 & (x<a) \\ x+5 & (x\ge a) \end{cases}$, $g(x)=x^2-2x-3$에서

$f(x)g(x)=\begin{cases} (2x+3)(x^2-2x-3) & (x<a) \\ (x+5)(x^2-2x-3) & (x\ge a) \end{cases}$이므로

함수 $f(x)g(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이려면 $x=a$에서도 연속이어야 한다.

$\lim_{x\to a-} f(x)g(x)=\lim_{x\to a+} f(x)g(x)=f(a)g(a)$

$\lim_{x\to a-} f(x)g(x)=\lim_{x\to a-} (2x+3)(x^2-2x-3)$
$=(2a+3)(a^2-2a-3)$,

$\lim_{x\to a+} f(x)g(x)=\lim_{x\to a+} (x+5)(x^2-2x-3)$
$=(a+5)(a^2-2a-3)$,

$f(a)g(a)=(a+5)(a^2-2a-3)$

이므로

$(2a+3)(a^2-2a-3)=(a+5)(a^2-2a-3)$

$\{(2a+3)-(a+5)\}(a^2-2a-3)=0$

$(a-2)(a^2-2a-3)=0$

$(a+1)(a-2)(a-3)=0$

$a=-1$ 또는 $a=2$ 또는 $a=3$

따라서 서로 다른 모든 실수 a의 값의 합은

$-1+2+3=4$

답 ④

4 함수 $f(x)=x^2+6x-10$은 실수 전체의 집합에서 연속이므로 함수 $\dfrac{f(x)-x^2}{f(x)+k}$이 실수 전체의 집합에서 연속이 되기 위해서는 모든 실수 x에 대하여 $f(x)+k\neq0$이어야 한다.

즉, 이차방정식 $x^2+6x-10+k=0$의 판별식을 D라 하면

$\dfrac{D}{4}=3^2-1\times(-10+k)=19-k<0$이어야 하므로

$k>19$

따라서 자연수 k의 최솟값은 20이다.

답 20

5 함수 $f(x)$를 $f(x)=x^3+6x+5-a$라 하면 함수 $f(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이므로 닫힌구간 $[0, 1]$에서도 연속이다.

방정식 $f(x)=0$은 a의 값에 관계없이 항상 서로 다른 실근의 개수가 1이므로 $f(0)f(1)<0$이면 사잇값의 정리에 의하여 이 실근이 열린구간 $(0, 1)$에 존재한다.

$f(0)=5-a$, $f(1)=1+6+5-a=12-a$

이므로 $f(0)f(1)<0$에서

$(5-a)(12-a)<0$

$(a-5)(a-12)<0$

$5<a<12$

따라서 자연수 a는 6, 7, 8, 9, 10, 11이고 모든 자연수 a의 값의 합은

$6+7+8+9+10+11=51$

답 51

Level 1 **기초 연습** 본문 24~25쪽

1 ③	2 14	3 ②	4 ④	5 ①
6 ⑤	7 ③			

1 함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이므로 $x=0$에서도 연속이다.

즉, $\lim_{x\to0} f(x)=f(0)$

$\lim_{x\to0}\{5f(x)-9\}=2f(0)$에서

$\lim_{x\to0}\{5f(x)-9\}=5\lim_{x\to0} f(x)-9$
$=5f(0)-9$

이므로 $5f(0)-9=2f(0)$

따라서 $f(0)=3$

답 ③

2 함수 $f(x)$가 $x=2$에서 연속이므로

$\lim_{x\to2-} f(x)=\lim_{x\to2+} f(x)=f(2)$이다.

$\lim_{x\to2-} f(x)=\lim_{x\to2-} (3x+a)=6+a$,

$\lim_{x\to2+} f(x)=\lim_{x\to2+} (2x^2+x)=10$,

$f(2)=b$

이므로 $6+a=10=b$

따라서 $a=4$, $b=10$이므로

$a+b=4+10=14$

답 14

3 함수 $f(x)$가 $x=2$에서 연속이므로 $\lim_{x\to2} f(x)=f(2)$이다.

즉, $\lim_{x\to2} \dfrac{\sqrt{x^2+a}-3}{x-2}=b$ ...... ㉠

㉠에서 $x\to2$일 때 (분모)$\to0$이고 극한값이 존재하므로 (분자)$\to0$이어야 한다.

즉, $\lim_{x\to2}(\sqrt{x^2+a}-3)=\sqrt{4+a}-3=0$에서

$\sqrt{4+a}=3$, $a=5$

$a=5$를 ㉠에 대입하면

$$b=\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x^2+5}-3}{x-2}$$
$$=\lim_{x\to 2}\frac{(\sqrt{x^2+5}-3)(\sqrt{x^2+5}+3)}{(x-2)(\sqrt{x^2+5}+3)}$$
$$=\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{(x-2)(\sqrt{x^2+5}+3)}$$
$$=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x+2)}{(x-2)(\sqrt{x^2+5}+3)}$$
$$=\lim_{x\to 2}\frac{x+2}{\sqrt{x^2+5}+3}$$
$$=\frac{2+2}{\sqrt{4+5}+3}$$
$$=\frac{2}{3}$$

따라서 $a+b=5+\frac{2}{3}=\frac{17}{3}$

답 ②

4 함수 $|f(x)|=\begin{cases}|2x-3| & (x<1)\\ |3x-a| & (x\geq 1)\end{cases}$이 실수 전체의 집합에서 연속이려면 $x=1$에서도 연속이어야 한다.

즉, $\lim_{x\to 1-}|f(x)|=\lim_{x\to 1+}|f(x)|=|f(1)|$

$\lim_{x\to 1-}|f(x)|=\lim_{x\to 1-}|2x-3|=|2-3|=1$,

$\lim_{x\to 1+}|f(x)|=\lim_{x\to 1+}|3x-a|=|3-a|$,

$|f(1)|=|3-a|$

이므로

$|3-a|=1$, $a=2$ 또는 $a=4$

따라서 모든 실수 a의 값의 곱은

$2\times 4=8$

답 ④

5 두 함수 $f(x)+g(x)$, $f(x)-g(x)$가 모두 실수 전체의 집합에서 연속이므로 두 함수

$$f(x)=\frac{\{f(x)+g(x)\}+\{f(x)-g(x)\}}{2},$$
$$g(x)=\frac{\{f(x)+g(x)\}-\{f(x)-g(x)\}}{2}$$

도 모두 실수 전체의 집합에서 연속이다.

함수 $f(x)$가 $x=1$에서 연속이므로

$\lim_{x\to 1-}f(x)=\lim_{x\to 1+}f(x)=f(1)$이다.

$\lim_{x\to 1-}f(x)=\lim_{x\to 1-}(2ax+1)=2a+1$,

$\lim_{x\to 1+}f(x)=\lim_{x\to 1+}(x^2-a^2)=1-a^2$,

$f(1)=1-a^2$

이므로

$2a+1=1-a^2$, $a^2+2a=0$, $a(a+2)=0$

$a=0$ 또는 $a=-2$ $\cdots\cdots$ ㉠

함수 $g(x)$가 $x=2$에서 연속이므로

$\lim_{x\to 2-}g(x)=\lim_{x\to 2+}g(x)=g(2)$이다.

$\lim_{x\to 2-}g(x)=\lim_{x\to 2-}\left(\frac{1}{2}x^2+a^2\right)=2+a^2$,

$\lim_{x\to 2+}g(x)=\lim_{x\to 2+}(x^2+x)=6$,

$g(2)=6$

이므로 $2+a^2=6$에서

$a^2=4$

$a=2$ 또는 $a=-2$ $\cdots\cdots$ ㉡

따라서 ㉠, ㉡에서 $a=-2$

답 ①

6 $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}x+3 & (x<2)\\ -x & (x\geq 2)\end{cases}$, $g(x)=x^2+ax-8$에서

$$f(x)g(x)=\begin{cases}\left(\frac{1}{2}x+3\right)(x^2+ax-8) & (x<2)\\ -x(x^2+ax-8) & (x\geq 2)\end{cases}$$

함수 $f(x)g(x)$가 $x=2$에서 연속이므로

$\lim_{x\to 2-}f(x)g(x)=\lim_{x\to 2+}f(x)g(x)=f(2)g(2)$

$$\lim_{x\to 2-}f(x)g(x)=\lim_{x\to 2-}\left(\frac{1}{2}x+3\right)(x^2+ax-8)$$
$$=4\times(2a-4)$$
$$=8a-16,$$
$$\lim_{x\to 2+}f(x)g(x)=\lim_{x\to 2+}\{-x(x^2+ax-8)\}$$
$$=-2\times(2a-4)$$
$$=-4a+8,$$

$f(2)g(2)=-2\times(2a-4)=-4a+8$

이므로

$8a-16=-4a+8$

따라서 $a=2$

답 ⑤

7 모든 자연수 k에 대하여 두 곡선 $y=x^3+k$, $y=2x^2-2x$는 한 점에서만 만나고 그 점의 x좌표가 a_k이므로

$f(x)=x^3-2x^2+2x+k$라 하면 방정식 $f(x)=0$은 항상 단 한 개의 실근 a_k를 갖는다.

이때 함수 $f(x)$는 닫힌구간 $[-2, -1]$에서 연속이므로 x에 대한 방정식 $f(x)=0$이 열린구간 $(-2, -1)$에서 오직 하나의 실근을 가지려면 $f(-2)f(-1)<0$이어야 한다.

$f(-2)=-8-8-4+k=k-20$,
$f(-1)=-1-2-2+k=k-5$
이므로
$(k-20)(k-5)<0$
$5<k<20$
따라서 자연수 k의 값은 6, 7, 8, …, 19이고 그 개수는 14이다.

답 ③

Level 2 **기본 연습** 본문 26~27쪽

1 ⑤ 2 ③ 3 18 4 ④ 5 ⑤
6 ④

1 함수 $g(x)$가 $x=2$에서 연속이므로
$\lim_{x\to 2-} g(x)=\lim_{x\to 2+} g(x)=g(2)$이다.
$\lim_{x\to 2-} g(x)=\lim_{x\to 2-} (x+3)f(x)=5f(2)$,
$\lim_{x\to 2+} g(x)=\lim_{x\to 2+} (2x-3)f(1-x)=f(-1)$,
$g(2)=f(0)$
이므로 $5f(2)=f(-1)=f(0)$
$f(x)=x^2+ax+b$ (a, b는 상수)라 하면
$5f(2)=5(4+2a+b)=20+10a+5b$
$f(-1)=1-a+b$
$f(0)=b$
$f(-1)=f(0)$에서 $1-a+b=b$이므로 $a=1$
$5f(2)=f(0)$에서 $20+10a+5b=b$이므로 $a=1$을 대입하면
$30+5b=b$
$b=-\frac{15}{2}$
따라서 $f(2)=\frac{1}{5}f(0)=\frac{1}{5}b=-\frac{3}{2}$

답 ⑤

2 $x\neq 1$, $x\neq 2$일 때
$f(x)=\frac{(x-1)(x^2+ax+b)}{(x-1)(x-2)}=\frac{x^2+ax+b}{x-2}$
함수 $f(x)$는 $x=1$에서 연속이므로
$\lim_{x\to 1} f(x)=f(1)$이다.
즉, $\lim_{x\to 1}\frac{x^2+ax+b}{x-2}=2$이므로
$\frac{1+a+b}{1-2}=2$
$a+b=-3$ ...... ㉠
함수 $f(x)$는 $x=2$에서 연속이므로
$\lim_{x\to 2} f(x)=f(2)$이다.
$\lim_{x\to 2}\frac{x^2+ax+b}{x-2}=f(2)$에서 $x\to 2$일 때 (분모) $\to 0$이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\to 0$이어야 한다.
즉, $\lim_{x\to 2}(x^2+ax+b)=4+2a+b=0$에서
$2a+b=-4$ ...... ㉡
㉠, ㉡에서
$a=-1$, $b=-2$
따라서
$f(2)=\lim_{x\to 2}\frac{x^2-x-2}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{(x+1)(x-2)}{x-2}$
$=\lim_{x\to 2}(x+1)=2+1=3$

답 ③

3 함수 $f(x)$가 $x=1$에서 연속이므로
$\lim_{x\to 1-} f(x)=\lim_{x\to 1+} f(x)=f(1)$이다.
$\lim_{x\to 1-} f(x)=\lim_{x\to 1-}\frac{x^3+ax^2+bx-2}{x-1}$ ...... ㉠
함수 $f(x)$는 $x=-1$에서 연속이므로
$\lim_{x\to 1+} f(x)=\lim_{x\to 1+} f(-x)=\lim_{x\to -1-} f(x)=f(-1)$
$=\frac{-1+a-b-2}{-1-1}$
$=\frac{3-a+b}{2}$ ...... ㉡
㉠, ㉡에서
$\lim_{x\to 1-}\frac{x^3+ax^2+bx-2}{x-1}=\frac{3-a+b}{2}$ ...... ㉢
이어야 한다.
㉢에서 $x\to 1-$일 때 (분모) $\to 0$이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\to 0$이어야 한다.
즉, $\lim_{x\to 1-}(x^3+ax^2+bx-2)=1+a+b-2=0$에서
$b=1-a$
$b=1-a$를 ㉠에 대입하면
$\lim_{x\to 1-}\frac{x^3+ax^2+bx-2}{x-1}$
$=\lim_{x\to 1-}\frac{x^3+ax^2+(1-a)x-2}{x-1}$
$=\lim_{x\to 1-}\frac{(x-1)\{x^2+(a+1)x+2\}}{x-1}$
$=\lim_{x\to 1-}\{x^2+(a+1)x+2\}$
$=1+(a+1)+2$
$=a+4$

$b=1-a$를 ㉡에 대입하면

$\dfrac{3-a+b}{2}=\dfrac{3-a+(1-a)}{2}=2-a$

이때 ㉢에서 $a+4=2-a$이므로 $a=-1$이고 $b=1-a=2$이다.

따라서

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^3-x^2+2x-2}{x-1} & (x<1) \\ f(-x) & (x\geq 1) \end{cases}$$

이므로

$f(4)=f(-4)=\dfrac{-64-16-8-2}{-4-1}=18$

답 18

참고

$x<1$일 때

$f(x)=\dfrac{x^3-x^2+2x-2}{x-1}=\dfrac{(x-1)(x^2+2)}{x-1}=x^2+2$

이고 $x\geq 1$일 때

$f(x)=f(-x)=(-x)^2+2=x^2+2$

이므로 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $f(x)$는 $f(x)=x^2+2$이다.

4 함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이므로 $x=0$에서도 연속이다.

즉, $\lim\limits_{x\to 0-}f(x)=\lim\limits_{x\to 0+}f(x)=f(0)$

이때 모든 실수 x에 대하여 $f(x+3)=f(x)$이므로

$\lim\limits_{x\to 0-}f(x)=\lim\limits_{x\to 0-}f(x+3)=\lim\limits_{x\to 3-}f(x)$이다.

$$\lim_{x\to 3-}f(x)=\lim_{x\to 3-}\frac{ax+b}{x+1}=\frac{3a+b}{4},$$

$\lim\limits_{x\to 0+}f(x)=\lim\limits_{x\to 0+}(-x+5)=5,$

$f(0)=5$

이므로

$\dfrac{3a+b}{4}=5$

$3a+b=20$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이므로 $x=1$에서도 연속이다.

즉, $\lim\limits_{x\to 1-}f(x)=\lim\limits_{x\to 1+}f(x)=f(1)$이다.

$\lim\limits_{x\to 1-}f(x)=\lim\limits_{x\to 1-}(-x+5)=4,$

$\lim\limits_{x\to 1+}f(x)=\lim\limits_{x\to 1+}\dfrac{ax+b}{x+1}=\dfrac{a+b}{2},$

$f(1)=\dfrac{a+b}{2}$

이므로 $4=\dfrac{a+b}{2}$

$a+b=8$ $\quad\cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡에서

$a=6,\ b=2$

따라서 $f(8)=f(5)=f(2)=\dfrac{2a+b}{2+1}=\dfrac{14}{3}$

답 ④

5 ㄱ. $\lim\limits_{x\to 0-}f(x)=\lim\limits_{x\to 0-}(x-1)=-1,$

$\lim\limits_{x\to 0+}f(x)=\lim\limits_{x\to 0+}a=a,\ f(0)=a$이고 $a>0$이므로

$\lim\limits_{x\to 0-}f(x)\neq\lim\limits_{x\to 0+}f(x)$이다.

따라서 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 불연속이다. (참)

ㄴ. $a=1$이면 함수 $|f(x)|$는

$$|f(x)|=\begin{cases} |x-1| & (x<0) \\ 1 & (x\geq 0) \end{cases}$$

이고 $x\neq 0$일 때 연속이다.

이때 $\lim\limits_{x\to 0-}|f(x)|=\lim\limits_{x\to 0-}|x-1|=1,$

$\lim\limits_{x\to 0+}|f(x)|=\lim\limits_{x\to 0+}1=1,\ |f(0)|=1$이므로

함수 $|f(x)|$는 $x=0$에서 연속이다.

따라서 $a=1$이면 함수 $|f(x)|$는 실수 전체의 집합에서 연속이다. (참)

ㄷ. 함수 $xf(x)$는

$$xf(x)=\begin{cases} x(x-1) & (x<0) \\ ax & (x\geq 0) \end{cases}$$

이고 $x\neq 0$일 때 연속이다.

이때 a의 값에 관계없이

$\lim\limits_{x\to 0-}xf(x)=\lim\limits_{x\to 0-}x(x-1)=0,$

$\lim\limits_{x\to 0+}xf(x)=\lim\limits_{x\to 0+}ax=0,\ 0\times f(0)=0$이므로

함수 $xf(x)$는 $x=0$에서 연속이다.

따라서 함수 $xf(x)$는 a의 값에 관계없이 실수 전체의 집합에서 연속이다. (참)

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

답 ⑤

6 조건 (가)에서 다항함수 $f(x)$의 모든 항의 계수가 정수이고 조건 (나)에서 함수 $f(x)-x^2$은 일차 이하의 다항함수이므로 함수 $f(x)$를 $f(x)=x^2+ax+b$ (a, b는 정수)라 하자.

이때

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)-x^2}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{ax+b}{x}$$
$$=\lim_{x\to\infty}\left(a+\frac{b}{x}\right)$$
$$=a$$

$f(-4)=16-4a+b$이므로

$a=16-4a+b$

$b=5a-16$

조건 (다)에서 함수 $\frac{1}{f(x)}$이 실수 전체의 집합에서 연속이려면 모든 실수 x에 대하여 $f(x)\neq0$이어야 하므로 방정식 $x^2+ax+b=0$의 판별식을 D라 하면 $D<0$이어야 한다.

$$D=a^2-4b$$
$$=a^2-4(5a-16)$$
$$=a^2-20a+64$$
$$=(a-4)(a-16)$$

이므로 $D<0$에서 $4<a<16$

a는 정수이므로

$a=5, 6, 7, \cdots, 15$

$$f(1)=1+a+b$$
$$=1+a+(5a-16)$$
$$=6a-15$$

이므로 $f(1)$의 최댓값은 $a=15$일 때

$6\times15-15=75$

답 ④

Level 3 실력 완성

본문 28쪽

1 18　2 ⑤　3 ③

1 함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이고 모든 실수 x에 대하여 $f(x)>0$이므로

$|f(x)|=f(x)$

조건 (가)에서 함수 $|f(x)g(x)|=f(x)|g(x)|$가 실수 전체의 집합에서 연속이고 연속함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 $f(x)>0$이므로 함수 $\frac{f(x)|g(x)|}{f(x)}=|g(x)|$도 실수 전체의 집합에서 연속이다.

즉, $\lim_{x\to1+}g(x)=a$, $\lim_{x\to1-}g(x)=b$라 할 때,

$\lim_{x\to1+}|g(x)|=|a|$, $\lim_{x\to1-}|g(x)|=|b|$이고

$|a|=|b|=|g(1)|$이다.

이때 $\lim_{x\to1+}g(x)>\lim_{x\to1-}g(x)$에서 $a>b$이므로

$a>0>b$이고

$b=-a$　…… ㉠

한편, 조건 (나)에서

$$\lim_{x\to1-}f(x)g(x)=\lim_{x\to1-}(x^2-2x-8)$$
$$=1-2-8$$
$$=-9$$

즉, $\lim_{x\to1-}|f(x)g(x)|=9$이고 함수 $|f(x)g(x)|$는 $x=1$에서 연속이므로

$|f(1)g(1)|=f(1)|g(1)|=9$　…… ㉡

또한

$$\lim_{x\to1+}\frac{g(x)}{f(x)}=\lim_{x\to1+}(3x+1)$$
$$=3+1$$
$$=4$$

즉, $\lim_{x\to1+}\left|\frac{g(x)}{f(x)}\right|=4$이고 함수 $\left|\frac{g(x)}{f(x)}\right|=\frac{|g(x)|}{f(x)}$는 $x=1$에서 연속이므로

$\frac{|g(1)|}{f(1)}=4$　…… ㉢

㉡, ㉢에서 $|g(1)|^2=36$이므로

$|g(1)|=6$

이것을 ㉡에 대입하면

$f(1)=\frac{3}{2}$

또한 $|a|=|b|=6$이므로 ㉠에서

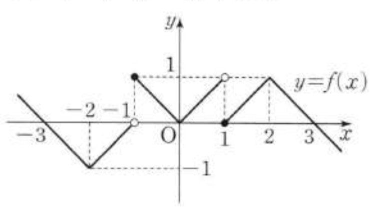
$a=6$, $b=-6$

따라서

$$f(1)\times\left\{\lim_{x\to1+}g(x)-\lim_{x\to1-}g(x)\right\}=\frac{3}{2}\times\{6-(-6)\}$$
$$=18$$

답 18

2 함수 $y=f(x)$의 그래프는 그림과 같다.



ㄱ. $\lim_{x\to-1-}f(x)=0$, $\lim_{x\to-1+}f(x)=1$이므로 함수 $f(x)$는 $x=-1$에서 불연속이다.

또한 $\lim_{x\to1-}f(x)=1$, $\lim_{x\to1+}f(x)=0$이므로 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 불연속이다.

따라서 함수 $f(x)$는 $x=-1$과 $x=1$에서 모두 불연속이다. (참)

ㄴ. 함수 $g(x)$를 $g(x)=f(x)\{f(x)+k\}$라 하자.

함수 $f(x)$는 $x=-1$과 $x=1$에서만 불연속이므로 함수 $g(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이려면 함수 $g(x)$가 $x=-1$과 $x=1$에서 연속이어야 한다.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to-1-}g(x)&=\lim_{x\to-1-}f(x)\{f(x)+k\}\\&=\lim_{x\to-1-}f(x)\times\lim_{x\to-1-}\{f(x)+k\}\\&=0\times(0+k)=0,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lim_{x\to-1+}g(x)&=\lim_{x\to-1+}f(x)\{f(x)+k\}\\&=\lim_{x\to-1+}f(x)\times\lim_{x\to-1+}\{f(x)+k\}\\&=1\times(1+k)=1+k,\end{aligned}$$

$g(-1)=f(-1)\{f(-1)+k\}=1+k$

이므로 $0=1+k$, 즉 $k=-1$이면 함수 $g(x)$는 $x=-1$에서 연속이다.

또한 $k=-1$이면

$$\begin{aligned}\lim_{x\to1-}g(x)&=\lim_{x\to1-}f(x)\{f(x)-1\}\\&=\lim_{x\to1-}f(x)\times\lim_{x\to1-}\{f(x)-1\}\\&=1\times(1-1)=0,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lim_{x\to1+}g(x)&=\lim_{x\to1+}f(x)\{f(x)-1\}\\&=\lim_{x\to1+}f(x)\times\lim_{x\to1+}\{f(x)-1\}\\&=0\times(0-1)=0,\end{aligned}$$

$g(1)=f(1)\{f(1)-1\}=0$

이므로 함수 $g(x)$는 $x=1$에서 연속이다.

따라서 $k=-1$이면 함수 $g(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이다. (참)

ㄷ. 함수 $f(x)$는 $x=-1$과 $x=1$에서만 불연속이고, 함수 $y=f(x-2)$의 그래프는 함수 $y=f(x)$의 그래프를 x축의 방향으로 2만큼 평행이동한 그래프이므로 함수 $f(x-2)$는 $x=1$과 $x=3$에서만 불연속이다.

함수 $h(x)$를 $h(x)=f(x)f(x-2)$라 할 때, 함수 $h(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이려면 함수 $h(x)$가 $x=-1$, $x=1$, $x=3$에서 모두 연속이어야 한다.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to-1-}h(x)&=\lim_{x\to-1-}f(x)f(x-2)\\&=\lim_{x\to-1-}f(x)\times\lim_{x\to-1-}f(x-2)\\&=\lim_{x\to-1-}f(x)\times\lim_{x\to-3-}f(x)\\&=0\times0=0,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lim_{x\to-1+}h(x)&=\lim_{x\to-1+}f(x)f(x-2)\\&=\lim_{x\to-1+}f(x)\times\lim_{x\to-1+}f(x-2)\\&=\lim_{x\to-1+}f(x)\times\lim_{x\to-3+}f(x)\\&=1\times0=0,\end{aligned}$$

$h(-1)=f(-1)f(-3)=1\times0=0$

이므로 함수 $h(x)$는 $x=-1$에서 연속이다.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to1-}h(x)&=\lim_{x\to1-}f(x)f(x-2)\\&=\lim_{x\to1-}f(x)\times\lim_{x\to1-}f(x-2)\\&=\lim_{x\to1-}f(x)\times\lim_{x\to-1-}f(x)\\&=1\times0=0,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lim_{x\to1+}h(x)&=\lim_{x\to1+}f(x)f(x-2)\\&=\lim_{x\to1+}f(x)\times\lim_{x\to1+}f(x-2)\\&=\lim_{x\to1+}f(x)\times\lim_{x\to-1+}f(x)\\&=0\times1=0,\end{aligned}$$

$h(1)=f(1)f(-1)=0\times1=0$

이므로 함수 $h(x)$는 $x=1$에서 연속이다.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to3-}h(x)&=\lim_{x\to3-}f(x)f(x-2)\\&=\lim_{x\to3-}f(x)\times\lim_{x\to3-}f(x-2)\\&=\lim_{x\to3-}f(x)\times\lim_{x\to1-}f(x)\\&=0\times1=0,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lim_{x\to3+}h(x)&=\lim_{x\to3+}f(x)f(x-2)\\&=\lim_{x\to3+}f(x)\times\lim_{x\to3+}f(x-2)\\&=\lim_{x\to3+}f(x)\times\lim_{x\to1+}f(x)\\&=0\times0=0,\end{aligned}$$

$h(3)=f(3)f(1)=0\times0=0$

이므로 함수 $h(x)$는 $x=3$에서 연속이다.

따라서 함수 $h(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이다. (참)

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

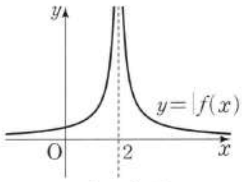
답 ⑤

3 $f(x)=\dfrac{ax+b}{x-2}=\dfrac{a(x-2)+2a+b}{x-2}=a+\dfrac{2a+b}{x-2}$

이므로 곡선 $y=f(x)$의 점근선은 직선 $x=2$와 직선 $y=a$이다.

함수 $g(t)$는 함수 $y=|f(x)|$의 그래프와 직선 $y=t$가 만나는 서로 다른 점의 개수이고, 함수 $h(t)$는 함수 $y=|f(x)|$의 그래프와 직선 $y=tx$가 만나는 서로 다른 점의 개수이다.

만약 $a=0$이면 $f(x)=\dfrac{b}{x-2}$이므로 함수 $y=|f(x)|$의 그래프는 [그림 1]과 같다.



[그림 1]

이때 양수 t에 대하여 함수 $y=|f(x)|$의 그래프와 직선 $y=t$는 항상 서로 다른 두 점에서 만나므로 함수 $g(t)$는 $g(t)=2$로 양의 실수 전체의 집합에서 연속이다. 즉, 조건 (가)를 만족시키지 않는다. 그러므로 $a\neq 0$이다.

(i) $a>0$인 경우

$a>0$, $2a+b>0$이므로 함수 $y=|f(x)|$의 그래프는 [그림 2]와 같다.

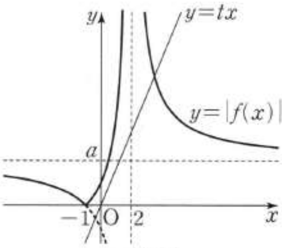
직선 $y=a$는 함수 $y=|f(x)|$의 그래프의 한 점근선이면서 x축과 평행하므로

$$g(t)=\begin{cases} 2 & (0<t<a) \\ 1 & (t=a) \\ 2 & (t>a) \end{cases}$$

즉, 함수 $g(t)$는 $t=a$에서만 불연속이다.

조건 (가)에 의하여 $a=b$이므로

$f(x)=\dfrac{ax+b}{x-2}=\dfrac{a(x+1)}{x-2}$, 즉 $f(-1)=0$이다.



[그림 2]

이때 함수 $h(t)$의 함숫값은 항상 0 이상의 정수이고, $\lim\limits_{t\to\infty}h(t)=3$, $\lim\limits_{t\to0+}h(t)=1$이므로 함수 $h(t)$가 $t=p$에서 불연속인 양수 p가 존재한다. 즉, 조건 (나)를 만족시키지 않는다.

(ii) $a<0$인 경우

㉠ $2a+b>0$인 경우

함수 $y=|f(x)|$의 그래프는 [그림 3]과 같다.

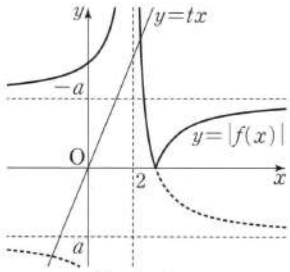
직선 $y=-a$는 함수 $y=|f(x)|$의 그래프의 한 점근선이면서 x축과 평행하므로

$$g(t)=\begin{cases} 2 & (0<t<-a) \\ 1 & (t=-a) \\ 2 & (t>-a) \end{cases}$$

즉, 함수 $g(t)$는 $t=-a$에서만 불연속이다.

조건 (가)에 의하여 $b=-a$이므로

$f(x)=\dfrac{ax-a}{x-2}=\dfrac{a(x-1)}{x-2}$이고 $f(1)=0$이다.



[그림 3]

그러나 $x<2$에서 $f(x)\neq 0$이므로 모순이다.

㉡ $2a+b<0$인 경우

함수 $y=|f(x)|$의 그래프는 [그림 4]와 같다.

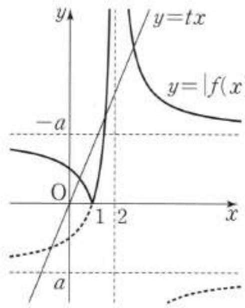
직선 $y=-a$는 함수 $y=|f(x)|$의 그래프의 한 점근선이면서 x축과 평행하므로

$$g(t)=\begin{cases} 2 & (0<t<-a) \\ 1 & (t=-a) \\ 2 & (t>-a) \end{cases}$$

즉, 함수 $g(t)$는 $t=-a$에서만 불연속이다.

조건 (가)에 의하여 $b=-a$이므로

$f(x)=\dfrac{ax-a}{x-2}=\dfrac{a(x-1)}{x-2}$이고 $f(1)=0$이다.



[그림 4]

이때 모든 양수 t에 대하여 $h(t)=3$이므로 $h(4)=3$이고 $f(4)+h(4)=-3$에서

$f(4)=-3-h(4)=-3-3=-6$

즉, $f(4)=\dfrac{3a}{2}=-6$

$a=-4$, $b=-a=4$

(i), (ii)에서 $a=-4$, $b=4$이므로

$f(x)=\dfrac{-4x+4}{x-2}$

따라서 $f(b)=f(4)=\dfrac{-16+4}{4-2}=-6$

답 ③

03 미분계수와 도함수

유제 본문 31~37쪽

1 ② 2 ③ 3 2 4 ② 5 ①
6 ⑤ 7 ④

1 $\lim_{h\to 0}\frac{f(1+2h)-1}{h}=2$에서 $h\to 0$일 때 (분모)$\to 0$이고 극한값이 존재하므로 (분자)$\to 0$이어야 한다.

즉, $\lim_{h\to 0}\{f(1+2h)-1\}=f(1)-1=0$이므로

$f(1)=1$

따라서

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(1+2h)-1}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(1+2h)-f(1)}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(1+2h)-f(1)}{2h}\times 2$$
$$=2f'(1)$$
$$=2$$

이므로 $f'(1)=1$

따라서 $f(1)+f'(1)=1+1=2$

답 ②

2 다항함수 $f(x)$에서 x의 값이 0에서 1까지 변할 때의 함수 $y=f(x)$의 평균변화율은

$$\frac{f(1)-f(0)}{1-0}=f(1)-f(0)$$

$x=2$에서의 미분계수는

$$f'(2)=\lim_{h\to 0}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}$$

이므로

$$f(1)-f(0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}=f'(2)$$

따라서

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(2+3h)-f(2)}{h\{f(1)-f(0)\}}$$
$$=\lim_{h\to 0}\left\{\frac{f(2+3h)-f(2)}{h}\times\frac{1}{f(1)-f(0)}\right\}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(2+3h)-f(2)}{h}\times\lim_{h\to 0}\frac{1}{f(1)-f(0)}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(2+3h)-f(2)}{3h}\times 3\times\lim_{h\to 0}\frac{1}{f(1)-f(0)}$$
$$=3f'(2)\times\frac{1}{f'(2)}$$
$$=3$$

답 ③

3 함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하려면 $x=0$에서 미분가능하면 된다.

(i) 함수 $f(x)$가 $x=0$에서 미분가능하므로 $x=0$에서 연속이다.

즉, $\lim_{x\to 0-}f(x)=\lim_{x\to 0+}f(x)=f(0)$이므로

$$\lim_{x\to 0-}f(x)=\lim_{x\to 0-}(2x+a)=a$$
$$\lim_{x\to 0+}f(x)=\lim_{x\to 0+}\left\{x^2+(a^2-2)x+\frac{1}{2}a^2\right\}$$
$$=\frac{1}{2}a^2$$

$f(0)=a$

따라서 $a=\frac{1}{2}a^2$에서 $a(a-2)=0$이므로

$a=0$ 또는 $a=2$ …… ㉠

(ii) 함수 $f(x)$가 $x=0$에서 미분가능하므로

$$\lim_{x\to 0-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}$$
$$=\lim_{x\to 0-}\frac{(2x+a)-a}{x}$$
$$=\lim_{x\to 0-}\frac{2x}{x}=2,$$

$$\lim_{x\to 0+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}$$
$$=\lim_{x\to 0+}\frac{\left\{x^2+(a^2-2)x+\frac{1}{2}a^2\right\}-a}{x-0}$$
$$=\lim_{x\to 0+}\frac{x^2+(a^2-2)x}{x}$$
$$=\lim_{x\to 0+}\{x+(a^2-2)\}$$
$$=a^2-2$$

이므로 $a^2-2=2$에서

$a^2=4$

$a=-2$ 또는 $a=2$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 $a=2$

답 2

4 $\lim_{h\to 0}\frac{f(x)-f(x-h)}{h}$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(x-h)-f(x)}{-h}$$
$$=f'(x)$$

이므로

$f'(x)=3x^2+ax$
따라서 $f'(1)=3+a=2$이므로
$a=-1$

답 ②

5 $f(x+y)-f(x)=f(y)-xy-f(0)$
에서 $y\neq0$이라 하면
$\dfrac{f(x+y)-f(x)}{y}=\dfrac{f(y)-f(0)}{y}-x$
이므로
$\lim\limits_{y\to0}\dfrac{f(x+y)-f(x)}{y}=\lim\limits_{y\to0}\left\{\dfrac{f(y)-f(0)}{y}-x\right\}$
$\lim\limits_{y\to0}\dfrac{f(x+y)-f(x)}{y}=\lim\limits_{y\to0}\left\{\dfrac{f(0+y)-f(0)}{y}-x\right\}$
$\lim\limits_{y\to0}\dfrac{f(x+y)-f(x)}{y}=\lim\limits_{y\to0}\dfrac{f(0+y)-f(0)}{y}-x$
$f'(x)=f'(0)-x$
$x=-2$를 대입하면
$f'(-2)=f'(0)-(-2)$
따라서 $f'(0)-f'(-2)=-2$

답 ①

6 $f(x)=x^2+ax+b$ (a, b는 상수)라 하면
$f'(x)=2x+a$이므로
$f'(1)=2+a=4$
$f(-1)=1-a+b=2$
즉, $a=2$, $b=3$이므로
$f(x)=x^2+2x+3=(x+1)^2+2$
따라서 함수 $f(x)$의 최솟값은 $x=-1$일 때 2이다.

답 ⑤

7 조건 (나)에 의하여
$f(x)=(x-2)^2(x+a)$ (a는 상수)라 하면
$f'(x)=2(x-2)(x+a)+(x-2)^2$
따라서 조건 (가)에 의하여
$f'(1)=-2(1+a)+1=5$
$-2a=6$, $a=-3$
즉, $f(x)=(x-2)^2(x-3)$이므로
$f(4)=2^2\times1=4$

답 ④

참고 상수 a에 대하여
$\{(x+a)^2\}'=2(x+a)$이고
$\{(x+a)^3\}'=3(x+a)^2$이다.

Level 1 기초 연습

본문 38~39쪽

1 ⑤	2 ⑤	3 ④	4 ①	5 ③
6 17	7 ④	8 ①		

1 $\dfrac{f(1)-f(-2)}{1-(-2)}=\dfrac{(1^3-1)-\{(-2)^3-(-2)\}}{3}=\dfrac{6}{3}=2$

답 ⑤

2 $\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(1+3h)-f(1-2h)}{h}$
$=\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(1+3h)-f(1)-f(1-2h)+f(1)}{h}$
$=\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(1+3h)-f(1)}{3h}\times3+\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(1-2h)-f(1)}{-2h}\times2$
$=3f'(1)+2f'(1)$
$=5f'(1)$
$=10$

답 ⑤

3 $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{f(x)+b}{x-1}=2f'(2)$에서 $x\to1$일 때 (분모) $\to0$이고
극한값이 존재하므로 (분자) $\to0$이어야 한다.
즉, $\lim\limits_{x\to1}\{f(x)+b\}=f(1)+b=0$에서
$b=-f(1)$
따라서
$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{f(x)+b}{x-1}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=f'(1)$
이므로
$f'(1)=2f'(2)$
이때 $f'(x)=2x+a$이므로
$2+a=2(4+a)$, $2+a=8+2a$
$a=-6$
즉, $f(x)=x^2-6x+2$에서
$b=-f(1)=3$이므로
$a-b=-6-3=-9$

답 ④

4 $\lim\limits_{h\to0-}\dfrac{f(-1+h)-f(-1)}{h}=\lim\limits_{h\to0-}\dfrac{2-2}{h}=0$
$\lim\limits_{h\to0+}\dfrac{f(-1+h)-f(-1)}{h}$
$=\lim\limits_{h\to0+}\dfrac{\{(-1+h)^2+a(-1+h)+b\}-2}{h}$

$=\lim_{h\to 0+}\frac{h^2-2h+1-a+ah+b-2}{h}$

$=\lim_{h\to 0+}\frac{h^2+(a-2)h-a+b-1}{h}$

이때 함수 $f(x)$는 $x=-1$에서 미분가능하므로

$\lim_{h\to 0+}\frac{h^2+(a-2)h-a+b-1}{h}=0$

$h\to 0+$일 때 (분모)$\to 0$이고 극한값이 존재하므로

(분자)$\to 0$이어야 한다. 즉,

$\lim_{h\to 0+}\{h^2+(a-2)h-a+b-1\}=-a+b-1=0$

$a-b=-1$ ······ ㉠

이때

$\lim_{h\to 0+}\frac{h^2+(a-2)h-a+b-1}{h}$

$=\lim_{h\to 0+}\frac{h^2+(a-2)h}{h}$

$=\lim_{h\to 0+}(h+a-2)$

$=a-2$

$=0$

에서 $a=2$

$a=2$를 ㉠에 대입하면 $b=3$이므로

$ab=2\times 3=6$

답 ①

다른 풀이

(i) 함수 $f(x)$는 $x=-1$에서 연속이므로

$\lim_{x\to -1-}f(x)=\lim_{x\to -1+}f(x)=f(-1)$에서

$2=1-a+b$

$a-b=-1$

(ii) 함수 $f(x)$는 $x=-1$에서 미분가능하므로

$\lim_{h\to 0-}\frac{f(-1+h)-f(-1)}{h}$

$=\lim_{h\to 0+}\frac{f(-1+h)-f(-1)}{h}$

$0=\lim_{h\to 0+}\frac{h^2+(a-2)h}{h}$

$=\lim_{h\to 0+}(h+a-2)$

$=a-2$

즉, $a-2=0$에서 $a=2$이므로 $b=3$

따라서 $ab=2\times 3=6$

5 $f(x)=\begin{cases} x^2+a & (x\le a) \\ x+a^2 & (x>a) \end{cases}$에서

$x<a$일 때 $f'(x)=2x$

$x>a$일 때 $f'(x)=1$

이고 도함수 $f'(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이므로

$f'(x)$가 $x=a$에서 연속이어야 한다.

즉, $\lim_{x\to a-}f'(x)=\lim_{x\to a+}f'(x)=f'(a)$이어야 하므로

$\lim_{x\to a-}f'(x)=\lim_{x\to a-}2x=2a$,

$\lim_{x\to a+}f'(x)=\lim_{x\to a+}1=1$

에서 $2a=1$

$a=\frac{1}{2}$

따라서 $a+f'(a)=\frac{1}{2}+f'\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}+1=\frac{3}{2}$

답 ③

6 $f(x)=x^3-2x^2+ax-1$에서

$f'(x)=3x^2-4x+a$

함수 $y=f(x)$의 그래프 위의 점 $(2, f(2))$에서의 접선의 기울기가 7이므로

$f'(2)=3\times 2^2-4\times 2+a$

$=a+4=7$

$a=3$이므로

$f(x)=x^3-2x^2+3x-1$

따라서 $f(a)=f(3)=3^3-2\times 3^2+3\times 3-1=17$

답 17

7 $f(x)=x^2-2x$에서 $f'(x)=2x-2$이므로

$\lim_{x\to 1}\frac{(x+1)f'(x)}{x-1}$

$=\lim_{x\to 1}\frac{(x+1)(2x-2)}{x-1}$

$=\lim_{x\to 1}2(x+1)$

$=2\times 2$

$=4$

답 ④

8 $h(x)=f(x)g(x)$라 하면

$h(1)=f(1)g(1)=2\times 2=4$

이므로

$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)g(x)-4}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{h(x)-h(1)}{x-1}=h'(1)$

이때

$h'(x)=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$

$=2x(x^3-2x+3)+(x^2+1)(3x^2-2)$

이므로

$h'(1)=2\times 2+2\times 1=6$

답 ①

Level 2 **기본 연습** 본문 40~41쪽

1 ⑤	2 2	3 ②	4 ⑤	5 ②
6 ①	7 ④	8 ⑤		

1 $f(x)=|x^2-1|(x+a)$

$$=\begin{cases}(x^2-1)(x+a) & (x\le -1 \text{ 또는 } x\ge 1)\\ -(x^2-1)(x+a) & (-1<x<1)\end{cases}$$

함수 $f(x)$가 $x=1$에서 미분가능하려면

$$\lim_{h\to 0+}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0+}\frac{\{(1+h)^2-1\}(1+h+a)-0}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0+}\frac{(h^2+2h)(1+h+a)}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0+}(h+2)(1+h+a)$$
$$=2(1+a)$$

$$\lim_{h\to 0-}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0-}\frac{-\{(1+h)^2-1\}(1+h+a)-0}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0-}\frac{-(h^2+2h)(1+h+a)}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0-}\{-(h+2)(1+h+a)\}$$
$$=-2(1+a)$$

에서

$2(1+a)=-2(1+a)$

$a=-1$

즉, $\alpha=-1$

또한 함수 $f(x)$가 $x=-1$에서 미분가능하려면

$$\lim_{h\to 0+}\frac{f(-1+h)-f(-1)}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0+}\frac{-(h^2-2h)(-1+h+a)}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0+}\{-(h-2)(-1+h+a)\}$$
$$=2(-1+a)$$

$$\lim_{h\to 0-}\frac{f(-1+h)-f(-1)}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0-}\frac{(h^2-2h)(-1+h+a)}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0-}(h-2)(-1+h+a)$$
$$=-2(-1+a)$$

에서

$2(-1+a)=-2(-1+a)$

$a=1$

즉, $\beta=1$

따라서 $\beta-\alpha=1-(-1)=2$

답 ⑤

2 $$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+2mh)-f(a-2nh)}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+2mh)-f(a)-f(a-2nh)+f(a)}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+2mh)-f(a)}{h}+\lim_{h\to 0}\frac{f(a-2nh)-f(a)}{-h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+2mh)-f(a)}{2mh}\times 2m+\lim_{h\to 0}\frac{f(a-2nh)-f(a)}{-2nh}\times 2n$$
$$=f'(a)\times 2m+f'(a)\times 2n$$
$$=f'(a)(2m+2n)$$

또한 함수 $f(x)$가 다항함수이므로

$\lim_{h\to 0}\frac{f(a-2mnh)-14}{h}$의 값이 존재하고 $h\to 0$일 때

(분모)$\to 0$이므로 (분자)$\to 0$이어야 한다.

즉, $\lim_{h\to 0}\{f(a-2mnh)-14\}=f(a)-14=0$

에서 $f(a)=14$

이때

$$f(a)\times f'(a)+\lim_{h\to 0}\frac{f(a-2mnh)-14}{h}$$
$$=14f'(a)+\lim_{h\to 0}\frac{f(a-2mnh)-f(a)}{-2mnh}\times(-2mn)$$
$$=14f'(a)+f'(a)\times(-2mn)$$
$$=f'(a)(14-2mn)$$

이므로

$f'(a)(2m+2n)=f'(a)(14-2mn)$

이때 $f'(a)\neq 0$이므로

$m+n+mn=7$

$(m+1)(n+1)=8$

따라서

$m+1=1,\ n+1=8$ 또는

$m+1=2,\ n+1=4$ 또는

$m+1=4,\ n+1=2$ 또는

$m+1=8,\ n+1=1$

이고 m, n은 자연수이므로 순서쌍 (m, n)은

$(1, 3)$, $(3, 1)$이고 그 개수는 2이다.

답 2

3 $f(x)=ax^2+bx+c$ (a, b, c는 상수, $a\neq 0$)이라 하고 조건 (가)에서 분모, 분자의 최고차항끼리만 비교하면

$\lim_{x\to\infty}\frac{a^2x^4}{3ax^4+ax^4}=\frac{a}{4}=3$

즉, $a=12$ …… ㉠

또한 조건 (나)에서 $x\to0$일 때 (분모) $\to0$이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\to0$이어야 한다.

즉, $\lim_{x\to0}f(x)=f(0)=c=0$ …… ㉡

$\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}$

$=f'(0)=b=2$ …… ㉢

㉠, ㉡, ㉢에서

$f(x)=12x^2+2x$이므로 $f'(x)=24x+2$

따라서 $f'(1)=26$

답 ②

4 $\lim_{x\to2}\frac{f(x)-a}{x^2-4}=2$에서 $x\to2$일 때 (분모) $\to0$이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\to0$이어야 한다.

즉, $\lim_{x\to2}\{f(x)-a\}=f(2)-a=0$

$a=f(2)$

$\lim_{x\to2}\frac{f(x)-a}{x^2-4}=\lim_{x\to2}\frac{f(x)-f(2)}{x^2-4}$

$=\lim_{x\to2}\left\{\frac{f(x)-f(2)}{x-2}\times\frac{1}{x+2}\right\}$

$=f'(2)\times\frac{1}{4}$

$=2$

에서 $f'(2)=8$

또한 $\lim_{x\to2}\frac{x-2}{g(x)}=6$에서 $x\to2$일 때 (분자) $\to0$이고 0이 아닌 극한값이 존재하므로 (분모) $\to0$이어야 한다.

즉, $\lim_{x\to2}g(x)=g(2)=0$

따라서

$\lim_{x\to2}\frac{x-2}{g(x)}=\lim_{x\to2}\frac{x-2}{g(x)-g(2)}$

$=\lim_{x\to2}\frac{1}{\frac{g(x)-g(2)}{x-2}}$

$=\frac{1}{g'(2)}$

$=6$

이므로

$g'(2)=\frac{1}{6}$

$h(x)=f(x)g(x)$에서

$h'(x)=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$이므로

$h'(2)=f'(2)g(2)+f(2)g'(2)$

$=8\times0+a\times\frac{1}{6}$

$=\frac{a}{6}$

$=\frac{1}{2}$

따라서 $a=3$

답 ⑤

5 조건 (나)에 의하여 함수 $f(x)$는 다음 세 가지 경우가 존재한다.

(i) $f(x)=x^2(x-1)(x-2)$

(ii) $f(x)=x(x-1)^2(x-2)=x(x^2-2x+1)(x-2)$

(iii) $f(x)=x(x-1)(x-2)^2=x(x-1)(x^2-4x+4)$

이때 $f'(x)$는 각각

$f'(x)=2x(x-1)(x-2)+x^2(x-2)+x^2(x-1)$

$f'(x)=(x-1)^2(x-2)+2x(x-1)(x-2)+x(x-1)^2$

$f'(x)=(x-1)(x-2)^2+x(x-2)^2+2x(x-1)(x-2)$

이므로 조건 (가)를 만족시키는 경우는 (iii)의 경우이다.

따라서 $f'(3)=2\times1^2+3\times1^2+2\times3\times2\times1=17$

답 ②

6 $\frac{d}{dx}\{f(x)+g(x)\}=f'(x)+g'(x)=2$ …… ㉠

$\frac{d}{dx}\{f(x)g(x)\}=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$

$=2x+3$ …… ㉡

㉠, ㉡에 $x=0$을 각각 대입하면

$f'(0)+g'(0)=2$ …… ㉢

$f'(0)g(0)+f(0)g'(0)=f'(0)+2g'(0)=3$ …… ㉣

㉢, ㉣에서 $f'(0)=1$, $g'(0)=1$이므로

$f'(0)\times g'(0)=1\times1=1$

답 ①

참고 $f(x)=x+2$, $g(x)=x+1$

7 $f(x)=ax^3+b$에서 $f'(x)=3ax^2$이므로

$\{f'(x)\}^2+xf(x)+x=(3ax^2)^2+x(ax^3+b)+x$

$=(9a^2+a)x^4+(b+1)x$

$=0$

이 식은 x에 대한 항등식이므로

$9a^2+a=0$, $b+1=0$

이때 $a\neq0$이므로

$a=-\frac{1}{9}$, $b=-1$

따라서 $ab=\left(-\frac{1}{9}\right)\times(-1)=\frac{1}{9}$

답 ④

8 $f(x)=ax^2+bx+c$ (a, b, c는 상수, $a\neq0$)이라 하면

$f'(x)=2ax+b$

이므로 조건 (가)에 의하여

$f'(3)=6a+b=0$ …… ㉠

또한 조건 (나)에 의하여

$f'(1)=2$이므로

$f'(1)=2a+b=2$ …… ㉡

㉠, ㉡에서

$a=-\frac{1}{2}$, $b=3$

또한 조건 (나)에 의하여 $f(1)=2$이므로

$f(1)=a+b+c=2$

즉, $c=-\frac{1}{2}$이므로

$f(x)=-\frac{1}{2}x^2+3x-\frac{1}{2}$

따라서 $g(x)=f(2x)=-2x^2+6x-\frac{1}{2}$이므로

$g'(x)=-4x+6$

즉, $g'(-1)=4+6=10$

답 ⑤

Level 3 실력 완성

본문 42쪽

1 180 **2** ④ **3** ③

1 다항함수 $f(x)$는 실수 전체의 집합에서 미분가능하므로

$$\lim_{h\to0}\frac{f\left(x+\frac{h}{2}\right)f(h)-f(x)f(h)}{h^2}$$

$$=\lim_{h\to0}\left\{\frac{f\left(x+\frac{h}{2}\right)-f(x)}{h}\times\frac{f(h)}{h}\right\}$$

$$=\lim_{h\to0}\frac{f\left(x+\frac{h}{2}\right)-f(x)}{h}\times\lim_{h\to0}\frac{f(h)}{h}$$

$$=\lim_{h\to0}\frac{f\left(x+\frac{h}{2}\right)-f(x)}{\frac{h}{2}}\times\frac{1}{2}\times\lim_{h\to0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}$$

$$=f'(x)\times\frac{1}{2}\times f'(0)$$

즉, 모든 실수 x에 대하여

$f'(x)\times f'(0)\times\frac{1}{2}=\frac{3}{2}x^2+2x+\frac{1}{2}$이므로

$f'(x)\times f'(0)=3x^2+4x+1$

에서 우변은 x에 대한 이차식이므로

$f(x)=x^3+ax^2+bx$ (a, b는 상수)라 하면

$(3x^2+2ax+b)\times b=3x^2+4x+1$ …… ㉠

이때 ㉠은 x에 대한 항등식이므로

$3b=3$, $2ab=4$, $b^2=1$에서

$a=2$, $b=1$

따라서 $f(x)=x^3+2x^2+x$이므로

$f(5)=5^3+2\times5^2+5=180$

답 180

2 $f(x)=(x-a_1)(x-a_2)(x-a_3)$에서

$$f'(x)=(x-a_2)(x-a_3)+(x-a_1)(x-a_3)+(x-a_1)(x-a_2)$$

이므로

$g(x)$

$$=\sum_{k=1}^{3}\frac{f(x)}{f'(a_k)\times(x-a_k)}$$

$$=\frac{f(x)}{f'(a_1)(x-a_1)}+\frac{f(x)}{f'(a_2)(x-a_2)}+\frac{f(x)}{f'(a_3)(x-a_3)}$$

$$=\frac{(x-a_1)(x-a_2)(x-a_3)}{f'(a_1)(x-a_1)}+\frac{(x-a_1)(x-a_2)(x-a_3)}{f'(a_2)(x-a_2)}+\frac{(x-a_1)(x-a_2)(x-a_3)}{f'(a_3)(x-a_3)}$$

$$=\frac{(x-a_2)(x-a_3)}{f'(a_1)}+\frac{(x-a_1)(x-a_3)}{f'(a_2)}+\frac{(x-a_1)(x-a_2)}{f'(a_3)}$$

$$=\frac{(x-a_2)(x-a_3)}{(a_1-a_2)(a_1-a_3)}+\frac{(x-a_1)(x-a_3)}{(a_2-a_1)(a_2-a_3)}+\frac{(x-a_1)(x-a_2)}{(a_3-a_1)(a_3-a_2)}$$

따라서

$g(a_4)$

$$=\frac{(a_4-a_2)(a_4-a_3)}{(a_1-a_2)(a_1-a_3)}+\frac{(a_4-a_1)(a_4-a_3)}{(a_2-a_1)(a_2-a_3)}+\frac{(a_4-a_1)(a_4-a_2)}{(a_3-a_1)(a_3-a_2)}$$

$$=\frac{4\times 2}{(-2)\times(-4)}+\frac{6\times 2}{2\times(-2)}+\frac{6\times 4}{4\times 2}$$
$$=1-3+3$$
$$=1$$

답 ④

3 $\lim_{h\to 0-}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0-}\frac{(h^2+2h+2)-2}{h}$

$=\lim_{h\to 0-}\frac{h^2+2h}{h}$

$=\lim_{h\to 0-}(h+2)$

$=2$ …… ㉠

$\lim_{h\to 0+}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0+}\frac{(h^2+2)-2}{h}$

$=\lim_{h\to 0+}\frac{h^2}{h}$

$=\lim_{h\to 0+}h$

$=0$

이므로 함수 $f(x)$는 $x=0$에서만 미분가능하지 않다.
따라서 $k>0$이면 함수 $g(x)$는 $x=0$에서 미분가능하지 않게 된다.
또한
$x<0$일 때, $f'(x)=2x+2$이므로
$x<-1$일 때 $f'(x)<0$
$-1\le x<0$일 때 $f'(x)\ge 0$
$x>0$일 때, $f'(x)=2x$이므로
$x>0$일 때 $f'(x)>0$
따라서 $k<-1$이면 함수 $g(x)$는 $x=k$에서 미분가능하지 않다.

(ⅰ) $k=-1$일 때
함수 $y=x^2+2$의 그래프를 x축의 방향으로 -1만큼, y축의 방향으로 -1만큼 평행이동하면 함수 $g(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하므로
$a=-1$, $b=-1$
따라서 $a+b+k=-3$

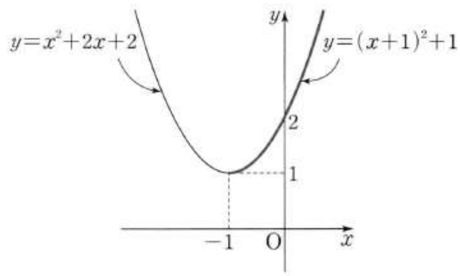
(ⅱ) $k=0$일 때
㉠에 의하여 $x>0$일 때, $f'(x)=2x$에서
$2x=2$
$x=1$
함수 $y=x^2+2$의 그래프를 x축의 방향으로 -1만큼, y축의 방향으로 -1만큼 평행이동하면 함수 $g(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하므로
$a=-1$, $b=-1$
따라서 $a+b+k=-2$

(ⅰ), (ⅱ)에 의하여 $a+b+k$의 최솟값은 -3이다.

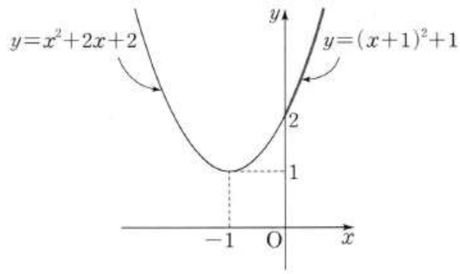
답 ③

참고

(ⅰ) $k=-1$, $a=-1$, $b=-1$이면 함수 $g(x)$는 실수 전체의 집합에서 미분가능하다.



(ⅱ) $k=0$, $a=-1$, $b=-1$이면 함수 $g(x)$는 실수 전체의 집합에서 미분가능하다.



04 도함수의 활용(1)

유제 본문 45~51쪽

1 ③ 2 ③ 3 ⑤ 4 18 5 ④
6 67 7 ⑤ 8 ④

1 $y=x^2f(x)$에서 $y'=2xf(x)+x^2f'(x)$이고 점 $(1, 2)$가 곡선 $y=x^2f(x)$ 위의 점이므로 $f(1)=2$
곡선 $y=x^2f(x)$ 위의 점 $(1, 2)$에서의 접선의 기울기가 3이므로
$2\times1\times f(1)+1^2\times f'(1)=4+f'(1)=3$
즉, $f'(1)=-1$
따라서 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(1, f(1))$에서의 접선의 방정식은
$y-f(1)=f'(1)\times(x-1)$
$y-2=-(x-1)$
즉, $y=-x+3$
따라서 구하는 y절편은 3이다.

답 ③

2 직선 $y=ax+a=a(x+1)$은 점 $(-1, 0)$을 지나므로 점 $(-1, 0)$을 지나는 직선 중 곡선 $y=x^3$과 접하는 직선이 $y=ax+a$이다.
이때 제3사분면에 있는 접점을 (t, t^3) $(t<0)$이라 하면
$y'=3x^2$이므로 접선의 방정식은
$y-t^3=3t^2(x-t)$
$y=3t^2x-2t^3$
이 접선이 점 $(-1, 0)$을 지나므로
$2t^3+3t^2=0$
$t^2(2t+3)=0$
따라서 $t=-\frac{3}{2}$이므로 접점은 $\left(-\frac{3}{2}, -\frac{27}{8}\right)$이다.
이때 직선 $y=ax+a$는 점 $\left(-\frac{3}{2}, -\frac{27}{8}\right)$을 지나므로
$-\frac{3}{2}a+a=-\frac{27}{8}$
따라서 $a=\frac{27}{4}$

답 ③

3 $f(x)=x^3-3x^2-3$에서
$f'(x)=3x^2-6x$이므로
$\frac{f(2)-f(0)}{2-0}=f'(c)$
$\frac{-7-(-3)}{2}=3c^2-6c$
$3c^2-6c=-2$
$3c^2-6c+2=0$
$c=\frac{3\pm\sqrt{(-3)^2-3\times2}}{3}$
$=\frac{3\pm\sqrt{3}}{3}$
이때 $0<\frac{3-\sqrt{3}}{3}<2$, $0<\frac{3+\sqrt{3}}{3}<2$이므로 평균값 정리를 만족시키는 모든 상수 c의 값의 합은
$\frac{3-\sqrt{3}}{3}+\frac{3+\sqrt{3}}{3}=2$

답 ⑤

4 조건 (가)에 의하여
$3=16a+4b+3$
$4a+b=0$ ...... ㉠
또한 $f'(x)=2ax+b$이고 조건 (나)에 의하여
$\frac{f(4)-f(2)}{4-2}=f'(a)$
이므로
$\frac{(16a+4b+3)-(4a+2b+3)}{2}=2a^2+b$
$6a+b=2a^2+b$
$2a(a-3)=0$
이때 $2<a<4$이므로 $a=3$
이것을 ㉠에 대입하면 $b=-12$이므로
$f(x)=3x^2-12x+3$
따라서 $f(5)=3\times5^2-12\times5+3=18$

답 18

5 함수 $f(x)=-x^3+ax^2-ax$의 역함수가 존재하지 않기 위해서는 실수 전체의 집합에서 감소하지 않아야 하므로
$f'(x)=-3x^2+2ax-a$에서 방정식 $f'(x)=0$의 판별식을 D라 하면
$\frac{D}{4}=a^2-3a=a(a-3)>0$
$a<0$ 또는 $a>3$
따라서 자연수 a의 최솟값은 4이다.

답 ④

6 $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ (a, b, c는 상수)라 하면 삼차함수 $y=f(x)$의 그래프가 두 점 A(1, 5), B(2, 0)을 지나므로

$f(1)=1+a+b+c=5$

$a+b+c=4$ ······ ㉠

$f(2)=8+4a+2b+c=0$

$4a+2b+c=-8$ ······ ㉡

㉠, ㉡에서

$a=\frac{1}{2}c-8$, $b=-\frac{3}{2}c+12$

또한 함수 $f(x)$는 구간 $(-1, 1)$에서 감소하므로

$f'(x)=3x^2+2ax+b$에서

$f'(-1)=3-2a+b\le 0$

$3-2\left(\frac{1}{2}c-8\right)+\left(-\frac{3}{2}c+12\right)=-\frac{5}{2}c+31\le 0$

$c\ge\frac{62}{5}$ ······ ㉢

$f'(1)=3+2a+b\le 0$이므로

$3+2\left(\frac{1}{2}c-8\right)+\left(-\frac{3}{2}c+12\right)=-\frac{1}{2}c-1\le 0$

$c\ge -2$ ······ ㉣

㉢, ㉣에서

$c\ge\frac{62}{5}$

$f(0)=c$이므로 $f(0)$의 최솟값은 $\frac{62}{5}$이다.

따라서 $p=5$, $q=62$이므로

$p+q=67$

답 67

7 $f(x)=x^3-3x^2+6$에서

$f'(x)=3x^2-6x=3x(x-2)$

이므로 방정식 $f'(x)=0$의 근은

$x=0$ 또는 $x=2$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

즉, $a=f(0)=6$, $b=f(2)=2^3-3\times 2^2+6=2$이므로

$2a-b=10$

답 ⑤

8 $f(x)=x^4-2x^2+ax+b$에서

$f'(x)=4x^3-4x+a$

이고 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 극댓값을 가지므로

$f'(0)=a=0$

따라서 $f(x)=x^4-2x^2+b$이고

$f'(x)=4x^3-4x=4x(x+1)(x-1)$

이므로 $x=-1$, $x=1$에서 함수 $f(x)$는 극솟값 3을 갖는다.

$f(-1)=f(1)=1-2+b=3$

$b=4$

따라서 $a+b=0+4=4$

답 ④

Level 1 기초 연습

본문 52~53쪽

1 ③	2 ④	3 ①	4 ①	5 ①
6 ②	7 ②	8 ④		

1 $y=x^4-x$에서 $y'=4x^3-1$이고 점 $(-1, 2)$에서의 접선의 기울기는 -5이므로 곡선 $y=x^4-x$ 위의 점 $(-1, 2)$에서의 접선의 방정식은

$y-2=-5(x+1)$

즉, $y=-5x-3$

따라서 접선의 x절편은 $-\frac{3}{5}$이다.

답 ③

2 $y=x^3-2x$에서 $y'=3x^2-2$이므로 점 $(1, -1)$에서의 접선의 기울기는

$3\times 1^2-2=1$

따라서 이 접선과 평행한 직선의 기울기도 1이고,

$y=x^3-2x+1$에서 $y'=3x^2-2$이므로

$3x^2-2=1$에서 $x^2=1$

$x=-1$ 또는 $x=1$

(i) $x=-1$일 때, $y=2$이므로 접선의 방정식은

$y-2=x+1$, 즉 $y=x+3$

(ii) $x=1$일 때, $y=0$이므로 접선의 방정식은

$y=x-1$

이때 $b>0$이므로 구하는 접선의 방정식은

$y=x+3$

즉, $a=1$, $b=3$이므로

$a+b=4$

답 ④

3 $y=x^3+x^2-1$에서 $y'=3x^2+2x$이므로 접점을 (t, t^3+t^2-1)이라 하면 접선의 방정식은

$y-(t^3+t^2-1)=(3t^2+2t)(x-t)$

이 접선이 원점을 지나므로 $x=0$, $y=0$을 대입하면

$-t^3-t^2+1=-3t^3-2t^2$

$2t^3+t^2+1=0$

$(t+1)(2t^2-t+1)=0$

따라서 $t=-1$이므로 구하는 접선의 기울기는

$3\times(-1)^2+2\times(-1)=1$

답 ①

4 $f(x)=x^2$에서 $f'(x)=2x$이므로

$\dfrac{f(n+1)-f(n)}{(n+1)-n}=f'(c)$ $(n<c<n+1)$에서

$(n+1)^2-n^2=2c$

$c=a_n=n+\dfrac{1}{2}$

따라서

$$\sum_{k=1}^{10}a_k=\sum_{k=1}^{10}\left(k+\frac{1}{2}\right)$$
$$=\frac{10\times11}{2}+\frac{1}{2}\times10$$
$$=60$$

답 ①

5 임의의 두 실수 x_1, x_2에 대하여 $x_1<x_2$이면 $f(x_1)>f(x_2)$를 만족시키는 함수 $f(x)$는 실수 전체의 집합에서 감소하는 함수이므로 $f'(x)\le0$이어야 한다.

이때 $f'(x)=-3x^2+2ax+5a$이므로 이차방정식 $f'(x)=0$의 판별식을 D라 하면

$\dfrac{D}{4}=a^2-(-3)\times5a\le0$

$a(a+15)\le0$

즉, $-15\le a\le0$이므로 구하는 모든 정수 a의 개수는 16이다.

답 ①

6 함수 $f(x)=x^3+x^2-ax+1$이 일대일함수이므로 함수 $f(x)$는 실수 전체의 집합에서 증가하는 함수이다.

즉, $f'(x)\ge0$이다.

이때 $f'(x)=3x^2+2x-a$이므로 이차방정식 $f'(x)=0$의 판별식을 D라 하면

$\dfrac{D}{4}=1^2-3\times(-a)\le0$

$a\le-\dfrac{1}{3}$

따라서 실수 a의 최댓값은 $-\dfrac{1}{3}$이다.

답 ②

7 $f(x)=x^3-12a^2x+1$에서

$f'(x)=3x^2-12a^2$이므로 방정식 $f'(x)=0$에서

$3(x+2a)(x-2a)=0$의 근은

$x=-2a$ 또는 $x=2a$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	$-2a$	$\cdots$	$2a$	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

함수 $f(x)$의 극댓값은

$$f(-2a)=(-2a)^3-12a^2\times(-2a)+1$$
$$=-8a^3+24a^3+1$$
$$=16a^3+1$$

함수 $f(x)$의 극솟값은

$$f(2a)=(2a)^3-12a^2\times2a+1$$
$$=8a^3-24a^3+1$$
$$=-16a^3+1$$

함수 $f(x)$의 극댓값과 극솟값의 차가 256이므로

$16a^3+1-(-16a^3+1)=32a^3=256$

$a^3=8$

따라서 $a=2$

답 ②

8 $f(x)=x^3+ax^2-9x+3$에서

$f'(x)=3x^2+2ax-9$이고 $x=\alpha$에서 극댓값, $x=\beta$에서 극솟값을 가지므로 방정식 $3x^2+2ax-9=0$의 두 실근이 α, β이다.

따라서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=-\dfrac{2a}{3}=2$

이므로 $a=-3$

즉, $3x^2-6x-9=0$에서 $x^2-2x-3=0$

$(x+1)(x-3)=0$이므로

$x=-1$ 또는 $x=3$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

따라서 $\alpha=-1$이므로

$$f(-1)=(-1)^3-3\times(-1)^2-9\times(-1)+3$$
$$=-1-3+9+3=8$$

답 ④

Level 2 기본 연습

본문 54~55쪽

1 ⑤	2 ⑤	3 ⑤	4 ⑤	5 ③
6 59	7 ③	8 ⑤		

1 $y=|x|(x+1)=\begin{cases}-x^2-x & (x\le 0)\\ x^2+x & (x>0)\end{cases}$이므로

$y'=\begin{cases}-2x-1 & (x<0)\\ 2x+1 & (x>0)\end{cases}$

따라서 $x<0$일 때 기울기가 3인 접선과 곡선 $y=-x^2-x$의 접점의 x좌표는

$-2x-1=3$에서 $x=-2$

즉, 접점의 좌표는 $(-2, -2)$이므로 접선의 방정식은

$y=3(x+2)-2=3x+4$

$3x-y+4=0$

또한 $x>0$일 때 기울기가 3인 접선과 곡선 $y=x^2+x$의 접점의 x좌표는

$2x+1=3$에서 $x=1$

즉, 접점의 좌표는 $(1, 2)$이고 두 직선 사이의 거리는 점 $(1, 2)$와 직선 $3x-y+4=0$ 사이의 거리와 같으므로

$\dfrac{|3-2+4|}{\sqrt{3^2+(-1)^2}}=\dfrac{5}{\sqrt{10}}=\dfrac{\sqrt{10}}{2}$

답 ⑤

2 $f(x)=x^3+(a+4)x^2+(4a+6)x+4a+5$

$=(x^2+4x+4)a+x^3+4x^2+6x+5$

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프가 a의 값에 관계없이 항상 지나는 점의 x좌표는

$x^2+4x+4=(x+2)^2=0$에서 $x=-2$이고 이때 y좌표는

$(-2)^3+4\times(-2)^2+6\times(-2)+5=1$

즉, $\mathrm{P}(-2, 1)$

또한 $f'(x)=3x^2+2(a+4)x+4a+6$이고 $f'(-2)=2$이므로 점 $\mathrm{P}(-2, 1)$에서의 접선의 방정식은

$y-1=2(x+2)$, 즉 $y=2x+5$

따라서 직선 $y=2x+5$의 x절편과 y절편은 각각 $-\dfrac{5}{2}$, 5이므로 구하는 넓이는

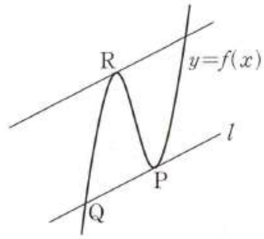
$\dfrac{1}{2}\times\dfrac{5}{2}\times5=\dfrac{25}{4}$

답 ⑤

3 접선 l은 두 점 P, Q를 지나므로 접선 l의 기울기는

$\dfrac{-12-(-6)}{-4-2}=1$

또한 주어진 조건을 만족시키는 곡선 $y=f(x)$와 접선 l의 개형은 그림과 같다.



따라서 점 $\mathrm{R}(a, b)$ $(-4<a<2)$와 접선 l 사이의 거리가 최대가 되는 경우는 그림과 같이 접선 l과 평행한 직선이 곡선 $y=f(x)$와 점 R에서 접할 때이다.

이때 $f'(x)=3x^2-11$이므로

$3x^2-11=1$에서 $x^2=4$

$x=-2$ 또는 $x=2$

즉, $a=-2$이므로

$b=(-2)^3-11\times(-2)+8=22$

따라서 $a+b=-2+22=20$

답 ⑤

4 $f(x)=x^3+x^2$에서 $f'(x)=3x^2+2x$이므로 접점을 (t, t^3+t^2)이라 하면 접선의 방정식은

$y-(t^3+t^2)=(3t^2+2t)(x-t)$

$y=(3t^2+2t)x-2t^3-t^2$ …… ㉠

직선 ㉠이 곡선 $g(x)=x^2$에 접하므로

$x^2=(3t^2+2t)x-2t^3-t^2$에서 이차방정식

$x^2-(3t^2+2t)x+2t^3+t^2=0$의 판별식을 D라 하면 $D=0$이어야 한다.

$D=(3t^2+2t)^2-4(2t^3+t^2)$

$=9t^4+12t^3+4t^2-(8t^3+4t^2)$

$=9t^4+4t^3=0$

에서 $t^3(9t+4)=0$

즉, $t=0$ 또는 $t=-\dfrac{4}{9}$

그런데 $t=0$이면 $a=0$, $b=0$이므로 조건을 만족시키지 않는다.

즉, $t=-\dfrac{4}{9}$이므로 ㉠에서

$a+3b=3t^2+2t+3(-2t^3-t^2)$

$=-6t^3+2t$

$=-6\times\left(-\dfrac{4}{9}\right)^3+2\times\left(-\dfrac{4}{9}\right)=-\dfrac{88}{243}$

답 ⑤

5 $f(x)=-2x^3+3(a+1)x^2-6ax-3a^2+9a+1$

에서

$f'(x)=-6x^2+6(a+1)x-6a$

$=-6\{x^2-(a+1)x+a\}$

$=-6(x-a)(x-1)$

따라서 $a<1$일 때 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 극댓값

$g(a)=f(1)$

$=-2+3(a+1)-6a-3a^2+9a+1$

$=-3a^2+6a+2$

를 갖고, $a>1$일 때 함수 $f(x)$는 $x=a$에서 극댓값

$g(a)=f(a)$

$=-2a^3+3(a+1)a^2-6a^2-3a^2+9a+1$

$=a^3-6a^2+9a+1$

을 갖는다.

또한 $a=1$일 때 $f'(x)=-6(x-1)^2\le 0$이므로 함수 $f(x)$는 극값을 갖지 않는다.

따라서

$$g(a)=\begin{cases}-3a^2+6a+2 & (a<1)\\ a^3-6a^2+9a+1 & (a>1)\end{cases}$$

이므로

$$g'(a)=\begin{cases}-6a+6 & (a<1)\\ 3a^2-12a+9 & (a>1)\end{cases}$$

따라서

$\lim_{a\to 1-} g'(a)+\lim_{a\to 1+}\frac{g'(a)}{a-1}$

$=\lim_{a\to 1-}(-6a+6)+\lim_{a\to 1+}\frac{3a^2-12a+9}{a-1}$

$=\lim_{a\to 1-}(-6a+6)+\lim_{a\to 1+}\frac{3(a-1)(a-3)}{a-1}$

$=\lim_{a\to 1-}(-6a+6)+\lim_{a\to 1+}3(a-3)$

$=0+(-6)$

$=-6$

답 ③

6 서로 다른 2개의 동전을 던졌을 때, 앞면이 나온 동전의 개수는 0 또는 1 또는 2이고 극댓값을 갖기 위한 함수 $f(x)$는

(1) $f(x)=x^2(x-2)$

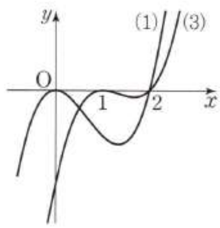
(2) $f(x)=x(x-2)^2$

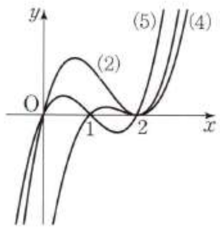
(3) $f(x)=(x-1)^2(x-2)$

(4) $f(x)=(x-1)(x-2)^2$

(5) $f(x)=x(x-1)(x-2)$

(1), (2), (3), (4), (5)의 그래프의 개형은 그림과 같다.





(2) $f(x)=x(x-2)^2$인 경우에 극댓값 M이 최대가 된다.

$f(x)=x(x-2)^2$에서

$f'(x)=(x-2)^2+2x(x-2)$

$=(x-2)(3x-2)$

이므로 $f'(x)=0$에서

$x=\frac{2}{3}$ 또는 $x=2$

따라서 $x=\frac{2}{3}$에서 함수 $f(x)$는 극대이므로 M의 최댓값은

$f\left(\frac{2}{3}\right)=\frac{2}{3}\times\left(\frac{2}{3}-2\right)^2=\frac{32}{27}$

즉, $p=27$, $q=32$이므로

$p+q=27+32=59$

답 59

7 $f(x)=\frac{2}{3}x^3+ax^2+bx+c$에서

$f'(x)=2x^2+2ax+b$

조건 (가)에 의하여

$f'(2)=8+4a+b=0$

$4a+b=-8$

$b=-4a-8$ …… ㉠

또한 조건 (나)에 의하여 이차방정식 $2x^2+2ax+b=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=a^2-2b\le 0$

즉, $a^2\le 2b$ …… ㉡

㉠을 ㉡에 대입하여 정리하면

$a^2+8a+16\le 0$

$(a+4)^2\le 0$

a는 실수이므로

$a=-4$

㉠에서 $b=8$

또한 조건 (다)에 의하여 접선 l의 방정식은

$y-f(3)=f'(3)(x-3)$

$y-(c+6)=2(x-3)$에서

$y=2x+c$

접선 l이 점 $(0, -4)$를 지나므로

$c=-4$

$\mathrm{P}\left(t, \frac{2}{3}t^3-4t^2+8t-4\right)$, $\mathrm{Q}(t, 2t-4)$이므로

$$h(t)=\overline{\mathrm{PQ}}$$
$$=\left(\frac{2}{3}t^3-4t^2+8t-4\right)-(2t-4)$$
$$=\frac{2}{3}t^3-4t^2+6t$$

$h'(t)=2t^2-8t+6=2(t-1)(t-3)$이므로

$h'(t)=0$을 만족시키는 해는

$t=1$ 또는 $t=3$

함수 $h(t)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

t	$\cdots$	1	$\cdots$	3	$\cdots$
$h'(t)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$h(t)$	↗	극대	↘	극소	↗

따라서 $t=1$에서 함수 $h(t)$는 극대이므로 구하는 극댓값은

$h(1)=\frac{2}{3}-4+6=\frac{8}{3}$

답 ③

8 조건 (나)와 a의 최솟값이 -1, b의 최댓값이 3이므로 함수 $f(x)$는 $x=-1$에서 극댓값을 갖고, $x=3$에서 극솟값을 갖는다.

즉, $f'(-1)=0$, $f'(3)=0$

또한 조건 (가)에서 극솟값은 -2이므로

$f(3)=-2$

따라서 $f(x)=x^3+px^2+qx+r$ (p, q, r는 상수)라 하면

$f'(x)=3x^2+2px+q$이므로

$f'(-1)=3-2p+q=0$

$2p-q=3$ …… ㉠

$f'(3)=27+6p+q=0$

$6p+q=-27$ …… ㉡

㉠, ㉡에서

$p=-3$, $q=-9$

또한 $f(3)=27-27-27+r=-2$이므로

$r=25$

즉, $f(x)=x^3-3x^2-9x+25$이므로 함수 $f(x)$의 극댓값은

$f(-1)=-1-3+9+25=30$

답 ⑤

Level 3 실력 완성 본문 56~57쪽

1 ④ **2** ② **3** 25 **4** ⑤ **5** ⑤

1 조건 (나)를 만족시키는 접선의 방정식은

$y-f(-2)=x+2$

즉, $y=x+f(-2)+2$

이 직선이 점 $(2, f(2))$를 지나므로 함수 $f(x)$의 최고차항의 계수를 k라 하면

$f(x)-\{x+f(-2)+2\}=k(x+2)^2(x-2)$

$f(x)=k(x+2)^2(x-2)+x+f(-2)+2$

$f'(x)=2k(x+2)(x-2)+k(x+2)^2+1$

이므로 조건 (가)에 의하여

$f(0)=-8k+f(-2)+2=0$ …… ㉠

$f'(0)=-8k+4k+1=-4k+1=0$ …… ㉡

㉠, ㉡에서

$k=\frac{1}{4}$, $f(-2)=0$

따라서 $f(x)=\frac{1}{4}(x+2)^2(x-2)+x+2$이므로

$f(4)=\frac{1}{4}\times 6^2\times 2+4+2=24$

답 ④

2 $g(x)=f(x)-f'(p)(x-p)-f(p)$에서

$g(p)=f(p)-f(p)=0$

$g'(x)=f'(x)-f'(p)$이므로

$g'(p)=f'(p)-f'(p)=0$

또한 삼차함수 $f(x)$는 최고차항의 계수가 1이므로 $g(x)$도 최고차항의 계수가 1인 삼차함수이다.

이때 $g(2)=0$이고 $p\neq 2$이므로

$g(x)=(x-p)^2(x-2)$

즉, $f(x)=(x-p)^2(x-2)+f'(p)(x-p)+f(p)$이므로

$f'(x)=2(x-p)(x-2)+(x-p)^2+f'(p)$

이때 함수 $f(x)$가 $x=0$, $x=1$에서 극값을 가지므로

$f'(0)=4p+p^2+f'(p)=0$ …… ㉠

$f'(1)=-2(1-p)+(1-p)^2+f'(p)$

$\quad=p^2-1+f'(p)=0$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 $f'(p)=-p^2-4p=-p^2+1$이므로

$p=-\frac{1}{4}$

답 ②

3 방정식 $f(x)=0$의 서로 다른 두 실근을 α, β $(\alpha<\beta)$라 하면 서로 다른 두 실근의 합이 2이므로

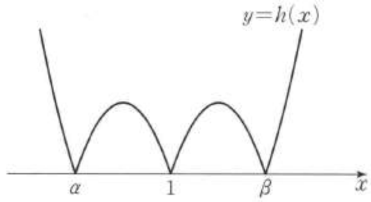
$\alpha+\beta=2$

$f(x)=(x-\alpha)(x-\beta)$이므로

$f'(x)=2x-\alpha-\beta=2x-2$에서

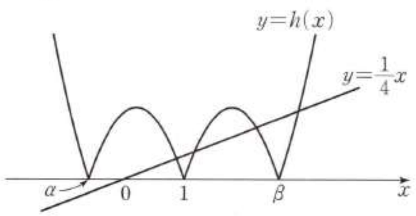
$g(x)=2(x-\alpha)(x-\beta)(x-1)$

따라서 함수 $h(x)=|g(x)|$의 그래프는 그림과 같다.



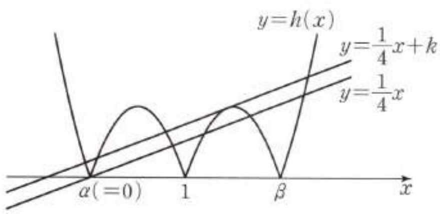
(i) $\alpha<0$일 때

실수 k의 최솟값이 0이므로 함수 $y=h(x)$의 그래프와 직선 $y=\frac{1}{4}x$는 교점의 개수가 5가 될 수 없다.



(ii) $\alpha\geq 0$일 때

실수 k의 최솟값이 0이 되는 경우는 그림과 같이 $\alpha=0$일 때이다.



따라서 $\beta=2-\alpha=2$이므로

$g(x)=2x(x-1)(x-2)$

$g'(x)=2(x-1)(x-2)+2x(x-2)+2x(x-1)$

$\qquad=6x^2-12x+4$

이고 함수 $y=h(x)$의 그래프와 직선 $y=\frac{1}{4}x+k$의 접점의 x좌표를 t라 하면

$6t^2-12t+4=-\frac{1}{4}$에서

$24t^2-48t+17=0$

$1<t<2$이므로

$t=\frac{12+\sqrt{42}}{12}=1+\frac{\sqrt{42}}{12}$

따라서 접점의 y좌표는

$$-g\left(1+\frac{\sqrt{42}}{12}\right)=-2\times\left(1+\frac{\sqrt{42}}{12}\right)\times\frac{\sqrt{42}}{12}\times\left(\frac{\sqrt{42}}{12}-1\right)$$
$$=\frac{17\sqrt{42}}{144}$$

이므로 실수 k의 최댓값은

$$\frac{17\sqrt{42}}{144}-\frac{1}{4}\times\left(1+\frac{\sqrt{42}}{12}\right)=\frac{7\sqrt{42}-18}{72}$$

즉, $a=7$, $b=18$이므로

$a+b=25$

답 25

4 $f(x)=x^4-8x^3+22x^2-24x+9$에서

$f'(x)=4x^3-24x^2+44x-24$

$\qquad=4(x-1)(x-2)(x-3)$

이므로 방정식 $f'(x)=0$의 해는

$x=1$ 또는 $x=2$ 또는 $x=3$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	1	$\cdots$	2	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	극소	↗	극대	↘	극소	↗

즉, 함수 $f(x)$는 $x=1$, $x=3$에서 극솟값을 갖고, $x=2$에서 극댓값을 갖는다.

ㄱ. 열린구간 $(1, 2)$에서 $f'(x)>0$이므로 함수 $f(x)$는 열린구간 $(1, 2)$에서 증가한다. (참)

ㄴ. $g(x)=f(x)-\frac{1}{2}$이라 하면 함수 $g(x)$는 $1<x<2$에서 연속이고

$f(1)=1-8+22-24+9=0$에서

$g(1)=f(1)-\frac{1}{2}=0-\frac{1}{2}=-\frac{1}{2}<0$

$f(2)=16-64+88-48+9=1$에서

$g(2)=f(2)-\frac{1}{2}=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}>0$

이므로 사잇값의 정리에 의하여 $1<x<2$에서 방정식 $g(x)=f(x)-\frac{1}{2}=0$은 적어도 하나의 실근을 갖는다. (참)

ㄷ. $f(3)=81-216+198-72+9=0$이므로

함수 $y=f(x)$의 그래프는 그림과 같다.

또한 $\frac{f(a)}{a-3}=\frac{f(a)-f(3)}{a-3}$은 두 점 $(3,\ f(3))$, $(a,\ f(a))$를 지나는 직선의 기울기이고 그림에 의하여

$\frac{f(a)}{a-3}<f'(a)$

즉, $f(a)<f'(a)\times(a-3)$이다. (참)

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

답 ⑤

다른 풀이

ㄷ. $f(x)=(x-1)^2(x-3)^2$,

$f'(x)=4(x-1)(x-2)(x-3)$이므로

$$f'(a)-\frac{f(a)}{a-3}$$
$$=4(a-1)(a-2)(a-3)-(a-1)^2(a-3)$$
$$=(a-1)(a-3)\{4(a-2)-(a-1)\}$$
$$=(a-1)(a-3)(3a-7)$$

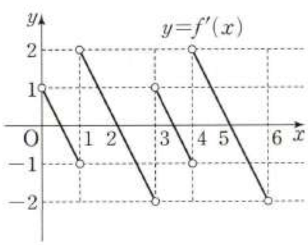
$a>3$이므로 $f'(a)-\frac{f(a)}{a-3}>0$

즉, $f(a)<f'(a)\times(a-3)$이다. (참)

5 $f(x)=\begin{cases} -x^2+x & (0<x<1) \\ -x^2+4x-3 & (1\le x\le 3)\end{cases}$에서

$f'(x)=\begin{cases} -2x+1 & (0<x<1) \\ -2x+4 & (1<x<3)\end{cases}$

이고 조건 (나)에 의하여 함수 $f(x)$의 주기는 3이므로 열린구간 $(0,\ 6)$에서 함수 $y=f'(x)$의 그래프는 그림과 같다.



함수 $f(x)$는 열린구간 $(0,\ 6)$에서 연속인 함수이다. 그런데

$\lim_{x\to1-}f'(x)<0$, $\lim_{x\to1+}f'(x)>0$

$\lim_{x\to3-}f'(x)<0$, $\lim_{x\to3+}f'(x)>0$

$\lim_{x\to4-}f'(x)<0$, $\lim_{x\to4+}f'(x)>0$

이므로 함수 $f(x)$는 $x=1$, $x=3$, $x=4$에서 미분가능하지 않지만 극값을 갖는다.

$g(x)=f(x)-mx$에서 $g'(x)=f'(x)-m$이므로 함수 $g(x)$는 열린구간 $(0,\ 6)$에서 연속이고 $x=1$, $x=3$, $x=4$에서 미분가능하지 않지만 극값을 갖는다.

또한 $\alpha_7<6\le\alpha_8$이므로 함수 $y=f'(x)$의 그래프와 직선 $y=m$의 교점이 4개가 되어야 한다.

즉, α_1, $\alpha_2=1$, α_3, $\alpha_4=3$, α_5, $\alpha_6=4$, α_7에서

$\alpha_3=\alpha_1+\frac{3}{2}$, $\alpha_5=\alpha_1+3$, $\alpha_7=\alpha_1+\frac{9}{2}$

이므로

$$\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4+\alpha_5+\alpha_6+\alpha_7$$
$$=\alpha_1+1+\left(\alpha_1+\frac{3}{2}\right)+3+(\alpha_1+3)+4+\left(\alpha_1+\frac{9}{2}\right)$$
$$=4\alpha_1+17$$
$$=18$$

$\alpha_1=\frac{1}{4}$

따라서 $m=-2\times\frac{1}{4}+1=\frac{1}{2}$이므로

$$g'\left(\frac{11}{3}\right)=g'\left(\frac{2}{3}\right)$$
$$=f'\left(\frac{2}{3}\right)-\frac{1}{2}$$
$$=-2\times\frac{2}{3}+1-\frac{1}{2}$$
$$=-\frac{1}{3}-\frac{1}{2}$$
$$=-\frac{5}{6}$$

답 ⑤

05 도함수의 활용(2)

유제 본문 61~65쪽

1 ⑤ 2 8 3 ④ 4 ① 5 ④
6 ③

1 $f(x)=-x^3+3x^2+a$에서
$f'(x)=-3x^2+6x=-3x(x-2)$
$f'(x)=0$에서
$x=0$ 또는 $x=2$
닫힌구간 $[1, 4]$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	1	$\cdots$	2	$\cdots$	4
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$a+2$	$\nearrow$	$a+4$	$\searrow$	$a-16$

닫힌구간 $[1, 4]$에서 함수 $f(x)$는 $x=2$일 때 최댓값 $a+4$를 갖고, $x=4$일 때 최솟값 $a-16$을 갖는다.
즉, $a+4=8$에서 $a=4$
따라서 $m=a-16=4-16=-12$

답 ⑤

2 $f(x)=x^4-6a^2x^2-8a^3x$에서
$f'(x)=4x^3-12a^2x-8a^3=4(x+a)^2(x-2a)$
$f'(x)=0$에서
$x=-a$ 또는 $x=2a$
닫힌구간 $[0, 3a]$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

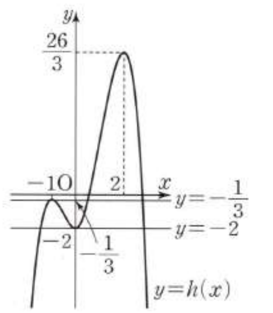
x	0	$\cdots$	$2a$	$\cdots$	$3a$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	$\searrow$	$-24a^4$	$\nearrow$	$3a^4$

닫힌구간 $[0, 3a]$에서 함수 $f(x)$는 $x=3a$일 때 최댓값 $3a^4$을 갖고, $x=2a$일 때 최솟값 $-24a^4$을 갖는다.
즉, $-24a^4=-48$에서 $a^4=2$
따라서 $M=3a^4=6$이므로
$a^4+M=2+6=8$

답 8

3 방정식 $f(x)=g(x)$, 즉 $x^4+a=\frac{4}{3}x^3+4x^2-2$에서
$-x^4+\frac{4}{3}x^3+4x^2-2=a$
$h(x)=-x^4+\frac{4}{3}x^3+4x^2-2$라 하면
$h'(x)=-4x^3+4x^2+8x=-4x(x+1)(x-2)$
$h'(x)=0$에서
$x=-1$ 또는 $x=0$ 또는 $x=2$
함수 $h(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$h'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$
$h(x)$	$\nearrow$	$-\frac{1}{3}$	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$\frac{26}{3}$	$\searrow$



함수 $y=h(x)$의 그래프는 그림과 같고 방정식
$-x^4+\frac{4}{3}x^3+4x^2-2=a$가 서로 다른 세 실근을 가지려면 함수 $y=h(x)$의 그래프와 직선 $y=a$가 서로 다른 세 점에서 만나야 한다.
따라서 $a=-\frac{1}{3}$ 또는 $a=-2$이므로 구하는 모든 실수 a의 값의 합은
$-\frac{1}{3}-2=-\frac{7}{3}$

답 ④

4 함수 $h(x)$를 $h(x)=f(x)-g(x)$라 하면
$h(x)=(3x^4+2x^2+a)-(4x^3+2x^2-3)$
$=3x^4-4x^3+a+3$
모든 실수 x에 대하여 부등식 $f(x)\geq g(x)$가 성립하려면 모든 실수 x에 대하여 부등식 $h(x)\geq 0$이 성립해야 하므로 함수 $h(x)$의 최솟값이 0 이상이어야 한다.
이때 $h'(x)=12x^3-12x^2=12x^2(x-1)$이므로
$h'(x)=0$에서
$x=0$ 또는 $x=1$
함수 $h(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$h'(x)$	$-$	0	$-$	0	$+$
$h(x)$	↘	$a+3$	↘	$a+2$	↗

함수 $h(x)$의 최솟값은 $h(1)=a+2$이므로 $a+2\geq 0$이어야 한다.
따라서 $a\geq -2$이므로 실수 a의 최솟값은 -2이다.

답 ①

5 시각 $t=k$ $(k>0)$일 때 점 P의 위치를 원점이라 하면
$k^3-2k^2-3k=0$에서 $k(k+1)(k-3)=0$
$k>0$이므로 $k=3$
즉, 점 P는 원점을 출발한 후 시각 $t=3$일 때 다시 원점을 지난다.
한편, 점 P의 시각 t $(t\geq 0)$에서의 위치 $x(t)$가
$x(t)=t^3-2t^2-3t$이므로 속도 $v(t)$는
$v(t)=\dfrac{d}{dt}x(t)=3t^2-4t-3$
따라서 점 P의 시각 $t=3$에서의 속도는
$v(3)=27-12-3=12$

답 ④

6 점 P의 시각 t $(t\geq 0)$에서의 위치 $x_1(t)$가
$x_1(t)=t^3+t^2-5t$이므로 점 P의 속도 $v_1(t)$는
$v_1(t)=\dfrac{d}{dt}x_1(t)=3t^2+2t-5$
시각 $t=k$일 때 점 P가 운동 방향을 바꾼다고 하면 시각 $t=k$일 때 점 P의 속도가 0이므로
$3k^2+2k-5=0$에서
$(3k+5)(k-1)=0$
$k>0$이므로 $k=1$
즉, 시각 $t=1$일 때 점 P는 운동 방향을 바꾸고, 이때 두 점 P, Q가 만나야 한다.
시각 $t=1$일 때, 점 P의 위치는 $x_1(1)=1+1-5=-3$
시각 $t=1$일 때, 점 Q의 위치는 $x_2(1)=3+a$
따라서 $-3=3+a$에서 $a=-6$

답 ③

Level **1** **기초 연습** 본문 66~67쪽

1 ⑤	2 ②	3 ⑤	4 ④	5 2
6 ③	7 ③	8 ①		

1 $f(x)=\dfrac{1}{4}x^4-\dfrac{2}{3}x^3+1$에서
$f'(x)=x^3-2x^2=x^2(x-2)$
$f'(x)=0$에서
$x=0$ 또는 $x=2$
닫힌구간 $[0, 3]$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	$\cdots$	2	$\cdots$	3
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	1	↘	$-\dfrac{1}{3}$	↗	$\dfrac{13}{4}$

따라서 닫힌구간 $[0, 3]$에서 함수 $f(x)$는 $x=2$일 때 최솟값 $-\dfrac{1}{3}$을 갖는다.

답 ⑤

2 $f(x)=2x^3-9x^2+12x+a$에서
$f'(x)=6x^2-18x+12=6(x-1)(x-2)$
$f'(x)=0$에서
$x=1$ 또는 $x=2$
닫힌구간 $[0, 2]$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	$\cdots$	1	$\cdots$	2
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	a	↗	$a+5$	↘	$a+4$

닫힌구간 $[0, 2]$에서 함수 $f(x)$는 $x=1$일 때 최댓값 $a+5$를 갖고, $x=0$일 때 최솟값 a를 갖는다.
$M\times m=(a+5)\times a<0$에서
$-5<a<0$
따라서 정수 a의 값은 -4, -3, -2, -1이고 그 개수는 4이다.

답 ②

3 $f(x)=2x^3-3x^2-12x$라 하고, 닫힌구간 $[0, 3]$에서 함수 $f(x)$의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 하자. 주어진 명제가 참이려면 $a\leq m$, $b\geq M$이어야 하므로 $b-a$는 $a=m$, $b=M$일 때 최솟값 $M-m$을 갖는다.
$f(x)=2x^3-3x^2-12x$에서
$f'(x)=6x^2-6x-12=6(x+1)(x-2)$
$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=2$
닫힌구간 $[0, 3]$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	$\cdots$	2	$\cdots$	3
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	↘	-20	↗	-9

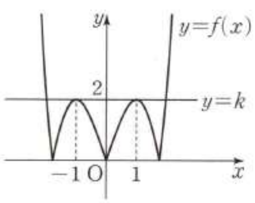
닫힌구간 $[0, 3]$에서 함수 $f(x)$는 $x=0$일 때 최댓값 0을 갖고, $x=2$일 때 최솟값 -20을 갖는다.
따라서 $M=0$, $m=-20$이므로 $b-a$의 최솟값은
$M-m=0-(-20)=20$

답 ⑤

4 x에 대한 삼차방정식 $x^3-4x^2+5x-k=0$이 서로 다른 두 개의 실근만을 갖기 위해서는 함수
$f(x)=x^3-4x^2+5x-k$의 극댓값 또는 극솟값이 0이어야 하므로
$f'(x)=3x^2-8x+5=(3x-5)(x-1)$에서 방정식
$f'(x)=0$의 해는
$x=\frac{5}{3}$ 또는 $x=1$
즉, $f\left(\frac{5}{3}\right)=\left(\frac{5}{3}\right)^3-4\times\left(\frac{5}{3}\right)^2+5\times\frac{5}{3}-k=0$에서
$k=\frac{50}{27}$
$f(1)=1-4+5-k=0$에서
$k=2$
따라서 모든 상수 k의 값의 합은
$\frac{50}{27}+2=\frac{104}{27}$

답 ④

5 $g(x)=x^3-3x$라 하면
$g'(x)=3x^2-3=3(x+1)(x-1)$에서 방정식 $g'(x)=0$의 해는
$x=-1$ 또는 $x=1$
따라서 함수 $g(x)$의 극댓값은 $g(-1)=2$, 극솟값은 $g(1)=-2$이므로 함수 $f(x)=|g(x)|=|x^3-3x|$의 그래프는 그림과 같다.



이때 방정식 $f(x)=k$가 서로 다른 네 개의 실근을 갖기 위해서는 그림과 같이 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=k$가 서로 다른 네 개의 교점을 가져야 하므로
$k=f(1)=|g(1)|=|-2|=2$

답 2

6 $f(x)=x^3+3x^2-9x+k$라 하면
$f'(x)=3x^2+6x-9=3(x+3)(x-1)$
이므로 $x\geq 0$에서 $x=1$일 때 함수 $f(x)$는 극소이면서 최소이고 최솟값은 $f(1)=k-5$이다.
따라서 음이 아닌 모든 실수 x에 대하여 부등식
$x^3+3x^2-9x+k>0$이 성립하기 위해서는
$f(1)=k-5>0$
즉, $k>5$이므로 정수 k의 최솟값은 6이다.

답 ③

7 점 P의 시각 t $(t>0)$에서의 속도, 가속도를 각각 $v(t)$, $a(t)$라 하면
$v(t)=\frac{d}{dt}x(t)=3t^2-4t$
$a(t)=\frac{d}{dt}v(t)=6t-4$
시각 $t=p$ $(p>0)$에서의 점 P의 속도가 4이므로
$v(p)=4$에서 $3p^2-4p=4$
$3p^2-4p-4=0$, $(3p+2)(p-2)=0$
$p>0$이므로 $p=2$
따라서 시각 $t=2$에서의 점 P의 가속도는
$a(2)=6\times 2-4=8$

답 ③

8 두 점 P, Q의 시각 t $(t\geq 0)$에서의 위치가 각각
$x_1(t)=t^2-4t+2$, $x_2(t)=2t^3-t^2+4$
이므로 선분 PQ의 중점 M의 시각 t $(t\geq 0)$에서의 위치는
$\frac{1}{2}\{(t^2-4t+2)+(2t^3-t^2+4)\}=t^3-2t+3$
중점 M의 시각 t에서의 속도는
$\frac{d}{dt}(t^3-2t+3)=3t^2-2$
점 M의 위치가 7일 때의 시각은
$t^3-2t+3=7$에서 $t^3-2t-4=0$
$(t-2)(t^2+2t+2)=0$
이때 $t^2+2t+2=(t+1)^2+1>0$이므로
$t=2$
따라서 시각 $t=2$일 때 점 M의 속도는
$3\times 2^2-2=10$

답 ①

Level 2 기본 연습

본문 68~69쪽

1 ④	**2** 49	**3** ④	**4** ②	**5** ③
6 5	**7** 18	**8** ⑤		

1 $f(x)=\frac{1}{4}x^3-3x+1$에서

$f'(x)=\frac{3}{4}x^2-3=\frac{3}{4}(x+2)(x-2)$

$f'(x)=0$에서

$x=-2$ 또는 $x=2$

구간 $[-3, \infty)$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	-3	$\cdots$	-2	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\frac{13}{4}$	$\nearrow$	5	$\searrow$	-3	$\nearrow$

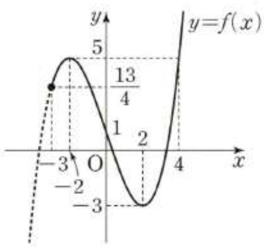
또한 $f(x)=5$, 즉 $\frac{1}{4}x^3-3x+1=5$에서

$x^3-12x-16=0$

$(x+2)^2(x-4)=0$

$x=-2$ 또는 $x=4$

따라서 구간 $[-3, \infty)$에서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 그림과 같다.



즉, 닫힌구간 $[-3, n]$에서 함수 $f(x)$가 최댓값 5를 갖도록 하는 자연수 n의 값의 범위는 $1\le n\le 4$이고, 이때 함수 $f(x)$는 $n=1$, $n=2$, $n=3$이면 $x=-2$에서 최댓값 5를 갖고, $n=4$이면 $x=-2$와 $x=4$에서 최댓값 5를 갖는다.

따라서 모든 자연수 n의 값의 합은

$1+2+3+4=10$

답 ④

2 $f(x)=x^4-4x^2$에서

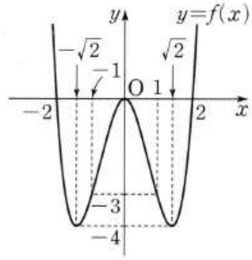
$f'(x)=4x^3-8x=4x(x^2-2)$

$f'(x)=0$에서

$x=-\sqrt{2}$ 또는 $x=0$ 또는 $x=\sqrt{2}$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	$-\sqrt{2}$	$\cdots$	0	$\cdots$	$\sqrt{2}$	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	-4	$\nearrow$	0	$\searrow$	-4	$\nearrow$



또한 모든 실수 x에 대하여 $f(-x)=f(x)$이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 그림과 같이 y축에 대하여 대칭이다.

(i) $n=1$일 때

닫힌구간 $[-1, 1]$에서 함수 $f(x)$의 최댓값은 $f(0)=0$, 최솟값은 $f(-1)=f(1)=-3$이므로 $a_1b_1=0\times(-3)=0$이다. 즉, 조건을 만족시키지 못한다.

(ii) $n\ge 2$일 때

닫힌구간 $[-n, n]$에서 함수 $f(x)$의 최댓값은 $f(n)$, 최솟값은 $f(-\sqrt{2})=f(\sqrt{2})=-4$이다.

$a_n=f(n)$, $b_n=-4$이므로 $a_nb_n<-100$에서

$f(n)>25$이다.

이때 $f(2)=0$, $f(3)=3^4-4\times 3^2=45>25$이고 $x\ge 2$일 때 함수 $f(x)$는 증가하므로 $f(n)>25$를 만족시키는 자연수 n의 최솟값은 3이다.

(i), (ii)에서 $m=3$이고 $a_3=f(3)=45$, $b_3=-4$이므로

$a_m-b_m=a_3-b_3=45-(-4)=49$

답 49

3 $f(x)=x^2$이라 하면 $f'(x)=2x$이므로 직선 l의 방정식은

$y=f'(t)(x-t)+t^2$

$\quad=2t(x-t)+t^2$

$\quad=2tx-t^2$

두 점 A, B의 좌표는 각각 $\left(\frac{1}{2}t, 0\right)$, $(0, -t^2)$이다.

직선 l과 수직인 직선의 기울기는 $-\frac{1}{2t}$이므로 점 P를 지나고 직선 l과 수직인 직선의 방정식은

$y=-\frac{1}{2t}(x-t)+t^2$

$\quad=-\frac{1}{2t}x+t^2+\frac{1}{2}$

두 점 C, D의 좌표는 각각 $(2t^3+t,\ 0)$, $\left(0,\ t^2+\frac{1}{2}\right)$이다.

$0<t<1$에서

$\overline{AC}=\left|(2t^3+t)-\frac{1}{2}t\right|=\left|2t^3+\frac{1}{2}t\right|=2t^3+\frac{1}{2}t$

$\overline{BD}=\left|\left(t^2+\frac{1}{2}\right)-(-t^2)\right|=\left|2t^2+\frac{1}{2}\right|=2t^2+\frac{1}{2}$

이때 $\overline{AC}=t\times\overline{BD}$이고 $0<t<1$이므로 $\overline{AC}<\overline{BD}$이다.

즉, 선분 AC의 길이와 선분 BD의 길이의 차를 $g(t)$라 하면

$$\begin{aligned} g(t)&=\overline{BD}-\overline{AC}\\ &=\left(2t^2+\frac{1}{2}\right)-\left(2t^3+\frac{1}{2}t\right)\\ &=-2t^3+2t^2-\frac{1}{2}t+\frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g'(t)&=-6t^2+4t-\frac{1}{2}\\ &=-\frac{1}{2}(12t^2-8t+1)\\ &=-\frac{1}{2}(6t-1)(2t-1) \end{aligned}$$

$g'(t)=0$에서 $t=\frac{1}{6}$ 또는 $t=\frac{1}{2}$

열린구간 $(0,\ 1)$에서 함수 $g(t)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

t	(0)	$\cdots$	$\frac{1}{6}$	$\cdots$	$\frac{1}{2}$	$\cdots$	(1)
$g'(t)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$g(t)$	$\left(\frac{1}{2}\right)$	↘	$\frac{25}{54}$	↗	$\frac{1}{2}$	↘	(0)

즉, 열린구간 $(0,\ 1)$에서 함수 $g(t)$는 $t=\frac{1}{2}$일 때 최댓값 $\frac{1}{2}$을 갖는다. 따라서 선분 AC의 길이와 선분 BD의 길이의 차의 최댓값은 $\frac{1}{2}$이다.

답 ④

4 접점의 좌표를 $(t,\ t^3-t)$라 하면 $y=x^3-x$에서

$y'=3x^2-1$이므로 접선의 방정식은

$y-(t^3-t)=(3t^2-1)(x-t)$

즉, $y=(3t^2-1)x-2t^3$

이 접선이 점 $(1,\ a)$를 지나므로

$a=3t^2-1-2t^3=-2t^3+3t^2-1$

따라서 $g(t)=-2t^3+3t^2-1$이라 하면

$g'(t)=-6t^2+6t=-6t(t-1)$

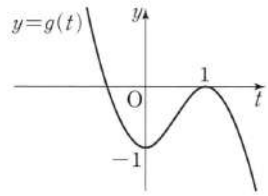
이므로 방정식 $g'(t)=0$의 해는

$t=0$ 또는 $t=1$

함수 $g(t)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

t	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$g'(t)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$g(t)$	↘	극소	↗	극대	↘

즉, 함수 $g(t)$는 $t=0$일 때 극솟값 $g(0)=-1$을 갖고, $t=1$일 때 극댓값 $g(1)=0$을 가지므로 함수 $y=g(t)$의 그래프는 그림과 같다.



또한 함수 $y=g(t)$의 그래프와 직선 $y=a$가 만나는 점의 개수가 서로 다른 접선의 개수와 같으므로

$$f(a)=\begin{cases} 1 & (a<-1)\\ 2 & (a=-1)\\ 3 & (-1<a<0)\\ 2 & (a=0)\\ 1 & (a>0) \end{cases}$$

따라서 함수 $f(a)$가 불연속이 되도록 하는 모든 a의 값의 합은

$-1+0=-1$

답 ②

5 삼차함수 $f(x)=x^3+(a+1)x^2+ax$의 그래프와 이차함수 $g(x)=x^2+b$의 그래프가 어떤 실수 b에 대하여 서로 다른 세 점에서 만나기 위해서는 방정식

$x^3+(a+1)x^2+ax=x^2+b$가 서로 다른 세 실근을 가져야 한다.

즉, 방정식 $b=x^3+ax^2+ax$의 실근이 3개 존재해야 한다.

함수 $y=x^3+ax^2+ax$의 극값이 존재해야 하므로

$y'=3x^2+2ax+a$에서 이차방정식 $3x^2+2ax+a=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=a^2-3a=a(a-3)>0$이어야 한다.

따라서 $a<0$ 또는 $a>3$이므로 자연수 a의 최솟값은 4이다.

답 ③

6 $$\begin{aligned} f(x)&=\log_n x+\log_{n^2}(3-x)-\frac{1}{2}\\ &=\log_n x+\frac{1}{2}\log_n(3-x)-\frac{1}{2}<0 \end{aligned}$$

에서 $2\log_n x+\log_n(3-x)<1$

$\log_n\{x^2(3-x)\}<1$

$\log_n\{x^2(3-x)\}<\log_n n$

이때 n은 1보다 큰 자연수이므로

$x^2(3-x)<n$ (단, $0<x<3$) ······ ㉠

$g(x)=x^2(3-x)=-x^3+3x^2$이라 하면

$g'(x)=-3x^2+6x=-3x(x-2)$

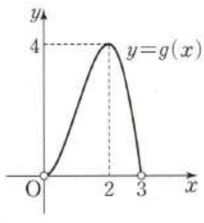
이고 방정식 $g'(x)=0$의 해는

$x=0$ 또는 $x=2$

함수 $g(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$g'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$g(x)$	↘	극소	↗	극대	↘

즉, 함수 $g(x)$는 $x=0$일 때 극솟값 $g(0)=0$을 갖고, $x=2$일 때 극댓값 $g(2)=4$를 가지므로 $0<x<3$에서 함수 $y=g(x)$의 그래프는 그림과 같다.



즉, $0<x<3$에서 $0<g(x)\le 4$이므로 부등식 ㉠을 만족시키는 자연수 n의 최솟값은 5이다.

답 5

7 두 점 P, Q의 시각 t에서의 속도를 각각 $v_1(t)$, $v_2(t)$라 하면

$v_1(t)=f'(t)=t^2+2t$

$v_2(t)=g'(t)=4t+3$

$v_1(t)=v_2(t)$에서

$t^2+2t=4t+3$

$t^2-2t-3=0$

$(t+1)(t-3)=0$

$t>0$이므로 $t=3$

$t=3$에서의

점 P의 위치는 $f(3)=18+a$

점 Q의 위치는 $g(3)=27$

따라서 $t=3$일 때 두 점 P, Q 사이의 거리는

$|(18+a)-27|=|a-9|=12$에서

$a=21$ 또는 $a=-3$

따라서 구하는 모든 상수 a의 값의 합은

$21+(-3)=18$

답 18

8 점 P의 시각 t에서의 속도를 $v(t)$라 하면

$v(t)=\dfrac{d}{dt}x(t)$

$=2t^3-6t+7-m$

점 P가 출발한 후 운동 방향이 두 번 바뀌려면 t에 대한 방정식 $2t^3-6t+7-m=0$, 즉 $2t^3-6t+7=m$이 $t>0$에서 서로 다른 두 실근을 가져야 한다.

$f(t)=2t^3-6t+7$이라 하자.

$f'(t)=6t^2-6$

$=6(t+1)(t-1)$

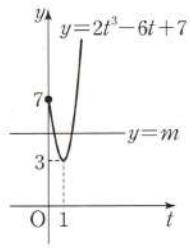
$f'(t)=0$에서

$t=-1$ 또는 $t=1$

$t\ge 0$에서 함수 $f(t)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

t	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(t)$		$-$	0	$+$
$f(t)$	7	↘	3	↗

$t\ge 0$에서 함수 $y=f(t)$의 그래프는 그림과 같다.



방정식 $2t^3-6t+7=m$이 $t>0$에서 서로 다른 두 실근을 가지려면 실수 m의 값의 범위는 $3<m<7$이어야 한다.

따라서 구하는 정수 m의 값은 4, 5, 6이고 그 합은

$4+5+6=15$

답 ⑤

Level 3 **실력 완성** 본문 70쪽

1 ④ **2** 156 **3** ②

1 $f(x)=\frac{1}{7}x^3-x^2$에서

$f'(x)=\frac{3}{7}x^2-2x=x\left(\frac{3}{7}x-2\right)$

$f'(x)=0$에서

$x=0$ 또는 $x=\frac{14}{3}$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	0	$\cdots$	$\frac{14}{3}$	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

함수 $f(x)$는 $x=0$일 때 극댓값, $x=\frac{14}{3}$일 때 극솟값을 갖는다.

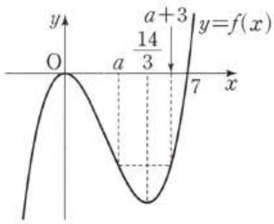
$f(x)=0$에서

$\frac{1}{7}x^3-x^2=0$

$\frac{1}{7}x^2(x-7)=0$

$x=0$ 또는 $x=7$

그러므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 그림과 같다.



$0<x<\frac{14}{3}$에서 함수 $f(x)$는 감소하고 $\frac{14}{3}<x<7$에서 함수 $f(x)$는 증가하므로 $0<a<\frac{14}{3}$이고 $\frac{14}{3}<a+3<7$, 즉 $\frac{5}{3}<a<4$일 때 $f(a)=f(a+3)$인 실수 a가 존재한다.

$f(a)=f(a+3)$에서

$\frac{1}{7}a^3-a^2=\frac{1}{7}(a+3)^3-(a+3)^2$

$\frac{1}{7}a^3-a^2=\frac{1}{7}(a^3+9a^2+27a+27)-(a^2+6a+9)$

$\frac{1}{7}(9a^2+27a+27)-(6a+9)=0$

$3a^2-5a-12=0$

$(a-3)(3a+4)=0$

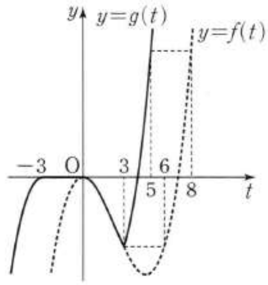
이때 $\frac{5}{3}<a<4$이므로

$a=3$

즉, 함수 $g(t)$는

$$g(t)=\begin{cases} f(t+3) & (t<-3) \\ f(0) & (-3\le t<0) \\ f(t) & (0\le t<3) \\ f(t+3) & (t\ge 3) \end{cases}$$

이고 함수 $y=g(t)$의 그래프는 그림과 같다.



$0<t<3$일 때 함수 $g(t)$는 감소하고, $t>3$일 때 함수 $g(t)$는 증가한다.

$g(0)=f(0)=0$

$g(3)=f(6)=\frac{1}{7}\times6^2\times(6-7)=-\frac{36}{7}$

$g(5)=f(8)=\frac{1}{7}\times8^2\times(8-7)=\frac{64}{7}$

즉, $0\le t\le5$에서 함수 $g(t)$는 $t=5$일 때 최댓값 $\frac{64}{7}$, $t=3$일 때 최솟값 $-\frac{36}{7}$을 갖는다.

따라서 함수 $g(t)$의 최댓값과 최솟값의 합은

$\frac{64}{7}+\left(-\frac{36}{7}\right)=4$

답 ④

2 곡선 $y=ax^3-2x$ $(a>0)$과 원 $x^2+y^2=\frac{1}{27}$의 서로 다른 교점의 개수가 6이 되기 위해서는 방정식

$x^2+(ax^3-2x)^2=\frac{1}{27}$

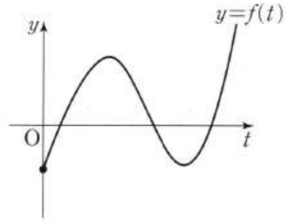
즉, $a^2x^6-4ax^4+5x^2-\frac{1}{27}=0$ ······ ㉠

이 서로 다른 6개의 실근을 가져야 한다.

이때 $x^2=t$ $(t\ge0)$이라 하면 ㉠은

$a^2t^3-4at^2+5t-\frac{1}{27}=0$이고 이 방정식이 서로 다른 세 개의 양의 실근을 가져야 한다.

따라서 $f(t)=a^2t^3-4at^2+5t-\frac{1}{27}$이라 하면 함수 $y=f(t)$의 그래프의 개형은 그림과 같아야 한다.



$f'(t)=3a^2t^2-8at+5$
$=(3at-5)(at-1)$
에서 방정식 $f'(t)=0$의 해는
$t=\frac{5}{3a}$ 또는 $t=\frac{1}{a}$
$t\geq 0$에서 함수 $f(t)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

t	0	$\cdots$	$\frac{1}{a}$	$\cdots$	$\frac{5}{3a}$	$\cdots$
$f'(t)$		$+$	0	$-$	0	$+$
$f(t)$	$-\frac{1}{27}$	↗	극대	↘	극소	↗

즉, 극댓값은 양수, 극솟값은 음수이어야 하므로
$f\left(\frac{1}{a}\right)=\frac{1}{a}-\frac{4}{a}+\frac{5}{a}-\frac{1}{27}=\frac{2}{a}-\frac{1}{27}>0$에서
$a<54$ $\cdots\cdots$ ㉡
$f\left(\frac{5}{3a}\right)=\frac{125}{27a}-\frac{100}{9a}+\frac{25}{3a}-\frac{1}{27}=\frac{50}{27a}-\frac{1}{27}<0$에서
$a>50$ $\cdots\cdots$ ㉢
㉡, ㉢에서 $50<a<54$이므로 구하는 모든 자연수 a의 값의 합은
$51+52+53=156$

답 156

3 조건 (가)에서
$x_1(\alpha)-x_2(\alpha)=0$, $v_1(\alpha)-v_2(\alpha)=0$
이므로
$x_1(t)-x_2(t)=(t-\alpha)^2(t-\beta)$ (α, β는 상수) $\cdots\cdots$ ㉠
로 놓을 수 있다.
㉠의 양변을 t에 대하여 미분하면
$v_1(t)-v_2(t)=2(t-\alpha)(t-\beta)+(t-\alpha)^2$ $\cdots\cdots$ ㉡
㉡의 양변을 t에 대하여 미분하면
$a_1(t)-a_2(t)=2(t-\beta)+2(t-\alpha)+2(t-\alpha)$
$=2(t-\beta)+4(t-\alpha)$
조건 (가)에서 $a_1(\alpha)-a_2(\alpha)=0$이므로
$2(\alpha-\beta)+4(\alpha-\alpha)=0$
$\alpha-\beta=0$

따라서 $\alpha=\beta$이므로
$a_1(t)-a_2(t)=6(t-\alpha)$
조건 (나)에서 $a_1(4)-a_2(4)=6(4-\alpha)=12$이므로
$4-\alpha=2$
$\alpha=2$
㉠에서
$x_1(t)-x_2(t)=(t-2)^3$
$=t^3-6t^2+12t-8$
$=t^3+(a-1)t^2+(5-b)t-c$
이 식은 t ($t>0$)에 대하여 항상 성립하므로
$a=-5$, $b=-7$, $c=8$
따라서 $x_1(t)=t^3-5t^2+5t$, $x_2(t)=t^2-7t+8$이므로
$x_1(\alpha)+x_2(\alpha+1)=x_1(2)+x_2(3)$
$=(8-20+10)+(9-21+8)$
$=-6$

답 ②

06 부정적분과 정적분

유제 본문 73~79쪽

1 ③	2 ②	3 ④	4 48	5 ②
6 ①	7 ④	8 ③		

1 $f'(x)=x^2-2x$이므로

$f(x)=\int(x^2-2x)dx$

$=\frac{1}{3}x^3-x^2+C$ (단, C는 적분상수)

$f(a)=f(0)$에서

$\frac{1}{3}a^3-a^2+C=0+C$

$\frac{1}{3}a^2(a-3)=0$

이때 $a\neq0$이므로 $a=3$

답 ③

2 $F(x)=f(x)+ax^3-x$ ...... ㉠

에서 다항함수 $f(x)$의 차수를 n이라 하면 다항함수 $F(x)$의 차수는 $n+1$이므로 ㉠을 만족시키는 함수 $f(x)$는 이차함수이다.

따라서 이차함수 $f(x)$의 최고차항의 계수가 1이므로

$f(x)=x^2+px+q$ (p, q는 상수)

로 놓을 수 있다.

㉠에서

$F(x)=f(x)+ax^3-x$

$=(x^2+px+q)+ax^3-x$

$=ax^3+x^2+(p-1)x+q$

$F'(x)=f(x)$이므로 위 식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$x^2+px+q=3ax^2+2x+p-1$ ...... ㉡

㉡은 모든 실수 x에 대하여 성립하므로

$3a=1$, $p=2$, $q=p-1$

즉, $a=\frac{1}{3}$, $p=2$, $q=1$

따라서 $F(x)=\frac{1}{3}x^3+x^2+x+1$이므로

$F(1)=\frac{1}{3}+1+1+1=\frac{10}{3}$

답 ②

3 $\int_1^x(t^3-2t)f'(t)dt=\{f(x)\}^2-f(x)$ ...... ㉠

㉠의 양변을 x에 대하여 미분하면

$(x^3-2x)f'(x)=f'(x)f(x)+f(x)f'(x)-f'(x)$

$=\{2f(x)-1\}f'(x)$

에서 다항함수 $f(x)$는 상수함수가 아니므로

$2f(x)-1=x^3-2x$

즉, $f(x)=\frac{1}{2}x^3-x+\frac{1}{2}$이므로

$f'(x)=\frac{3}{2}x^2-1$

따라서 $f(1)+f'(1)=\left(\frac{1}{2}-1+\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{3}{2}-1\right)=\frac{1}{2}$

답 ④

4 $\int_{-1}^x f(t)dt=2x^3+ax^2+b$ ...... ㉠

㉠의 양변에 $x=-1$을 대입하면

$0=-2+a+b$, $a+b=2$

㉠의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x)=6x^2+2ax$

$f(1)=4$에서 $6+2a=4$, $a=-1$

$b=2-a=2-(-1)=3$

따라서 ㉠에서

$\int_a^b f(x)dx=\int_{-1}^3 f(x)dx$

$=2\times3^3+a\times3^2+b$

$=54+(-1)\times9+3$

$=48$

답 48

5 $\int_{-1}^2(2x^2-2x)dx-\int_2^{-1}(x^2+a)dx$

$=\int_{-1}^2(2x^2-2x)dx+\int_{-1}^2(x^2+a)dx$

$=\int_{-1}^2\{(2x^2-2x)+(x^2+a)\}dx$

$=\int_{-1}^2(3x^2-2x+a)dx$

$=\left[x^3-x^2+ax\right]_{-1}^2$

$=(8-4+2a)-(-1-1-a)$

$=6+3a=8$

따라서 $3a=2$이므로

$a=\frac{2}{3}$

답 ②

6 $\dfrac{d}{dx}\{(3x-1)f(x)\}=3f(x)+(3x-1)f'(x)$이므로

$\int_1^3 3f(x)dx+\int_1^3 (3x-1)f'(x)dx$

$=\int_1^3 \{3f(x)+(3x-1)f'(x)\}dx$

$=\int_1^3 \dfrac{d}{dx}\{(3x-1)f(x)\}dx$

$=\Big[(3x-1)f(x)\Big]_1^3$

$=8f(3)-2f(1)=0$

따라서 $4f(3)=f(1)$이므로

$\dfrac{f(3)}{f(1)}=\dfrac{1}{4}$

답 ①

7 $\int_{-a}^{a} (3b^2x^2-2abx+ab^3)dx$

$=\int_{-a}^{a} (3b^2x^2+ab^3)dx-\int_{-a}^{a} 2abx\,dx$

$=2\int_0^{a} (3b^2x^2+ab^3)dx-0$

$=2\Big[b^2x^3+ab^3x\Big]_0^a$

$=2(b^2a^3+a^2b^3)$

$=2(ab)^2(a+b)$

$=2\times 4^2\times(a+b)$

$=32(a+b)$

a, b가 양수이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$32(a+b)\ge 32\times 2\sqrt{ab}=64\times\sqrt{4}=128$

(단, 등호는 $a=b=2$일 때 성립한다.)

따라서 구하는 최솟값은 128이다.

답 ④

8 $g(t)=\{tf(t)\}^2$이라 하고 함수 $g(t)$의 한 부정적분을 $G(t)$라 하면 $G'(t)=g(t)$이므로

$\lim_{x\to -3}\dfrac{1}{x+3}\int_{-3}^{x}\{tf(t)\}^2dt=\lim_{x\to -3}\dfrac{1}{x+3}\int_{-3}^{x}g(t)dt$

$=\lim_{x\to -3}\dfrac{G(x)-G(-3)}{x-(-3)}$

$=G'(-3)$

$=g(-3)$

$=\{-3f(-3)\}^2$

$=9\times(9-9+1)^2$

$=9$

답 ③

Level 1 기초 연습

본문 80~81쪽

1 ①	2 ③	3 ④	4 ⑤	5 ③
6 ③	7 ⑤	8 ①		

1 $\int f(x)dx=x^3+ax^2-x+C$에서

$\dfrac{d}{dx}\int f(x)dx=f(x)$

$=(x^3+ax^2-x+C)'$

$=3x^2+2ax-1$

방정식 $f(x)=0$, 즉 $3x^2+2ax-1=0$의 두 근을 α, β라 하면 모든 근의 합이 2이므로

$\alpha+\beta=2$

따라서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=-\dfrac{2a}{3}=2$

즉, $a=-3$

답 ①

2 $f'(x)=3x^2-4x+1$이므로

$f(x)=\int(3x^2-4x+1)dx$

$=x^3-2x^2+x+C$ (단, C는 적분상수)

$f'(x)=0$에서

$(3x-1)(x-1)=0$

$x=\dfrac{1}{3}$ 또는 $x=1$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	$\frac{1}{3}$	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

함수 $f(x)$는 $x=\dfrac{1}{3}$에서 극대이고 $x=1$에서 극소이다.

함수 $f(x)$의 극댓값이 $f\left(\dfrac{1}{3}\right)=\dfrac{1}{3}$이므로

$\dfrac{1}{27}-\dfrac{2}{9}+\dfrac{1}{3}+C=\dfrac{1}{3}$, $C=\dfrac{5}{27}$

즉, $f(x)=x^3-2x^2+x+\dfrac{5}{27}$

따라서 함수 $f(x)$의 극솟값은

$f(1)=1-2+1+\dfrac{5}{27}=\dfrac{5}{27}$

답 ③

3 $f(x)=x^2+ax+b$ (a, b는 상수)라 하면

$f'(x)=2x+a$

$$\begin{aligned}\int_0^1 f(x)dx&=\int_0^1 (x^2+ax+b)dx\\&=\left[\frac{1}{3}x^3+\frac{a}{2}x^2+bx\right]_0^1\\&=\frac{1}{3}+\frac{a}{2}+b=1 \qquad \cdots\cdots ㉠\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int_{-1}^2 f'(x)dx&=\int_{-1}^2 (2x+a)dx\\&=\left[x^2+ax\right]_{-1}^2\\&=(4+2a)-(1-a)\\&=3a+3=5 \qquad \cdots\cdots ㉡\end{aligned}$$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=\frac{2}{3}$, $b=\frac{1}{3}$

따라서 $f(x)=x^2+\frac{2}{3}x+\frac{1}{3}$이므로

$f(4)=16+\frac{8}{3}+\frac{1}{3}=19$

답 ④

4 $a-b=-3$, $ab=8$이므로

$$\begin{aligned}\int_a^b (2ax+b^2)dx&=\left[ax^2+b^2x\right]_a^b\\&=(ab^2+b^3)-(a^3+ab^2)\\&=b^3-a^3\\&=(b-a)(b^2+ab+a^2)\\&=(b-a)\{(b-a)^2+3ab\}\\&=3\times(3^2+3\times8)\\&=99\end{aligned}$$

답 ⑤

5 $\int_0^2 \frac{2t}{t+2}dt-\int_0^2 \frac{x^2-8}{x+2}dx$

$$\begin{aligned}&=\int_0^2 \frac{2x}{x+2}dx-\int_0^2 \frac{x^2-8}{x+2}dx\\&=\int_0^2 \frac{-x^2+2x+8}{x+2}dx\\&=\int_0^2 \frac{-(x+2)(x-4)}{x+2}dx\\&=\int_0^2 (4-x)dx\\&=\left[4x-\frac{1}{2}x^2\right]_0^2\\&=8-2\\&=6\end{aligned}$$

답 ③

6 $\int_1^x f(t)dt=4x+\int_1^2 x^2 f(t)dt+a$이므로

$\int_1^x f(t)dt=4x+x^2\int_1^2 f(t)dt+a$

$\int_1^2 f(t)dt=b$ (b는 상수)라 하면

$\int_1^x f(t)dt=4x+bx^2+a \qquad \cdots\cdots ㉠$

㉠의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x)=4+2bx$

즉, $\int_1^2 f(t)dt=\int_1^2 (2bt+4)dt=b$에서

$\int_1^2 (2bt+4)dt=\left[bt^2+4t\right]_1^2=(4b+8)-(b+4)=b$

$2b=-4$, $b=-2$

따라서 $f(x)=-4x+4$이므로

$f(1)=-4+4=0$

답 ③

7 함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이므로 $x=1$에서도 연속이다.

$\lim_{x\to1-}(3x^2+a)=\lim_{x\to1+}(4x-2)=f(1)$에서

$3+a=4-2$, $a=-1$

따라서

$$\begin{aligned}\int_a^3 f(x)dx&=\int_{-1}^3 f(x)dx\\&=\int_{-1}^1 f(x)dx+\int_1^3 f(x)dx\\&=\int_{-1}^1 (3x^2-1)dx+\int_1^3 (4x-2)dx\\&=2\int_0^1 (3x^2-1)dx+\int_1^3 (4x-2)dx\\&=2\left[x^3-x\right]_0^1+\left[2x^2-2x\right]_1^3\\&=2\times(1-1)+\{(18-6)-(2-2)\}\\&=12\end{aligned}$$

답 ⑤

8 $\int_{-a}^{a}(x^5-2x^3+3x^2-7)dx=2\int_0^a(3x^2-7)dx$

$=2\Big[x^3-7x\Big]_0^a$

$=2(a^3-7a)$

$=-12$

에서 $a^3-7a+6=0$, $(a+3)(a-1)(a-2)=0$

따라서 $a=-3$ 또는 $a=1$ 또는 $a=2$이므로

구하는 모든 양수 a의 값의 합은

$1+2=3$

답 ①

Level 2 기본 연습

본문 82~83쪽

1 ①	2 ④	3 56	4 ②	5 ④
6 ③	7 ①	8 ⑤		

1 $f(x)g(x)=8x^3-6x^2+x$ ······ ㉠

일차함수 $f(x)$의 한 부정적분 $g(x)$는 이차함수이고

$g(0)=0$이므로

$g(x)=ax^2+bx$ (a, b는 상수, $a>0$)

으로 놓을 수 있다.

$f(x)=g'(x)=2ax+b$

이것을 ㉠에 대입하면

$(2ax+b)(ax^2+bx)=8x^3-6x^2+x$

$2a^2x^3+3abx^2+b^2x=8x^3-6x^2+x$ ······ ㉡

㉡은 모든 실수 x에 대하여 성립하므로

$2a^2=8$, $3ab=-6$, $b^2=1$에서

$a>0$이므로

$a=2$, $b=-1$

따라서 $f(x)=4x-1$, $g(x)=2x^2-x$이므로

$f(2)+g(2)=(8-1)+(8-2)=13$

답 ①

2 조건 (가)에서 $\int\{f'(x)\}^2dx=\int(2x-1)f'(x)dx$의

양변을 x에 대하여 미분하면

$\{f'(x)\}^2=(2x-1)f'(x)$이므로

$f'(x)\{f'(x)-2x+1\}=0$

$f'(x)=0$ 또는 $f'(x)=2x-1$

이때 함수 $f(x)$는 상수함수가 아닌 다항함수이므로

$f'(x)=2x-1$

$f(x)=\int(2x-1)dx=x^2-x+C$ (단, C는 적분상수)

조건 (나)에서 $\int_0^1 f(x)dx=\int_0^2 f(x)dx$이므로

$\int_0^1(x^2-x+C)dx=\int_0^2(x^2-x+C)dx$

$\Big[\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2+Cx\Big]_0^1=\Big[\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2+Cx\Big]_0^2$

$\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+C=\frac{8}{3}-2+2C$

$-\frac{1}{6}+C=\frac{2}{3}+2C$, $C=-\frac{5}{6}$

따라서 $f(x)=x^2-x-\frac{5}{6}$이므로

$f(2)=4-2-\frac{5}{6}=\frac{7}{6}$

답 ④

3 $f(x)=3x^2+2x\int_{-1}^1 f(t)dt+\int_{-1}^1 tf(t)dt$에서

$a=\int_{-1}^1 f(t)dt$, $b=\int_{-1}^1 tf(t)dt$라 하면 a, b는 상수이고

$f(x)=3x^2+2ax+b$

$a=\int_{-1}^1 f(t)dt$

$=\int_{-1}^1(3t^2+2at+b)dt$

$=2\int_0^1(3t^2+b)dt$

$=2\Big[t^3+bt\Big]_0^1$

$=2(1+b)$

$=2+2b$

즉, $a-2b-2=0$ ······ ㉠

$b=\int_{-1}^1 tf(t)dt$

$=\int_{-1}^1 t(3t^2+2at+b)dt$

$=2\int_0^1 2at^2dt$

$=4a\Big[\frac{1}{3}t^3\Big]_0^1$

$=\frac{4}{3}a$

즉, $4a-3b=0$ ······ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=-\frac{6}{5}$, $b=-\frac{8}{5}$

따라서 $f(x)=3x^2-\frac{12}{5}x-\frac{8}{5}$이므로

$f(-4)=3\times(-4)^2-\frac{12}{5}\times(-4)-\frac{8}{5}=56$

답 56

4 모든 실수 x에 대하여 $f(-x)=f(x)$이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 y축에 대하여 대칭이다.

$\int_{-3}^{-2} f(x)dx=\int_{2}^{3} f(x)dx=2$

또한 $\int_{-3}^{2} f(x)dx=1$이므로

$\int_{-3}^{2} f(x)dx=\int_{-3}^{-2} f(x)dx+\int_{-2}^{2} f(x)dx$에서

$$\begin{aligned}\int_{-2}^{2} f(x)dx&=\int_{-3}^{2} f(x)dx-\int_{-3}^{-2} f(x)dx\\&=1-2\\&=-1\end{aligned}$$

따라서

$$\begin{aligned}\int_{-2}^{0} f(x)dx&=\int_{0}^{2} f(x)dx\\&=\frac{1}{2}\int_{-2}^{2} f(x)dx\\&=\frac{1}{2}\times(-1)\\&=-\frac{1}{2}\end{aligned}$$

답 ②

5 이차함수 $f(x)$의 최고차항의 계수가 1이므로

$f(x)=x^2+ax+b$ (a, b는 상수)

라 하면 조건 (가)에서

$(1+a+b)+(1-a+b)=0$

$2+2b=0$, $b=-1$

$$\begin{aligned}\int_{0}^{1} f(x)dx&=\int_{0}^{1}(x^2+ax-1)dx\\&=\left[\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}ax^2-x\right]_0^1\\&=\frac{1}{3}+\frac{1}{2}a-1\\&=\frac{1}{2}a-\frac{2}{3}\end{aligned}$$

조건 (나)에서 $-1\le\frac{1}{2}a-\frac{2}{3}\le1$이므로

$-\frac{2}{3}\le a\le\frac{10}{3}$ …… ㉠

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{2} f(x)dx&=\int_{-1}^{2}(x^2+ax-1)dx\\&=\left[\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}ax^2-x\right]_{-1}^{2}\\&=\left(\frac{8}{3}+2a-2\right)-\left(-\frac{1}{3}+\frac{1}{2}a+1\right)\\&=\frac{3}{2}a\end{aligned}$$

㉠에서 $-1\le\frac{3}{2}a\le5$

따라서 $\int_{-1}^{2} f(x)dx$의 최댓값은 5이고 최솟값은 -1이므로 최댓값과 최솟값의 합은

$5+(-1)=4$

답 ④

6 $f(x)+\int_{0}^{x} f(t)dt=x^3+2x+8$ …… ㉠

㉠의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f'(x)+f(x)=3x^2+2$ …… ㉡

다항함수 $f(x)$의 차수를 n $(n\ge1)$이라 하면 함수 $f'(x)$의 차수는 $n-1$이므로 ㉡으로부터 함수 $f(x)$는 최고차항의 계수가 3인 이차함수임을 알 수 있다.

$f(x)=3x^2+ax+b$ (a, b는 상수)라 하면

$f'(x)=6x+a$이므로 ㉡에서

$f'(x)+f(x)=3x^2+(a+6)x+(a+b)=3x^2+2$

이므로 $a+6=0$, $a+b=2$

$a=-6$, $b=8$이므로

$f(x)=3x^2-6x+8$

따라서

$$\begin{aligned}\int_{2}^{3} f(x)dx&=\int_{2}^{3}(3x^2-6x+8)dx\\&=\left[x^3-3x^2+8x\right]_2^3\\&=(27-27+24)-(8-12+16)\\&=12\end{aligned}$$

답 ③

7 $G(t)=\int tf(t)dt$라 하면 $G'(t)=tf(t)=t(at^2+b)$이므로

$$\begin{aligned}G(t)&=\int t(at^2+b)dt=\int(at^3+bt)dt\\&=\frac{1}{4}at^4+\frac{1}{2}bt^2+C\ (\text{단, }C\text{는 적분상수})\end{aligned}$$ …… ㉠

$\lim_{x\to2}\frac{1}{x-2}\int_{0}^{x} tf(t)dt=\lim_{x\to2}\frac{G(x)-G(0)}{x-2}=20$에서

$x\to2$일 때 (분모)$\to0$이고 극한값이 존재하므로 (분자)$\to0$이어야 한다.

즉, $\lim_{x\to2}\{G(x)-G(0)\}=0$이므로

$\lim_{x\to2}G(x)=G(0)$

이때 함수 $G(x)$는 다항함수이므로

$\lim_{x\to2}G(x)=G(2)=G(0)$

㉠에서 $4a+2b+C=C$

$b=-2a$

$$\begin{aligned}\lim_{x\to2}\frac{G(x)-G(0)}{x-2}&=\lim_{x\to2}\frac{G(x)-G(2)}{x-2}\\&=G'(2)=2f(2)\\&=20\end{aligned}$$

$f(2)=10$이므로

$4a+b=10$

$b=-2a$이므로

$4a+(-2a)=2a=10$

즉, $a=5$, $b=-10$

따라서 $f(x)=5x^2-10$이므로

$f(1)=5-10=-5$

답 ①

8 $F(x)$는 함수 $f(x)$의 한 부정적분이므로 $F'(x)=f(x)$

$xf(x)=F(x)-2x^3+2x^2$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x)+xf'(x)=f(x)-6x^2+4x$

$xf'(x)=-6x^2+4x$

$f(x)$는 다항함수이므로

$f'(x)=-6x+4$

$$\begin{aligned}f(x)&=\int f'(x)dx\\&=\int(-6x+4)dx\\&=-3x^2+4x+C\ (\text{단, } C\text{는 적분상수})\end{aligned}$$

$f(0)=C=7$이므로 $f(x)=-3x^2+4x+7$

따라서

$$\begin{aligned}&\lim_{h\to0}\frac{1}{h}\int_{1-h}^{1+h}f(t)dt\\&=\lim_{h\to0}\frac{F(1+h)-F(1-h)}{h}\\&=\lim_{h\to0}\frac{F(1+h)-F(1)-\{F(1-h)-F(1)\}}{h}\\&=\lim_{h\to0}\left\{\frac{F(1+h)-F(1)}{h}+\frac{F(1-h)-F(1)}{-h}\right\}\\&=F'(1)+F'(1)=2F'(1)=2f(1)\\&=2\times(-3+4+7)\\&=16\end{aligned}$$

답 ⑤

Level 3 실력 완성

본문 84~85쪽

1 ② 2 52 3 ① 4 ⑤ 5 ③

1 $\lim_{x\to0}\frac{f(x)+1}{x}=3$에서 $x\to0$일 때 (분모)$\to0$이고 극한값이 존재하므로 (분자)$\to0$이어야 한다.

즉, $\lim_{x\to0}\{f(x)+1\}=f(0)+1=0$에서

$f(0)=-1$

$$\begin{aligned}\lim_{x\to0}\frac{f(x)+1}{x}&=\lim_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x}\\&=f'(0)\\&=3\end{aligned}$$

따라서 삼차함수 $f(x)$는 $f(0)=-1$, $f'(0)=3$이므로

$f(x)=ax^3+bx^2+3x-1$ (a, b는 상수, $a\neq0$)

으로 놓을 수 있다.

$4F(x)=(x-1)f(x)$의 양변에 $x=0$을 대입하면

$4F(0)=-f(0)=1$, 즉 $F(0)=\frac{1}{4}$

$$\begin{aligned}F(x)&=\int f(x)dx\\&=\frac{a}{4}x^4+\frac{b}{3}x^3+\frac{3}{2}x^2-x+C\ (\text{단, } C\text{는 적분상수})\end{aligned}$$

$F(0)=\frac{1}{4}$에서 $C=\frac{1}{4}$

즉, $F(x)=\frac{a}{4}x^4+\frac{b}{3}x^3+\frac{3}{2}x^2-x+\frac{1}{4}$

모든 실수 x에 대하여 $4F(x)=(x-1)f(x)$이므로

$$\begin{aligned}&ax^4+\frac{4b}{3}x^3+6x^2-4x+1\\&=(x-1)(ax^3+bx^2+3x-1)\\&=ax^4+(b-a)x^3+(3-b)x^2-4x+1\end{aligned}$$

에서 $\frac{4b}{3}=b-a$, $6=3-b$

따라서 $a=1$, $b=-3$이므로

$f(x)=x^3-3x^2+3x-1$

이때 $F(x)=\frac{1}{4}x^4-x^3+\frac{3}{2}x^2-x+\frac{1}{4}$이므로

$f(2)+F(2)=1+\frac{1}{4}=\frac{5}{4}$

답 ②

2 삼차함수 $f(x)$의 최고차항의 계수가 1이고 $f(0)=0$이므로

$f(x)=x^3+ax^2+bx$ (a, b는 상수)

로 놓을 수 있다.

$\int_{-2}^{2} f(x)dx=0$이므로

$$\int_{-2}^{2}(x^3+ax^2+bx)dx=2\int_{0}^{2}ax^2dx$$
$$=2\left[\frac{a}{3}x^3\right]_0^2$$
$$=\frac{16a}{3}$$
$$=0$$

에서 $a=0$

즉, $f(x)=x^3+bx$

함수 $y=f(x)$의 그래프는 원점에 대하여 대칭이므로

$f\left(-\frac{1}{2}\right)>0$에서

$f\left(\frac{1}{2}\right)=-f\left(-\frac{1}{2}\right)<0$

함수 $f(x)$는 최고차항의 계수가 1인 삼차함수이므로 방정식 $f(x)=0$은 $x=0$과 양의 실근 $\alpha\left(\alpha>\frac{1}{2}\right)$, 음의 실근 $\beta\left(\beta<-\frac{1}{2}\right)$을 갖는다.

$\alpha\geq 2$라 하면 닫힌구간 $[0, \alpha]$에 속하는 모든 x에 대하여 $f(x)\leq 0$이므로 $g(x)=0$이 되어

$\int_{0}^{2} g(x)dx=0\neq\frac{1}{4}$

로 조건을 만족시키지 못한다.

따라서 $\frac{1}{2}<\alpha<2$

이때 $f(x)=x(x^2+b)$이므로 $\beta=-\alpha$이어야 한다.

즉, $f(x)=x(x-\alpha)(x+\alpha)\ \left(\frac{1}{2}<\alpha<2\right)$

따라서 $0\leq x\leq\alpha$에서 $f(x)\leq 0$,

$\alpha\leq x\leq 2$에서 $f(x)\geq 0$이므로

$$\int_{0}^{2} g(x)dx=\int_{0}^{\alpha} g(x)dx+\int_{\alpha}^{2} g(x)dx$$
$$=0+\int_{\alpha}^{2} f(x)dx$$
$$=\int_{\alpha}^{2}(x^3-\alpha^2x)dx$$
$$=\left[\frac{1}{4}x^4-\frac{\alpha^2}{2}x^2\right]_{\alpha}^{2}$$
$$=(4-2\alpha^2)-\left(\frac{\alpha^4}{4}-\frac{\alpha^4}{2}\right)$$
$$=\frac{\alpha^4}{4}-2\alpha^2+4$$
$$=\frac{1}{4}$$

에서 $\alpha^4-8\alpha^2+15=0$

$(\alpha^2-3)(\alpha^2-5)=0$

이때 $\frac{1}{2}<\alpha<2$에서 $\frac{1}{4}<\alpha^2<4$이므로

$\alpha^2=3$, $\alpha=\sqrt{3}$

따라서 $f(x)=x^3-\alpha^2x=x^3-3x$이므로

$f(4)=64-12=52$

답 52

3 조건 (가)에서 $\int_{1}^{x} f(t)dt=\frac{x-1}{3}\{f(x)+k\}$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x)=\frac{1}{3}\{f(x)+k\}+\frac{x-1}{3}f'(x)$

즉, $2f(x)=k+(x-1)f'(x)$ …… ㉠

다항함수 $f(x)$의 최고차항을

ax^n (n은 자연수, a는 0이 아닌 상수)

라 하면 ㉠의 양변의 최고차항이 서로 같아야 하므로

$2ax^n=anx^n$에서 $n=2$

즉, 함수 $f(x)$는 이차함수이어야 한다.

$f(x)=ax^2+bx+c$ (a, b, c는 상수, $a\neq 0$)이라 하면

$f'(x)=2ax+b$

이것을 ㉠에 대입하여 정리하면

$2ax^2+2bx+2c=2ax^2+(b-2a)x+k-b$ …… ㉡

㉡은 모든 실수 x에 대하여 성립하므로

$2b=b-2a$, $2c=k-b$

즉, $b=-2a$, $k=2(c-a)$

$$f(x)=ax^2-2ax+c$$
$$=a(x-1)^2-a+c$$
$$=a(x-1)^2+\frac{k}{2}$$

한편, 조건 (나)로부터 $a>0$, $\frac{k}{2}=-4$, 즉 $k=-8$임을 알 수 있다.

따라서 $f(x)=a(x-1)^2-4$이고 조건 (다)에서 $f(0)\geq 0$이므로 $\int_{0}^{2} f(x)dx$의 값은 $f(0)=0=f(2)$일 때, 즉 $a=4$일 때 최소이다.

따라서 $\int_{0}^{2} f(x)dx$의 최솟값은

$$\int_{0}^{2}\{4(x-1)^2-4\}dx=\int_{0}^{2}(4x^2-8x)dx$$
$$=\left[\frac{4}{3}x^3-4x^2\right]_0^2$$
$$=-\frac{16}{3}$$

답 ①

4 ㄱ. $f(x)=x(x-1)(x-2)$이면 $x\ge1$에서

$$g(x)=\begin{cases}-(x^3-3x^2+2x) & (1\le x<2)\\ 0 & (x\ge2)\end{cases}$$

$$\begin{aligned}h(3)&=\int_1^2 g(x)dx+\int_2^3 g(x)dx\\&=\int_1^2(-x^3+3x^2-2x)dx+0\\&=\left[-\frac{1}{4}x^4+x^3-x^2\right]_1^2\\&=(-4+8-4)-\left(-\frac{1}{4}+1-1\right)\\&=\frac{1}{4}\ (\text{참})\end{aligned}$$

ㄴ. 함수 $h(x)$의 정의에 의하여 $h(2)>0$이려면 구간 $(1, 2)$에서 $f(p)<0$인 실수 p가 존재하여야 한다.
삼차함수 $f(x)$에 대하여 $\lim_{x\to\infty}f(x)=\infty$이고 $f(p)<0\ (1<p<2)$이므로 사잇값의 정리에 의하여 $f(\alpha)=0\ (\alpha>p>1)$인 실수 α가 존재한다. (참)

ㄷ. $\alpha\beta<0$이므로 $\alpha<0$, $\beta>0$이라 하자.
$f(\alpha)=f(\beta)=0$이고 $f(1)=0$이므로 다음과 같이 나누어 생각할 수 있다.

(i) $0<\beta<1$일 때
$\alpha\le x\le\beta$에서 $f(x)\ge0$이므로 $g(x)=0$

$$\begin{aligned}h(\alpha)&=\int_1^\alpha g(x)dx\\&=\int_1^\beta g(x)dx+\int_\beta^\alpha g(x)dx\\&=\int_1^\beta g(x)dx+0\\&=h(\beta)\end{aligned}$$

즉, $h(\alpha)h(\beta)=\{h(\alpha)\}^2\ge0$

(ii) $\beta=1$일 때

$h(\beta)=\int_1^1 g(x)dx=0$이므로 $h(\alpha)h(\beta)=0$

(iii) $\beta>1$일 때
$\alpha\le x\le1$에서 $f(x)\ge0$이므로 $g(x)=0$

따라서 $h(\alpha)=\int_1^\alpha g(x)dx=0$이므로

$h(\alpha)h(\beta)=0$

(i), (ii), (iii)에서 $h(\alpha)h(\beta)\ge0$ (참)

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

답 ⑤

5 조건 (다)에 의하여 $f(1)\le0$이다.
$f(1)<0$이라 하자.
조건 (가)에서 $\int_0^1 f(x)dx>0$이므로 $0<a<b<1$일 때 닫힌구간 $[a, b]$에서 $f(x)>0$인 두 실수 a, b가 존재하여야 한다.
이때 $f(b)>0$, $f(1)<0$이므로 사잇값의 정리에 의하여 $a<b<\alpha<1$이고 $f(\alpha)=0$인 실수 α가 존재한다.
따라서 최고차항의 계수가 -2인 삼차함수 $f(x)$에 대하여 $f(0)=0$, $f(\alpha)=0$이므로 방정식 $f(x)=0$의 다른 한 근을 β라 하면

$$\begin{aligned}f(x)&=-2x(x-\alpha)(x-\beta)\\&=-2x^3+2(\alpha+\beta)x^2-2\alpha\beta x\end{aligned}$$

로 놓을 수 있다.
조건 (나)에서

$$\begin{aligned}\int_{-1}^1 f(x)dx&=\int_{-1}^1\{-2x^3+2(\alpha+\beta)x^2-2\alpha\beta x\}dx\\&=2\int_0^1 2(\alpha+\beta)x^2dx\\&=4\left[\frac{1}{3}(\alpha+\beta)x^3\right]_0^1\\&=\frac{4(\alpha+\beta)}{3}\\&=0\end{aligned}$$

이므로 $\beta=-\alpha$

$f(x)=-2x(x-\alpha)(x+\alpha)=-2x^3+2\alpha^2x$

한편, $-1\le x\le-\alpha$에서 $f(x)\ge0$이고
$-\alpha\le x\le0$에서 $f(x)\le0$이므로

$$\begin{aligned}&\int_{-1}^0|f(x)|dx\\&=\int_{-1}^{-\alpha}f(x)dx+\int_{-\alpha}^0\{-f(x)\}dx\\&=\int_{-1}^{-\alpha}(-2x^3+2\alpha^2x)dx+\int_{-\alpha}^0(2x^3-2\alpha^2x)dx\\&=\left[-\frac{1}{2}x^4+\alpha^2x^2\right]_{-1}^{-\alpha}+\left[\frac{1}{2}x^4-\alpha^2x^2\right]_{-\alpha}^0\\&=\left(-\frac{1}{2}\alpha^4+\alpha^4\right)-\left(-\frac{1}{2}+\alpha^2\right)+\left(-\frac{1}{2}\alpha^4+\alpha^4\right)\\&=\alpha^4-\alpha^2+\frac{1}{2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int_0^1 f(x)dx&=\int_0^1(-2x^3+2\alpha^2x)dx\\&=\left[-\frac{1}{2}x^4+\alpha^2x^2\right]_0^1\\&=-\frac{1}{2}+\alpha^2\end{aligned}$$

조건 (가)에서 $\int_{-1}^0|f(x)|dx=\int_0^1 f(x)dx$이므로

$$\alpha^4-\alpha^2+\frac{1}{2}=-\frac{1}{2}+\alpha^2$$

$(\alpha^2-1)^2=0$

$\alpha^2=1$이므로 $0<\alpha<1$인 조건, 즉 $f(1)<0$인 가정에 모순이 된다.

즉, $f(1)=0$이어야 한다.

삼차함수 $f(x)$의 최고차항의 계수가 -2이고 $f(0)=0$, $f(1)=0$이므로 방정식 $f(x)=0$의 다른 한 근을 p라 하면

$$\begin{aligned}f(x)&=-2x(x-1)(x-p)\\&=-2x^3+2(p+1)x^2-2px\end{aligned}$$

로 놓을 수 있다.

조건 (나)에서

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1}f(x)dx&=\int_{-1}^{1}\{-2x^3+2(p+1)x^2-2px\}dx\\&=2\int_{0}^{1}2(p+1)x^2dx\\&=4\left[\frac{1}{3}(p+1)x^3\right]_0^1\\&=\frac{4}{3}(p+1)\\&=0\end{aligned}$$

따라서 $p=-1$, $f(x)=-2x^3+2x$이므로

$$f\left(\frac{1}{2}\right)=-2\times\left(\frac{1}{2}\right)^3+2\times\frac{1}{2}=\frac{3}{4}$$

답 ③

다른 풀이

삼차함수 $f(x)$의 최고차항의 계수가 -2이고 $f(0)=0$이므로

$f(x)=-2x^3+ax^2+bx$ (a, b는 상수)

로 놓을 수 있다. 조건 (나)에서

$$\begin{aligned}&\int_{-1}^{1}(-2x^3+ax^2+bx)dx\\&=\int_{-1}^{1}(-2x^3+bx)dx+\int_{-1}^{1}ax^2dx\\&=0+2\int_{0}^{1}ax^2dx\\&=2\left[\frac{a}{3}x^3\right]_0^1=\frac{2a}{3}=0\end{aligned}$$

이므로 $a=0$

즉, $f(x)=-2x^3+bx$

조건 (다)에서 $f(1)\le 0$이므로 $f(1)<0$이라 하자.

함수 $y=f(x)$의 그래프는 원점에 대하여 대칭이므로 방정식 $f(x)=0$의 0이 아닌 두 근을 $-\alpha$, α $(0<\alpha<1)$이라 하면

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{0}|f(x)|dx&=\int_{-1}^{-\alpha}|f(x)|dx+\int_{-\alpha}^{0}|f(x)|dx\\&=\int_{-1}^{-\alpha}f(x)dx+\int_{-\alpha}^{0}\{-f(x)\}dx\\&=\int_{-1}^{-\alpha}f(x)dx-\int_{-\alpha}^{0}f(x)dx\end{aligned}$$

이때

$$\int_{-1}^{-\alpha}f(x)dx=-\int_{\alpha}^{1}f(x)dx,$$

$$\int_{-\alpha}^{0}f(x)dx=-\int_{0}^{\alpha}f(x)dx$$

이므로

$$\int_{-1}^{0}|f(x)|dx=-\int_{\alpha}^{1}f(x)dx+\int_{0}^{\alpha}f(x)dx$$

한편, 조건 (가)에서

$\displaystyle\int_{-1}^{0}|f(x)|dx=\int_{0}^{1}f(x)dx$이므로

$$-\int_{\alpha}^{1}f(x)dx+\int_{0}^{\alpha}f(x)dx=\int_{0}^{\alpha}f(x)dx+\int_{\alpha}^{1}f(x)dx$$

$$-\int_{\alpha}^{1}f(x)dx=\int_{\alpha}^{1}f(x)dx$$

$$\int_{\alpha}^{1}f(x)dx=0$$

즉, $\alpha=1$이 되어 $0<\alpha<1$에 모순이다.

그러므로 $f(1)=0$, 즉 $-2+b=0$에서 $b=2$이어야 하므로

$f(x)=-2x^3+2x$

따라서 $f\left(\frac{1}{2}\right)=-2\times\left(\frac{1}{2}\right)^3+2\times\frac{1}{2}=\frac{3}{4}$

07 정적분의 활용

유제

본문 89~95쪽

1 ③	2 ②	3 ①	4 ④	5 ③
6 35	7 ⑤	8 ④		

1 $f(x)=\int(3x^2-6x-4)dx$

$=x^3-3x^2-4x+C$ (단, C는 적분상수)

$f(0)=0$에서

$C=0$

$f(x)=x^3-3x^2-4x$

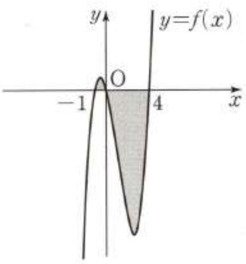
$=x(x+1)(x-4)$

이므로

$f(x)=0$에서

$x=-1$ 또는 $x=0$ 또는 $x=4$

곡선 $y=f(x)$는 그림과 같다.



따라서 구하는 넓이는

$\int_{-1}^{4}|x^3-3x^2-4x|dx$

$=\int_{-1}^{0}(x^3-3x^2-4x)dx+\int_{0}^{4}(-x^3+3x^2+4x)dx$

$=\left[\frac{1}{4}x^4-x^3-2x^2\right]_{-1}^{0}+\left[-\frac{1}{4}x^4+x^3+2x^2\right]_{0}^{4}$

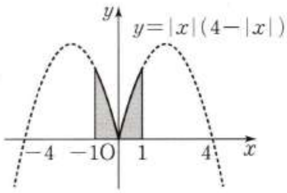
$=\frac{3}{4}+32$

$=\frac{131}{4}$

답 ③

2 $y=|x|(4-|x|)=\begin{cases}-x(x+4) & (-1\le x<0)\\ -x(x-4) & (0\le x\le 1)\end{cases}$ 이므로

곡선 $y=|x|(4-|x|)$는 그림과 같다.



따라서 구하는 넓이는

$\int_{-1}^{1}|x|(4-|x|)dx$

$=\int_{-1}^{0}(-x^2-4x)dx+\int_{0}^{1}(-x^2+4x)dx$

$=\left[-\frac{1}{3}x^3-2x^2\right]_{-1}^{0}+\left[-\frac{1}{3}x^3+2x^2\right]_{0}^{1}$

$=\frac{5}{3}+\frac{5}{3}$

$=\frac{10}{3}$

답 ②

3 $f(x)=-x^3+2x^2+3x$라 하면

$f'(x)=-3x^2+4x+3$

곡선 $y=-x^3+2x^2+3x$ 위의 점 $(1, 4)$에서의 접선의 기울기는 $f'(1)=4$이므로 접선 l의 방정식은

$y-4=4(x-1)$

즉, $y=4x$

곡선 $y=-x^3+2x^2+3x$와 접선 l의 교점의 x좌표는

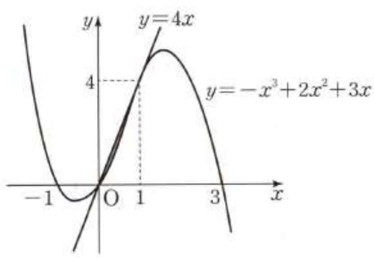
$-x^3+2x^2+3x=4x$에서

$x^3-2x^2+x=0$

$x(x-1)^2=0$

$x=0$ 또는 $x=1$

곡선 $y=-x^3+2x^2+3x$와 직선 $y=4x$는 그림과 같다.



$4x-(-x^3+2x^2+3x)=x^3-2x^2+x$

$=x(x-1)^2$

$x\ge 0$에서

$x(x-1)^2\ge 0$이므로

$4x\ge -x^3+2x^2+3x$

따라서 구하는 넓이는

$\int_0^1 |4x-(-x^3+2x^2+3x)|dx$

$=\int_0^1 \{4x-(-x^3+2x^2+3x)\}dx$

$=\int_0^1 (x^3-2x^2+x)dx$

$=\left[\frac{1}{4}x^4-\frac{2}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2\right]_0^1$

$=\frac{1}{4}-\frac{2}{3}+\frac{1}{2}$

$=\frac{1}{12}$

답 ①

4 두 함수 $y=f(x)$와 $y=g(x)$의 그래프의 교점의 x좌표는

(i) $x<0$인 경우

$2x+3=x^2$에서

$x^2-2x-3=0$

$(x+1)(x-3)=0$

$x<0$이므로 $x=-1$

(ii) $x\geq0$인 경우

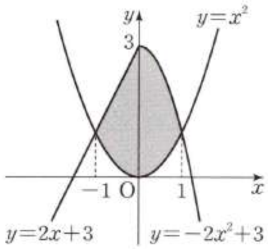
$-2x^2+3=x^2$에서

$3x^2-3=0$

$3(x+1)(x-1)=0$

$x\geq0$이므로 $x=1$

두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프는 그림과 같다.



따라서 구하는 넓이는

$\int_{-1}^1 |f(x)-g(x)|dx$

$=\int_{-1}^0 (2x+3-x^2)dx+\int_0^1 (-2x^2+3-x^2)dx$

$=\int_{-1}^0 (-x^2+2x+3)dx+\int_0^1 (-3x^2+3)dx$

$=\left[-\frac{1}{3}x^3+x^2+3x\right]_{-1}^0+\left[-x^3+3x\right]_0^1$

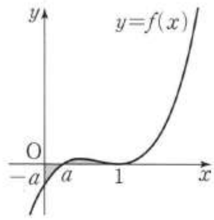
$=\frac{5}{3}+2$

$=\frac{11}{3}$

답 ④

5 $f(x)=(x-a)(x-1)^2$이라 하자.

곡선 $y=f(x)$는 그림과 같다.



곡선 $y=(x-a)(x-1)^2\ (x\leq a)$와 x축 및 y축으로 둘러싸인 부분의 넓이를 S_1이라 하면

$S_1=\int_0^a |f(x)|dx=-\int_0^a f(x)dx$

곡선 $y=(x-a)(x-1)^2$과 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이를 S_2라 하면

$S_2=\int_a^1 |f(x)|dx=\int_a^1 f(x)dx$

$S_1=S_2$이므로

$S_2-S_1=0$

$S_2-S_1=\int_a^1 f(x)dx+\int_0^a f(x)dx$

$=\int_0^1 f(x)dx$

$=\int_0^1 (x-a)(x-1)^2\,dx$

$=\int_0^1 \{x^3-(a+2)x^2+(2a+1)x-a\}dx$

$=\left[\frac{1}{4}x^4-\frac{a+2}{3}x^3+\frac{2a+1}{2}x^2-ax\right]_0^1$

$=\frac{1}{4}-\frac{a+2}{3}+\frac{2a+1}{2}-a$

$=-\frac{1}{3}a+\frac{1}{12}$

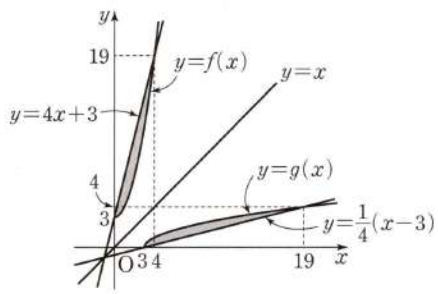
$=0$

따라서 $a=\frac{1}{4}$

답 ③

6 함수 $y=\frac{1}{4}(x-3)$의 역함수는 $y=4x+3$이다.

함수 $y=f(x)$의 그래프와 그 역함수 $y=g(x)$의 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$와 두 직선 $y=\frac{1}{4}(x-3)$, $y=4x+3$은 그림과 같다.



곡선 $y=g(x)$와 직선 $y=\frac{1}{4}(x-3)$으로 둘러싸인 부분의 넓이는 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=4x+3$으로 둘러싸인 부분의 넓이와 같다.

곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=4x+3$의 교점의 x좌표는

$x^2+3=4x+3$에서

$x^2-4x=0$, $x(x-4)=0$이므로

$x=0$ 또는 $x=4$

따라서 구하는 넓이는

$$\begin{aligned}\int_0^4 \{(4x+3)-(x^2+3)\}dx&=\int_0^4(-x^2+4x)dx\\&=\left[-\frac{1}{3}x^3+2x^2\right]_0^4\\&=-\frac{64}{3}+32\\&=\frac{32}{3}\end{aligned}$$

즉, $p=3$, $q=32$이므로

$p+q=3+32=35$

답 35

7 시각 t $(t\ge0)$에서의 점 P의 위치를 $x(t)$라 하면

$x(t)=x(0)+\int_0^t v(t)dt$

시각 $t=a$에서의 점 P의 위치는

$$\begin{aligned}x(a)&=x(0)+\int_0^a v(t)dt\\&=x(0)+\int_0^a (t^2-4t)dt\\&=x(0)+\left[\frac{1}{3}t^3-2t^2\right]_0^a\\&=x(0)+\frac{1}{3}a^3-2a^2\end{aligned}$$

$x(a)=x(0)$에서

$\frac{1}{3}a^3-2a^2=0$

$\frac{1}{3}a^2(a-6)=0$

$a>0$이므로 $a=6$

답 ⑤

8 점 P가 움직이는 방향이 바뀌는 순간 $v(t)=0$이므로

$t^3+(a-1)t^2-at=0$에서

$t(t+a)(t-1)=0$

이때 $a>0$이고 $p>0$이므로 $t=1=p$

$0\le t\le 1$에서 $v(t)=t(t+a)(t-1)\le 0$이므로

시각 $t=0$에서 $t=1$까지 점 P가 움직인 거리는

$$\begin{aligned}\int_0^1|v(t)|dt&=\int_0^1|t^3+(a-1)t^2-at|dt\\&=\int_0^1\{-t^3-(a-1)t^2+at\}dt\\&=\left[-\frac{1}{4}t^4-\frac{a-1}{3}t^3+\frac{a}{2}t^2\right]_0^1\\&=-\frac{1}{4}-\frac{a-1}{3}+\frac{a}{2}\\&=\frac{a}{6}+\frac{1}{12}\end{aligned}$$

$\frac{a}{6}+\frac{1}{12}=\frac{1}{3}$에서

$\frac{a}{6}=\frac{1}{4}$

따라서 $a=\frac{3}{2}$

답 ④

Level 1 기초 연습

본문 96~97쪽

1 ⑤	2 ④	3 ③	4 ②	5 ③
6 ②	7 ①	8 ⑤		

1 닫힌구간 $[0, 2]$에서 $f(x)\ge0$이고, 닫힌구간 $[2, 3]$에서 $f(x)\le0$이므로

$S_1=\int_0^2|f(x)|dx=\int_0^2 f(x)dx$

$S_2=\int_2^3|f(x)|dx=-\int_2^3 f(x)dx$

한편,

$$\begin{aligned}\int_0^3 f(x)dx&=\int_0^2 f(x)dx+\int_2^3 f(x)dx\\&=S_1-S_2=S_1-\frac{1}{4}S_1\\&=\frac{3}{4}S_1=\frac{9}{4}\end{aligned}$$

에서 $S_1=3$, $S_2=\frac{1}{4}S_1=\frac{3}{4}$

따라서 $\int_0^3 |f(x)|dx=S_1+S_2=3+\frac{3}{4}=\frac{15}{4}$

답 ⑤

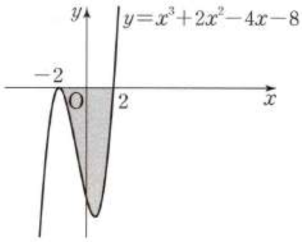
2 곡선 $y=x^3+2x^2-4x-8$과 x축이 만나는 점의 x좌표는

$x^3+2x^2-4x-8=0$에서

$(x+2)^2(x-2)=0$

$x=-2$ 또는 $x=2$

곡선 $y=x^3+2x^2-4x-8$은 그림과 같다.



따라서 구하는 넓이는

$\int_{-2}^2 |x^3+2x^2-4x-8|dx$

$=\int_{-2}^2 (-x^3-2x^2+4x+8)dx$

$=\int_{-2}^2 (-x^3+4x)dx+\int_{-2}^2 (-2x^2+8)dx$

$=0+2\int_0^2 (-2x^2+8)dx$

$=2\left[-\frac{2}{3}x^3+8x\right]_0^2$

$=2\times\left(-\frac{16}{3}+16\right)$

$=\frac{64}{3}$

답 ④

3 곡선 $y=x^3+x^2$과 직선 $y=2x$의 교점의 x좌표는

$x^3+x^2=2x$에서

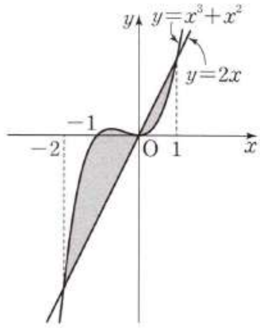
$x^3+x^2-2x=0$

$x(x^2+x-2)=0$

$x(x+2)(x-1)=0$

$x=-2$ 또는 $x=0$ 또는 $x=1$

곡선 $y=x^3+x^2$과 직선 $y=2x$는 그림과 같다.



따라서 구하는 넓이는

$\int_{-2}^1 |x^3+x^2-2x|dx$

$=\int_{-2}^0 (x^3+x^2-2x)dx+\int_0^1 (2x-x^3-x^2)dx$

$=\left[\frac{x^4}{4}+\frac{x^3}{3}-x^2\right]_{-2}^0+\left[x^2-\frac{x^4}{4}-\frac{x^3}{3}\right]_0^1$

$=\frac{8}{3}+\frac{5}{12}$

$=\frac{37}{12}$

답 ③

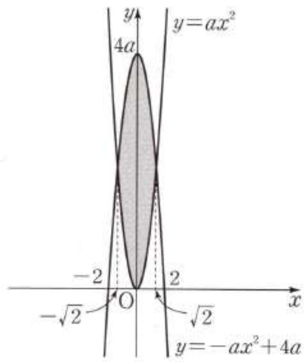
4 두 곡선 $y=ax^2$, $y=-ax^2+4a$의 교점의 x좌표는

$ax^2=-ax^2+4a$에서 $2ax^2=4a$

$a>0$이므로 $x^2=2$

$x=-\sqrt{2}$ 또는 $x=\sqrt{2}$

두 곡선 $y=ax^2$, $y=-ax^2+4a$는 그림과 같다.



두 곡선 $y=ax^2$, $y=-ax^2+4a$로 둘러싸인 부분의 넓이를 S라 하면

$S=\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} (-ax^2+4a-ax^2)dx$

$=4a\int_0^{\sqrt{2}} (-x^2+2)dx=4a\left[-\frac{1}{3}x^3+2x\right]_0^{\sqrt{2}}$

$=4a\times\left(-\frac{2\sqrt{2}}{3}+2\sqrt{2}\right)=\frac{16\sqrt{2}}{3}a$

$S=32$에서

$\frac{16\sqrt{2}}{3}a=32$

따라서 $a=3\sqrt{2}$

답 ②

5 곡선 $y=x^2-x-2$와 x축이 만나는 점의 x좌표는

$x^2-x-2=0$에서

$(x+1)(x-2)=0$

$x=-1$ 또는 $x=2$

$\int_{-1}^{2}\{-(x^2-x-2)\}dx=\int_{2}^{k}(x^2-x-2)dx$이므로

$\int_{-1}^{2}(x^2-x-2)dx+\int_{2}^{k}(x^2-x-2)dx=0$

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{k}(x^2-x-2)dx&=\left[\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2-2x\right]_{-1}^{k}\\&=\frac{1}{3}k^3-\frac{1}{2}k^2-2k-\frac{7}{6}\\&=0\end{aligned}$$

에서 $2k^3-3k^2-12k-7=0$

$(k+1)^2(2k-7)=0$

이때 $k>2$이므로

$k=\frac{7}{2}$

답 ③

6 두 곡선 $y=2x^2-8$, $y=-x^2+6x+1$의 교점의 x좌표는

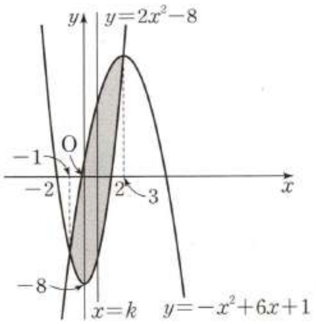
$2x^2-8=-x^2+6x+1$에서

$3(x^2-2x-3)=0$

$3(x+1)(x-3)=0$

$x=-1$ 또는 $x=3$

두 곡선 $y=2x^2-8$, $y=-x^2+6x+1$은 그림과 같다.



두 곡선 $y=2x^2-8$, $y=-x^2+6x+1$로 둘러싸인 부분의 넓이를 S라 하면

$$\begin{aligned}S&=\int_{-1}^{3}|(-x^2+6x+1)-(2x^2-8)|dx\\&=\int_{-1}^{3}(-3x^2+6x+9)dx\\&=\left[-x^3+3x^2+9x\right]_{-1}^{3}\\&=27-(-5)\\&=32\end{aligned}$$

두 곡선 $y=2x^2-8$, $y=-x^2+6x+1$로 둘러싸인 부분의 넓이가 직선 $x=k$에 의하여 이등분되므로 $-1<k<3$이고

$$\begin{aligned}\frac{S}{2}&=\int_{-1}^{k}|(-x^2+6x+1)-(2x^2-8)|dx\\&=\int_{-1}^{k}(-3x^2+6x+9)dx\\&=\left[-x^3+3x^2+9x\right]_{-1}^{k}\\&=-k^3+3k^2+9k-(-5)\\&=16\end{aligned}$$

에서 $k^3-3k^2-9k+11=0$

$(k-1)(k^2-2k-11)=0$

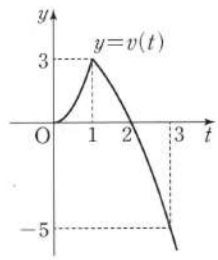
$k=1$ 또는 $k=1\pm2\sqrt{3}$

이때 $-1<k<3$이므로

$k=1$

답 ②

7 함수 $y=v(t)$의 그래프는 그림과 같다.



점 P가 시각 $t=0$에서 $t=3$까지 움직인 거리는

$$\begin{aligned}&\int_{0}^{3}|v(t)|dt\\&=\int_{0}^{1}3t^2\,dt+\int_{1}^{2}(-t^2+4)dt+\int_{2}^{3}(t^2-4)dt\\&=\left[t^3\right]_{0}^{1}+\left[-\frac{1}{3}t^3+4t\right]_{1}^{2}+\left[\frac{1}{3}t^3-4t\right]_{2}^{3}\\&=1+\frac{5}{3}+\frac{7}{3}\\&=5\end{aligned}$$

답 ①

8 두 점 P, Q의 가속도를 각각 $a_1(t)$, $a_2(t)$라 하면

$a_1(t)=6t-8$, $a_2(t)=4$

$a_1(t)=a_2(t)$에서

$6t-8=4$, $t=2$

시각 $t=0$에서의 두 점 P, Q의 위치가 모두 원점이므로 시각 $t=2$에서의 두 점 P, Q의 위치는 각각

$x_1=\int_0^2 (3t^2-8t)dt=\left[t^3-4t^2\right]_0^2=8-16=-8$

$x_2=\int_0^2 (4t+1)dt=\left[2t^2+t\right]_0^2=8+2=10$

따라서 $x_1+x_2=-8+10=2$

답 ⑤

Level 2 기본 연습

본문 98~99쪽

1 ②	2 ⑤	3 ④	4 ④	5 ②
6 ①	7 16	8 ③		

1 $f(x)=\begin{cases} ax^2+b & (x<0) \\ -3 & (0\le x<1) \\ bx^2+12x-4a & (x\ge 1) \end{cases}$

함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이므로 $x=0$, $x=1$에서도 연속이다.

$\lim_{x\to 0-} f(x)=\lim_{x\to 0+} f(x)=f(0)$에서

$\lim_{x\to 0-} (ax^2+b)=-3$이므로 $b=-3$

$\lim_{x\to 1-} f(x)=\lim_{x\to 1+} f(x)=f(1)$에서

$-3=\lim_{x\to 1+} (-3x^2+12x-4a)=9-4a$이므로 $a=3$

$f(x)=\begin{cases} 3x^2-3 & (x<0) \\ -3 & (0\le x<1) \\ -3x^2+12x-12 & (x\ge 1) \end{cases}$

$x<0$일 때 곡선 $y=3x^2-3$이 x축과 만나는 점의 x좌표는

$3x^2-3=3(x+1)(x-1)=0$에서

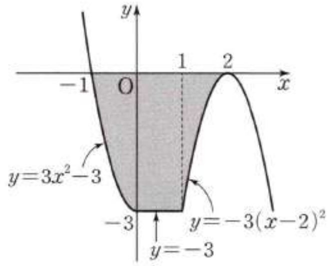
$x=-1$

$x\ge 1$일 때 곡선 $y=-3x^2+12x-12$가 x축과 만나는 점의 x좌표는

$-3x^2+12x-12=-3(x-2)^2=0$에서

$x=2$

그러므로 곡선 $y=f(x)$는 그림과 같다.



따라서 구하는 넓이는

$\int_{-1}^{2} |f(x)|dx$

$=\int_{-1}^{0} (-3x^2+3)dx+\int_0^1 3dx+\int_1^2 (3x^2-12x+12)dx$

$=\left[-x^3+3x\right]_{-1}^{0}+\left[3x\right]_0^1+\left[x^3-6x^2+12x\right]_1^2$

$=2+3+1$

$=6$

답 ②

2 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(x, f(x))$에서의 접선의 기울기가 x^3-3x^2+2x이므로

$f'(x)=x^3-3x^2+2x=x(x-1)(x-2)$

$f'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=1$ 또는 $x=2$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	극소	↗	극대	↘	극소	↗

함수 $f(x)$는 $x=0$ 또는 $x=1$ 또는 $x=2$에서 극값을 갖는다.

$f(x)=\int f'(x)dx$

$=\int (x^3-3x^2+2x)dx$

$=\frac{1}{4}x^4-x^3+x^2+C$ (단, C는 적분상수)

따라서 함수 $f(x)$의 극값은

$f(0)=C$, $f(1)=\frac{1}{4}+C$, $f(2)=C$

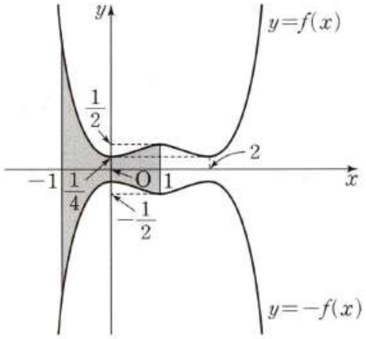
이고, 서로 다른 모든 극값의 합이 $\frac{3}{4}$이므로

$C+\left(\frac{1}{4}+C\right)=2C+\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$에서

$C=\frac{1}{4}$

즉, $f(x)=\frac{1}{4}x^4-x^3+x^2+\frac{1}{4}$이므로

두 곡선 $y=f(x)$, $y=-f(x)$ 및 두 직선 $x=-1$, $x=1$은 그림과 같다.

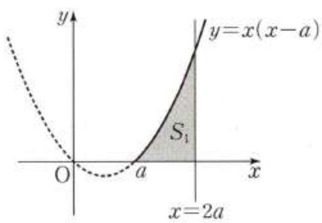


따라서 구하는 넓이는

$$\int_{-1}^{1}|f(x)-\{-f(x)\}|dx$$
$$=\int_{-1}^{1}2f(x)dx$$
$$=2\int_{-1}^{1}\left(\frac{1}{4}x^4-x^3+x^2+\frac{1}{4}\right)dx$$
$$=4\int_{0}^{1}\left(\frac{1}{4}x^4+x^2+\frac{1}{4}\right)dx$$
$$=\int_{0}^{1}(x^4+4x^2+1)dx$$
$$=\left[\frac{1}{5}x^5+\frac{4}{3}x^3+x\right]_0^1$$
$$=\frac{38}{15}$$

답 ⑤

3 곡선 $y=x(x-a)$ $(x\geq a)$와 x축 및 직선 $x=2a$로 둘러싸인 부분의 넓이 S_1은



$$S_1=\int_{a}^{2a}(x^2-ax)dx$$
$$=\left[\frac{x^3}{3}-\frac{a}{2}x^2\right]_a^{2a}$$
$$=\frac{2}{3}a^3+\frac{a^3}{6}$$
$$=\frac{5}{6}a^3$$

곡선 $y=x(x-a)$와 직선 $y=2a^2$이 만나는 점의 x좌표는

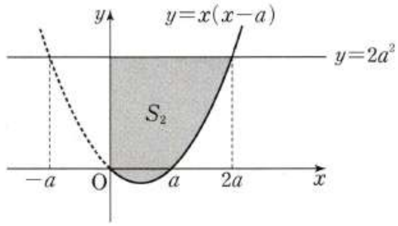
$x(x-a)=2a^2$에서

$x^2-ax-2a^2=0$

$(x+a)(x-2a)=0$

$x=-a$ 또는 $x=2a$

곡선 $y=x(x-a)$ $(x\geq 0)$과 y축 및 직선 $y=2a^2$으로 둘러싸인 부분의 넓이 S_2는



$$S_2=\int_{0}^{2a}(2a^2-x^2+ax)dx$$
$$=\left[2a^2x-\frac{1}{3}x^3+\frac{a}{2}x^2\right]_0^{2a}$$
$$=4a^3-\frac{8}{3}a^3+2a^3$$
$$=\frac{10}{3}a^3$$

$S_2-S_1=\frac{20}{27}$에서

$\frac{10}{3}a^3-\frac{5}{6}a^3=\frac{5}{2}a^3=\frac{20}{27}$

따라서 $a^3=\frac{8}{27}$이므로 $a=\frac{2}{3}$

답 ④

4 조건 (가)에서 $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)-x^2}{x}=3$이므로

$f(x)=x^2+3x+a$ (a는 상수)로 놓을 수 있다.

방정식 $f(x)=0$, 즉 $x^2+3x+a=0$의 두 근을 α, β라 하면 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$a=\alpha\beta$

조건 (나)에서 $\alpha\beta=-3$이므로 $a=-3$

$f(x)=x^2+3x-3$이므로 $f'(x)=2x+3$

두 함수 $y=f(x)$, $y=f'(x)$의 그래프가 만나는 점의 x좌표는 $f(x)=f'(x)$에서

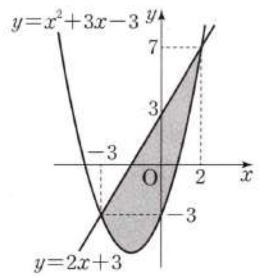
$x^2+3x-3=2x+3$

$x^2+x-6=0$

$(x+3)(x-2)=0$

$x=-3$ 또는 $x=2$

곡선 $y=x^2+3x-3$과 직선 $y=2x+3$은 그림과 같다.



따라서 구하는 넓이는

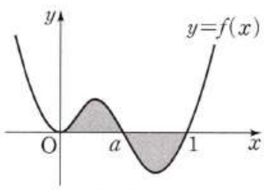
$$\int_{-3}^{2}|f'(x)-f(x)|dx$$
$$=\int_{-3}^{2}\{2x+3-(x^2+3x-3)\}dx$$
$$=\int_{-3}^{2}(-x^2-x+6)dx$$
$$=\left[-\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2+6x\right]_{-3}^{2}$$
$$=\frac{22}{3}-\left(-\frac{27}{2}\right)$$
$$=\frac{125}{6}$$

답 ④

5 $f(x)=x^4-(1+a)x^3+ax^2$
$\quad=x^2(x-1)(x-a)$

(i) $0<a<1$인 경우

곡선 $y=f(x)$는 [그림 1]과 같다.



[그림 1]

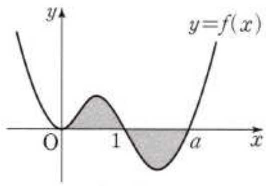
곡선 $y=f(x)$와 x축으로 둘러싸인 두 부분의 넓이가 서로 같으므로

$$\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1\{x^4-(1+a)x^3+ax^2\}dx$$
$$=\left[\frac{1}{5}x^5-\frac{1+a}{4}x^4+\frac{a}{3}x^3\right]_0^1$$
$$=\frac{1}{5}-\frac{1+a}{4}+\frac{a}{3}$$
$$=-\frac{1}{20}+\frac{a}{12}$$
$$=0$$

에서 $a=\frac{12}{20}=\frac{3}{5}$

(ii) $a>1$인 경우

곡선 $y=f(x)$는 [그림 2]와 같다.



[그림 2]

곡선 $y=f(x)$와 x축으로 둘러싸인 두 부분의 넓이가 서로 같으므로

$$\int_0^a f(x)dx=\int_0^a\{x^4-(1+a)x^3+ax^2\}dx$$
$$=\left[\frac{1}{5}x^5-\frac{1+a}{4}x^4+\frac{a}{3}x^3\right]_0^a$$
$$=\frac{1}{5}a^5-\frac{1+a}{4}\times a^4+\frac{1}{3}a^4$$
$$=a^4\left(-\frac{a}{20}+\frac{1}{12}\right)=0$$

에서 $a\neq0$이므로 $a=\frac{20}{12}=\frac{5}{3}$

(i), (ii)에서 구하는 모든 양수 a의 값의 합은

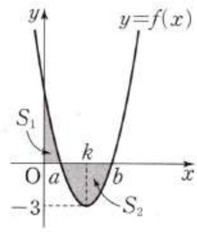
$\frac{3}{5}+\frac{5}{3}=\frac{34}{15}$

답 ②

6 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=-3$이 한 점에서만 만나므로 포물선 $y=f(x)$의 꼭짓점의 y좌표가 -3임을 알 수 있다.

즉, $f(x)=(x-k)^2-3\left(k=\frac{a+b}{2}\right)$로 놓을 수 있다.

곡선 $y=f(x)$는 직선 $x=k$에 대하여 대칭이므로 그림과 같다.



한편, $S_1=\int_0^a f(x)dx$, $\frac{1}{2}S_2=-\int_a^k f(x)dx$이므로

$S_2=2S_1$에서

$-2\int_a^k f(x)dx=2\int_0^a f(x)dx$

$2\int_0^a f(x)dx+2\int_a^k f(x)dx=2\int_0^k f(x)dx=0$

즉, $\int_0^k f(x)dx=0$

$$\int_0^k f(x)dx=\int_0^k (x^2-2kx+k^2-3)dx$$
$$=\left[\frac{1}{3}x^3-kx^2+(k^2-3)x\right]_0^k$$
$$=\frac{1}{3}k^3-3k=0$$

$\frac{1}{3}k(k^2-9)=0$에서 $k>0$이므로 $k=3$

즉, $f(x)=(x-3)^2-3=x^2-6x+6$

한편, $f(x)=(x-a)(x-b)=x^2-(a+b)x+ab$에서

$a+b=6$, $ab=6$

따라서 $f\left(\frac{a+b}{ab}\right)=f(1)=1-6+6=1$

답 ①

7 $f(x)=x^3-6x^2+12x-12$에서

$f'(x)=3x^2-12x+12=3(x-2)^2$

모든 실수 x에 대하여 $f'(x)\geq 0$이므로 함수 $f(x)$는 실수 전체의 집합에서 증가한다.

곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=x$가 만나는 점의 x좌표는

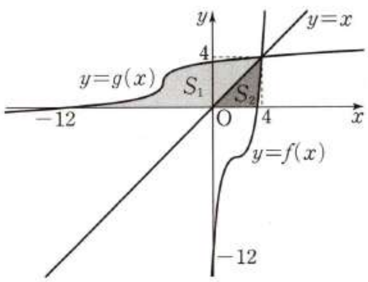
$x^3-6x^2+12x-12=x$에서

$x^3-6x^2+11x-12=0$

$(x-4)(x^2-2x+3)=0$

따라서 $x=4$

두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$와 직선 $y=x$는 그림과 같다.



곡선 $y=g(x)$와 x축 및 직선 $y=x$로 둘러싸인 부분의 넓이를 S_1, 곡선 $y=f(x)$와 x축 및 직선 $y=x$로 둘러싸인 부분의 넓이를 S_2라 하면 구하는 넓이 S는

$S=S_1+S_2$

두 곡선 $y=f(x)$와 $y=g(x)$는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로

$$S_1=\int_0^4 \{x-f(x)\}dx$$
$$=\int_0^4 \{x-(x^3-6x^2+12x-12)\}dx$$
$$=\int_0^4 (-x^3+6x^2-11x+12)dx$$
$$=\left[-\frac{1}{4}x^4+2x^3-\frac{11}{2}x^2+12x\right]_0^4$$
$$=24$$

$$S_2=\int_0^4 \{g(x)-x\}dx$$
$$=\int_0^4 g(x)dx-\int_0^4 x\,dx$$
$$=\int_0^4 g(x)dx-\left[\frac{1}{2}x^2\right]_0^4$$
$$=\int_0^4 g(x)dx-8$$

$$S=S_1+S_2$$
$$=24+\left\{\int_0^4 g(x)dx-8\right\}$$
$$=16+\int_0^4 g(x)dx$$

따라서 $S-\int_0^4 g(x)dx=16$

답 16

8 시각 $t=0$에서의 두 점 P, Q의 위치가 모두 원점이므로 시각 t $(0\leq t\leq 3)$에서의 두 점 P, Q의 위치는 각각

$$x_1(t)=\int_0^t (2t^3-2t)dt=\left[\frac{1}{2}t^4-t^2\right]_0^t=\frac{1}{2}t^4-t^2$$

$$x_2(t)=\int_0^t (t^2+4t)dt=\left[\frac{1}{3}t^3+2t^2\right]_0^t=\frac{1}{3}t^3+2t^2$$

$$|x_1(t)-x_2(t)|=\left|\left(\frac{1}{2}t^4-t^2\right)-\left(\frac{1}{3}t^3+2t^2\right)\right|$$
$$=\left|\frac{1}{2}t^4-\frac{1}{3}t^3-3t^2\right|$$

$f(t)=\frac{1}{2}t^4-\frac{1}{3}t^3-3t^2$이라 하면

$f'(t)=2t^3-t^2-6t=t(2t+3)(t-2)$

$f'(t)=0$에서

$t=-\frac{3}{2}$ 또는 $t=0$ 또는 $t=2$

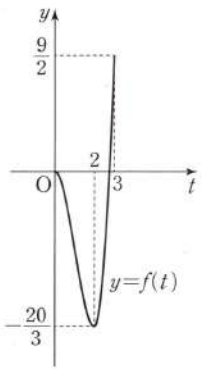
$0\leq t\leq 3$에서 함수 $f(t)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

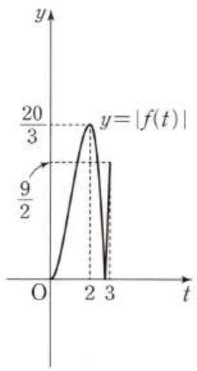
t	0	$\cdots$	2	$\cdots$	3
$f'(t)$		$-$	0	$+$	
$f(t)$	0	↘	극소	↗	$\frac{9}{2}$

$f(2)=8-\frac{8}{3}-12=-\frac{20}{3}$

$f(3)=\frac{81}{2}-9-27=\frac{9}{2}$

이므로 $0 \le t \le 3$에서 함수 $y=f(t)$와 함수 $y=|f(t)|$의 그래프는 그림과 같다.





따라서 $|x_1(t)-x_2(t)|$의 최댓값은 $\frac{20}{3}$이다.

답 ③

Level 3 실력 완성 본문 100~101쪽

1 ②	2 ⑤	3 8	4 ①	5 ④

1 $g(x)=\begin{cases} 2f(x) & (f(x)<0) \\ 0 & (f(x)\ge 0) \end{cases}$

조건 (가)에서 $g(0)=0$이므로 $f(0)\ge 0$

$f(0)>0$이라 하면 열린구간 $(0, c)$에 속하는 모든 x에 대하여 $f(x)>0$, $g(x)=0$인 양수 c가 존재한다.

이때 열린구간 $(0, c)$에 속하는 모든 x에 대하여

$\int_0^x g(t)dt=0$이 되어 조건 (나)를 만족시키지 못한다.

따라서 $f(0)=0$이어야 한다.

한편, $a<0<b$인 어떤 두 실수 a, b에 대하여

(i) $a<x<0$에서 $f(x)<0$, $0<x<b$에서 $f(x)>0$이면 열린구간 $(0, b)$에 속하는 모든 x에 대하여 $g(x)=0$이고 $\int_0^x g(t)dt=0$이 되므로 조건 (나)를 만족시키지 못한다.

(ii) $a<x<0$에서 $f(x)>0$, $0<x<b$에서 $f(x)<0$이면 열린구간 $(a, 0)$에 속하는 모든 x에 대하여 $g(x)=0$이고 $\int_0^x g(t)dt=0$이 되므로 조건 (나)를 만족시키지 못한다.

(iii) $a<x<0$에서 $f(x)>0$, $0<x<b$에서 $f(x)>0$이면 열린구간 (a, b)에 속하는 모든 x에 대하여 $g(x)=0$이고 $\int_0^x g(t)dt=0$이 되므로 조건 (나)를 만족시키지 못한다.

따라서 $a<x<0$에서 $f(x)<0$, $0<x<b$에서 $f(x)<0$이어야 한다.

즉, 삼차함수 $f(x)$는 $x=0$에서 극댓값 0을 가지므로

$f(x)=x^2(x-p)$ (p는 양수)로 놓을 수 있다.

$f(1)=-1$에서 $1^2\times(1-p)=-1$이므로

$p=2$

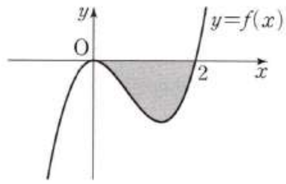
즉, $f(x)=x^2(x-2)$

곡선 $y=f(x)$와 x축이 만나는 점의 x좌표는

$x^2(x-2)=0$에서

$x=0$ 또는 $x=2$

그러므로 곡선 $y=f(x)$는 그림과 같다.



따라서 구하는 넓이는

$$\begin{aligned}\int_0^2 |x^3-2x^2|dx &= \int_0^2 (-x^3+2x^2)dx \\ &= \left[-\frac{1}{4}x^4+\frac{2}{3}x^3\right]_0^2 \\ &= -4+\frac{16}{3} \\ &= \frac{4}{3}\end{aligned}$$

답 ②

2 함수 $y=f(x)$는 $x=a$에서 연속이므로

$\lim_{x\to a-} f(x)=\lim_{x\to a+} f(x)=f(a)$에서

$\lim_{x\to a-} f(x)=\lim_{x\to a-} (x^3-2x^2)=a^3-2a^2$

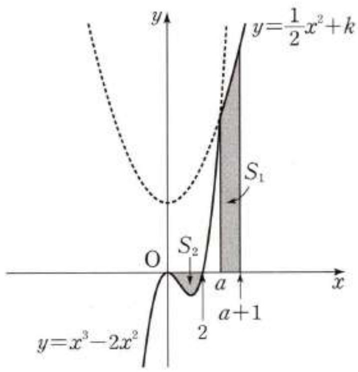
$\lim_{x\to a+} f(x)=\lim_{x\to a+} \left(\frac{1}{2}x^2+k\right)=\frac{1}{2}a^2+k$

$f(a)=\frac{1}{2}a^2+k$

즉, $a^3-2a^2=\frac{1}{2}a^2+k$이므로

$k=a^3-\frac{5}{2}a^2=a^2\left(a-\frac{5}{2}\right)>0$에서 $a>\frac{5}{2}$

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 그림과 같다.



함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축 및 두 직선 $x=a$, $x=a+1$로 둘러싸인 부분의 넓이 S_1은

$S_1=\int_a^{a+1} f(x)dx$

$=\int_a^{a+1}\left(\frac{1}{2}x^2+k\right)dx$

$=\left[\frac{1}{6}x^3+kx\right]_a^{a+1}$

$=\left\{\frac{1}{6}(a+1)^3+k(a+1)\right\}-\left(\frac{1}{6}a^3+ka\right)$

$=\frac{1}{2}a^2+\frac{1}{2}a+\frac{1}{6}+k$

이때 $k=a^3-\frac{5}{2}a^2$이므로

$S_1=\frac{1}{2}a^2+\frac{1}{2}a+\frac{1}{6}+a^3-\frac{5}{2}a^2$

$=a^3-2a^2+\frac{1}{2}a+\frac{1}{6}$

함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이 S_2는

$S_2=\int_0^2 |f(x)|dx$

$=\int_0^2 \{-f(x)\}dx$

$=\int_0^2 (-x^3+2x^2)dx$

$=\left[-\frac{1}{4}x^4+\frac{2}{3}x^3\right]_0^2$

$=-4+\frac{16}{3}$

$=\frac{4}{3}$

$S_1=8S_2=8\times\frac{4}{3}=\frac{32}{3}$에서

$a^3-2a^2+\frac{1}{2}a+\frac{1}{6}=\frac{32}{3}$

$a^3-2a^2+\frac{1}{2}a-\frac{21}{2}=0$

$2a^3-4a^2+a-21=0$

$(a-3)(2a^2+2a+7)=0$

$2a^2+2a+7=2\left(a+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{13}{2}>0$이므로 $a=3$

따라서 $k=3^3-\frac{5}{2}\times 3^2=\frac{9}{2}$이므로

$a+k=3+\frac{9}{2}=\frac{15}{2}$

답 ⑤

3 $f(-x)=-f(x)$ …… ㉠

$f(x)=f(x-2)+2a$ …… ㉡

㉠에 $x=0$을 대입하면 $f(0)=0$

함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 증가하므로

$x>0$일 때 $f(x)>f(0)=0$

㉠에서 곡선 $y=f(x)$는 원점에 대하여 대칭이다.

㉠, ㉡에 $x=1$을 각각 대입하면

$f(1)=-f(-1)$, $f(1)=f(-1)+2a$이므로

$f(1)=a$, $f(-1)=-a$

㉡에서 곡선 $y=f(x-2)+2a$는 곡선 $y=f(x)$를 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 $2a$만큼 평행이동한 곡선과 일치한다.

$f(2)=f(0)+2a=2a$

$f(3)=f(1)+2a=3a$

$f(4)=f(2)+2a=4a$

$f(5)=f(3)+2a=5a$

$f(6)=f(4)+2a=6a$

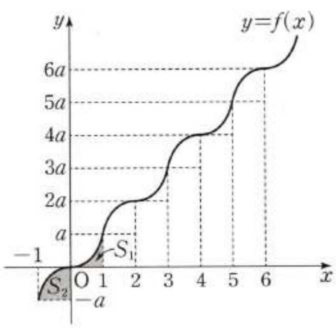
⋮

곡선 $y=f(x)$와 x축 및 직선 $x=1$로 둘러싸인 부분의 넓이를 S_1이라 하자.

$0\le x\le 1$에서 $f(x)\ge 0$이므로

$S_1=\int_0^1 |f(x)|dx=\int_0^1 f(x)dx=2$

또한 곡선 $y=f(x)$와 y축 및 직선 $y=-a$로 둘러싸인 부분의 넓이를 S_2라 하면 곡선 $y=f(x)$가 원점에 대하여 대칭이므로 S_2는 곡선 $y=f(x)$와 y축 및 직선 $y=a$로 둘러싸인 부분의 넓이와 같다.



즉, $S_2=a\times 1-\int_0^1 f(x)dx=a-2$

따라서

$$\int_3^6 f(x)dx=\int_3^4 f(x)dx+\int_4^5 f(x)dx+\int_5^6 f(x)dx$$
$$=(3a+S_2)+(4a+S_1)+(5a+S_2)$$
$$=(3a+a-2)+(4a+2)+(5a+a-2)$$
$$=14a-2$$

$\int_3^6 f(x)dx>100$에서

$14a-2>100$

$a>\frac{51}{7}$

따라서 구하는 자연수 a의 최솟값은 8이다.

답 8

4 삼차함수 $f(x)$의 최고차항의 계수를 $a\ (a>0)$이라 하면 조건 (가)에서

$f'(x)=3a(x-2)(x+2)=3ax^2-12a$

로 나타낼 수 있다.

$f(x)=\int f'(x)dx$

$=ax^3-12ax+C$ (단, C는 적분상수) …… ㉠

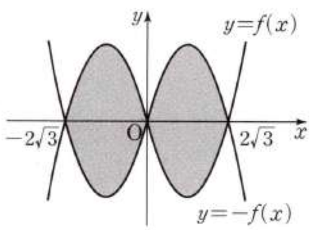
두 곡선 $y=f(x)$, $y=-f(x)$로 둘러싸인 부분의 넓이를 S라 하자.

(i) $f(2)f(-2)<0$일 때

조건 (다)에서 $f(0)=C=0$

$f(x)=ax^3-12ax=ax(x-2\sqrt{3})(x+2\sqrt{3})$

두 곡선 $y=f(x)$, $y=-f(x)$는 그림과 같다.



$$S=\int_{-2\sqrt{3}}^{2\sqrt{3}} |f(x)-\{-f(x)\}|dx$$
$$=\int_{-2\sqrt{3}}^{2\sqrt{3}} 2|f(x)|dx$$
$$=2\int_0^{2\sqrt{3}} \{-2f(x)\}dx$$
$$=4\int_0^{2\sqrt{3}} (-ax^3+12ax)dx$$
$$=4a\left[-\frac{1}{4}x^4+6x^2\right]_0^{2\sqrt{3}}$$
$$=4a(-36+72)$$
$$=144a$$

$S=24$에서 $144a=24$이므로

$a=\frac{1}{6}$

따라서 $f(x)=\frac{1}{6}(x^3-12x)$이므로

$f(1)=\frac{1}{6}(1-12)=-\frac{11}{6}$

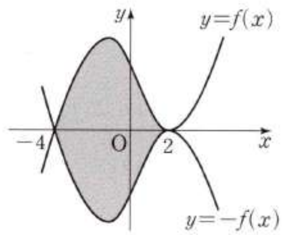
(ii) $f(2)=0$인 경우

㉠에서 $f(2)=8a-24a+C=0$이므로

$C=16a$

$f(x)=ax^3-12ax+16a=a(x-2)^2(x+4)$

두 곡선 $y=f(x)$, $y=-f(x)$는 그림과 같다.



$$S=\int_{-4}^{2} |f(x)-\{-f(x)\}|dx$$
$$=\int_{-4}^{2} 2f(x)dx$$
$$=2\int_{-4}^{2} (ax^3-12ax+16a)dx$$
$$=2a\left[\frac{1}{4}x^4-6x^2+16x\right]_{-4}^{2}$$
$$=2a\{12-(-96)\}$$
$$=216a$$

$S=24$에서 $216a=24$이므로

$a=\frac{1}{9}$

따라서 $f(x)=\frac{1}{9}(x-2)^2(x+4)$이므로

$f(1)=\frac{1}{9}\times(-1)^2\times 5=\frac{5}{9}$

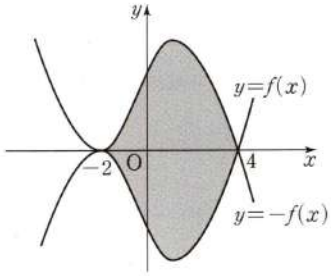
(iii) $f(-2)=0$인 경우

㉠에서 $f(-2)=-8a+24a+C=0$이므로

$C=-16a$

$f(x)=ax^3-12ax-16a=a(x+2)^2(x-4)$

두 곡선 $y=f(x)$, $y=-f(x)$는 그림과 같다.



$S=\int_{-2}^{4}|f(x)-\{-f(x)\}|dx$

$=\int_{-2}^{4}\{-2f(x)\}dx$

$=2\int_{-2}^{4}(-ax^3+12ax+16a)dx$

$=2a\left[-\frac{1}{4}x^4+6x^2+16x\right]_{-2}^{4}$

$=2a\{96-(-12)\}$

$=216a$

$S=24$에서 $216a=24$이므로 $a=\frac{1}{9}$

따라서 $f(x)=\frac{1}{9}(x+2)^2(x-4)$이므로

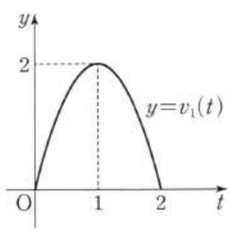
$f(1)=\frac{1}{9}\times3^2\times(-3)=-3$

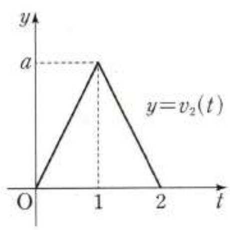
(i), (ii), (iii)에서 $f(1)$의 최솟값은 -3, 최댓값은 $\frac{5}{9}$이므로 $f(1)$의 최솟값과 최댓값의 합은

$-3+\frac{5}{9}=-\frac{22}{9}$

답 ①

5 두 함수 $y=v_1(t)$, $y=v_2(t)$의 그래프는 그림과 같다.





두 점 P, Q의 시각 t $(0\le t\le 2)$에서의 위치를 각각 $x_1(t)$, $x_2(t)$라 하면 시각 $t=0$에서 두 점 P, Q의 위치가 모두 원점이므로

$x_1(0)=x_2(0)=0$이고

$x_1(t)=\int_0^t v_1(t)dt$

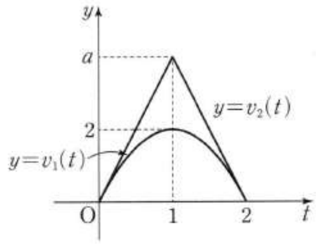
$x_2(t)=\int_0^t v_2(t)dt$

$0\le t\le 2$에서 $v_1(t)\ge0$, $v_2(t)\ge0$이므로

$x_1(t)\ge0$, $x_2(t)\ge0$

따라서 점 P가 점 Q보다 항상 원점에 가깝거나 같은 위치에 있으려면 $0\le t\le 2$인 모든 t에 대하여 $x_1(t)\le x_2(t)$이어야 한다.

두 함수 $y=v_1(t)$, $y=v_2(t)$의 그래프는 각각 직선 $t=1$에 대하여 대칭이므로 $0\le t\le 2$에서 $x_1(t)\le x_2(t)$이려면 그림과 같이 $0\le t\le 1$에서 $v_1(t)\le v_2(t)$이어야 한다.



따라서 $0\le t\le 1$에서

$-2t^2+4t\le at$

즉, $2t\left(t-\frac{4-a}{2}\right)\ge0$ …… ㉠

을 만족시켜야 한다.

이때 $\frac{4-a}{2}>0$이면 $0<t<\frac{4-a}{2}$에서

$2t\left(t-\frac{4-a}{2}\right)<0$이므로 ㉠을 만족시키지 못한다.

$\frac{4-a}{2}\le0$이면 $t\ge0$에서 $2t\left(t-\frac{4-a}{2}\right)\ge0$이므로

㉠을 만족시킨다.

따라서 $\frac{4-a}{2}\le0$에서 $a\ge4$이므로 구하는 양수 a의 최솟값은 4이다.

답 ④