이 책의 차례 Contents

01 여러 가지 순열

1. 원순열

(1) 원순열의 뜻

서로 다른 것을 원형으로 배열하는 순열을 원순열이라고 한다.

(2) 원순열의 수

서로 다른 n개를 원형으로 배열하는 원순열의 수는

$$\frac{n!}{n}=(n-1)!$$

설명 원순열에서는 회전하여 일치하는 것은 모두 같은 것으로 본다.

서로 다른 n개를 일렬로 나열하는 순열의 수는 $n!$이고, 이를 원형으로 배열하면 같은 것이 n가지씩 있으므로 서로 다른 n개를 원형으로 배열하는 원순열의 수는

$$\frac{n!}{n}=(n-1)!$$

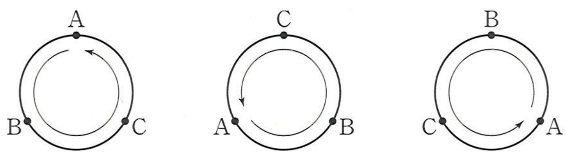
예 세 개의 문자 A, B, C를 원형으로 배열하는 경우의 수를 구해 보자.

세 개의 문자 A, B, C를 일렬로 나열하면

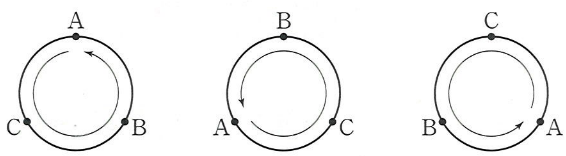
ABC, ACB, BAC, BCA, CAB, CBA

이므로 그 경우의 수는 $3!$

이때 ABC, CAB, BCA를 원형으로 배열한 후 회전하면 서로 일치하므로 같은 경우이다.



또 ACB, BAC, CBA를 원형으로 배열한 후 회전하면 서로 일치하므로 같은 경우이다.



따라서 세 개의 문자 A, B, C를 일렬로 나열하는 경우의 수는 $3!$이지만 이를 원형으로 배열하면 회전하여 같아지는 것이 3가지씩 있으므로 세 개의 문자 A, B, C를 원형으로 배열하는 원순열의 수는

$$\frac{3!}{3}=(3-1)!=2!=2$$

(3) 서로 다른 n개에서 r $(0<r\leq n)$개를 택하여 원형으로 배열하는 경우의 수는

$$\frac{{}_{n}\mathrm{P}_{r}}{r}$$

설명 서로 다른 n개에서 r개를 택하는 조합의 수는 ${}_{n}\mathrm{C}_{r}$이고,

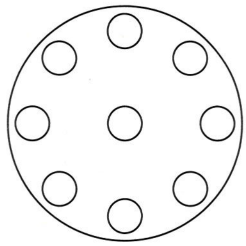
서로 다른 r개를 원형으로 배열하는 원순열의 수는 $(r-1)!$이므로

서로 다른 n개에서 r개를 택하여 원형으로 배열하는 경우의 수는

$${}_{n}\mathrm{C}_{r}\times(r-1)!={}_{n}\mathrm{C}_{r}\times\frac{r!}{r}=\frac{{}_{n}\mathrm{C}_{r}\times r!}{r}=\frac{{}_{n}\mathrm{P}_{r}}{r}$$

예제 1 원순열

그림과 같이 원형의 탁자의 중심에 원이 그려져 있고, 탁자의 둘레를 따라 원 8개가 일정한 간격으로 그려져 있다. 숫자 1, 2, 3, 4, 5가 하나씩 적힌 흰 공 5개와 숫자 6, 7, 8, 9가 하나씩 적힌 검은 공 4개를 다음 조건을 만족시키도록 탁자 위에 모두 놓는 경우의 수는? (단, 회전하여 일치하는 것은 같은 것으로 본다.)



(가) 탁자의 중심에 그려진 원 위에 흰 공 한 개를 놓는다.
(나) 탁자의 둘레를 따라 그려진 원 위에 흰 공의 양 옆에는 반드시 검은 공이 있도록 공을 하나씩 놓는다.

① 700 ② 720 ③ 740 ④ 760 ⑤ 780

길잡이 서로 다른 n개를 원형으로 배열하는 원순열의 수는

$\frac{n!}{n}=(n-1)!$

풀이 흰 공 5개 중 탁자의 중심에 그려진 원 위에 놓을 공을 정하는 경우의 수는

${}_5C_1=5$

나머지 흰 공 4개를 원형으로 배열하는 경우의 수는

$(4-1)!=3!=6$

흰 공 사이사이에 검은 공 4개를 배열하는 경우의 수는

$4!=24$

따라서 구하는 경우의 수는

$5\times6\times24=720$

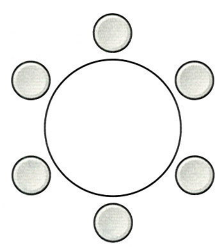
답 ②

유제

정답과 풀이 4쪽

1 [23010-0001]

그림과 같이 원형의 탁자에 6개의 의자가 일정한 간격으로 놓여 있다. 3학년 학생 2명과 2학년 학생 3명이 의자에 앉을 때, 빈 의자의 바로 양 옆에 3학년 학생이 앉는 경우의 수는? (단, 회전하여 일치하는 것은 같은 것으로 본다.)



① 10 ② 12 ③ 14
④ 16 ⑤ 18

2 [23010-0002]

여학생 2명과 남학생 n명이 모두 일정한 간격을 두고 원형의 탁자에 둘러앉을 때, 여학생 2명이 이웃하게 앉는 경우의 수가 48이다. 자연수 n의 값은? (단, 회전하여 일치하는 것은 같은 것으로 본다.)

① 4 ② 5 ③ 6 ④ 7 ⑤ 8

01 여러 가지 순열

2. 중복순열

(1) 중복순열의 뜻

서로 다른 n개에서 중복을 허락하여 r개를 택하여 일렬로 나열하는 것을 n개에서 r개를 택하는 중복순열이라 하고, 이 중복순열의 수를 기호로

$${}_n\Pi_r$$

와 같이 나타낸다.

참고 기호 ${}_n\Pi_r$에서 Π는 곱을 뜻하는 영어 Product의 첫 글자인 P에 해당하는 그리스 문자로 '파이'라고 읽는다.

(2) 중복순열의 수

서로 다른 n개에서 r개를 택하는 중복순열의 수는

$${}_n\Pi_r=n^r$$

설명 서로 다른 n개에서 중복을 허락하여 r개를 택하여 일렬로 나열할 때, 첫 번째, 두 번째, 세 번째, $\cdots$, r 번째 자리에 올 수 있는 것은 각각 n가지씩이다.

나열 순서	첫 번째	두 번째	세 번째	$\cdots$	r 번째
경우의 수	n	n	n	$\cdots$	n

따라서 중복순열의 수 ${}_n\Pi_r$는 곱의 법칙에 의하여

$${}_n\Pi_r=\underbrace{n\times n\times n\times\cdots\times n}_{r\text{개}}=n^r$$

예1 ${}_3\Pi_4=3^4=81$, ${}_4\Pi_3=4^3=64$

예2 숫자 1, 2, 3, 4, 5 중에서 중복을 허락하여 3개의 숫자를 택해 일렬로 나열하여 만들 수 있는 세 자리 자연수의 개수를 구해 보자.

백의 자리, 십의 자리, 일의 자리에 올 수 있는 숫자는 각각 1, 2, 3, 4, 5의 5가지이다.

백의 자리	십의 자리	일의 자리
1, 2, 3, 4, 5	1, 2, 3, 4, 5	1, 2, 3, 4, 5
5가지	5가지	5가지

따라서 만들 수 있는 세 자리 자연수의 개수는 곱의 법칙에 의하여

$$5\times5\times5=125$$

이고, 이것은 서로 다른 5개에서 중복을 허락하여 3개를 택해 일렬로 나열하는 중복순열의 수와 같다.

즉, ${}_5\Pi_3=5^3=125$이다.

참고 공집합이 아닌 두 집합 X, Y의 원소의 개수가 각각 m, n일 때, 집합 X에서 집합 Y로의 모든 함수의 개수는 공역 Y의 서로 다른 n개의 원소 중에서 중복을 허락하여 m개를 택하여 일렬로 나열하는 중복순열의 수와 같으므로

$${}_n\Pi_m=n^m$$

예제 2 중복순열

두 집합 $X=\{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$, $Y=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}$에 대하여 X에서 Y로의 함수 f 중에서 치역의 모든 원소의 합이 6인 함수 f의 개수는?

① 60 ② 64 ③ 68 ④ 72 ⑤ 76

길잡이 원소의 개수가 m인 집합 X에서 원소의 개수가 n인 집합 Y로의 모든 함수의 개수는

$${}_{n}\Pi_{m}=n^{m}$$

풀이 (i) 치역이 $\{1,\ 5\}$인 경우

함수 f의 개수는 X에서 $\{1,\ 5\}$로의 함수의 개수에서 치역이 $\{1\}$, $\{5\}$인 함수의 개수를 빼면 되므로

$${}_{2}\Pi_{4}-2=2^{4}-2=14$$

(ii) 치역이 $\{2,\ 4\}$인 경우

함수 f의 개수는 (i)과 같은 방법으로 14

(iii) 치역이 $\{1,\ 2,\ 3\}$인 경우

함수 f의 개수는 X에서 $\{1,\ 2,\ 3\}$으로의 함수의 개수에서 치역이 $\{1,\ 2\}$, $\{1,\ 3\}$, $\{2,\ 3\}$, $\{1\}$, $\{2\}$, $\{3\}$인 함수의 개수를 빼면 되므로

$${}_{3}\Pi_{4}-3\times({}_{2}\Pi_{4}-2)-3=3^{4}-3\times(2^{4}-2)-3=36$$

(i), (ii), (iii)에서 구하는 함수 f의 개수는

$$14+14+36=64$$

답 ②

유제

정답과 풀이 4쪽

3 [23010-0003]

집합 $U=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\}$의 두 부분집합 A, B가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 집합 A의 원소의 개수는 4이다.
(나) $A\cup B=U$

두 집합 A, B의 모든 순서쌍 $(A,\ B)$의 개수를 구하시오.

4 [23010-0004]

6개의 숫자 1, 2, 3, 4, 5, 6 중에서 중복을 허락하여 택한 3개의 수를 일렬로 나열하여 세 자리 자연수를 만들 때, 숫자 1이 포함된 세 자리 자연수의 개수는?

① 87 ② 89 ③ 91 ④ 93 ⑤ 95

01 여러 가지 순열

3. 같은 것이 있는 순열

(1) 같은 것이 있는 순열의 뜻

같은 것이 포함되어 있는 n개를 일렬로 나열하는 것을 같은 것이 있는 순열이라고 한다.

(2) 같은 것이 있는 순열의 수

n개 중에서 같은 것이 각각 p개, q개, $\cdots$, r개씩 있을 때, n개를 일렬로 나열하는 순열의 수는

$$\frac{n!}{p!\times q!\times\cdots\times r!}\ (\text{단, } p+q+\cdots+r=n)$$

설명 5개의 문자 a, a, a, b, b를 일렬로 나열하는 경우의 수를 구해 보자.

5개의 문자 a, a, a, b, b에서 3개의 a를 구별하여 각각 a_1, a_2, a_3이라 하고, 2개의 b를 구별하여 각각 b_1, b_2라 하면 5개의 문자 a_1, a_2, a_3, b_1, b_2를 일렬로 나열하는 경우의 수는

$${}_5\mathrm{P}_5=5!$$

그런데 $5!$가지 중에서 다음과 같은 $3!\times2!$가지의 서로 다른 순열은 번호를 이용한 구별이 없다면 모두 $aaabb$와 같다.

$a_1a_2a_3b_1b_2$	$a_1a_2a_3b_2b_1$
$a_1a_3a_2b_1b_2$	$a_1a_3a_2b_2b_1$
$a_2a_1a_3b_1b_2$	$a_2a_1a_3b_2b_1$
$a_2a_3a_1b_1b_2$	$a_2a_3a_1b_2b_1$
$a_3a_1a_2b_1b_2$	$a_3a_1a_2b_2b_1$
$a_3a_2a_1b_1b_2$	$a_3a_2a_1b_2b_1$

➡ $aaabb$

이와 같이 생각하면 5개의 문자 a, a, a, b, b를 일렬로 나열하는 순열의 수는

$$\frac{5!}{3!\times2!}=10$$

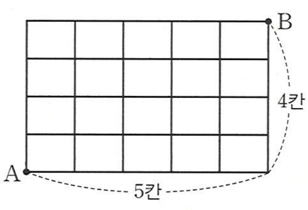
예 여섯 개의 숫자 1, 2, 2, 3, 3, 3을 일렬로 나열하여 만들 수 있는 여섯 자리 자연수의 개수는

$$\frac{6!}{1!\times2!\times3!}=60$$

참고 직사각형 모양으로 연결된 도로망을 따라 두 지점 사이를 최단 거리로 이동하는 경우의 수는 가로 방향으로 한 칸 움직이는 이동과 세로 방향으로 한 칸 움직이는 이동을 필요한 횟수만큼 일렬로 나열하는 경우의 수와 같으므로 같은 것이 있는 순열의 수를 이용하여 구할 수 있다.

오른쪽 그림과 같이 직사각형 모양으로 연결된 도로망에서 가로 방향의 칸의 수가 5, 세로 방향의 칸의 수가 4일 때, 이 도로망을 따라 A지점을 출발하여 B지점까지 최단 거리로 이동하는 경우의 수는

$$\frac{(5+4)!}{5!\times4!}=126$$



예제 3 같은 것이 있는 순열

10개의 문자 m, i, l, l, e, n, n, i, u, m을 다음 조건을 만족시키도록 일렬로 나열하는 경우의 수는?

(가) 어떤 두 자음 사이에도 모음이 놓이지 않는다.
(나) 두 문자 e, u는 서로 이웃하지 않는다.

① $4\times6!$ ② $\frac{9}{2}\times6!$ ③ $5\times6!$ ④ $\frac{11}{2}\times6!$ ⑤ $6\times6!$

길잡이 n개 중에서 같은 것이 각각 p개, q개, $\cdots$, r개씩 있을 때, n개를 일렬로 나열하는 순열의 수는

$\frac{n!}{p!\times q!\times\cdots\times r!}$ (단, $p+q+\cdots+r=n$)

풀이 6개의 자음 m, l, l, n, n, m을 일렬로 나열하는 경우의 수는

$\frac{6!}{2!\times2!\times2!}=\frac{6!}{8}$

자음 6개의 묶음을 A라 하면 A, i, i를 일렬로 나열하는 경우의 수는

$\frac{3!}{2!}=3$

이때 모음 e, u의 자리는 A, i, i를 일렬로 나열한 후 왼쪽 끝, 문자 사이, 오른쪽 끝의 네 곳 중 두 곳을 택하면 되므로 모음 e, u를 나열하는 경우의 수는

$4\times3=12$

따라서 구하는 경우의 수는

$\frac{6!}{8}\times3\times12=\frac{9}{2}\times6!$

답 ②

유제

정답과 풀이 4쪽

5 [23010-0005]

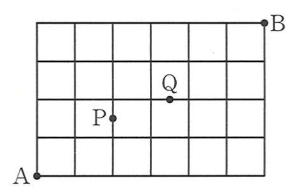
숫자 1, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4가 하나씩 적힌 8장의 카드를 왼쪽부터 오른쪽 방향으로 일렬로 나열한다. 왼쪽부터 홀수 번째 놓인 카드에는 모두 홀수가 적혀 있고, 왼쪽부터 짝수 번째 놓인 카드에는 모두 짝수가 적혀 있도록 8장의 카드를 나열하는 경우의 수는?

(단, 같은 숫자가 적힌 카드끼리는 서로 구별하지 않는다.)

① 12 ② 16 ③ 20 ④ 24 ⑤ 28

6 [23010-0006]

그림과 같은 바둑판 모양의 도로망에서 A지점을 출발하여 B지점까지 최단 거리로 이동할 때, P지점과 Q지점을 모두 지나고 이동하는 경우의 수를 구하시오.



Level 1 기초 연습

[23010-0007]

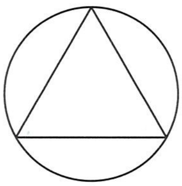
1 여학생 5명과 남학생 2명이 모두 일정한 간격을 두고 원형의 탁자에 둘러앉을 때, 남학생 2명이 서로 이웃하지 않도록 앉는 경우의 수는? (단, 회전하여 일치하는 것은 같은 것으로 본다.)

① 300 ② 360 ③ 420 ④ 480 ⑤ 540

[23010-0008]

2 그림과 같이 원과 이 원에 내접하는 정삼각형이 그려진 도형이 있다. 이 도형의 4개의 영역에 서로 다른 4가지 색을 모두 사용하여 칠하는 경우의 수를 구하시오.

(단, 한 영역에는 한 가지 색만 칠하고, 회전하여 일치하는 것은 같은 것으로 본다.)



[23010-0009]

3 3학년 학생 2명과 2학년 학생 4명이 모두 일정한 간격을 두고 원형의 탁자에 둘러앉을 때, 3학년 학생 2명 사이에 2학년 학생 1명이 앉는 경우의 수는? (단, 회전하여 일치하는 것은 같은 것으로 본다.)

① 36 ② 48 ③ 60 ④ 72 ⑤ 84

[23010-0010]

4 집합 $U=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$에 대하여 두 집합 A, B가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $A\subset U$, $B\subset U$
(나) $A\cup B=U$, $A\cap B=\varnothing$

두 집합 A, B의 모든 순서쌍 (A, B)의 개수를 구하시오.

[23010-0011]

5 6명의 학생이 A, B, C 세 과목 중에서 한 과목씩 선택하려고 한다. A과목을 3명 이상 선택하는 경우의 수는?
(단, 한 명도 선택하지 않은 과목이 있을 수 있다.)

① 229 ② 231 ③ 233 ④ 235 ⑤ 237

[23010-0012]

6 흰 공 3개와 검은 공 4개를 일렬로 나열하는 경우의 수는? (단, 같은 색의 공끼리는 서로 구별하지 않는다.)

① 31 ② 33 ③ 35 ④ 37 ⑤ 39

[23010-0013]

7 6개의 문자 K, O, R, E, A, N을 일렬로 나열할 때, 자음은 K, N, R의 순서로 나열하고 모음은 A, E, O의 순서로 나열하는 경우의 수는?

① 10 ② 15 ③ 20 ④ 25 ⑤ 30

[23010-0014]

8 좌표평면 위의 점 P가 다음 규칙에 따라 이동한다.

(가) 한 개의 주사위를 한 번 던져 나온 눈의 수가 홀수이면 나온 눈의 수만큼 x축의 양의 방향으로 이동한다.
(나) 한 개의 주사위를 한 번 던져 나온 눈의 수가 짝수이면 나온 눈의 수만큼 y축의 양의 방향으로 이동한다.

이 규칙을 반복하여 점 P가 원점에서 시작하여 점 (3, 4)로 이동하게 되는 경우의 수는?

① 18 ② 19 ③ 20 ④ 21 ⑤ 22

Level 2 기본 연습

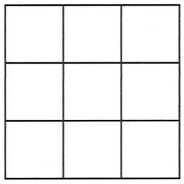
[23010-0015]

1 교사 2명, 1학년 학생 2명, 2학년 학생 2명, 3학년 학생 2명이 다음 조건을 만족시키며 원형의 탁자에 일정한 간격을 두고 모두 둘러앉는 경우의 수를 구하시오. (단, 회전하여 일치하는 것은 같은 것으로 본다.)

> (가) 1학년 학생 2명은 서로 이웃하여 앉고, 2학년 학생 2명도 서로 이웃하여 앉는다.
> (나) 교사 2명은 서로 이웃하여 앉지 않는다.

[23010-0016]

2 그림과 같이 넓이가 9인 정사각형을 넓이가 1인 9개의 정사각형으로 나눈 도형이 있다. 9개의 정사각형에 서로 다른 9가지 색을 모두 사용하여 칠하는 경우의 수는? (단, 넓이가 1인 한 정사각형에는 한 가지 색만 칠하고, 회전하여 일치하는 것은 같은 것으로 본다.)



① $9!$　② $\frac{9!}{2}$　③ $\frac{9!}{3}$　④ $\frac{9!}{4}$　⑤ $\frac{9!}{5}$

[23010-0017]

3 집합 $U=\{x\,|\,x$는 10 이하의 자연수$\}$의 공집합이 아닌 서로 다른 세 부분집합 A, B, C가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $A\cap B=\{6, 7\}$, $(A\cup B)\cap C=\varnothing$
> (나) $(A\cup B\cup C)^C=\{8, 9, 10\}$

세 집합 A, B, C의 모든 순서쌍 (A, B, C)의 개수를 구하시오.

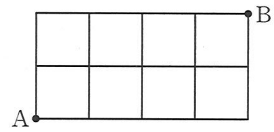
[23010-0018]

4 8개의 숫자 1, 1, 2, 2, 3, 3, 4, 4에서 5개를 택해 만들 수 있는 모든 다섯 자리 자연수의 개수는?

① 520　② 540　③ 560　④ 580　⑤ 600

[23010-0019]

5 그림과 같이 정사각형 8개로 구성된 바둑판 모양의 도로망이 있다. 갑은 A지점을 출발하여 B지점까지 최단 거리로 이동하고, 을은 B지점을 출발하여 A지점까지 최단 거리로 이동한다. 갑과 을이 동시에 출발하여 같은 속력으로 이동할 때, 갑과 을이 만나는 경우의 수는?



① 96 ② 97 ③ 98 ④ 99 ⑤ 100

[23010-0020]

6 문자 A가 하나씩 적힌 카드 3장, 문자 B가 하나씩 적힌 카드 3장, 숫자 1이 하나씩 적힌 카드 3장이 있다. 9장의 카드를 왼쪽부터 오른쪽 방향으로 일렬로 나열할 때, 왼쪽 끝과 오른쪽 끝에 모두 문자가 적힌 카드가 놓이도록 나열하는 경우의 수를 구하시오. (단, 같은 문자나 숫자가 적힌 카드끼리는 서로 구별하지 않는다.)

[23010-0021]

7 두 집합 $X=\{1, 2, 3, 4, 5\}$, $Y=\{6, 7, 8, 9\}$에 대하여

$$\{f(x) \mid x \in X\}=Y$$

를 만족시키는 X에서 Y로의 함수 f의 개수는?

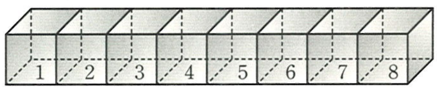
① 240 ② 245 ③ 250 ④ 255 ⑤ 260

정답과 풀이 9쪽

[23010-0022]

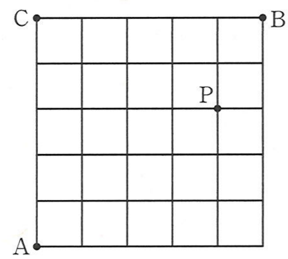
1 숫자 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8이 하나씩 적힌 카드가 각 숫자별로 4장 이상씩 있고, 숫자 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8이 하나씩 적힌 상자 8개가 있다. 각 상자에 숫자가 적힌 한 장의 카드를 넣을 때, 8 이하의 자연수 n에 대하여 숫자 n이 적힌 상자에 넣은 카드에 적힌 숫자를 a_n이라 하자. a_n이 다음 조건을 만족시키도록 카드를 상자에 넣는 경우의 수가 3×2^p일 때, 자연수 p의 값을 구하시오. (단, 같은 숫자가 적힌 카드끼리는 서로 구별하지 않는다.)

(가) n이 홀수이면 a_n은 홀수이다.
(나) n이 짝수이면 a_n은 짝수이고, $a_2+2\le a_8$이다.



[23010-0023]

2 그림과 같은 바둑판 모양의 도로망에서 A지점을 출발하여 최단 거리로 B지점을 향해 이동한다. 이동 중 P지점에 도착하면 C지점을 향해 최단 거리로 이동한다. A지점을 출발하여 B지점에 도착하는 경우의 수를 m, A지점을 출발하여 P지점을 지나 C지점에 도착하는 경우의 수를 n이라 할 때, $|m-n|$의 값을 구하시오.



[23010-0024]

3 8개의 정수 $a_1, a_2, a_3, \cdots, a_8$에 대하여 다음 조건을 만족시키는 모든 순서쌍 $(a_1, a_2, a_3, \cdots, a_8)$의 개수는?

(가) $a_i(a_i-1)(a_i-2)=0$ $(i=1, 2, 3, \cdots, 8)$
(나) $a_1+a_2+a_3+\cdots+a_8=8$

① 1079 ② 1086 ③ 1093 ④ 1100 ⑤ 1107

대표 기출 문제

EBS

출제 경향 원순열의 수, 중복순열의 수, 같은 것이 있는 순열의 수를 이용하여 여러 가지 조건을 만족시키는 경우의 수를 구하는 문제가 출제된다.

2022학년도 대수능

두 집합 $X=\{1, 2, 3, 4, 5\}$, $Y=\{1, 2, 3, 4\}$에 대하여 다음 조건을 만족시키는 X에서 Y로의 함수 f의 개수는? [4점]

(가) 집합 X의 모든 원소 x에 대하여 $f(x) \geq \sqrt{x}$이다.
(나) 함수 f의 치역의 원소의 개수는 3이다.

① 128 ② 138 ③ 148 ④ 158 ⑤ 168

출제 의도 조건을 만족시키는 함수 f의 개수를 중복순열을 이용하여 구할 수 있는지를 묻는 문제이다.

풀이 조건 (가)에서 $f(1) \geq 1$, $f(2) \geq 2$, $f(3) \geq 2$, $f(4) \geq 2$, $f(5) \geq 3$

또 조건 (나)에 의하여 함수 f의 치역으로 가능한 경우는 $\{1, 2, 3\}$, $\{1, 2, 4\}$, $\{1, 3, 4\}$, $\{2, 3, 4\}$

(i) 함수 f의 치역이 $\{1, 2, 3\}$인 경우: $f(1)=1$, $f(5)=3$이므로 함수 f의 개수는

$\{2, 3, 4\}$에서 $\{2, 3\}$으로의 함수 중에서 치역이 $\{3\}$인 함수를 제외하면 되므로

$${}_2\Pi_3-1=2^3-1=7$$

(ii) 함수 f의 치역이 $\{1, 2, 4\}$인 경우: $f(1)=1$, $f(5)=4$이므로 함수 f의 개수는

$\{2, 3, 4\}$에서 $\{2, 4\}$로의 함수 중에서 치역이 $\{4\}$인 함수를 제외하면 되므로

$${}_2\Pi_3-1=2^3-1=7$$

(iii) 함수 f의 치역이 $\{1, 3, 4\}$인 경우: $f(1)=1$이므로 함수 f의 개수는

$\{2, 3, 4, 5\}$에서 $\{3, 4\}$로의 함수 중에서 치역이 $\{3\}$, $\{4\}$인 함수를 제외하면 되므로

$${}_2\Pi_4-2=2^4-2=14$$

(iv) 함수 f의 치역이 $\{2, 3, 4\}$인 경우:

① $f(5)=3$인 경우 함수 f의 개수는

$\{1, 2, 3, 4\}$에서 $\{2, 3, 4\}$로의 함수 중에서 치역이 $\{2\}$, $\{3\}$, $\{4\}$, $\{2, 3\}$, $\{3, 4\}$인 함수를 제외하면 되므로

$${}_3\Pi_4-\{3+({}_2\Pi_4-2)\times 2\}=3^4-\{3+(2^4-2)\times 2\}=50$$

② $f(5)=4$인 경우 함수 f의 개수는

$\{1, 2, 3, 4\}$에서 $\{2, 3, 4\}$로의 함수 중에서 치역이 $\{2\}$, $\{3\}$, $\{4\}$, $\{2, 4\}$, $\{3, 4\}$인 함수를 제외하면 되므로

$${}_3\Pi_4-\{3+({}_2\Pi_4-2)\times 2\}=3^4-\{3+(2^4-2)\times 2\}=50$$

(i)~(iv)에서 구하는 함수 f의 개수는 $7+7+14+50\times 2=128$

답 ①

02 중복조합과 이항정리

1. 중복조합

(1) 중복조합의 뜻

서로 다른 n개에서 중복을 허락하여 r개를 택하는 조합을 중복조합이라 하고, 이 중복조합의 수를 기호로

$${}_{n}\mathrm{H}_{r}$$

와 같이 나타낸다.

참고 ${}_{n}\mathrm{H}_{r}$에서 H는 Homogeneous의 첫 글자이다.

(2) 중복조합의 수

서로 다른 n개에서 r개를 택하는 중복조합의 수는

$${}_{n}\mathrm{H}_{r}={}_{n+r-1}\mathrm{C}_{r}$$

설명 세 개의 문자 a, b, c에서 중복을 허락하여 2개를 택하는 조합은

aa, ab, ac, bb, bc, cc

의 6가지이므로 ${}_{3}\mathrm{H}_{2}=6$이다.

이때 위의 6가지 경우를 문자가 들어갈 두 개의 자리 ○와 서로 다른 문자 사이를 구분할 두 개의 막대 ▮를 이용하여 오른쪽 그림과 같이 나타낼 수 있다.

즉, ○○▮▮를 일렬로 나열한 후 왼쪽에 놓인 ▮의 왼쪽에 ○가 있으면 그 자리에 문자 a를, ▮와 ▮ 사이에 ○가 있으면 그 자리에 문자 b를, 오른쪽에 놓인 ▮의 오른쪽에 ○가 있으면 그 자리에 문자 c를 넣으면 된다.

○○▮▮ ➡ aa
○▮○▮ ➡ ab
○▮▮○ ➡ ac
▮○○▮ ➡ bb
▮○▮○ ➡ bc
▮▮○○ ➡ cc

따라서 서로 다른 3개에서 2개를 택하는 중복조합의 수 ${}_{3}\mathrm{H}_{2}$는 2개의 ○와 2개의 ▮를 일렬로 나열하는 경우의 수와 같으므로 같은 것이 있는 순열의 수에 의하여

$${}_{3}\mathrm{H}_{2}=\frac{4!}{2!\times2!}=\frac{4!}{2!\times(4-2)!}={}_{4}\mathrm{C}_{2}$$

이다.

일반적으로 서로 다른 n개에서 중복을 허락하여 r개를 택하는 중복조합의 수는 r개의 자리 ○와 n개를 구분하는 $(n-1)$개의 막대 ▮를 일렬로 나열하는 경우의 수와 같으므로

$${}_{n}\mathrm{H}_{r}=\frac{\{r+(n-1)\}!}{r!\times(n-1)!}={}_{r+(n-1)}\mathrm{C}_{r}={}_{n+r-1}\mathrm{C}_{r}$$

이다.

참고 서로 다른 n개에서 중복을 허락하여 r개를 택하는 중복조합의 수는 r개의 자리 ○와 $(n-1)$개의 막대 ▮를 놓을 $r+(n-1)=n+r-1$(개)의 자리 중에서 ○를 놓을 r개의 자리를 택하는 조합의 수와 같으므로

$${}_{n}\mathrm{H}_{r}={}_{n+r-1}\mathrm{C}_{r}$$

이다.

예 숫자 1, 2, 3에서 중복을 허락하여 5개를 택하는 경우의 수는 서로 다른 3개에서 5개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

$${}_{3}\mathrm{H}_{5}={}_{3+5-1}\mathrm{C}_{5}={}_{7}\mathrm{C}_{5}={}_{7}\mathrm{C}_{2}=\frac{7\times6}{2\times1}=21$$

이다.

예제 1 중복조합의 수

흰 공 1개가 들어 있는 상자 A와 흰 공 2개가 들어 있는 상자 B가 있다. 빨간 공, 파란 공, 노란 공을 두 상자 A, B에 넣을 때, 다음 조건을 만족시키도록 공을 넣는 경우의 수를 구하시오.

(단, 같은 색의 공끼리는 서로 구별하지 않고, 빨간 공, 파란 공, 노란 공은 각각 11개 이상씩 있다.)

(가) 두 상자 A, B에는 각각 4가지 색의 공이 모두 들어간다.
(나) 상자 A에 들어 있는 공의 개수는 8이고, 상자 B에 들어 있는 공의 개수는 10이다.

길잡이 서로 다른 n개에서 r개를 택하는 중복조합의 수는

$_{n}\mathrm{H}_{r}={}_{n+r-1}\mathrm{C}_{r}$

풀이 조건 (가)에서 두 상자 A, B에 4가지 색의 공이 모두 들어가야 하므로
빨간 공 1개, 파란 공 1개, 노란 공 1개를 각각 두 상자 A, B에 먼저 넣는다.

(i) 상자 A에 빨간 공, 파란 공, 노란 공 중에서 4개를 택하여 넣어야 하므로
공을 넣는 경우의 수는 3가지 공 중에서 중복을 허락하여 4개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

$_{3}\mathrm{H}_{4}={}_{3+4-1}\mathrm{C}_{4}={}_{6}\mathrm{C}_{4}={}_{6}\mathrm{C}_{2}=15$

(ii) 상자 B에 빨간 공, 파란 공, 노란 공 중에서 5개를 택하여 넣어야 하므로
공을 넣는 경우의 수는 3가지 공 중에서 중복을 허락하여 5개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

$_{3}\mathrm{H}_{5}={}_{3+5-1}\mathrm{C}_{5}={}_{7}\mathrm{C}_{5}={}_{7}\mathrm{C}_{2}=21$

(i), (ii)에서 구하는 경우의 수는

$15\times21=315$

답 315

유제

정답과 풀이 10쪽

1 [23010-0025]

빨간 공 4개와 흰 공 10개를 모두 일렬로 나열할 때, 두 개의 빨간 공 사이에는 항상 흰 공이 2개 이상 놓이도록 나열하는 경우의 수는? (단, 같은 색의 공끼리는 서로 구별하지 않는다.)

① 70 ② 76 ③ 82 ④ 88 ⑤ 94

2 [23010-0026]

$1\le a\le b\le c\le 4$를 만족시키는 세 자연수 a, b, c의 모든 순서쌍 (a, b, c)의 개수는 n이다. n개의 순서쌍 (a, b, c)에 대하여 $a+b+c$의 값을 각각 s_1, s_2, s_3, $\cdots$, s_n이라 할 때, $\sum_{k=1}^{n} s_k$의 값을 구하시오.

02 중복조합과 이항정리

2. 중복조합의 활용

(1) 방정식을 만족시키는 음이 아닌 정수해의 개수

방정식 $x_1+x_2+x_3+\cdots+x_n=r$ (n은 자연수, r는 음이 아닌 정수)를 만족시키는 음이 아닌 정수 x_1, x_2, x_3, $\cdots$, x_n의 모든 순서쌍 $(x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n)$의 개수는

$${}_n\mathrm{H}_r$$

이다.

설명 방정식 $x+y+z+w=10$을 만족시키는 음이 아닌 정수 x, y, z, w의 모든 순서쌍 (x, y, z, w)의 개수를 구해 보자.

예를 들어 방정식 $x+y+z+w=10$의 해 중 하나인 $x=1$, $y=2$, $z=3$, $w=4$는 서로 다른 4개의 문자 x, y, z, w 중에서 x를 1개, y를 2개, z를 3개, w를 4개 택한 것으로 생각할 수 있다.

같은 방법으로 생각하면 방정식 $x+y+z+w=10$의 모든 해의 순서쌍 (x, y, z, w)의 개수는 4개의 문자 x, y, z, w 중에서 10개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로 구하는 모든 순서쌍 (x, y, z, w)의 개수는

$${}_4\mathrm{H}_{10}={}_{4+10-1}\mathrm{C}_{10}={}_{13}\mathrm{C}_{10}={}_{13}\mathrm{C}_3=\frac{13\times12\times11}{3\times2\times1}=286$$

일반적으로 방정식 $x_1+x_2+x_3+\cdots+x_n=r$ (n은 자연수, r는 음이 아닌 정수)를 만족시키는 음이 아닌 정수 x_1, x_2, x_3, $\cdots$, x_n의 모든 순서쌍 $(x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n)$의 개수는 서로 다른 n개의 문자 x_1, x_2, x_3, $\cdots$, x_n 중에서 r개를 택하는 중복조합의 수 ${}_n\mathrm{H}_r$와 같다.

참고 방정식 $x_1+x_2+x_3+\cdots+x_n=r$ (n은 자연수, r는 n 이상의 자연수)를 만족시키는 자연수 x_1, x_2, x_3, $\cdots$, x_n의 모든 순서쌍 $(x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n)$의 개수는 다음과 같이 구한다.

$$x_1=x_1'+1,\ x_2=x_2'+1,\ x_3=x_3'+1,\ \cdots,\ x_n=x_n'+1$$

로 놓으면 x_1', x_2', x_3', $\cdots$, x_n'은 음이 아닌 정수이고, 방정식 $x_1+x_2+x_3+\cdots+x_n=r$를 만족시키는 자연수 x_1, x_2, x_3, $\cdots$, x_n의 모든 순서쌍 $(x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n)$의 개수는

방정식 $x_1'+x_2'+x_3'+\cdots+x_n'=r-n$을 만족시키는 음이 아닌 정수 x_1', x_2', x_3', $\cdots$, x_n'의 모든 순서쌍 $(x_1', x_2', x_3', \cdots, x_n')$의 개수와 같으므로

$${}_n\mathrm{H}_{r-n}$$

이다.

(2) 조건을 만족시키는 함수의 개수

공집합이 아닌 두 집합 X, Y의 원소의 개수가 각각 m, n일 때, 집합 X에서 집합 Y로의 함수 중에서

'집합 X의 임의의 두 원소 x_1, x_2에 대하여 $x_1<x_2$이면 $f(x_1)\le f(x_2)$이다.'

를 만족시키는 함수 f의 개수는

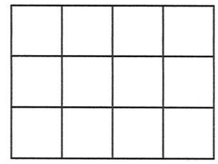
$${}_n\mathrm{H}_m$$

이다.

설명 위의 조건을 만족시키는 함수는 집합 Y의 원소 n개에서 중복을 허락하여 m개를 택하여 집합 X의 원소에 크기순으로 대응시키면 되므로 구하는 함수의 개수는 서로 다른 n개에서 m개를 택하는 중복조합의 수 ${}_n\mathrm{H}_m$과 같다.

예제 2 중복조합의 활용

그림과 같이 넓이가 12인 직사각형을 넓이가 1인 12개의 정사각형으로 나눈 도형이 있다. 넓이가 1인 12개의 정사각형 각각에 빨간색, 노란색, 파란색, 보라색 중 한 가지 색을 택하여 칠한다. 빨간색, 노란색, 파란색, 보라색이 칠해진 부분의 넓이를 각각 S_1, S_2, S_3, S_4 ($S_i \neq 0$, $i=1, 2, 3, 4$)라 할 때, 모든 순서쌍 (S_1, S_2, S_3, S_4)의 개수는?



① 145 ② 150 ③ 155 ④ 160 ⑤ 165

길잡이 방정식 $x_1+x_2+x_3+\cdots+x_n=r$ (n은 자연수, r는 음이 아닌 정수)를 만족시키는 음이 아닌 정수 $x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n$의 모든 순서쌍 $(x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n)$의 개수는 ${}_n\mathrm{H}_r$이다.

풀이 넓이가 1인 12개의 정사각형 중 빨간색, 노란색, 파란색, 보라색이 칠해진 정사각형의 개수를 각각 x, y, z, w라 하면 구하는 모든 순서쌍 (S_1, S_2, S_3, S_4)의 개수는 자연수 x, y, z, w의 모든 순서쌍 (x, y, z, w)의 개수와 같다.

방정식 $x+y+z+w=12$에서 음이 아닌 네 정수 x', y', z', w'에 대하여

$x=x'+1$, $y=y'+1$, $z=z'+1$, $w=w'+1$로 놓으면

$$(x'+1)+(y'+1)+(z'+1)+(w'+1)=12$$

$$x'+y'+z'+w'=8$$

따라서 구하는 순서쌍의 개수는 방정식 $x'+y'+z'+w'=8$을 만족시키는 음이 아닌 정수 x', y', z', w'의 모든 순서쌍 (x', y', z', w')의 개수와 같으므로

$${}_4\mathrm{H}_8={}_{4+8-1}\mathrm{C}_8={}_{11}\mathrm{C}_8={}_{11}\mathrm{C}_3=165$$

답 ⑤

유제

정답과 풀이 10쪽

3 [23010-0027]

$a \ge 2$, $b \ge 3$, $c \ge 4$인 세 자연수 a, b, c에 대하여 방정식 $a+b+c=15$를 만족시키는 모든 순서쌍 (a, b, c)의 개수는?

① 26 ② 28 ③ 30 ④ 32 ⑤ 34

4 [23010-0028]

두 집합 $X=\{1, 2, 3, 4, 5\}$, $Y=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$에 대하여 다음 조건을 만족시키는 X에서 Y로의 함수 f의 개수는?

(가) 집합 X의 임의의 두 원소 x_1, x_2에 대하여 $x_1 < x_2$이면 $f(x_1) \le f(x_2)$이다.
(나) 집합 $\{f(x) \mid x \in X\}$의 원소의 최솟값은 2이다.

① 62 ② 64 ③ 66 ④ 68 ⑤ 70

02 중복조합과 이항정리

3. 이항정리

(1) 이항정리

자연수 n에 대하여 다항식 $(a+b)^n$을 전개하면

$$(a+b)^n={}_nC_0a^n+{}_nC_1a^{n-1}b+{}_nC_2a^{n-2}b^2+\cdots+{}_nC_ra^{n-r}b^r+\cdots+{}_nC_nb^n$$

이다. 이와 같이 다항식 $(a+b)^n$을 전개하는 것을 이항정리라고 한다.

설명 다항식 $(a+b)^3$을 전개하면

$$(a+b)^3=(a+b)(a+b)(a+b)=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$$

이때 a^2b항은 세 개의 인수 $(a+b)$ 중 어느 한 인수에서 b를 택하고, 나머지 두 인수에서 각각 a를 택하여 곱한 단항식 baa, aba, aab의 합이다. 즉, a^2b의 계수는 세 개의 인수 $(a+b)$ 중 한 개에서 b를 택하는 조합의 수와 같으므로 ${}_3C_1=3$이다.

$$\begin{array}{ccccc} (a+b) & (a+b) & (a+b) & & \\ \Downarrow & \Downarrow & \Downarrow & & \\ b & a & a & \Rightarrow & a^2b \\ a & b & a & \Rightarrow & a^2b \\ a & a & b & \Rightarrow & a^2b \end{array}$$

마찬가지 방법으로 a^3, ab^2, b^3의 계수는 각각 ${}_3C_0$, ${}_3C_2$, ${}_3C_3$임을 알 수 있다.

따라서 $(a+b)^3$의 전개식을 조합의 수를 이용하여 나타내면

$$(a+b)^3={}_3C_0a^3+{}_3C_1a^2b+{}_3C_2ab^2+{}_3C_3b^3$$

이다.

일반적으로 자연수 n에 대하여 다항식

$$(a+b)^n=\underbrace{(a+b)(a+b)\times\cdots\times(a+b)}_{n\text{개}}$$

의 전개식에서 $a^{n-r}b^r$항은 n개의 인수 $(a+b)$ 중 r개의 인수에서 b를 택하고, 나머지 $(n-r)$개의 인수에서 a를 택하여 곱한 것이므로 $a^{n-r}b^r$의 계수는 n개의 인수 $(a+b)$ 중 r개의 인수에서 b를 택하는 조합의 수와 같다.

즉, 다항식 $(a+b)^n$의 전개식에서 $a^{n-r}b^r$의 계수는 ${}_nC_r$와 같다.

따라서 다항식 $(a+b)^n$의 전개식은

$$(a+b)^n={}_nC_0a^n+{}_nC_1a^{n-1}b+{}_nC_2a^{n-2}b^2+\cdots+{}_nC_ra^{n-r}b^r+\cdots+{}_nC_nb^n$$

참고 ${}_nC_r={}_nC_{n-r}$이므로 다항식 $(a+b)^n$의 전개식에서 $a^{n-r}b^r$의 계수와 a^rb^{n-r}의 계수는 같다.

(2) 이항계수

다항식 $(a+b)^n$의 전개식에서 각 항의 계수

$${}_nC_0,\ {}_nC_1,\ {}_nC_2,\ \cdots,\ {}_nC_r,\ \cdots,\ {}_nC_n$$

을 이항계수라 하고, ${}_nC_ra^{n-r}b^r$ $(r=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ n)$을 일반항이라고 한다.

예 다항식 $(x+2y)^5$의 전개식의 일반항을 이용하여 x^3y^2의 계수를 구해 보자.

다항식 $(x+2y)^5$의 전개식의 일반항은

$${}_5C_rx^{5-r}(2y)^r={}_5C_r2^rx^{5-r}y^r\ (r=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5)$$

이므로 x^3y^2항은 $r=2$일 때이다.

따라서 x^3y^2의 계수는

$${}_5C_2\times2^2=10\times4=40$$

예제 3 이항정리

다항식 $(2x-1)^3(x-1)^5$의 전개식에서 x^2의 계수는?

① 46 ② 48 ③ 50 ④ 52 ⑤ 54

길잡이 자연수 n에 대하여 다항식 $(a+b)^n$을 전개하면

$$(a+b)^n={}_nC_0a^n+{}_nC_1a^{n-1}b+{}_nC_2a^{n-2}b^2+\cdots+{}_nC_ra^{n-r}b^r+\cdots+{}_nC_nb^n$$

풀이 $(2x-1)^3$의 전개식의 일반항은

$${}_3C_r(2x)^r(-1)^{3-r}={}_3C_r2^r(-1)^{3-r}x^r \text{ (단, } r=0,\ 1,\ 2,\ 3)$$

또 $(x-1)^5$의 전개식의 일반항은

$${}_5C_sx^s(-1)^{5-s}={}_5C_s(-1)^{5-s}x^s \text{ (단, } s=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5)$$

(i) $(2x-1)^3$의 전개식에서 상수항과 $(x-1)^5$의 전개식에서 x^2의 계수를 곱하는 경우

$r=0$, $s=2$인 경우이므로 x^2의 계수는

$${}_3C_0 2^0(-1)^3\times{}_5C_2(-1)^3=(-1)\times(-10)=10$$

(ii) $(2x-1)^3$의 전개식에서 x의 계수와 $(x-1)^5$의 전개식에서 x의 계수를 곱하는 경우

$r=1$, $s=1$인 경우이므로 x^2의 계수는

$${}_3C_1 2^1(-1)^2\times{}_5C_1(-1)^4=6\times5=30$$

(iii) $(2x-1)^3$의 전개식에서 x^2의 계수와 $(x-1)^5$의 전개식에서 상수항을 곱하는 경우

$r=2$, $s=0$인 경우이므로 x^2의 계수는

$${}_3C_2 2^2(-1)^1\times{}_5C_0(-1)^5=(-12)\times(-1)=12$$

(i), (ii), (iii)에서 구하는 x^2의 계수는

$10+30+12=52$

답 ④

유제

정답과 풀이 11쪽

5 [23010-0029]

$\left(3x^2-\dfrac{a}{x}\right)^5$의 전개식에서 $\dfrac{1}{x^2}$의 계수가 $\dfrac{1}{15}$일 때, 양수 a의 값은?

① $\dfrac{\sqrt{15}}{15}$ ② $\dfrac{2\sqrt{15}}{15}$ ③ $\dfrac{\sqrt{15}}{5}$ ④ $\dfrac{4\sqrt{15}}{15}$ ⑤ $\dfrac{\sqrt{15}}{3}$

6 [23010-0030]

다항식 $(3a+2b)^6$의 전개식에서 a^4b^2의 계수를 m, a^2b^4의 계수를 n이라 할 때, $\dfrac{m}{n}$의 값은?

① $\dfrac{3}{4}$ ② $\dfrac{3}{2}$ ③ $\dfrac{9}{4}$ ④ 3 ⑤ $\dfrac{15}{4}$

02 중복조합과 이항정리

4. 이항계수의 성질

모든 자연수 n에 대하여 다음이 성립한다.

(1) ${}_nC_0+{}_nC_1+{}_nC_2+{}_nC_3+\cdots+{}_nC_n=2^n$

(2) ${}_nC_0-{}_nC_1+{}_nC_2-{}_nC_3+\cdots+(-1)^n{}_nC_n=0$

(3) n이 홀수일 때, ${}_nC_0+{}_nC_2+{}_nC_4+\cdots+{}_nC_{n-1}={}_nC_1+{}_nC_3+{}_nC_5+\cdots+{}_nC_n=2^{n-1}$

n이 짝수일 때, ${}_nC_0+{}_nC_2+{}_nC_4+\cdots+{}_nC_n={}_nC_1+{}_nC_3+{}_nC_5+\cdots+{}_nC_{n-1}=2^{n-1}$

설명 이항정리를 이용하여 다항식 $(1+x)^n$을 전개하면

$$(1+x)^n={}_nC_0+{}_nC_1x+{}_nC_2x^2+{}_nC_3x^3+\cdots+{}_nC_nx^n \quad \cdots\cdots ㉠$$

(1) ㉠의 양변에 $x=1$을 대입하면

$$2^n={}_nC_0+{}_nC_1+{}_nC_2+{}_nC_3+\cdots+{}_nC_n \quad \cdots\cdots ㉡$$

(2) ㉠의 양변에 $x=-1$을 대입하면

$$0={}_nC_0-{}_nC_1+{}_nC_2-{}_nC_3+\cdots+(-1)^n{}_nC_n \quad \cdots\cdots ㉢$$

(3) n이 홀수일 때, $\frac{1}{2}$(㉡+㉢)을 하면

$$2^{n-1}={}_nC_0+{}_nC_2+{}_nC_4+\cdots+{}_nC_{n-1}$$

n이 홀수일 때, $\frac{1}{2}$(㉡−㉢)을 하면

$$2^{n-1}={}_nC_1+{}_nC_3+{}_nC_5+\cdots+{}_nC_n$$

마찬가지 방법으로 n이 짝수일 때

$${}_nC_0+{}_nC_2+{}_nC_4+\cdots+{}_nC_n={}_nC_1+{}_nC_3+{}_nC_5+\cdots+{}_nC_{n-1}=2^{n-1}$$

예 ① ${}_{10}C_0+{}_{10}C_1+{}_{10}C_2+{}_{10}C_3+\cdots+{}_{10}C_{10}=2^{10}$

② ${}_{10}C_0+{}_{10}C_2+{}_{10}C_4+{}_{10}C_6+{}_{10}C_8+{}_{10}C_{10}=2^9$

③ ${}_{10}C_1+{}_{10}C_3+{}_{10}C_5+{}_{10}C_7+{}_{10}C_9=2^9$

참고 음이 아닌 정수 n에 대하여 $(a+b)^n$의 전개식에서 이항계수를 차례로 삼각형 모양으로 나열한 것을 파스칼의 삼각형이라고 한다.

$(a+b)^0$: 1 → 1

$(a+b)^1$: ${}_1C_0 \quad {}_1C_1$ → $1 \quad 1$

$(a+b)^2$: ${}_2C_0 \quad {}_2C_1 \quad {}_2C_2$ → $1 \quad 2 \quad 1$

$(a+b)^3$: ${}_3C_0 \quad {}_3C_1 \quad {}_3C_2 \quad {}_3C_3$ → $1 \quad 3 \quad 3 \quad 1$

$(a+b)^4$: ${}_4C_0 \quad {}_4C_1 \quad {}_4C_2 \quad {}_4C_3 \quad {}_4C_4$ → $1 \quad 4 \quad 6 \quad 4 \quad 1$

$(a+b)^5$: ${}_5C_0 \quad {}_5C_1 \quad {}_5C_2 \quad {}_5C_3 \quad {}_5C_4 \quad {}_5C_5$ → $1 \quad 5 \quad 10 \quad 10 \quad 5 \quad 1$

$\vdots$

파스칼의 삼각형에서 다음이 성립함을 알 수 있다.

① ${}_nC_r={}_nC_{n-r}$ $(0\le r\le n)$이므로 각 단계의 이항계수의 배열은 좌우 대칭이다.

② ${}_{n-1}C_{r-1}+{}_{n-1}C_r={}_nC_r$ $(1\le r\le n-1)$이므로 각 단계에서 이웃하는 두 수의 합은 그 두 수의 가운데의 아래쪽에 있는 다음 단계의 수와 같다.

예제 4 이항계수의 성질

자연수 n에 대하여

$$f(n)={}_{4n}\mathrm{C}_0+{}_{4n}\mathrm{C}_2+{}_{4n}\mathrm{C}_4+\cdots+{}_{4n}\mathrm{C}_{4n}$$

이라 하자. $f(m+1)-f(m)=15\times 2^{23}$을 만족시키는 자연수 m의 값은?

① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

길잡이 n이 홀수일 때, ${}_n\mathrm{C}_0+{}_n\mathrm{C}_2+{}_n\mathrm{C}_4+\cdots+{}_n\mathrm{C}_{n-1}={}_n\mathrm{C}_1+{}_n\mathrm{C}_3+{}_n\mathrm{C}_5+\cdots+{}_n\mathrm{C}_n=2^{n-1}$

n이 짝수일 때, ${}_n\mathrm{C}_0+{}_n\mathrm{C}_2+{}_n\mathrm{C}_4+\cdots+{}_n\mathrm{C}_n={}_n\mathrm{C}_1+{}_n\mathrm{C}_3+{}_n\mathrm{C}_5+\cdots+{}_n\mathrm{C}_{n-1}=2^{n-1}$

풀이

$$\begin{aligned}f(n)&={}_{4n}\mathrm{C}_0+{}_{4n}\mathrm{C}_2+{}_{4n}\mathrm{C}_4+\cdots+{}_{4n}\mathrm{C}_{4n}\\&=2^{4n-1}\\&=\frac{1}{2}\times 2^{4n}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}f(m+1)-f(m)&=\frac{1}{2}\times 2^{4(m+1)}-\frac{1}{2}\times 2^{4m}\\&=\frac{1}{2}\times 2^{4m}\times(2^4-1)\\&=\frac{15}{2}\times 2^{4m}\\&=15\times 2^{4m-1}\end{aligned}$$

따라서 $15\times 2^{4m-1}=15\times 2^{23}$에서

$4m-1=23$

즉, $m=6$

답 ①

유제

정답과 풀이 11쪽

7 [23010-0031]

부등식 $110\le {}_n\mathrm{C}_1+{}_n\mathrm{C}_2+{}_n\mathrm{C}_3+\cdots+{}_n\mathrm{C}_{n-1}\le 510$을 만족시키는 모든 자연수 n의 개수는?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

8 [23010-0032]

자연수 n에 대하여 수열 $\{a_n\}$의 일반항이

$$a_n={}_n\mathrm{C}_0+{}_n\mathrm{C}_1\times\frac{1}{2}+{}_n\mathrm{C}_2\times\left(\frac{1}{2}\right)^2+{}_n\mathrm{C}_3\times\left(\frac{1}{2}\right)^3+\cdots+{}_n\mathrm{C}_n\times\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

일 때, $\sum_{k=1}^{10}a_k+3=\frac{3^q}{2^p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 자연수이다.)

Level 1 기초 연습

[23010-0033]

1 ${}_3\mathrm{H}_2+{}_4\mathrm{H}_3+{}_5\mathrm{H}_4$의 값은?

① 92 ② 96 ③ 100 ④ 104 ⑤ 108

[23010-0034]

2 두 집합 $X=\{1, 2, 3\}$, $Y=\{4, 5, 6, 7, 8\}$에 대하여

$f(1)\le f(2)\le f(3)$

을 만족시키는 X에서 Y로의 함수 f의 개수는?

① 26 ② 29 ③ 32 ④ 35 ⑤ 38

[23010-0035]

3 다항식 $(a+b+c+d)^6$의 전개식에서 서로 다른 항의 개수는?

① 68 ② 72 ③ 76 ④ 80 ⑤ 84

[23010-0036]

4 같은 종류의 공 10개를 네 상자 A, B, C, D에 남김없이 나누어 넣을 때, 각 상자에 2개 이상씩 공을 넣는 경우의 수는?

① 8 ② 9 ③ 10 ④ 11 ⑤ 12

[23010-0037]

5 다항식 $(2x+k)^4$의 전개식에서 x^2의 계수가 96일 때, 양수 k의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

[23010-0038]

6 다항식 $(x-1)^2(2x+y)^6$의 전개식에서 x^6y^2의 계수는?

① 120 ② 160 ③ 200 ④ 240 ⑤ 280

[23010-0039]

7 자연수 n에 대하여

$$f(n)={}_{n+1}\mathrm{C}_0+{}_{n+1}\mathrm{C}_1+{}_{n+1}\mathrm{C}_2+\cdots+{}_{n+1}\mathrm{C}_{n+1},$$
$$g(n)={}_{2n+1}\mathrm{C}_1+{}_{2n+1}\mathrm{C}_3+{}_{2n+1}\mathrm{C}_5+\cdots+{}_{2n+1}\mathrm{C}_{2n+1}$$

이라 할 때, $\dfrac{g(m)}{f(m)}=64$를 만족시키는 자연수 m의 값을 구하시오.

[23010-0040]

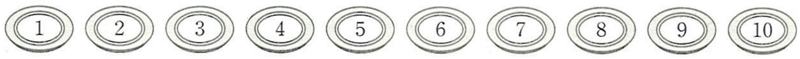
8 ${}_k\mathrm{C}_0+{}_k\mathrm{C}_1+{}_k\mathrm{C}_2+\cdots+{}_k\mathrm{C}_k=16$을 만족시키는 자연수 k에 대하여 ${}_k\mathrm{C}_0+{}_{k+1}\mathrm{C}_1+{}_{k+2}\mathrm{C}_2+{}_{k+3}\mathrm{C}_3+{}_{k+4}\mathrm{C}_4$의 값은?

① 102 ② 108 ③ 114 ④ 120 ⑤ 126

Level 2 기본 연습

[23010-0041]

1 1부터 10까지의 자연수가 하나씩 적힌 접시 10개가 그림과 같이 번호 순서대로 놓여 있다. 빨간색 카드 3장과 파란색 카드 7장을 각 접시 위에 한 장씩 놓을 때, 빨간색 카드가 놓여 있는 접시에 적힌 수가 왼쪽부터 각각 홀수, 짝수, 홀수인 경우의 수는? (단, 같은 색의 카드끼리는 서로 구별하지 않는다.)



① 16 ② 18 ③ 20 ④ 22 ⑤ 24

[23010-0042]

2 6 이하의 네 자연수 a, b, c, d가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $a+b+c+d=10$
(나) a, b, c, d 중 적어도 하나는 홀수이다.

a, b, c, d의 모든 순서쌍 (a, b, c, d)의 개수는?

① 76 ② 78 ③ 80 ④ 82 ⑤ 84

[23010-0043]

3 집합 $X=\{1, 2, 3, 4, 5\}$에 대하여 다음 조건을 만족시키는 X에서 X로의 함수 f의 개수는?

(가) 집합 X의 임의의 두 원소 x_1, x_2에 대하여 $x_1<x_2$이면 $f(x_1)\le f(x_2)$이다.
(나) $f(1)\ge 3$
(다) $f(1)+f(2)+f(3)\ge 10$

① 11 ② 12 ③ 13 ④ 14 ⑤ 15

[23010-0044]

4 $\left(x+\frac{1}{x^3}\right)+\left(x+\frac{1}{x^3}\right)^2+\left(x+\frac{1}{x^3}\right)^3+\cdots+\left(x+\frac{1}{x^3}\right)^{10}$의 전개식에서 상수항을 구하시오.

[23010-0045]

5 ${}_{30}\mathrm{C}_0+{}_{30}\mathrm{C}_2\times3^2+{}_{30}\mathrm{C}_4\times3^4+{}_{30}\mathrm{C}_6\times3^6+\cdots+{}_{30}\mathrm{C}_{30}\times3^{30}=2^m\times(2^{30}+1)$일 때, 자연수 m의 값은?

① 28 ② 29 ③ 30 ④ 31 ⑤ 32

[23010-0046]

6 두 집합 $A=\{x \mid x$는 12 이하의 자연수$\}$, $B=\{3, 4, 5\}$에 대하여 다음 조건을 만족시키는 모든 집합 X의 개수를 구하시오.

(가) $X\subset A$, $X\cap B=\varnothing$
(나) $n(X)\geq 2$

[23010-0047]

7 자연수 n에 대하여

$$f(n)={}_{2n+1}\mathrm{C}_{n+1}+{}_{2n+1}\mathrm{C}_{n+2}+{}_{2n+1}\mathrm{C}_{n+3}+\cdots+{}_{2n+1}\mathrm{C}_{2n+1}$$

이라 할 때, $\log_4\{f(1)\times f(2)\times f(3)\times\cdots\times f(15)\}$의 값을 구하시오.

[23010-0048]

1 집합 $X=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$에 대하여 다음 조건을 만족시키는 X에서 X로의 함수 f의 개수를 구하시오.

(가) 집합 X의 임의의 두 원소 x_1, x_2에 대하여 $x_1<x_2$이면 $f(x_1)\le f(x_2)$이다.
(나) $4\le f(5)-f(3)\le 5$

[23010-0049]

2 자연수 n에 대하여 $\left(2x^3+\dfrac{1}{x^2}\right)^n$의 전개식에서 x^5의 계수와 x^{10}의 계수가 같을 때, $\left(2x^3+\dfrac{1}{x^2}\right)^n$의 전개식에서 상수항을 구하시오. (단, x^5의 계수는 0이 아니다.)

[23010-0050]

3 집합 $U=\{x\,|\,x$는 30 이하의 자연수$\}$의 부분집합 X에 대하여 다음 조건을 만족시키는 모든 집합 X의 개수는?

(가) 집합 X의 원소 중 짝수의 개수는 8 이상이다.
(나) 집합 X의 원소 중 홀수의 개수는 7 이하이다.

① 2^{26}　② 2^{27}　③ 2^{28}　④ 2^{29}　⑤ 2^{30}

대표 기출 문제

EBS

출제 경향 중복조합의 수를 이용하여 조건을 만족시키는 경우의 수를 구하는 문제, 방정식을 만족시키는 해의 순서쌍의 개수를 구하는 문제가 출제된다.

2022학년도 대수능 9월 모의평가

네 명의 학생 A, B, C, D에게 같은 종류의 사인펜 14개를 다음 규칙에 따라 남김없이 나누어 주는 경우의 수를 구하시오. [4점]

(가) 각 학생은 1개 이상의 사인펜을 받는다.
(나) 각 학생이 받는 사인펜의 개수는 9 이하이다.
(다) 적어도 한 학생은 짝수 개의 사인펜을 받는다.

출제 의도 중복조합을 이용하여 주어진 조건을 만족시키는 경우의 수를 구할 수 있는지를 묻는 문제이다.

풀이 사인펜의 개수가 14이므로 조건 (가)와 조건 (다)에서 네 명의 학생 A, B, C, D 중 2명은 짝수 개의 사인펜을 받고 나머지 2명은 홀수 개의 사인펜을 받거나 4명의 학생 모두 짝수 개의 사인펜을 받는다.

(i) 2명은 짝수 개의 사인펜을 받고 나머지 2명은 홀수 개의 사인펜을 받는 경우

4명의 학생 중 짝수 개의 사인펜을 받는 2명의 학생을 택하는 경우의 수는 ${}_4\mathrm{C}_2$

이때 2명의 학생 A, B는 짝수 개의 사인펜을 받고 2명의 학생 C, D는 홀수 개의 사인펜을 받는다고 하면 음이 아닌 정수 a, b, c, d에 대하여 4명의 학생 A, B, C, D가 받는 사인펜의 개수는 각각 $2a+2$, $2b+2$, $2c+1$, $2d+1$로 놓을 수 있다.

$(2a+2)+(2b+2)+(2c+1)+(2d+1)=14$, 즉 $a+b+c+d=4$

방정식 $a+b+c+d=4$를 만족시키는 음이 아닌 정수 a, b, c, d의 모든 순서쌍 (a, b, c, d)의 개수는

${}_4\mathrm{H}_4$

그런데 조건 (나)에서 $a\neq4$, $b\neq4$이므로 주어진 조건을 만족시키는 경우의 수는

${}_4\mathrm{C}_2\times({}_4\mathrm{H}_4-2)={}_4\mathrm{C}_2\times({}_7\mathrm{C}_4-2)=198$

(ii) 4명의 학생 모두 짝수 개의 사인펜을 받는 경우

음이 아닌 정수 a, b, c, d에 대하여 4명의 학생 A, B, C, D가 받는 사인펜의 개수는 각각 $2a+2$, $2b+2$, $2c+2$, $2d+2$로 놓을 수 있다.

$(2a+2)+(2b+2)+(2c+2)+(2d+2)=14$, 즉 $a+b+c+d=3$

방정식 $a+b+c+d=3$을 만족시키는 음이 아닌 정수 a, b, c, d의 모든 순서쌍 (a, b, c, d)의 개수는

${}_4\mathrm{H}_3={}_6\mathrm{C}_3=20$

(i), (ii)에서 구하는 경우의 수는

$198+20=218$

답 218

03 확률의 뜻과 활용

1. 시행과 사건

(1) 시행

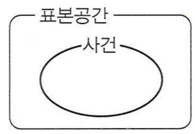
주사위나 동전 던지기와 같이 같은 조건에서 반복할 수 있고, 그 결과가 우연에 의하여 정해지는 실험이나 관찰을 시행이라고 한다.

(2) 사건

① 표본공간: 어떤 시행에서 일어날 수 있는 모든 결과의 집합을 표본공간이라고 한다.

② 사건: 표본공간의 부분집합을 사건이라고 한다.

③ 근원사건: 한 개의 원소로 이루어진 사건을 근원사건이라고 한다.

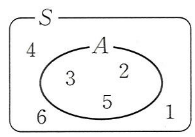


예 한 개의 주사위를 한 번 던져서 나오는 눈의 수를 확인하는 시행에서

① 표본공간을 S라 하면 $S=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\}$

② 소수의 눈이 나오는 사건을 A라 하면 $A=\{2,\ 3,\ 5\}$

③ 근원사건은 $\{1\}$, $\{2\}$, $\{3\}$, $\{4\}$, $\{5\}$, $\{6\}$



참고 표본공간은 공집합이 아닌 경우만 생각한다.

2. 배반사건과 여사건

표본공간 S의 두 사건 A, B에 대하여

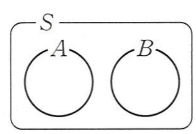
(1) 사건 A 또는 사건 B가 일어나는 사건을 $A\cup B$와 같이 나타낸다.

(2) 두 사건 A와 B가 동시에 일어나는 사건을 $A\cap B$와 같이 나타낸다.

(3) 배반사건: 두 사건 A와 B가 동시에 일어나지 않을 때, 즉

$$A\cap B=\varnothing$$

일 때, 두 사건 A와 B는 서로 배반사건이라고 한다.

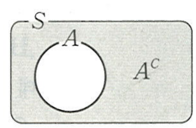


(4) 여사건: 사건 A에 대하여 사건 A가 일어나지 않는 사건을 A의 여사건이라 하고, 기호로

$$A^C$$

과 같이 나타낸다.

이때 $A\cap A^C=\varnothing$이므로 사건 A와 그 여사건 A^C은 서로 배반사건이다.



예 한 개의 주사위를 한 번 던지는 시행에서 6의 약수의 눈이 나오는 사건을 A, 홀수의 눈이 나오는 사건을 B, 4의 배수의 눈이 나오는 사건을 C라 하면

$A=\{1,\ 2,\ 3,\ 6\}$, $B=\{1,\ 3,\ 5\}$, $C=\{4\}$

① 사건 A 또는 사건 B가 일어나는 사건은 $A\cup B=\{1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 6\}$

② 두 사건 A와 B가 동시에 일어나는 사건은 $A\cap B=\{1,\ 3\}$

③ $A\cap C=\varnothing$이므로 두 사건 A와 C는 서로 배반사건이다.

④ 사건 A의 여사건은 $A^C=\{4,\ 5\}$이다.

예제 1 배반사건과 여사건

한 개의 주사위를 두 번 던지는 시행에서 나오는 눈의 수를 차례로 a, b라 하자. $a+b$가 짝수인 사건을 A라 할 때, 이 시행에서 나오는 사건 B가 사건 A와 서로 배반사건이다. $n(B)$의 최댓값을 구하시오.

길잡이
(1) 표본공간 S의 사건 A와 그 여사건 A^C에 대하여 $A\cup A^C=S$임을 이용한다.
(2) 두 사건 A와 B가 서로 배반사건이면 $A\cap B=\varnothing$임을 이용한다.

풀이
한 개의 주사위를 두 번 던지는 시행에서 나오는 눈의 수가 차례로 a, b이므로 표본공간을 S라 하면

$S=\{(a,\ b)\,|\,a,\ b$는 6 이하의 자연수$\}$

사건 B가 사건 A와 서로 배반사건이므로

$B\cap A=\varnothing$에서 사건 B는 사건 A의 여사건 A^C의 부분집합이다.

A^C은 $a+b$가 홀수인 사건이므로

$A^C=\{(a,\ b)\,|\,a$는 짝수, b는 홀수$\}\cup\{(a,\ b)\,|\,a$는 홀수, b는 짝수$\}$

이때

$n(\{(a,\ b)\,|\,a$는 짝수, b는 홀수$\})=n(\{(a,\ b)\,|\,a$는 홀수, b는 짝수$\})$
$=3\times3=9$

이고 $n(B)\le n(A^C)=9\times2$

따라서 $n(B)$의 최댓값은 18이다.

답 18

유제

정답과 풀이 18쪽

1 [23010-0051]

$2\le n\le9$인 자연수 n에 대하여 표본공간 $S=\{x\,|\,x$는 9 이하의 자연수$\}$의 두 사건 A_n, B가

$A_n=\{x\,|\,x$는 n의 배수$\}$, $B=\{x\,|\,x$는 소수$\}$

일 때, 두 사건 A_n과 B^C이 서로 배반사건이 되도록 하는 모든 n의 값의 합을 구하시오.

(단, B^C은 B의 여사건이다.)

2 [23010-0052]

서로 다른 두 개의 동전을 동시에 던지는 시행에서 같은 면이 나오는 사건을 A, 앞면이 한 번 이상 나오는 사건을 B라 하자. 이 시행에서 나오는 사건 C가 두 사건 $A\cap B$, B^C과 모두 배반사건이 되도록 하는 사건 C의 개수는? (단, B^C은 B의 여사건이고 $C\neq\varnothing$이다.)

① 1 ② 3 ③ 5 ④ 7 ⑤ 9

03 확률의 뜻과 활용

3. 확률의 뜻

(1) 확률

어떤 시행에서 사건 A가 일어날 가능성을 수로 나타낸 것을 사건 A의 확률이라 하고, 기호로

$$\mathrm{P}(A)$$

와 같이 나타낸다.

(2) 수학적 확률

표본공간이 S인 어떤 시행에서 각각의 근원사건이 일어날 가능성이 모두 같은 정도로 기대될 때, 표본공간 S의 사건 A가 일어날 확률 $\mathrm{P}(A)$를

$$\mathrm{P}(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{(\text{사건 }A\text{의 원소의 개수})}{(\text{표본공간 }S\text{의 원소의 개수})}$$

로 정의하고, 이것을 사건 A가 일어날 수학적 확률이라고 한다.

예 서로 다른 2개의 주사위를 동시에 한 번 던질 때, 나오는 두 눈의 수의 합이 6이 될 확률과 곱이 12가 될 확률을 각각 구해 보자.

서로 다른 2개의 주사위를 동시에 한 번 던지는 시행에서 표본공간을 S라 하면

$S=\{(1, 1), (1, 2), \cdots, (6, 5), (6, 6)\}$이므로 $n(S)=6\times6=36$

이때 나오는 두 눈의 수의 합이 6인 사건을 A라 하면

$A=\{(1, 5), (2, 4), (3, 3), (4, 2), (5, 1)\}$이므로 $n(A)=5$

따라서 $\mathrm{P}(A)=\dfrac{n(A)}{n(S)}=\dfrac{5}{36}$

한편, 나오는 두 눈의 수의 곱이 12인 사건을 B라 하면

$B=\{(2, 6), (3, 4), (4, 3), (6, 2)\}$이므로 $n(B)=4$

따라서 $\mathrm{P}(B)=\dfrac{n(B)}{n(S)}=\dfrac{4}{36}=\dfrac{1}{9}$

참고 수학적 확률은 표본공간이 공집합이 아닌 유한집합인 경우에만 생각한다.

(3) 통계적 확률

같은 시행을 n번 반복할 때, 사건 A가 일어난 횟수를 r_n이라 하자. 이때 시행 횟수 n이 한없이 커짐에 따라 상대도수 $\dfrac{r_n}{n}$이 일정한 값 p에 가까워질 때, 이 값 p를 사건 A가 일어날 통계적 확률이라고 한다. 그러나 실제로 n의 값을 한없이 크게 할 수 없으므로 n이 충분히 클 때의 상대도수 $\dfrac{r_n}{n}$을 통계적 확률로 생각한다.

참고 일반적으로 사건 A가 일어날 수학적 확률이 p일 때, 시행 횟수 n을 충분히 크게 하면 사건 A가 일어나는 상대도수 $\dfrac{r_n}{n}$은 수학적 확률 p에 가까워진다.

예제 2 수학적 확률

남학생 3명과 여학생 3명을 임의로 2명씩 3개 조를 만들 때, 여학생 2명으로 이루어진 조가 있을 확률은?

① $\frac{2}{5}$ ② $\frac{7}{15}$ ③ $\frac{8}{15}$ ④ $\frac{3}{5}$ ⑤ $\frac{2}{3}$

길잡이 표본공간 S의 사건 A가 일어날 수학적 확률 $\mathrm{P}(A)$는

$$\mathrm{P}(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{(\text{사건 } A\text{의 원소의 개수})}{(\text{표본공간 } S\text{의 원소의 개수})}$$

임을 이용한다.

풀이 남학생 3명과 여학생 3명을 2명씩 3개 조를 만드는 경우의 수는

$${}_6\mathrm{C}_2\times{}_4\mathrm{C}_2\times{}_2\mathrm{C}_2\times\frac{1}{3!}=15$$

여학생 2명으로 이루어진 조가 있는 경우는 여학생 2명으로 이루어진 조, 남학생 2명으로 이루어진 조가 각각 1개씩 있어야 하므로

$${}_3\mathrm{C}_2\times{}_3\mathrm{C}_2=9$$

따라서 구하는 확률은

$$\frac{9}{15}=\frac{3}{5}$$

답 ④

유제

정답과 풀이 18쪽

3 [23010-0053]

참가자 7명 중에서 음치 3명을 찾는 프로그램에서 음치 3명을 포함한 7명에게 1번부터 7번까지 임의로 하나씩 번호를 부여할 때, 음치끼리는 서로 번호가 연속하지 않도록 번호를 부여할 확률은?

(단, 참가자 7명 중 음치는 3명뿐이다.)

① $\frac{3}{14}$ ② $\frac{2}{7}$ ③ $\frac{5}{14}$ ④ $\frac{3}{7}$ ⑤ $\frac{1}{2}$

4 [23010-0054]

한 개의 주사위를 두 번 던져서 나오는 눈의 수를 차례로 a, b라 할 때, 원 $(x-a)^2+(y-b)^2=1$과 직선 $3x-4y+3=0$이 서로 접하게 될 확률은?

① $\frac{1}{12}$ ② $\frac{1}{6}$ ③ $\frac{1}{4}$ ④ $\frac{1}{3}$ ⑤ $\frac{5}{12}$

03 확률의 뜻과 활용

4. 확률의 기본 성질

표본공간 S가 유한개의 근원사건으로 이루어져 있는 어떤 시행에서

(1) 임의의 사건 A에 대하여 $0 \le \mathrm{P}(A) \le 1$

(2) 반드시 일어나는 사건 S에 대하여 $\mathrm{P}(S)=1$

(3) 절대로 일어나지 않는 사건 $\varnothing$에 대하여 $\mathrm{P}(\varnothing)=0$

참고 어떤 시행에서 표본공간 S의 임의의 사건 A에 대하여

$\varnothing \subset A \subset S$이므로 $0 \le n(A) \le n(S)$

이 부등식의 각 변을 $n(S)$로 나누면

$0 \le \dfrac{n(A)}{n(S)} \le 1$, 즉 $0 \le \mathrm{P}(A) \le 1$

특히 반드시 일어나는 사건 S에 대하여 $\mathrm{P}(S)=\dfrac{n(S)}{n(S)}=1$이고,

절대로 일어나지 않는 사건 $\varnothing$에 대하여 $n(\varnothing)=0$이므로 $\mathrm{P}(\varnothing)=\dfrac{n(\varnothing)}{n(S)}=\dfrac{0}{n(S)}=0$이다.

예 흰 공 3개와 검은 공 2개가 들어 있는 주머니에서 임의로 3개의 공을 동시에 꺼낼 때, 흰 공이 1개 이상 나올 확률은 1이고, 검은 공이 3개 나올 확률은 0이다.

5. 확률의 덧셈정리

표본공간 S의 두 사건 A, B에 대하여 사건 A 또는 사건 B가 일어날 확률은

$$\mathrm{P}(A \cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A \cap B)$$

특히 두 사건 A와 B가 서로 배반사건이면

$$\mathrm{P}(A \cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)$$

설명 표본공간 S의 두 사건 A, B에 대하여

$$n(A \cup B)=n(A)+n(B)-n(A \cap B)$$

이 식의 양변을 $n(S)$로 나누면

$$\frac{n(A \cup B)}{n(S)}=\frac{n(A)}{n(S)}+\frac{n(B)}{n(S)}-\frac{n(A \cap B)}{n(S)}$$

$$\mathrm{P}(A \cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A \cap B)$$

특히 두 사건 A와 B가 서로 배반사건, 즉 $A \cap B=\varnothing$이면 $\mathrm{P}(A \cap B)=0$이므로

$$\mathrm{P}(A \cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)$$

예 1부터 10까지의 자연수가 하나씩 적힌 10장의 카드 중에서 임의로 한 장의 카드를 선택할 때, 선택한 카드에 적힌 수가 2의 배수이거나 3의 배수일 확률을 구해 보자.

임의로 카드 한 장을 선택할 때, 선택한 카드에 적힌 수가 2의 배수인 사건을 A, 3의 배수인 사건을 B라 하면 사건 $A \cap B$는 6의 배수인 사건이므로

$$\mathrm{P}(A)=\frac{1}{2},\ \mathrm{P}(B)=\frac{3}{10},\ \mathrm{P}(A \cap B)=\frac{1}{10}$$

따라서 구하는 확률은 확률의 덧셈정리에 의하여

$$\mathrm{P}(A \cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A \cap B)=\frac{1}{2}+\frac{3}{10}-\frac{1}{10}=\frac{7}{10}$$

예제 3 확률의 덧셈정리

1부터 9까지의 자연수가 하나씩 적혀 있는 9장의 카드가 들어 있는 주머니에서 차례로 한 장씩 임의로 3장의 카드를 꺼낸다. 한 장씩 꺼낸 3장의 카드에 적힌 수를 차례로 a, b, c라 할 때, $b=3a$이거나 $c=2b$일 확률은?

(단, 꺼낸 카드는 다시 넣지 않는다.)

① $\frac{1}{14}$ ② $\frac{2}{21}$ ③ $\frac{5}{42}$ ④ $\frac{1}{7}$ ⑤ $\frac{1}{6}$

길잡이 두 사건 A, B에 대하여 사건 A 또는 사건 B가 일어날 확률은 확률의 덧셈정리

$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)$

를 이용하여 구한다. 특히 두 사건 A와 B가 서로 배반사건이면 $\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)$를 이용하여 구한다.

풀이 9장의 카드가 들어 있는 주머니에서 차례로 한 장씩 서로 다른 3장의 카드를 꺼내는 경우의 수는

${}_9\mathrm{P}_3=9\times8\times7=504$

(i) $b=3a$인 사건을 A라 하면

$b=3a$를 만족시키는 순서쌍 (a, b)는 $(1, 3)$, $(2, 6)$, $(3, 9)$이고, 이 각각에 대하여 c를 정하는 경우의 수는 7이므로 $b=3a$를 만족시키는 순서쌍 (a, b, c)의 개수는 $3\times7=21$

따라서 $\mathrm{P}(A)=\frac{21}{504}=\frac{1}{24}$

(ii) $c=2b$인 사건을 B라 하면

$c=2b$를 만족시키는 순서쌍 (b, c)는 $(1, 2)$, $(2, 4)$, $(3, 6)$, $(4, 8)$이고, 이 각각에 대하여 a를 정하는 경우의 수는 7이므로 $c=2b$를 만족시키는 순서쌍 (a, b, c)의 개수는 $4\times7=28$

따라서 $\mathrm{P}(B)=\frac{28}{504}=\frac{1}{18}$

(iii) $6a=2b=c$를 만족시키는 순서쌍 (a, b, c)는 $(1, 3, 6)$으로 그 개수는 1이므로

$\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{1}{504}$

(i), (ii), (iii)에서 구하는 확률은 확률의 덧셈정리에 의하여

$$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{1}{24}+\frac{1}{18}-\frac{1}{504}=\frac{2}{21}$$

답 ②

유제

정답과 풀이 19쪽

5 [23010-0055]

집합 $X=\{1, 2, 3, 4\}$에 대하여 X에서 X로의 모든 함수 f 중에서 임의로 하나를 선택할 때, 이 함수가 $f(1)=f(2)$ 또는 $f(3)=f(4)$를 만족시킬 확률은 p이다. $16p$의 값을 구하시오.

6 [23010-0056]

1부터 10까지의 자연수가 하나씩 적혀 있는 10개의 공이 들어 있는 상자가 있다. 이 상자에서 임의로 2개의 공을 동시에 꺼낼 때, 꺼낸 공에 적혀 있는 두 수 중에서 작은 수를 a, 큰 수를 b라 하자. 함수 $f(x)=x^2-9x+18$에 대하여 $f(a)f(b)>0$이 성립할 확률은 $\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오.

(단, p와 q는 서로소인 자연수이다.)

03 확률의 뜻과 활용

6. 여사건의 확률

(1) 사건 A와 그 여사건 A^C에 대하여

$$\mathrm{P}(A^C)=1-\mathrm{P}(A)$$

(2) 두 사건 A, B와 그 각각의 여사건 A^C, B^C에 대하여

① $\mathrm{P}(A^C\cap B^C)=1-\mathrm{P}(A\cup B)$

② $\mathrm{P}(A^C\cup B^C)=1-\mathrm{P}(A\cap B)$

설명 표본공간 S의 두 사건 A, B에 대하여

(1) 사건 A와 그 여사건 A^C은 서로 배반사건이므로 확률의 덧셈정리에 의하여

$$\mathrm{P}(A\cup A^C)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(A^C)$$

이때 $\mathrm{P}(A\cup A^C)=\mathrm{P}(S)=1$이므로

$\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(A^C)=1$, 즉 $\mathrm{P}(A^C)=1-\mathrm{P}(A)$가 성립한다.

(2) 드모르간의 법칙에 의하여

$$A^C\cap B^C=(A\cup B)^C,\ A^C\cup B^C=(A\cap B)^C$$

이므로 여사건의 확률에 의하여

$$\mathrm{P}(A^C\cap B^C)=\mathrm{P}((A\cup B)^C)=1-\mathrm{P}(A\cup B)$$

$$\mathrm{P}(A^C\cup B^C)=\mathrm{P}((A\cap B)^C)=1-\mathrm{P}(A\cap B)$$

예 (1) 흰 공 3개와 검은 공 3개가 들어 있는 상자에서 임의로 3개의 공을 동시에 꺼낼 때, 검은 공이 1개 이상 포함될 확률을 구해 보자.

임의로 3개의 공을 동시에 꺼낼 때 검은 공이 1개 이상 포함되는 사건을 A라 하면 그 여사건 A^C은 꺼낸 3개의 공이 모두 흰 공인 사건이므로

$$\mathrm{P}(A^C)=\frac{{}_3\mathrm{C}_3}{{}_6\mathrm{C}_3}=\frac{1}{20}$$

따라서 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(A)=1-\mathrm{P}(A^C)$$
$$=1-\frac{1}{20}=\frac{19}{20}$$

(2) 1부터 10까지의 자연수가 하나씩 적힌 10개의 공이 들어 있는 상자에서 임의로 한 개의 공을 꺼낼 때, 꺼낸 공에 적힌 수가 2의 배수가 아니거나 5의 배수가 아닐 확률을 구해 보자.

꺼낸 공에 적힌 수가 2의 배수인 사건을 A, 꺼낸 공에 적힌 수가 5의 배수인 사건을 B라 하면 사건 $A\cap B$는 꺼낸 공에 적힌 수가 10의 배수인 사건이고 $\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{1}{10}$. 이때 꺼낸 공에 적힌 수가 2의 배수가 아니거나 5의 배수가 아닌 사건은 $A^C\cup B^C$이므로

$$\mathrm{P}(A^C\cup B^C)=1-\mathrm{P}(A\cap B)$$
$$=1-\frac{1}{10}=\frac{9}{10}$$

예제 4 여사건의 확률

1부터 7까지의 자연수가 하나씩 적혀 있는 7장의 카드를 일정한 간격을 두고 원형으로 임의로 배열할 때, 적어도 2장의 짝수가 적힌 카드가 서로 이웃하도록 배열될 확률은? (단, 회전하여 일치하는 것은 같은 것으로 본다.)

① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{3}{5}$ ③ $\frac{7}{10}$ ④ $\frac{4}{5}$ ⑤ $\frac{9}{10}$

길잡이 사건 A의 여사건 A^C의 확률을 알 때, 사건 A의 확률은

$$\mathrm{P}(A)=1-\mathrm{P}(A^C)$$

임을 이용하여 구한다.

풀이 7장의 카드를 원형으로 배열하는 경우의 수는

$$(7-1)!=6!=720$$

적어도 2장의 짝수가 적힌 카드를 서로 이웃하도록 배열하는 사건을 A라 하면 그 여사건 A^C은 짝수가 적힌 모든 카드를 서로 이웃하지 않게 배열하는 사건이다.

홀수 1, 3, 5, 7이 적힌 4장의 카드를 원형으로 배열하는 경우의 수는

$$(4-1)!=3!=6$$

홀수가 적힌 4장의 카드 사이사이에 짝수 2, 4, 6이 적힌 3장의 카드를 배열하는 경우의 수는

$${}_4\mathrm{P}_3=4\times3\times2=24$$

따라서 짝수가 적힌 모든 카드를 서로 이웃하지 않게 배열하는 경우의 수는

$$6\times24=144$$

이므로

$$\mathrm{P}(A^C)=\frac{144}{720}=\frac{1}{5}$$

그러므로 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(A)=1-\mathrm{P}(A^C)=1-\frac{1}{5}=\frac{4}{5}$$

답 ④

유제

정답과 풀이 20쪽

7 [23010-0057]

노란 공 2개, 흰 공 3개, 검은 공 4개가 들어 있는 주머니에서 임의로 3개의 공을 동시에 꺼낼 때, 꺼낸 3개의 공 중에서 어떤 두 공이 같은 색일 확률은?

① $\frac{2}{3}$ ② $\frac{5}{7}$ ③ $\frac{16}{21}$ ④ $\frac{17}{21}$ ⑤ $\frac{6}{7}$

8 [23010-0058]

흰 공을 포함하여 모두 12개의 공이 들어 있는 주머니에서 임의로 2개의 공을 동시에 꺼낼 때, 흰 공을 1개 이상 꺼낼 확률이 $\frac{15}{22}$이다. 이 주머니에 들어 있는 흰 공의 개수를 구하시오.

Level 1 기초 연습

[23010-0059]

1 표본공간 $S=\{1, 2, 3, 4, 5\}$의 두 사건 A, B가 다음 조건을 만족시킬 때, 모든 순서쌍 (A, B)의 개수를 구하시오. (단, $A\neq\varnothing$이고 $B\neq\varnothing$이다.)

> (가) $A\cup B=S$
> (나) 두 사건 A, B가 서로 배반사건이다.

[23010-0060]

2 주머니 A에는 숫자 1, 2, 3, 4가 하나씩 적혀 있는 4개의 공이 들어 있고, 주머니 B에는 숫자 1, 3, 5가 하나씩 적혀 있는 3개의 공이 들어 있다. 두 주머니 A, B에서 각각 임의로 공을 두 개씩 동시에 꺼낼 때, 주머니 A에서 꺼낸 두 개의 공에 적힌 수의 합과 주머니 B에서 꺼낸 두 개의 공에 적힌 수의 곱이 같을 확률은?

① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ $\frac{1}{4}$ ④ $\frac{1}{5}$ ⑤ $\frac{1}{6}$

[23010-0061]

3 다섯 개의 숫자 1, 2, 2, 3, 3을 일렬로 나열하여 만든 다섯 자리 자연수 중에서 임의로 하나를 선택할 때, 이 자연수의 백의 자리의 수가 1일 확률은?

① $\frac{1}{6}$ ② $\frac{1}{5}$ ③ $\frac{1}{4}$ ④ $\frac{1}{3}$ ⑤ $\frac{1}{2}$

[23010-0062]

4 4명의 학생을 각각 1반부터 4반까지 4개의 반 중에서 한 개의 반에 임의로 배정할 때, 학급 1반과 2반에 배정받은 학생 수의 합과 학급 3반과 4반에 배정받은 학생 수의 합이 서로 같도록 배정할 확률은?

(단, 학생이 배정되지 않은 반이 있을 수 있다.)

① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{5}{16}$ ③ $\frac{3}{8}$ ④ $\frac{7}{16}$ ⑤ $\frac{1}{2}$

[23010-0063]

5 두 사건 A, B에 대하여

$$\mathrm{P}(A\cup B)=\frac{5}{6},\ \mathrm{P}(A^C\cap B)=\frac{1}{3}$$

일 때, $\mathrm{P}(A\cap B^C)$의 최댓값은? (단, A^C은 A의 여사건이다.)

① $\frac{1}{6}$　② $\frac{1}{4}$　③ $\frac{1}{3}$　④ $\frac{5}{12}$　⑤ $\frac{1}{2}$

[23010-0064]

6 집합 $X=\{x\,|\,x$는 10 이하의 자연수$\}$의 원소 중에서 임의로 서로 다른 두 개의 원소를 동시에 선택할 때, 이 두 원소의 합이 10 이하의 소수이거나 10의 약수일 확률은?

① $\frac{1}{18}$　② $\frac{1}{9}$　③ $\frac{1}{6}$　④ $\frac{2}{9}$　⑤ $\frac{5}{18}$

[23010-0065]

7 서로 다른 채식 메뉴 2가지를 포함한 서로 다른 7개의 메뉴를 월요일부터 일요일까지 7일간 점심 메뉴로 임의로 하나씩 요일마다 중복되지 않게 선정하려고 할 때, 토요일 또는 일요일 점심 메뉴로 채식 메뉴가 선정될 확률은? (단, 7개의 메뉴에서 채식 메뉴는 2가지뿐이다.)

① $\frac{1}{7}$　② $\frac{5}{21}$　③ $\frac{1}{3}$　④ $\frac{3}{7}$　⑤ $\frac{11}{21}$

[23010-0066]

8 두 자리 자연수 중에서 임의로 한 개를 택할 때, 택한 수가 18과 서로소일 확률은?

① $\frac{2}{9}$　② $\frac{1}{3}$　③ $\frac{4}{9}$　④ $\frac{5}{9}$　⑤ $\frac{2}{3}$

Level 2 기본 연습

[23010-0067]

1 한 개의 주사위를 두 번 던져서 나오는 눈의 수를 차례로 a, b라 하자. a가 b의 약수일 확률은?

① $\frac{5}{18}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ $\frac{7}{18}$ ④ $\frac{4}{9}$ ⑤ $\frac{1}{2}$

[23010-0068]

2 1부터 10까지의 자연수가 하나씩 적혀 있는 10개의 공이 들어 있는 주머니가 있다. 이 주머니에서 임의로 3개의 공을 동시에 꺼낼 때, 꺼낸 공에 적혀 있는 세 수의 합이 짝수이고 세 수의 곱이 5의 배수일 확률은?

① $\frac{1}{15}$ ② $\frac{2}{15}$ ③ $\frac{1}{5}$ ④ $\frac{4}{15}$ ⑤ $\frac{1}{3}$

[23010-0069]

3 주머니 A에는 0, 1, 2, 3, 4의 숫자가 하나씩 적혀 있는 카드가 5장, 주머니 B에는 5, 6, 7의 숫자가 하나씩 적혀 있는 카드가 3장, 주머니 C에는 8, 9의 숫자가 하나씩 적혀 있는 카드가 2장 들어 있다. 주머니 A, B, C에서 각각 임의로 한 장의 카드를 꺼낼 때, 카드에 적혀 있는 숫자를 각각 a, b, c라 하자. a를 일의 자리의 수, b를 십의 자리의 수, c를 백의 자리의 수로 하여 세 자리 자연수를 만들 때, 이 세 자리 자연수가 6의 배수가 아닌 3의 배수가 될 확률은?

① $\frac{1}{15}$ ② $\frac{1}{10}$ ③ $\frac{2}{15}$ ④ $\frac{1}{6}$ ⑤ $\frac{1}{5}$

[23010-0070]

4 한 개의 주사위를 한 번 던져 나오는 눈의 수를 확인하는 시행의 두 사건 A, B가 다음 조건을 만족시키도록 두 사건 A, B를 선택하는 경우의 수를 구하시오.

(가) $\mathrm{P}(A\cup B)=1$, $\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{1}{6}$

(나) $\mathrm{P}(A)<\mathrm{P}(B)$

[23010-0071]

5 총 6개 팀이 참가한 어느 공연에서 악기를 연주하는 1개 팀, 춤을 추는 2개 팀, 노래하는 3개 팀이 참여하여 각 팀이 한 번씩 차례대로 공연하려고 한다. 이 6개 팀의 공연 순서를 임의로 정할 때, 다음 조건을 만족시키도록 공연 순서가 정해질 확률은?

> (가) 춤을 추는 2개 팀의 공연 순서가 이어진다.
> (나) 노래하는 3개 팀 중에서 2개 팀만 공연 순서가 이어진다.

① $\frac{1}{15}$　② $\frac{1}{10}$　③ $\frac{2}{15}$　④ $\frac{1}{6}$　⑤ $\frac{1}{5}$

[23010-0072]

6 숫자 1, 2, 3, 4, 5가 하나씩 적혀 있는 5장의 카드를 모두 한 번씩 사용하여 임의로 일렬로 나열할 때, 2가 적힌 카드가 1이 적힌 카드와 3이 적힌 카드 사이에 있거나 3이 적힌 카드가 2가 적힌 카드와 4가 적힌 카드 사이에 있도록 나열할 확률은?

① $\frac{1}{3}$　② $\frac{5}{12}$　③ $\frac{1}{2}$　④ $\frac{7}{12}$　⑤ $\frac{2}{3}$

[23010-0073]

7 1부터 10까지의 자연수가 하나씩 적혀 있는 10개의 공이 들어 있는 주머니가 있다. 이 주머니에서 임의로 5개의 공을 동시에 꺼낼 때, 꺼낸 공에 적혀 있는 수 중에서 가장 큰 수와 가장 작은 수의 합이 8 이하이거나 11 이상일 확률은?

① $\frac{5}{18}$　② $\frac{7}{18}$　③ $\frac{1}{2}$　④ $\frac{11}{18}$　⑤ $\frac{13}{18}$

[23010-0074]

8 1부터 6까지의 자연수가 하나씩 적혀 있는 6개의 의자가 있다. 이 6개의 의자를 일정한 간격을 두고 임의로 원형으로 배열할 때, 서로 마주 보는 2개의 의자에 적혀 있는 수의 곱이 6이 되지 않도록 배열할 확률은?

(단, 회전하여 일치하는 것은 같은 것으로 본다.)

① $\frac{8}{15}$　② $\frac{3}{5}$　③ $\frac{2}{3}$　④ $\frac{11}{15}$　⑤ $\frac{4}{5}$

[23010-0075]

1 1부터 9까지의 자연수가 하나씩 적혀 있는 9개의 공이 들어 있는 주머니가 있다. 이 주머니에서 임의로 4개의 공을 동시에 꺼낼 때, 꺼낸 공에 적혀 있는 수를 작은 수부터 크기순으로 나열한 것을 x_1, x_2, x_3, x_4라 하자. $n(\{x_i \mid x_{i+1}-x_i=1,\ i=1,\ 2,\ 3\})=1$일 확률은?

① $\frac{3}{7}$ ② $\frac{10}{21}$ ③ $\frac{11}{21}$ ④ $\frac{4}{7}$ ⑤ $\frac{13}{21}$

[23010-0076]

2 집합 $X=\{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$에 대하여 X에서 X로의 일대일대응인 모든 함수 중에서 임의로 택한 한 함수를 f라 할 때, 함수 $f\circ f$ 또는 함수 $f\circ f\circ f$가 항등함수가 될 확률은?

① $\frac{3}{4}$ ② $\frac{19}{24}$ ③ $\frac{5}{6}$ ④ $\frac{7}{8}$ ⑤ $\frac{11}{12}$

[23010-0077]

3 부등식 $x+y+z\le 8$을 만족시키는 음이 아닌 정수 x, y, z의 모든 순서쌍 $(x,\ y,\ z)$ 중에서 임의로 한 개를 선택할 때, 선택한 순서쌍 $(x,\ y,\ z)$가 $(x-y)(z-1)\neq 0$을 만족시킬 확률은 $\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오.

(단, p와 q는 서로소인 자연수이다.)

대표 기출 문제

EBS

출제 경향 확률의 덧셈정리를 이용하여 확률을 구하는 문제가 출제된다. 또한 어떤 사건이 일어나는 경우가 여러 갈래로 나누어져 있는 문제에서 여사건을 이용하여 확률을 구하는 문제가 출제된다.

2023학년도 대수능 6월 모의평가

숫자 1, 2, 3, 4, 5 중에서 서로 다른 4개를 택해 일렬로 나열하여 만들 수 있는 모든 네 자리의 자연수 중에서 임의로 하나의 수를 택할 때, 택한 수가 5의 배수 또는 3500 이상일 확률은? [4점]

① $\frac{9}{20}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ $\frac{11}{20}$ ④ $\frac{3}{5}$ ⑤ $\frac{13}{20}$

출제 의도 확률의 덧셈정리를 이용하여 확률을 구할 수 있는지를 묻는 문제이다.

풀이 만들 수 있는 모든 네 자리의 자연수의 개수는

$${}_5\mathrm{P}_4=5\times4\times3\times2=120$$

(ⅰ) 택한 수가 5의 배수인 사건을 A라 하면

일의 자리의 수가 5이어야 하므로 5의 배수인 네 자리의 자연수의 개수는

$${}_4\mathrm{P}_3=4\times3\times2=24$$

즉, $\mathrm{P}(A)=\frac{24}{120}=\frac{1}{5}$

(ⅱ) 택한 수가 3500 이상인 사건을 B라 하면

천의 자리의 수가 3인 경우 3500 이상인 네 자리의 자연수의 개수는

$${}_3\mathrm{P}_2=3\times2=6$$

천의 자리의 수가 4 또는 5인 경우 3500 이상인 네 자리의 자연수의 개수는

$$2\times{}_4\mathrm{P}_3=2\times4\times3\times2=48$$

즉, $\mathrm{P}(B)=\frac{6+48}{120}=\frac{9}{20}$

(ⅲ) 5의 배수이면서 3500 이상인 네 자리의 자연수는 천의 자리의 수가 4이고 일의 자리의 수가 5이어야 하므로 그 개수는

$${}_3\mathrm{P}_2=3\times2=6$$

즉, $\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{6}{120}=\frac{1}{20}$

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에서 구하는 확률은 확률의 덧셈정리에 의하여

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(A\cup B)&=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)\\&=\frac{1}{5}+\frac{9}{20}-\frac{1}{20}=\frac{3}{5}\end{aligned}$$

답 ④

04 조건부확률

1. 조건부확률

(1) 조건부확률의 뜻

표본공간 S의 두 사건 A, B에 대하여 확률이 0이 아닌 사건 A가 일어났을 때, 사건 B가 일어날 확률을 사건 A가 일어났을 때의 사건 B의 조건부확률이라 하고, 기호로

$$\mathrm{P}(B|A)$$

와 같이 나타낸다.

(2) 조건부확률의 계산

사건 A가 일어났을 때의 사건 B의 조건부확률은

$$\mathrm{P}(B|A)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}\ (\text{단, } \mathrm{P}(A)>0)$$

설명 표본공간이 S인 어떤 시행에서 각 근원사건이 일어날 가능성이 같은 정도로 기대될 때, 표본공간 S의 두 사건 A, B에 대하여 조건부확률 $\mathrm{P}(B|A)$는 사건 A를 새로운 표본공간으로 하여 사건 B, 즉 사건 $A\cap B$가 일어날 확률이므로

$$\mathrm{P}(B|A)=\frac{n(A\cap B)}{n(A)}$$

이 등식의 우변의 분모와 분자를 각각 $n(S)$로 나누면

$$\mathrm{P}(B|A)=\frac{n(A\cap B)}{n(A)}=\frac{\frac{n(A\cap B)}{n(S)}}{\frac{n(A)}{n(S)}}=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}$$

예 한 개의 주사위를 한 번 던져서 나온 눈의 수가 소수일 때, 그 수가 홀수일 확률을 구해 보자.

한 개의 주사위를 한 번 던지는 시행에서 표본공간을 S, 소수의 눈이 나오는 사건을 A, 홀수의 눈이 나오는 사건을 B라 하면

$S=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $A=\{2, 3, 5\}$, $B=\{1, 3, 5\}$, $A\cap B=\{3, 5\}$이므로

$$\mathrm{P}(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$$

$$\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{n(A\cap B)}{n(S)}=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$$

따라서 사건 A가 일어났을 때의 사건 B의 조건부확률은

$$\mathrm{P}(B|A)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}=\frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{2}}=\frac{2}{3}$$

[다른 풀이] $n(A)=3$, $n(A\cap B)=2$이므로

$$\mathrm{P}(B|A)=\frac{n(A\cap B)}{n(A)}=\frac{2}{3}$$

예제 1 조건부확률

숫자 1, 2, 3, 4, 5가 하나씩 적힌 카드 5장이 들어 있는 주머니가 있다. 갑이 이 주머니에서 임의로 카드를 한 장 꺼내 숫자를 확인하고 다시 넣은 후 을이 같은 주머니에서 임의로 카드를 한 장 꺼낼 때, 더 큰 수가 적힌 카드를 꺼낸 사람이 이긴다. 갑이 꺼낸 카드에 적힌 수가 홀수일 때, 갑이 이길 확률은?

(단, 같은 수가 적힌 카드를 꺼내면 이기는 사람은 없다.)

① $\frac{1}{10}$ ② $\frac{1}{5}$ ③ $\frac{3}{10}$ ④ $\frac{2}{5}$ ⑤ $\frac{1}{2}$

길잡이 사건 A가 일어났을 때의 사건 B의 조건부확률은 $\mathrm{P}(B|A)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}$ $(\mathrm{P}(A)>0)$임을 이용한다.

풀이 갑이 꺼낸 카드에 적힌 수가 홀수인 사건을 A, 갑이 이기는 사건을 B라 하면 구하는 확률은 $\mathrm{P}(B|A)$이다.

갑은 1, 3, 5 중 한 개가 적힌 카드를 꺼내야 하므로 $\mathrm{P}(A)=\frac{3}{5}$

갑과 을이 카드를 꺼내는 경우의 수는 $5\times5=25$이고, 갑이 꺼낸 카드에 적힌 수에 따라 갑이 이길 확률은 다음과 같다.

(i) 갑이 꺼낸 카드에 적힌 수가 1인 경우

을은 1보다 크거나 같은 수가 적힌 카드를 뽑을 수밖에 없으므로 갑은 이길 수 없다.

(ii) 갑이 꺼낸 카드에 적힌 수가 3인 경우

을은 1 또는 2가 적힌 카드를 꺼내야 하므로 확률은 $\frac{1\times2}{25}=\frac{2}{25}$

(iii) 갑이 꺼낸 카드에 적힌 수가 5인 경우

을은 1, 2, 3, 4 중 한 개가 적힌 카드를 꺼내야 하므로 확률은 $\frac{1\times4}{25}=\frac{4}{25}$

(i), (ii), (iii)에서 $\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{2}{25}+\frac{4}{25}=\frac{6}{25}$이므로 $\mathrm{P}(B|A)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}=\frac{\frac{6}{25}}{\frac{3}{5}}=\frac{2}{5}$

답 ④

유제

정답과 풀이 30쪽

1 [23010-0078]

흰 공 6개, 검은 공 4개가 들어 있는 주머니에서 임의로 3개의 공을 동시에 꺼낼 때, 꺼낸 3개의 공 중에서 흰 공과 검은 공의 개수를 각각 a, b라 하자. $a\geq b$일 때, $b=0$일 확률은?

① $\frac{1}{6}$ ② $\frac{1}{5}$ ③ $\frac{1}{4}$ ④ $\frac{1}{3}$ ⑤ $\frac{1}{2}$

2 [23010-0079]

남학생 18명, 여학생 12명으로 이루어진 어느 천체관측 동아리의 모든 학생들은 서로 다른 두 개의 P날짜와 Q날짜 중 한 개의 날짜만 반드시 선택하여 관측 활동을 한다. 이 천체관측 동아리 학생들 중 P날짜를 선택한 여학생은 7명이고, P날짜를 선택한 학생 수와 Q날짜를 선택한 학생 수가 서로 같다. 이 동아리 학생 30명 중에서 임의로 뽑은 한 학생이 남학생일 때, 이 학생이 Q날짜를 선택한 학생일 확률은?

① $\frac{1}{9}$ ② $\frac{2}{9}$ ③ $\frac{1}{3}$ ④ $\frac{4}{9}$ ⑤ $\frac{5}{9}$

04 조건부확률

2. 확률의 곱셈정리

(1) 확률의 곱셈정리

두 사건 A, B에 대하여

$$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B|A)=\mathrm{P}(B)\mathrm{P}(A|B) \text{ (단, } \mathrm{P}(A)>0,\ \mathrm{P}(B)>0\text{)}$$

설명 $\mathrm{P}(A)>0$일 때, 사건 A가 일어났을 때의 사건 B의 조건부확률은

$$\mathrm{P}(B|A)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)} \quad \cdots\cdots \text{㉠}$$

이므로 ㉠의 양변에 $\mathrm{P}(A)$를 곱하면

$$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B|A)$$

마찬가지로 $\mathrm{P}(B)>0$일 때, 사건 B가 일어났을 때의 사건 A의 조건부확률은

$$\mathrm{P}(A|B)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(B)} \quad \cdots\cdots \text{㉡}$$

이므로 ㉡의 양변에 $\mathrm{P}(B)$를 곱하면

$$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(B)\mathrm{P}(A|B)$$

따라서 $\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B|A)=\mathrm{P}(B)\mathrm{P}(A|B)$가 성립한다.

예 흰 공 6개와 검은 공 3개가 들어 있는 주머니에서 임의로 공을 한 개씩 두 번 꺼낸다. 꺼낸 공을 주머니에 다시 넣지 않을 때, 꺼낸 공이 모두 흰 공일 확률을 구해 보자.

첫 번째 꺼낸 공이 흰 공인 사건을 A, 두 번째 꺼낸 공이 흰 공인 사건을 B라 하면

$$\mathrm{P}(A)=\frac{6}{9}=\frac{2}{3},\ \mathrm{P}(B|A)=\frac{5}{8}$$

따라서 구하는 확률은

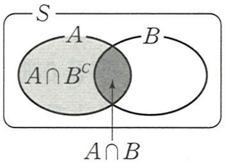
$$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B|A)=\frac{2}{3}\times\frac{5}{8}=\frac{5}{12}$$

(2) 확률의 곱셈정리의 활용

두 사건 A, B에 대하여

$$\mathrm{P}(A)=\mathrm{P}(B)\mathrm{P}(A|B)+\mathrm{P}(B^C)\mathrm{P}(A|B^C) \text{ (단, } 0<\mathrm{P}(B)<1\text{)}$$

설명 두 사건 A, B에 대하여



$$A=(A\cap B)\cup(A\cap B^C)$$

이고, 두 사건 $A\cap B$와 $A\cap B^C$은 서로 배반사건이므로 확률의 덧셈정리에 의하여

$$\mathrm{P}(A)=\mathrm{P}(A\cap B)+\mathrm{P}(A\cap B^C)$$

이때 $0<\mathrm{P}(B)<1$이면 $0<\mathrm{P}(B^C)<1$이므로 확률의 곱셈정리에 의하여

$$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(B)\mathrm{P}(A|B),\ \mathrm{P}(A\cap B^C)=\mathrm{P}(B^C)\mathrm{P}(A|B^C)$$

따라서 $\mathrm{P}(A)=\mathrm{P}(B)\mathrm{P}(A|B)+\mathrm{P}(B^C)\mathrm{P}(A|B^C)$이 성립한다.

예제 2 확률의 곱셈정리

1부터 12까지의 자연수가 하나씩 적혀 있는 12개의 공이 들어 있는 주머니에서 임의로 공을 한 개씩 2번 꺼낼 때, 꺼낸 공에 적혀 있는 수를 차례로 a, b라 하자. a는 3의 배수이고 b는 4의 배수일 확률은?

(단, 꺼낸 공은 다시 넣지 않는다.)

① $\frac{1}{12}$ ② $\frac{1}{8}$ ③ $\frac{1}{6}$ ④ $\frac{5}{24}$ ⑤ $\frac{1}{4}$

길잡이 두 사건 A, B가 동시에 일어날 확률은 $\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(B)\mathrm{P}(A|B)$ $(\mathrm{P}(B)>0)$임을 이용한다.

풀이 a가 12를 제외한 3의 배수인 사건을 A, a가 12인 사건을 B, b가 4의 배수인 사건을 C라 하면 두 사건 $A\cap C$와 $B\cap C$는 서로 배반사건이므로 구하는 확률은 $\mathrm{P}(A\cap C)+\mathrm{P}(B\cap C)$이다.

(i) a가 $a\neq 12$인 3의 배수인 경우

$A=\{3, 6, 9\}$이므로 $\mathrm{P}(A)=\frac{3}{12}=\frac{1}{4}$

사건 A가 일어났을 때 주머니에서 4의 배수가 적힌 공을 꺼낼 확률은 $\mathrm{P}(C|A)=\frac{3}{11}$

따라서 $\mathrm{P}(A\cap C)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(C|A)=\frac{1}{4}\times\frac{3}{11}=\frac{3}{44}$

(ii) $a=12$인 경우

$B=\{12\}$이므로 $\mathrm{P}(B)=\frac{1}{12}$

사건 B가 일어났을 때 주머니에서 4의 배수가 적힌 공을 꺼낼 확률은 $\mathrm{P}(C|B)=\frac{2}{11}$

따라서 $\mathrm{P}(B\cap C)=\mathrm{P}(B)\mathrm{P}(C|B)=\frac{1}{12}\times\frac{2}{11}=\frac{1}{66}$

(i), (ii)에서 구하는 확률은 $\mathrm{P}(A\cap C)+\mathrm{P}(B\cap C)=\frac{3}{44}+\frac{1}{66}=\frac{1}{12}$

답 ①

유제

정답과 풀이 30쪽

3 [23010-0080]

상자에 흰 공 3개, 검은 공 4개가 들어 있다. 숫자 2, 2, 3, 3, 3이 하나씩 적혀 있는 5장의 카드가 들어 있는 주머니에서 임의로 1장의 카드를 선택하여 카드에 적혀 있는 수만큼의 공을 상자에서 임의로 동시에 꺼낼 때, 모두 같은 색의 공을 꺼낼 확률은?

① $\frac{6}{35}$ ② $\frac{1}{5}$ ③ $\frac{8}{35}$ ④ $\frac{9}{35}$ ⑤ $\frac{2}{7}$

4 [23010-0081]

주머니 P에는 흰 공 3개와 검은 공 2개가 들어 있고, 주머니 Q에는 흰 공 2개와 검은 공 3개가 들어 있다. 한 개의 주사위를 한 번 던져서 나오는 눈의 수가 1이면 주머니 P에서 임의로 한 개의 공을 꺼내고, 나오는 눈의 수가 1이 아니면 주머니 Q에서 임의로 한 개의 공을 꺼낸다. 이 시행에서 꺼낸 공이 흰 공일 때, 이 공이 주머니 P에서 꺼낸 공일 확률은?

① $\frac{1}{13}$ ② $\frac{2}{13}$ ③ $\frac{3}{13}$ ④ $\frac{4}{13}$ ⑤ $\frac{5}{13}$

04 조건부확률

3. 사건의 독립과 종속

(1) 사건의 독립

두 사건 A, B에 대하여 $\mathrm{P}(A)>0$, $\mathrm{P}(B)>0$이고, 어느 한 사건이 일어나는 것이 다른 사건이 일어날 확률에 영향을 주지 않을 때, 즉

$$\mathrm{P}(B|A)=\mathrm{P}(B) \text{ 또는 } \mathrm{P}(A|B)=\mathrm{P}(A)$$

일 때, 두 사건 A와 B는 서로 독립이라고 한다.

(2) 사건의 종속

두 사건 A와 B가 서로 독립이 아닐 때, 두 사건 A와 B는 서로 종속이라고 한다.

(3) 두 사건이 서로 독립일 조건

두 사건 A와 B가 서로 독립이기 위한 필요충분조건은

$$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B) \text{ (단, } \mathrm{P}(A)>0,\ \mathrm{P}(B)>0)$$

설명 두 사건 A와 B가 서로 독립이면 $\mathrm{P}(B|A)=\mathrm{P}(B)$이므로 확률의 곱셈정리에 의하여

$$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B|A)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$$

가 성립한다.

역으로 $\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$이면

$$\mathrm{P}(B|A)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}=\frac{\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)}{\mathrm{P}(A)}=\mathrm{P}(B)$$

이므로 두 사건 A와 B는 서로 독립이다.

참고 $0<\mathrm{P}(A)<1$, $0<\mathrm{P}(B)<1$인 두 사건 A와 B가 서로 독립이면

$$\mathrm{P}(A\cap B^C)=\mathrm{P}(A)-\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)-\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)=\mathrm{P}(A)\{1-\mathrm{P}(B)\}=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B^C)$$

이므로 두 사건 A와 B^C은 서로 독립이다.

마찬가지로 두 사건 A^C과 B는 서로 독립이고, 두 사건 A^C과 B^C도 서로 독립이다.

예 한 개의 주사위를 한 번 던질 때, 3의 배수의 눈이 나오는 사건을 A, 짝수의 눈이 나오는 사건을 B, 5 이상의 눈이 나오는 사건을 C라 할 때, 두 사건 A와 B, 두 사건 A와 C가 서로 독립인지 종속인지를 각각 알아보자.

$A=\{3, 6\}$, $B=\{2, 4, 6\}$, $C=\{5, 6\}$이므로

$$\mathrm{P}(A)=\frac{2}{6}=\frac{1}{3},\ \mathrm{P}(B)=\frac{3}{6}=\frac{1}{2},\ \mathrm{P}(C)=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$$

① $\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{6}$이고, $A\cap B=\{6\}$에서 $\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{1}{6}$

따라서 $\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$이므로 두 사건 A와 B는 서로 독립이다.

② $\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(C)=\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{9}$이고, $A\cap C=\{6\}$에서 $\mathrm{P}(A\cap C)=\frac{1}{6}$

따라서 $\mathrm{P}(A\cap C)\neq\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(C)$이므로 두 사건 A와 C는 서로 종속이다.

예제 3 사건의 독립과 종속

각 면에 1부터 12까지의 자연수가 하나씩 적혀 있는 정십이면체를 한 번 던져서 바닥에 닿는 면에 적혀 있는 수를 택하는 시행에서 3의 배수가 나오는 사건을 A라 하자. 이 시행에서 나오는 사건 B가 사건 A와 서로 독립이고 $n(A^C \cap B)=4$를 만족시키는 사건 B의 개수를 구하시오. (단, A^C은 A의 여사건이다.)

길잡이 두 사건 A와 B가 서로 독립이기 위한 필요충분조건은 $\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$ $(\mathrm{P}(A)>0,\ \mathrm{P}(B)>0)$임을 이용한다.

풀이 시행의 결과로 나올 수 있는 표본공간을 S라 하면

$S=\{x \mid x$는 12 이하의 자연수$\}$, $n(S)=12$

$A=\{3, 6, 9, 12\}$, $n(A)=4$

$A^C=\{1, 2, 4, 5, 7, 8, 10, 11\}$, $n(A^C)=8$

두 사건 A와 B가 서로 독립이므로 두 사건 A^C과 B도 서로 독립이다.

즉, $\mathrm{P}(A^C\cap B)=\mathrm{P}(A^C)\mathrm{P}(B)$이므로

$\frac{4}{12}=\frac{8}{12}\times\mathrm{P}(B)$, $\mathrm{P}(B)=\frac{1}{2}$

이때 $\mathrm{P}(B)=\frac{n(B)}{n(S)}=\frac{n(B)}{12}=\frac{1}{2}$이므로

$n(B)=6$

한편, $n(A^C\cap B)=4$이므로 사건 B는 사건 A^C의 원소 중에서 4개를 선택해야 하고 사건 A의 원소 중에서 2개를 선택해야 한다.

따라서 구하는 사건 B의 개수는 ${}_8\mathrm{C}_4\times{}_4\mathrm{C}_2=70\times6=420$

답 420

유제

정답과 풀이 31쪽

5 [23010-0082]

한 개의 주사위를 한 번 던지는 시행에서 소수가 나오는 사건을 A라 하고, 6 이하의 자연수 n에 대하여 n의 약수의 눈이 나오는 사건을 B_n이라 하자. 두 사건 A와 B_n이 서로 독립이 되도록 하는 모든 n의 값의 합을 구하시오.

6 [23010-0083]

어느 고등학교 3학년 전체 학생을 대상으로 선호하는 졸업앨범 디자인으로 I, II 디자인 중 하나만을 반드시 선택하도록 하였을 때, 남학생 120명과 한 명 이상의 여학생이 I 디자인을 선택하였고, 남학생 80명과 여학생 90명이 II 디자인을 선택하였다. 이 학교 3학년 전체 학생 중에서 임의로 뽑은 한 학생이 남학생인 사건을 A라 하고, II 디자인을 선택한 학생인 사건을 B라 할 때, 두 사건 A와 B가 서로 독립이다. $\mathrm{P}(A^C\cap B^C)$의 값은? (단, A^C은 A의 여사건이다.)

① $\frac{5}{17}$ ② $\frac{26}{85}$ ③ $\frac{27}{85}$ ④ $\frac{28}{85}$ ⑤ $\frac{29}{85}$

04 조건부확률

4. 독립시행의 확률

(1) 독립시행의 뜻

주사위나 동전을 여러 번 던지는 경우와 같이 매번 같은 조건에서 어떤 시행을 반복할 때, 각 시행에서 일어나는 사건이 서로 독립인 경우 이러한 시행을 독립시행이라고 한다.

(2) 독립시행의 확률

한 번의 시행에서 사건 A가 일어날 확률이 p일 때, 이 시행을 n회 반복하는 독립시행에서 사건 A가 r회 일어날 확률은

$${}_n\mathrm{C}_r p^r(1-p)^{n-r} \ (r=0, 1, 2, \cdots, n)$$

이다.

예1 한 개의 주사위를 4번 던질 때, 6의 약수의 눈이 2번 나올 확률을 구해 보자.

한 개의 주사위를 던져서 6의 약수의 눈이 나오는 경우를 ○, 6의 약수의 눈이 나오지 않는 경우를 ×로 나타내면 한 개의 주사위를 4번 던지는 시행에서 6의 약수의 눈이 2번 나오는 경우의 수는

$${}_4\mathrm{C}_2=6$$

이다.

이때 주사위를 던질 때마다 일어나는 사건은 서로 독립이고 한 개의 주사위를 한 번 던질 때 6의 약수의 눈이 나올 확률은 $\frac{2}{3}$, 6의 약수의 눈이 나오지 않을 확률은 $\frac{1}{3}$이므로 6가지의 각 경우에서 6의 약수의 눈이 2번 나오고 6의 약수가 아닌 눈이 2번 나올 확률은

$$\left(\frac{2}{3}\right)^2\times\left(\frac{1}{3}\right)^2$$

이다.

1회	2회	3회	4회	확률
○	○	×	×	$\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}$
○	×	○	×	$\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}$
○	×	×	○	$\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}$
×	○	○	×	$\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}$
×	○	×	○	$\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}$
×	×	○	○	$\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}$

또한 위의 표의 6가지의 사건은 모두 서로 배반사건이므로 구하는 확률은

$${}_4\mathrm{C}_2\left(\frac{2}{3}\right)^2\left(\frac{1}{3}\right)^2=6\times\frac{4}{9}\times\frac{1}{9}=\frac{8}{27}$$

예2 ① 한 개의 주사위를 3번 던질 때, 1의 눈이 2번 이상 나올 확률은

$${}_3\mathrm{C}_2\left(\frac{1}{6}\right)^2\left(\frac{5}{6}\right)^1+{}_3\mathrm{C}_3\left(\frac{1}{6}\right)^3=3\times\frac{1}{36}\times\frac{5}{6}+\frac{1}{216}=\frac{2}{27}$$

② 한 개의 동전을 5번 던질 때, 앞면이 홀수 번 나올 확률은

$${}_5\mathrm{C}_1\left(\frac{1}{2}\right)^1\left(\frac{1}{2}\right)^4+{}_5\mathrm{C}_3\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)^2+{}_5\mathrm{C}_5\left(\frac{1}{2}\right)^5=5\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{16}+10\times\frac{1}{8}\times\frac{1}{4}+\frac{1}{32}=\frac{1}{2}$$

예제 4 독립시행의 확률

한 개의 주사위를 두 번 던져 나오는 눈의 수가 서로 같으면 한 개의 동전을 3번 던지고, 나오는 눈의 수가 서로 다르면 한 개의 동전을 2번 던지는 시행을 한다. 이 시행에서 동전의 앞면이 나오는 횟수가 뒷면이 나오는 횟수보다 많을 확률은?

① $\frac{1}{6}$ ② $\frac{5}{24}$ ③ $\frac{1}{4}$ ④ $\frac{7}{24}$ ⑤ $\frac{1}{3}$

길잡이 한 번의 시행에서 사건 A가 일어날 확률이 p일 때, 이 시행을 n회 반복하는 독립시행에서 사건 A가 r회 일어날 확률은 ${}_n\mathrm{C}_r p^r(1-p)^{n-r}$ $(r=0, 1, 2, \cdots, n)$임을 이용한다.

풀이 한 개의 주사위를 두 번 던져 나오는 눈의 수가 서로 같을 확률은 $\frac{6}{36}=\frac{1}{6}$이고 나오는 눈의 수가 서로 다를 확률은 $\frac{5}{6}$이다.

동전의 앞면이 나오는 횟수가 뒷면이 나오는 횟수보다 많을 확률은 다음과 같다.

(i) 한 개의 주사위를 두 번 던져 나오는 눈의 수가 서로 같은 경우

한 개의 동전을 3번 던지므로 앞면이 나오는 횟수가 뒷면이 나오는 횟수보다 많은 경우는 앞면만 3번 나오거나 앞면이 2번, 뒷면이 1번 나오는 경우이므로 확률은

$$\frac{1}{6}\times\left\{{}_3\mathrm{C}_3\left(\frac{1}{2}\right)^3+{}_3\mathrm{C}_2\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)\right\}=\frac{1}{6}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{12}$$

(ii) 한 개의 주사위를 두 번 던져 나오는 눈의 수가 서로 다른 경우

한 개의 동전을 2번 던지므로 앞면이 나오는 횟수가 뒷면이 나오는 횟수보다 많은 경우는 앞면만 2번 나오는 경우이므로 확률은

$$\frac{5}{6}\times{}_2\mathrm{C}_2\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{5}{24}$$

(i), (ii)에서 구하는 확률은

$$\frac{1}{12}+\frac{5}{24}=\frac{7}{24}$$

답 ④

유제

정답과 풀이 32쪽

7 [23010-0084]

한 개의 주사위를 3번 던져 나온 세 눈의 수의 곱이 9의 배수일 확률은?

① $\frac{5}{27}$ ② $\frac{2}{9}$ ③ $\frac{7}{27}$ ④ $\frac{8}{27}$ ⑤ $\frac{1}{3}$

8 [23010-0085]

수직선의 원점에 있는 두 점 P, Q에 대하여 다음 시행을 한다.

> 한 개의 주사위를 한 번 던져 5의 약수의 눈이 나오면 점 P를 3만큼, 점 Q를 2만큼 수직선을 따라 이동시키고, 5의 약수가 아닌 눈이 나오면 점 P를 -2만큼, 점 Q를 -1만큼 수직선을 따라 이동시킨다.

위의 시행을 6번 반복할 때, 점 P의 좌표가 점 Q의 좌표보다 크고 18보다 작을 확률은?

① $\frac{2}{27}$ ② $\frac{7}{81}$ ③ $\frac{8}{81}$ ④ $\frac{1}{9}$ ⑤ $\frac{10}{81}$

Level 1 기초 연습

[23010-0086]

1 한 개의 주사위를 2번 던질 때 나오는 눈의 수를 차례로 a, b라 하자. $a+b$가 6의 배수일 때, $ab=8$일 확률은?

① $\frac{1}{6}$ ② $\frac{1}{5}$ ③ $\frac{1}{4}$ ④ $\frac{1}{3}$ ⑤ $\frac{1}{2}$

[23010-0087]

2 어느 학급 전체 학생 27명을 대상으로 선호하는 학급봉사활동으로 플로깅과 맵핑 중 하나만을 반드시 선택하도록 하였을 때 플로깅과 맵핑을 각각 선택한 학생 수는 오른쪽 표와 같다. 이 학급 학생 중에서 임의로 선택한 한 명이 플로깅을 선택한 학생일 때, 이 학생이 남학생일 확률은?

(단위 : 명)

	플로깅	맵핑
남학생	12	3
여학생	4	8

① $\frac{3}{8}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ $\frac{5}{8}$ ④ $\frac{3}{4}$ ⑤ $\frac{7}{8}$

[23010-0088]

3 숫자 1, 1, 2, 2, 2가 하나씩 적힌 흰 공 5개와 숫자 2, 2, 3, 3, 3이 하나씩 적힌 검은 공 5개가 들어 있는 주머니에서 임의로 2개의 공을 동시에 꺼냈더니 같은 색의 공이 나왔을 때, 두 공에 적힌 수가 모두 2일 확률은?

① $\frac{1}{10}$ ② $\frac{1}{5}$ ③ $\frac{3}{10}$ ④ $\frac{2}{5}$ ⑤ $\frac{1}{2}$

[23010-0089]

4 집합 $\{1, 2, 3, 4, 5\}$의 공집합이 아닌 모든 부분집합 중에서 임의로 택한 한 집합의 원소의 개수가 짝수일 때, 이 집합의 원소의 최솟값이 2일 확률은?

① $\frac{4}{15}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ $\frac{2}{5}$ ④ $\frac{7}{15}$ ⑤ $\frac{8}{15}$

[23010-0090]

5 딸기 맛 사탕 4개와 포도 맛 사탕 4개가 들어 있는 주머니에서 임의로 1개의 사탕을 꺼내고 다시 넣지 않는 시행을 반복한다. 딸기 맛 사탕을 모두 꺼내면 시행을 멈출 때, 6번째까지 시행을 한 후 시행을 멈출 확률은?

① $\frac{1}{14}$　② $\frac{1}{7}$　③ $\frac{3}{14}$　④ $\frac{2}{7}$　⑤ $\frac{5}{14}$

[23010-0091]

6 주머니 A에는 흰 공 1개, 검은 공 3개가 들어 있고, 주머니 B에는 흰 공 3개, 검은 공 3개가 들어 있다. 주머니 A에서 임의로 1개의 공을 꺼내어 주머니 B에 넣은 후 주머니 B에서 임의로 3개의 공을 동시에 꺼낼 때, 꺼낸 공이 모두 검은 공일 확률은?

① $\frac{3}{35}$　② $\frac{13}{140}$　③ $\frac{1}{10}$　④ $\frac{3}{28}$　⑤ $\frac{4}{35}$

[23010-0092]

7 두 사건 A와 B는 서로 독립이고

$$\mathrm{P}(A^C)=\frac{5}{6},\ \mathrm{P}(B|A)=\frac{2}{3}$$

일 때, $\mathrm{P}(A\cup B)$의 값은? (단, A^C은 A의 여사건이다.)

① $\frac{2}{3}$　② $\frac{13}{18}$　③ $\frac{7}{9}$　④ $\frac{5}{6}$　⑤ $\frac{8}{9}$

[23010-0093]

8 A팀과 B팀이 피구 경기를 할 때, 5번 경기하여 먼저 3번 이기는 팀이 승리하기로 한다. 각 경기에서 A팀이 이길 확률은 $\frac{2}{3}$이고, B팀이 이길 확률은 $\frac{1}{3}$이다. A팀이 3승 2패로 승리할 확률은?

① $\frac{8}{81}$　② $\frac{4}{27}$　③ $\frac{16}{81}$　④ $\frac{20}{81}$　⑤ $\frac{8}{27}$

Level 2 기본 연습

[23010-0094]

1 집합 $X=\{1, 2, 3, 4\}$에 대하여 X에서 X로의 모든 함수 중에서 임의로 선택한 한 함수를 f라 하자. $3f(2)=f(1)+f(3)$일 때, 집합 X의 어떤 원소 a가 $f(a)=4$일 확률은?

① $\frac{2}{5}$ ② $\frac{9}{20}$ ③ $\frac{1}{2}$ ④ $\frac{11}{20}$ ⑤ $\frac{3}{5}$

[23010-0095]

2 남학생이 전체 학생의 55%인 어느 고등학교의 전체 학생들을 대상으로 선호하는 축제 시기로 8월과 12월 중 하나만 반드시 선택하도록 하였더니 남학생의 60 %가 8월을 선택하였고, 여학생의 60 %가 12월을 선택하였다. 이 학교 전체 학생 중에서 임의로 뽑은 한 학생이 8월을 선택한 학생일 때, 이 학생이 여학생일 확률은?

① $\frac{5}{17}$ ② $\frac{11}{34}$ ③ $\frac{6}{17}$ ④ $\frac{13}{34}$ ⑤ $\frac{7}{17}$

[23010-0096]

3 주머니 A에는 자연수 1, 2, 3, 4, 5가 하나씩 적혀 있는 5개의 공이 들어 있고, 주머니 B에는 자연수 6, 7, 8, 9, 10이 하나씩 적혀 있는 5개의 공이 들어 있다. 한 개의 주사위를 한 번 던져 2 이하의 눈이 나오면 주머니 A에서 임의로 공을 한 개 꺼내고, 3 이상의 눈이 나오면 주머니 B에서 임의로 공을 한 개 꺼낸다. 주머니에서 꺼낸 공에 적혀 있는 수가 홀수일 때, 그 공에 적혀 있는 수가 7일 확률은?

① $\frac{1}{7}$ ② $\frac{3}{14}$ ③ $\frac{2}{7}$ ④ $\frac{5}{14}$ ⑤ $\frac{3}{7}$

[23010-0097]

4 두 사건 A와 B는 서로 독립이고

$$\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{1}{12},\ 3\mathrm{P}(A^C|B)=8\mathrm{P}(B|A)$$

일 때, 가능한 모든 $\mathrm{P}(A)-\mathrm{P}(B)$의 값의 합은? (단, A^C은 A의 여사건이다.)

① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{13}{24}$ ③ $\frac{7}{12}$ ④ $\frac{5}{8}$ ⑤ $\frac{2}{3}$

[23010-0098]

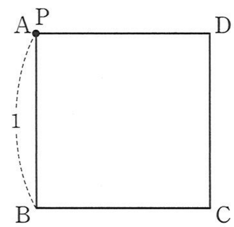
5 1부터 10까지의 자연수가 하나씩 적혀 있는 10개의 공이 들어 있는 주머니에서 임의로 한 개의 공을 꺼낼 때, k 이상의 수가 나오는 사건을 A_k라 하고 짝수가 나오는 사건을 B라 하자. 두 사건 A_k와 B가 서로 독립이 되도록 하는 모든 자연수 k의 값의 합을 구하시오. (단, $1 \le k \le 10$)

[23010-0099]

6 1부터 8까지의 자연수가 하나씩 적혀 있는 8장의 카드가 들어 있는 주머니에서 임의로 한 장의 카드를 꺼낼 때, 3의 배수가 적혀 있는 카드를 꺼내면 한 개의 동전을 7번 던지고 3의 배수가 아닌 수가 적혀 있는 카드를 꺼내면 한 개의 동전을 5번 던진다. 이 시행에서 동전의 앞면이 나오는 횟수와 뒷면이 나오는 횟수의 곱이 6일 때, 동전의 앞면이 2번 나올 확률은 $\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.)

[23010-0100]

7 그림과 같이 한 변의 길이가 1인 정사각형 ABCD와 정사각형 ABCD의 변을 따라 움직이는 점 P가 있다. 한 개의 주사위를 한 번 던져 4 이하의 눈이 나오면 점 P를 시곗바늘이 도는 방향으로 3만큼, 5 이상의 눈이 나오면 점 P를 시곗바늘이 도는 반대 방향으로 2만큼 정사각형 ABCD의 변을 따라 이동시키는 시행을 한다. 점 A에 있는 점 P가 이 시행을 9번 반복한 후 점 A에 있게 될 확률은 $p \times \left(\frac{2}{9}\right)^4$이다. 자연수 p의 값을 구하시오.



[23010-0101]

8 좌표평면 위의 점 P가 원점에 있다. 흰 공 2개, 검은 공 3개가 들어 있는 상자를 사용하여 다음 시행을 한다.

> 상자에서 임의로 1개의 공을 꺼낸 후 꺼낸 공이 흰 공이면 점 P를 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 -2만큼 이동시키고, 꺼낸 공이 검은 공이면 점 P를 x축의 방향으로 -1만큼, y축의 방향으로 3만큼 이동시킨다.

이 시행을 5번 반복하여 점 P가 점 $(1, 0)$으로 이동될 확률은? (단, 꺼낸 공은 다시 넣는다.)

① $\frac{4}{25}$ ② $\frac{121}{625}$ ③ $\frac{144}{625}$ ④ $\frac{169}{625}$ ⑤ $\frac{196}{625}$

[23010-0102]

1 주머니 A에는 흰 공 2개와 검은 공 4개가 들어 있고 주머니 B에는 흰 공 6개가 들어 있다. 주머니 A에서 임의로 3개의 공을 동시에 꺼내어 주머니 B에 넣은 후, 주머니 B에서 임의로 2개의 공을 동시에 꺼내어 주머니 A에 넣는다. 이와 같은 시행을 한 번 하여 주머니 A에 들어 있는 검은 공의 개수가 홀수일 때, 처음 주머니 A에서 꺼낸 검은 공의 개수가 짝수일 확률은 $\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.)

[23010-0103]

2 갑은 방정식 $a+b+c=5$와 부등식 $a \leq b \leq c$를 모두 만족시키는 자연수 a, b, c의 모든 순서쌍 (a, b, c) 중에서 임의로 한 개를 선택하고, 을은 부등식 $x+y+z \leq 7$을 만족시키는 자연수 x, y, z의 모든 순서쌍 (x, y, z) 중에서 임의로 한 개를 선택한다. 갑이 선택한 순서쌍 (a, b, c)와 을이 선택한 순서쌍 (x, y, z)에 대하여 세 수 $a+x$, $b+y$, $c+z$가 모두 짝수일 때, $x \times y \times z$가 홀수일 확률은 $\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.)

[23010-0104]

3 흰 공과 검은 공이 각각 30개 이상 들어 있는 바구니와 비어 있는 주머니가 있다. 한 개의 주사위를 사용하여 다음 시행을 한다.

> 주사위를 한 번 던져
> 나온 눈의 수가 2 이하이면 바구니에 있는 흰 공 3개를 주머니에 넣고,
> 나온 눈의 수가 3 이상이면 바구니에 있는 검은 공 2개를 주머니에 넣는다.

이 시행을 7번 반복할 때, 7 이하의 자연수 n에 대하여 n번째 시행 후 주머니에 들어 있는 흰 공과 검은 공의 개수를 각각 a_n, b_n이라 하자. 처음으로 $a_k-b_k=1$을 만족시키는 k의 값이 $k=7$일 확률은 $\frac{p}{3^6}$이다. 자연수 p의 값을 구하시오.

대표 기출 문제

EBS

출제 경향 조건부확률을 구하는 문제, 확률의 곱셈정리를 이용하여 확률을 구하는 문제와 독립시행의 확률을 구하는 문제가 출제된다.

2023학년도 대수능 6월 모의평가

수직선의 원점에 점 P가 있다. 한 개의 주사위를 사용하여 다음 시행을 한다.

> 주사위를 한 번 던져 나온 눈의 수가
> 6의 약수이면 점 P를 양의 방향으로 1만큼 이동시키고,
> 6의 약수가 아니면 점 P를 이동시키지 않는다.

이 시행을 4번 반복할 때, 4번째 시행 후 점 P의 좌표가 2 이상일 확률은? [3점]

① $\frac{13}{18}$ ② $\frac{7}{9}$ ③ $\frac{5}{6}$ ④ $\frac{8}{9}$ ⑤ $\frac{17}{18}$

출제 의도 독립시행의 확률과 여사건의 확률을 이용하여 확률을 구할 수 있는지를 묻는 문제이다.

풀이 주사위를 한 번 던져 나온 눈의 수가 6의 약수일 확률은 $\frac{2}{3}$이고, 6의 약수가 아닐 확률은 $\frac{1}{3}$이다.

4번째 시행 후 점 P의 좌표가 2 이상이려면 4번의 시행 중 6의 약수의 눈이 2번 이상 나와야 한다. 4번의 시행 중 6의 약수의 눈이 2번 이상 나오는 사건을 A라 하면 그 여사건 A^C은 4번의 시행 중 6의 약수의 눈이 한 번도 나오지 않거나 1번 나오는 사건이므로

$$\mathrm{P}(A^C)={}_4\mathrm{C}_0\left(\frac{2}{3}\right)^0\left(\frac{1}{3}\right)^4+{}_4\mathrm{C}_1\left(\frac{2}{3}\right)^1\left(\frac{1}{3}\right)^3=\frac{1}{81}+\frac{8}{81}=\frac{1}{9}$$

따라서 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(A)=1-\mathrm{P}(A^C)=1-\frac{1}{9}=\frac{8}{9}$$

답 ④

05 이산확률변수의 확률분포

1. 확률변수

(1) 확률변수: 어떤 시행에서 표본공간의 각 원소에 하나의 실수의 값을 대응시키는 함수를 확률변수라고 한다. 확률변수 X가 어떤 값 x를 가질 확률을 기호로 $\mathrm{P}(X=x)$와 같이 나타낸다.

예 두 개의 동전을 동시에 던지는 시행에서 앞면이 나오는 동전의 개수를 확률변수 X라 하면 X가 갖는 값은 0, 1, 2이다.

참고 확률변수는 표본공간을 정의역으로 하고 실수 전체의 집합을 공역으로 하는 함수이지만 변수의 역할도 하기 때문에 확률변수라고 한다.

(2) 이산확률변수: 확률변수 X가 갖는 값이 유한개이거나 무한히 많더라도 자연수와 같이 셀 수 있을 때, 그 확률변수 X를 이산확률변수라고 한다.

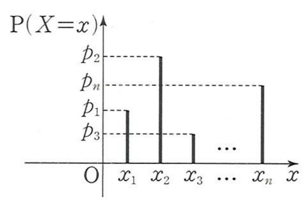
예 한 개의 주사위를 두 번 던지는 시행에서 나온 두 눈의 수의 합을 확률변수 X라 할 때, X가 갖는 값은 2부터 12까지의 자연수로 유한개이므로 X는 이산확률변수이다.

2. 이산확률변수의 확률분포

(1) 이산확률변수의 확률분포: 이산확률변수 X가 갖는 값이 $x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n$이고 X가 이 값들을 가질 확률이 각각 $p_1, p_2, p_3, \cdots, p_n$일 때, $x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n$과 $p_1, p_2, p_3, \cdots, p_n$ 사이의 대응 관계를 이산확률변수 X의 확률분포라고 한다.

이때 이산확률변수 X의 확률분포는 다음과 같이 표 또는 그래프로 나타낼 수 있다.

X	x_1	x_2	x_3	$\cdots$	x_n	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	p_1	p_2	p_3	$\cdots$	p_n	1



(2) 확률질량함수: 이산확률변수 X가 갖는 값 x_i $(i=1, 2, 3, \cdots, n)$과 X가 이 값들을 가질 확률 p_i $(i=1, 2, 3, \cdots, n)$ 사이의 대응 관계를 나타내는 함수

$$\mathrm{P}(X=x_i)=p_i \ (i=1, 2, 3, \cdots, n)$$

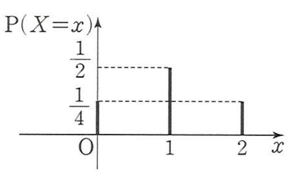
을 이산확률변수 X의 확률질량함수라고 한다.

예 한 개의 동전을 두 번 던지는 시행에서 앞면이 나오는 횟수를 확률변수 X라 하면 X가 갖는 값은 0, 1, 2이므로 X는 이산확률변수이고, X의 확률질량함수는

$$\mathrm{P}(X=x)={}_2\mathrm{C}_x\left(\frac{1}{2}\right)^x\left(\frac{1}{2}\right)^{2-x}=\frac{{}_2\mathrm{C}_x}{4} \ (x=0, 1, 2)$$

이다. 이때 확률변수 X의 확률분포를 표와 그래프로 나타내면 다음과 같다.

X	0	1	2	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	1



예제 1 이산확률변수의 확률분포

두 개의 주사위 A, B를 동시에 던져서 나오는 두 눈의 수의 평균을 확률변수 X라 할 때, $P(X^2-6X+8<0)$의 값은?

① $\frac{1}{3}$ ② $\frac{13}{36}$ ③ $\frac{7}{18}$ ④ $\frac{5}{12}$ ⑤ $\frac{4}{9}$

길잡이 확률변수 X가 갖는 값의 범위를 조사하고 주어진 조건을 만족시키는 X에 대한 확률을 구한다.

풀이 두 개의 주사위 A, B를 동시에 던져서 나오는 눈의 수를 각각 a, b라 하고 순서쌍 (a, b)로 나타내자.

두 개의 주사위 A, B를 동시에 던져서 나오는 모든 순서쌍 (a, b)의 개수는 $6\times6=36$

이산확률변수 X가 갖는 값은 $1, \frac{3}{2}, 2, \cdots, 6$이고

$X^2-6X+8<0$에서 $(X-2)(X-4)<0$, $2<X<4$이므로

$$P(X^2-6X+8<0)=P(2<X<4)=P\left(X=\frac{5}{2}\right)+P(X=3)+P\left(X=\frac{7}{2}\right)$$

$X=\frac{5}{2}$인 경우의 순서쌍 (a, b)의 개수는 $(1, 4)$, $(2, 3)$, $(3, 2)$, $(4, 1)$로 4이므로 $P\left(X=\frac{5}{2}\right)=\frac{4}{36}=\frac{1}{9}$

$X=3$인 경우의 순서쌍 (a, b)의 개수는 $(1, 5)$, $(2, 4)$, $(3, 3)$, $(4, 2)$, $(5, 1)$로 5이므로 $P(X=3)=\frac{5}{36}$

$X=\frac{7}{2}$인 경우의 순서쌍 (a, b)의 개수는 $(1, 6)$, $(2, 5)$, $(3, 4)$, $(4, 3)$, $(5, 2)$, $(6, 1)$로 6이므로 $P\left(X=\frac{7}{2}\right)=\frac{6}{36}=\frac{1}{6}$

따라서 구하는 값은

$$P\left(X=\frac{5}{2}\right)+P(X=3)+P\left(X=\frac{7}{2}\right)=\frac{1}{9}+\frac{5}{36}+\frac{1}{6}=\frac{5}{12}$$

답 ④

유제

정답과 풀이 39쪽

1 [23010-0105]

이산확률변수 X가 갖는 값이 1, 2, 3, 4이고 X의 확률질량함수가

$$P(X=x)=\frac{9-2x}{16}\ (x=1, 2, 3, 4)$$

일 때, $P(|2X-5|=1)$의 값은?

① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{3}{8}$ ③ $\frac{1}{2}$ ④ $\frac{5}{8}$ ⑤ $\frac{3}{4}$

2 [23010-0106]

숫자 1, 1, 2, 2, 4가 하나씩 적혀 있는 5개의 공이 들어 있는 주머니가 있다. 이 주머니에서 임의로 2개의 공을 동시에 꺼낼 때, 꺼낸 2개의 공에 적혀 있는 두 수의 합을 확률변수 X라 하자. $P(X\geq3)$의 값은?

① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{3}{5}$ ③ $\frac{7}{10}$ ④ $\frac{4}{5}$ ⑤ $\frac{9}{10}$

05 이산확률변수의 확률분포

3. 확률질량함수의 성질

이산확률변수 X의 확률질량함수가 $\mathrm{P}(X=x_i)=p_i$ ($i=1, 2, 3, \cdots, n$)일 때, 확률의 기본 성질에 의하여 다음이 성립한다.

(1) $0 \le p_i \le 1$

(2) $p_1+p_2+p_3+\cdots+p_n=\sum_{i=1}^{n} p_i=1$

예 한 개의 주사위를 두 번 던지는 시행에서 3의 배수의 눈이 나오는 횟수를 확률변수 X라 하면 X가 갖는 값이 0, 1, 2이고 X의 확률질량함수는

$$\mathrm{P}(X=x)={}_2\mathrm{C}_x\left(\frac{1}{3}\right)^x\left(\frac{2}{3}\right)^{2-x}\ (x=0, 1, 2)$$

이므로

$$\mathrm{P}(X=0)=\frac{4}{9},\ \mathrm{P}(X=1)=\frac{4}{9},\ \mathrm{P}(X=2)=\frac{1}{9}$$

따라서

$$0 \le \mathrm{P}(X=x) \le 1$$
$$\mathrm{P}(X=0)+\mathrm{P}(X=1)+\mathrm{P}(X=2)=1$$

이므로 확률질량함수가 위의 성질 (1), (2)를 만족시킴을 확인할 수 있다.

4. 이산확률변수 X의 기댓값(평균)

이산확률변수 X의 확률분포가 오른쪽 표와 같을 때,

X	x_1	x_2	x_3	$\cdots$	x_n	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	p_1	p_2	p_3	$\cdots$	p_n	1

$$x_1p_1+x_2p_2+x_3p_3+\cdots+x_np_n=\sum_{i=1}^{n} x_ip_i$$

를 확률변수 X의 기댓값 또는 평균이라 하고, 기호로

$$\mathrm{E}(X)$$

와 같이 나타낸다.

예 한 개의 동전을 세 번 던지는 시행에서 앞면이 나오는 횟수를 확률변수 X라 할 때, X의 기댓값 $\mathrm{E}(X)$를 구해 보자.
확률변수 X가 갖는 값이 0, 1, 2, 3이고 X의 확률질량함수는

$$\mathrm{P}(X=x)={}_3\mathrm{C}_x\left(\frac{1}{2}\right)^x\left(\frac{1}{2}\right)^{3-x}=\frac{{}_3\mathrm{C}_x}{8}\ (x=0, 1, 2, 3)$$

이다. 이때 확률변수 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	0	1	2	3	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$	1

따라서 $\mathrm{E}(X)=0\times\frac{1}{8}+1\times\frac{3}{8}+2\times\frac{3}{8}+3\times\frac{1}{8}=\frac{12}{8}=\frac{3}{2}$

참고 $\mathrm{E}(X)$의 E는 기댓값을 뜻하는 Expectation의 첫 글자이다.

예제 2 이산확률변수의 평균

이산확률변수 X의 확률분포를 표로 나타내면 오른쪽과 같다. $\mathrm{E}(X)=\frac{8}{3}$일 때, $\frac{b}{a}$의 값은?

X	1	2	3	4	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	a	$\frac{1}{6}$	b	$\frac{1}{6}$	1

① $\frac{1}{3}$　② $\frac{1}{2}$　③ 1　④ 2　⑤ 3

길잡이 이산확률변수 X의 확률질량함수가 $\mathrm{P}(X=x_i)=p_i$ $(i=1, 2, 3, \cdots, n)$일 때

① $\sum_{i=1}^{n}\mathrm{P}(X=x_i)=\sum_{i=1}^{n}p_i=1$　② $\mathrm{E}(X)=\sum_{i=1}^{n}x_ip_i$

임을 이용한다.

풀이 이산확률변수 X가 갖는 모든 값에 대한 확률의 합은 1이므로

$a+\frac{1}{6}+b+\frac{1}{6}=1$에서 $a+b=\frac{2}{3}$ …… ㉠

이때 $\mathrm{E}(X)=\frac{8}{3}$에서

$$\mathrm{E}(X)=1\times a+2\times\frac{1}{6}+3\times b+4\times\frac{1}{6}=a+3b+1=\frac{8}{3}$$

$$a+3b=\frac{5}{3}$$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=\frac{1}{6}$, $b=\frac{1}{2}$

따라서 $\frac{b}{a}=\frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{6}}=3$

답 ⑤

유제

정답과 풀이 39쪽

3 [23010-0107]

이산확률변수 X가 갖는 값이 -2, -1, 0, 1, 2이고 X의 확률질량함수가

$$\mathrm{P}(X=x)=\frac{k}{x^2+1}\ (x=-2, -1, 0, 1, 2)$$

일 때, $\mathrm{P}(X>0)$의 값은? (단, k는 상수이다.)

① $\frac{1}{6}$　② $\frac{5}{24}$　③ $\frac{1}{4}$　④ $\frac{7}{24}$　⑤ $\frac{1}{3}$

4 [23010-0108]

흰 공 3개, 검은 공 3개가 들어 있는 주머니에서 임의로 3개의 공을 동시에 꺼낼 때, 꺼낸 공 중 흰 공의 개수를 a, 검은 공의 개수를 b라 하자. ab의 값을 확률변수 X라 할 때, $\mathrm{E}(X)$의 값은?

① 1　② $\frac{6}{5}$　③ $\frac{7}{5}$　④ $\frac{8}{5}$　⑤ $\frac{9}{5}$

05 이산확률변수의 확률분포

5. 이산확률변수 X의 분산, 표준편차

이산확률변수 X의 확률분포가 오른쪽 표와 같을 때, 확률변수 X의 분산과 표준편차는 다음과 같다.

X	x_1	x_2	x_3	$\cdots$	x_n	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	p_1	p_2	p_3	$\cdots$	p_n	1

(1) 분산

$\mathrm{E}(X)=m$일 때, $(X-m)^2$의 평균

$$\mathrm{E}((X-m)^2)=\sum_{i=1}^{n}(x_i-m)^2p_i$$
$$=(x_1-m)^2p_1+(x_2-m)^2p_2+(x_3-m)^2p_3+\cdots+(x_n-m)^2p_n$$

을 확률변수 X의 분산이라 하고, 기호로

$$\mathrm{V}(X)$$

와 같이 나타낸다. 이때

$$\mathrm{V}(X)=\sum_{i=1}^{n}(x_i-m)^2p_i$$
$$=\sum_{i=1}^{n}(x_i^2p_i-2mx_ip_i+m^2p_i)=\sum_{i=1}^{n}x_i^2p_i-2m\sum_{i=1}^{n}x_ip_i+m^2\sum_{i=1}^{n}p_i$$
$$=\sum_{i=1}^{n}x_i^2p_i-2m^2+m^2\ \left(\sum_{i=1}^{n}x_ip_i=m,\ \sum_{i=1}^{n}p_i=1\text{이므로}\right)$$
$$=\sum_{i=1}^{n}x_i^2p_i-m^2$$

이므로 $\mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2$

(2) 표준편차

분산 $\mathrm{V}(X)$의 양의 제곱근을 확률변수 X의 표준편차라 하고, 기호로 $\sigma(X)$와 같이 나타낸다.

즉, $\sigma(X)=\sqrt{\mathrm{V}(X)}$

참고 $\mathrm{V}(X)$의 V는 분산을 뜻하는 Variance의 첫 글자이고, $\sigma(X)$의 σ는 표준편차를 뜻하는 standard deviation의 첫 글자 s에 해당하는 그리스 문자이다.

예 확률변수 X의 확률분포가 오른쪽 표와 같을 때, X의 분산, 표준편차를 구해 보자.

X	1	2	3	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	1

$$m=\mathrm{E}(X)=1\times\frac{1}{2}+2\times\frac{1}{3}+3\times\frac{1}{6}=\frac{5}{3}$$

① $\mathrm{V}(X)=\mathrm{E}((X-m)^2)=\sum_{i=1}^{n}(x_i-m)^2p_i$를 이용하면

$$\mathrm{V}(X)=\left(1-\frac{5}{3}\right)^2\times\frac{1}{2}+\left(2-\frac{5}{3}\right)^2\times\frac{1}{3}+\left(3-\frac{5}{3}\right)^2\times\frac{1}{6}=\frac{5}{9}$$

$$\sigma(X)=\sqrt{\mathrm{V}(X)}=\sqrt{\frac{5}{9}}=\frac{\sqrt{5}}{3}$$

② $\mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2$을 이용하면

$$\mathrm{E}(X^2)=1^2\times\frac{1}{2}+2^2\times\frac{1}{3}+3^2\times\frac{1}{6}=\frac{10}{3}$$

$$\mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2=\frac{10}{3}-\left(\frac{5}{3}\right)^2=\frac{5}{9}$$

$$\sigma(X)=\sqrt{\mathrm{V}(X)}=\sqrt{\frac{5}{9}}=\frac{\sqrt{5}}{3}$$

예제 3 이산확률변수의 분산

이산확률변수 X의 확률분포를 표로 나타내면 오른쪽과 같다. $\mathrm{P}(X=-1)$, $\mathrm{P}(X=0)$, $\mathrm{P}(X=1)$이 이 순서대로 등차수열을 이루고, $\mathrm{E}(X)=1$일 때, $\mathrm{V}(X)$의 값은? (단, k는 $k>1$인 상수이다.)

X	-1	0	1	k	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	a	b	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{7}$	1

① 1 ② $\frac{9}{7}$ ③ $\frac{11}{7}$ ④ $\frac{13}{7}$ ⑤ $\frac{15}{7}$

길잡이 이산확률변수 X의 확률질량함수가 $\mathrm{P}(X=x_i)=p_i$ $(i=1, 2, 3, \cdots, n)$일 때

① $\mathrm{E}(X)=\sum_{i=1}^{n} x_i p_i$ ② $\mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2$

임을 이용한다.

풀이 이산확률변수 X가 갖는 모든 값에 대한 확률의 합은 1이므로

$a+b+\frac{1}{2}+\frac{1}{7}=1$에서 $a+b=\frac{5}{14}$ …… ㉠

$\mathrm{P}(X=-1)$, $\mathrm{P}(X=0)$, $\mathrm{P}(X=1)$, 즉 a, b, $\frac{1}{2}$이 이 순서대로 등차수열을 이루므로 등차중항의 성질에 의하여

$2b=a+\frac{1}{2}$, $a=2b-\frac{1}{2}$ …… ㉡

㉡을 ㉠에 대입하여 풀면 $a=\frac{1}{14}$, $b=\frac{2}{7}$

이때 $\mathrm{E}(X)=1$이므로

$$\mathrm{E}(X)=-1\times\frac{1}{14}+0\times\frac{2}{7}+1\times\frac{1}{2}+k\times\frac{1}{7}=\frac{k+3}{7}=1$$

$k=4$

따라서 $\mathrm{E}(X^2)=(-1)^2\times\frac{1}{14}+0^2\times\frac{2}{7}+1^2\times\frac{1}{2}+4^2\times\frac{1}{7}=\frac{20}{7}$이므로

$$\mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2=\frac{20}{7}-1=\frac{13}{7}$$

답 ④

유제

정답과 풀이 40쪽

5 [23010-0109]

이산확률변수 X에 대하여 $\mathrm{E}(X)=4$, $\mathrm{E}((X-4)^2)=9$일 때, $\mathrm{E}(X^2)-\sigma(X)$의 값을 구하시오.

6 [23010-0110]

이산확률변수 X가 갖는 값이 1, 2, 3, 4이고 X의 확률질량함수가

$\mathrm{P}(X=x)=a(x+1)$ $(x=1, 2, 3, 4)$

일 때, $\frac{\mathrm{V}(X)}{a^2}$의 값은? (단, a는 상수이다.)

① 200 ② 210 ③ 220 ④ 230 ⑤ 240

05 이산확률변수의 확률분포

6. 이산확률변수 $aX+b$의 평균, 분산, 표준편차

이산확률변수 X와 두 상수 a, b $(a\neq0)$에 대하여 이산확률변수 $aX+b$의 평균, 분산, 표준편차는 다음과 같다.

(1) $\mathrm{E}(aX+b)=a\mathrm{E}(X)+b$

(2) $\mathrm{V}(aX+b)=a^2\mathrm{V}(X)$

(3) $\sigma(aX+b)=|a|\sigma(X)$

설명 이산확률변수 X의 확률분포가 다음과 같을 때, 이산확률변수

$Y=aX+b$ (a, b는 상수, $a\neq0$)

의 평균, 분산, 표준편차를 구해 보자.

X	x_1	x_2	x_3	$\cdots$	x_n	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	p_1	p_2	p_3	$\cdots$	p_n	1

$y_i=ax_i+b$ $(i=1, 2, 3, \cdots, n)$이라 할 때, 확률

$\mathrm{P}(Y=y_i)=\mathrm{P}(X=x_i)=p_i$

이므로 확률변수 Y의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

Y	y_1	y_2	y_3	$\cdots$	y_n	합계
$\mathrm{P}(Y=y)$	p_1	p_2	p_3	$\cdots$	p_n	1

따라서 확률변수 Y의 평균은

$$\mathrm{E}(Y)=\sum_{i=1}^{n}y_ip_i=\sum_{i=1}^{n}(ax_i+b)p_i$$
$$=a\sum_{i=1}^{n}x_ip_i+b\sum_{i=1}^{n}p_i=a\mathrm{E}(X)+b$$

확률변수 X의 평균을 m이라 하면 확률변수 Y의 평균은 $am+b$이므로 Y의 분산과 표준편차는

$$\mathrm{V}(Y)=\sum_{i=1}^{n}\{y_i-(am+b)\}^2p_i$$
$$=\sum_{i=1}^{n}\{(ax_i+b)-(am+b)\}^2p_i$$
$$=\sum_{i=1}^{n}a^2(x_i-m)^2p_i$$
$$=a^2\sum_{i=1}^{n}(x_i-m)^2p_i=a^2\mathrm{V}(X)$$

$$\sigma(Y)=\sqrt{\mathrm{V}(Y)}=\sqrt{a^2\mathrm{V}(X)}$$
$$=|a|\sqrt{\mathrm{V}(X)}$$
$$=|a|\sigma(X)$$

예 이산확률변수 X에 대하여 $\mathrm{E}(X)=6$, $\mathrm{V}(X)=9$일 때, 확률변수 $2X+1$의 평균, 분산, 표준편차는 다음과 같다.

$\mathrm{E}(2X+1)=2\mathrm{E}(X)+1=2\times6+1=13$

$\mathrm{V}(2X+1)=2^2\mathrm{V}(X)=4\times9=36$

$\sigma(2X+1)=|2|\sigma(X)=2\times\sqrt{9}=6$

예제 4 이산확률변수 $aX+b$의 평균

이산확률변수 X가 갖는 값이 -1, 0, 1, 2이고

$$\mathrm{P}(X=x+1)=\frac{1}{2}\mathrm{P}(X=x)\ (x=-1,\ 0,\ 1)$$

이 성립할 때, $\mathrm{E}(6-15X)$의 값은?

① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

길잡이 주어진 조건을 만족시키는 확률변수 X에 대한 확률을 구하고, 두 상수 a, b $(a\neq0)$에 대하여

$$\mathrm{E}(aX+b)=a\mathrm{E}(X)+b$$

임을 이용한다.

풀이 $\mathrm{P}(X=-1)=a$라 하면

$$\mathrm{P}(X=0)=\frac{1}{2}\mathrm{P}(X=-1)=\frac{1}{2}a$$

$$\mathrm{P}(X=1)=\frac{1}{2}\mathrm{P}(X=0)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}a=\frac{1}{4}a$$

$$\mathrm{P}(X=2)=\frac{1}{2}\mathrm{P}(X=1)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{4}a=\frac{1}{8}a$$

이므로 확률변수 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	-1	0	1	2	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	a	$\frac{1}{2}a$	$\frac{1}{4}a$	$\frac{1}{8}a$	1

이산확률변수 X가 갖는 모든 값에 대한 확률의 합은 1이므로

$$a+\frac{1}{2}a+\frac{1}{4}a+\frac{1}{8}a=\frac{15}{8}a=1,\ a=\frac{8}{15}$$

따라서 $\mathrm{E}(X)=-1\times a+0\times\frac{1}{2}a+1\times\frac{1}{4}a+2\times\frac{1}{8}a=-\frac{1}{2}a=-\frac{1}{2}\times\frac{8}{15}=-\frac{4}{15}$이므로

$$\mathrm{E}(6-15X)=6-15\mathrm{E}(X)=6-15\times\left(-\frac{4}{15}\right)=10$$

답 ⑤

유제

정답과 풀이 40쪽

7 [23010-0111]

이산확률변수 X에 대하여 $\mathrm{E}(4X+1)=\mathrm{E}(X^2)+1=5$일 때, $\sigma(\sqrt{3}X-\sqrt{3})$의 값을 구하시오.

8 [23010-0112]

이산확률변수 X가 갖는 값이 1, 2, 3, 4이고 X의 확률질량함수가

$$\mathrm{P}(X=x)=\frac{{}_5\mathrm{C}_x}{30}\ (x=1,\ 2,\ 3,\ 4)$$

일 때, $\mathrm{V}(5-12X)$의 값은?

① 130 ② 132 ③ 134 ④ 136 ⑤ 138

05 이산확률변수의 확률분포

7. 이항분포

한 번의 시행에서 사건 A가 일어날 확률이 p로 일정할 때, n번의 독립시행에서 사건 A가 일어나는 횟수를 확률변수 X라 하면 X가 갖는 값은 0, 1, 2, $\cdots$, n이고, X의 확률질량함수는

$$\mathrm{P}(X=x)={}_n\mathrm{C}_x p^x q^{n-x}\ (x=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ n\text{이고 } q=1-p)$$

이다. 이와 같은 이산확률변수 X의 확률분포를 이항분포라 하고, 기호로 $\mathrm{B}(n,\ p)$와 같이 나타낸다.
이때 확률변수 X는 이항분포 $\mathrm{B}(n,\ p)$를 따른다고 하며, X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	0	1	2	$\cdots$	x	$\cdots$	n	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	${}_n\mathrm{C}_0 p^0 q^n$	${}_n\mathrm{C}_1 p^1 q^{n-1}$	${}_n\mathrm{C}_2 p^2 q^{n-2}$	$\cdots$	${}_n\mathrm{C}_x p^x q^{n-x}$	$\cdots$	${}_n\mathrm{C}_n p^n q^0$	1

참고 (1) 위의 표에서 각 확률은 이항정리에 의하여 $(p+q)^n$을 전개한 식

$$(p+q)^n={}_n\mathrm{C}_0 p^0 q^n+{}_n\mathrm{C}_1 p^1 q^{n-1}+{}_n\mathrm{C}_2 p^2 q^{n-2}+\cdots+{}_n\mathrm{C}_x p^x q^{n-x}+\cdots+{}_n\mathrm{C}_n p^n q^0$$

의 우변의 각 항과 같다. 이때 $p+q=1$이므로 $\sum\limits_{x=0}^{n} {}_n\mathrm{C}_x p^x q^{n-x}=1$임을 알 수 있다.

(2) 이항분포 $\mathrm{B}(n,\ p)$의 B는 이항분포를 뜻하는 Binomial distribution의 첫 글자이다.

예 한 개의 주사위를 한 번 던지는 시행에서 4의 약수의 눈이 나오는 사건을 A라 하고, 이 주사위를 10번 던질 때 사건 A가 일어나는 횟수를 확률변수 X라 하자. 주사위를 한 번 던질 때 사건 A가 일어날 확률이 $\frac{1}{2}$이고 독립시행의 횟수가 10이므로 확률변수 X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(10,\ \frac{1}{2}\right)$을 따른다.

8. 이항분포의 평균, 분산, 표준편차

확률변수 X가 이항분포 $\mathrm{B}(n,\ p)$를 따를 때

(1) 평균: $\mathrm{E}(X)=np$

(2) 분산: $\mathrm{V}(X)=npq$ (단, $q=1-p$)

(3) 표준편차: $\sigma(X)=\sqrt{\mathrm{V}(X)}=\sqrt{npq}$ (단, $q=1-p$)

9. 큰수의 법칙

어떤 시행에서 사건 A가 일어날 수학적 확률이 p일 때, n번의 독립시행에서 사건 A가 일어나는 횟수를 확률변수 X라 하면 임의의 양수 h에 대하여 n의 값이 한없이 커질 때, 확률 $\mathrm{P}\left(\left|\frac{X}{n}-p\right|<h\right)$의 값은 1에 한없이 가까워진다.

참고 큰수의 법칙에 의하여 시행 횟수 n이 충분히 클 때, 사건 A의 상대도수는 수학적 확률에 가까워지므로 사건 A의 상대도수 $\frac{X}{n}$를 사건 A가 일어날 확률 $\mathrm{P}(A)$로 간주할 수 있다. 따라서 자연현상이나 사회현상에서 수학적 확률을 구하기 어려운 경우에는 시행 횟수를 충분히 크게 한 후 사건의 상대도수를 구하여 수학적 확률로 이용할 수 있다.

예제 5 이항분포의 평균과 분산

한 개의 주사위를 두 번 던지는 시행을 32번 반복할 때, 나오는 두 눈의 수의 합이 4의 배수인 횟수를 확률변수 X라 하자. $\mathrm{E}(X)+\mathrm{V}(X)$의 값은?

① 12 ② 14 ③ 16 ④ 18 ⑤ 20

길잡이 확률변수 X가 이항분포 $\mathrm{B}(n, p)$를 따를 때
① $\mathrm{E}(X)=np$
② $\mathrm{V}(X)=npq \ (q=1-p)$
임을 이용한다.

풀이 한 개의 주사위를 두 번 던지는 시행에서 나올 수 있는 모든 경우의 수는 $6\times6=36$
이때 나오는 두 눈의 수를 차례로 a, b라 하면 $2\le a+b\le 12$
두 눈의 수의 합 $a+b$가 4의 배수인 사건을 A라 하면 사건 A는 $a+b=4$ 또는 $a+b=8$ 또는 $a+b=12$인 사건이다.
$a+b=4$인 순서쌍 (a, b)의 개수는 $(1, 3)$, $(2, 2)$, $(3, 1)$로 3
$a+b=8$인 순서쌍 (a, b)의 개수는 $(2, 6)$, $(3, 5)$, $(4, 4)$, $(5, 3)$, $(6, 2)$로 5
$a+b=12$인 순서쌍 (a, b)의 개수는 $(6, 6)$으로 1
그러므로 한 번의 시행에서 사건 A가 일어날 확률은 $\frac{3+5+1}{36}=\frac{1}{4}$
따라서 확률변수 X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(32, \frac{1}{4}\right)$을 따르므로

$$\mathrm{E}(X)=32\times\frac{1}{4}=8$$

$$\mathrm{V}(X)=32\times\frac{1}{4}\times\frac{3}{4}=6$$

이고

$$\mathrm{E}(X)+\mathrm{V}(X)=8+6=14$$

답 ②

유제

정답과 풀이 41쪽

9 [23010-0113]

확률변수 X가 이항분포 $\mathrm{B}\left(n, \frac{1}{3}\right)$을 따르고 $\mathrm{E}(X^2)=40$일 때, 자연수 n의 값을 구하시오.

10 [23010-0114]

이산확률변수 X가 갖는 값이 0, 1, 2, $\cdots$, 100이고 X의 확률질량함수가

$$\mathrm{P}(X=x)={}_{100}\mathrm{C}_x\,\frac{4^{100-x}}{5^{100}}\ (x=0, 1, 2, \cdots, 100)$$

일 때, $\sigma\left(\frac{X}{2}+2\right)$의 값은?

① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ 1 ④ 2 ⑤ 4

Level 1 기초 연습

정답과 풀이 41쪽

[23010-0115]

1 흰 공 3개, 검은 공 5개가 들어 있는 주머니에서 임의로 6개의 공을 동시에 꺼낼 때, 꺼낸 공 중 흰 공의 개수를 확률변수 X라 하자. $\mathrm{P}(X\le 2)-\mathrm{P}(X\ge 2)$의 값은?

① $-\frac{1}{4}$ ② $-\frac{1}{8}$ ③ 0 ④ $\frac{1}{8}$ ⑤ $\frac{1}{4}$

[23010-0116]

2 이산확률변수 X의 확률분포를 표로 나타내면 오른쪽과 같다. $\mathrm{V}(X)=\frac{26}{9}$일 때, a^2+b^2의 값은?

(단, a, b는 $1<a<b$인 상수이다.)

X	1	a	b	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{a}$	$\frac{1}{b}$	1

① 30 ② 35 ③ 40 ④ 45 ⑤ 50

[23010-0117]

3 이산확률변수 X가 갖는 값이 1, 2, 3, $\cdots$, 8이고 X의 확률질량함수가

$$\mathrm{P}(X=x)=\frac{a}{\sqrt{x}+\sqrt{x+1}}\ (x=1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ 8)$$

일 때, 상수 a의 값은?

① 1 ② $\frac{1}{2}$ ③ $\frac{1}{3}$ ④ $\frac{1}{4}$ ⑤ $\frac{1}{5}$

[23010-0118]

4 이항분포 $\mathrm{B}(20,\ p)$를 따르는 확률변수 X에 대하여 $\mathrm{E}(2X-5)=15$일 때, $\frac{\mathrm{P}(X=2)}{\mathrm{P}(X=1)}$의 값은?

① 8 ② $\frac{17}{2}$ ③ 9 ④ $\frac{19}{2}$ ⑤ 10

[23010-0119]

5 숫자 11, 12, 13, 14, 15가 하나씩 적혀 있는 5장의 카드 중에서 임의로 한 장의 카드를 택하는 시행을 25회 반복할 때, 소수가 적혀 있는 카드를 택하는 횟수를 확률변수 X라 하자. $\mathrm{E}(X)-\mathrm{V}(X)$의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

[23010-0120]

1 두 개의 주사위 A, B를 동시에 던져서 나오는 두 눈의 수를 각각 a, b라 할 때, ab의 양의 약수의 개수를 확률변수 X라 하자. $\mathrm{P}(3\le X\le 4)$의 값은?

① $\frac{1}{6}$ ② $\frac{1}{4}$ ③ $\frac{1}{3}$ ④ $\frac{5}{12}$ ⑤ $\frac{1}{2}$

[23010-0121]

2 여섯 개의 숫자 0, 1, 1, 2, 2, 2를 일렬로 나열하여 만든 여섯 자리 자연수 중에서 임의로 하나를 택할 때, 택한 자연수의 숫자 1과 숫자 1 사이에 있는 숫자 2의 개수를 확률변수 X라 하자. $\frac{\mathrm{P}(X=2)}{\mathrm{P}(X=0)}+\frac{\mathrm{P}(X=3)}{\mathrm{P}(X=1)}$의 값은?

① $\frac{2}{3}$ ② $\frac{5}{6}$ ③ 1 ④ $\frac{7}{6}$ ⑤ $\frac{4}{3}$

[23010-0122]

3 이산확률변수 X가 갖는 값이 1, 2, 3, $\cdots$, 9이고, 양수 d와 8 이하의 모든 자연수 n에 대하여

$$\mathrm{P}(X=n+1)-\mathrm{P}(X=n)=d$$

를 만족시킨다. d의 값이 최대일 때, $\mathrm{E}(X)$의 값은?

① $\frac{16}{3}$ ② $\frac{17}{3}$ ③ 6 ④ $\frac{19}{3}$ ⑤ $\frac{20}{3}$

[23010-0123]

4 두 주머니 A, B에 숫자 1, 2, 3, 4, 5가 하나씩 적힌 공 5개가 각각 들어 있다. 두 주머니 A, B에서 각각 임의로 3개의 공을 동시에 꺼낼 때, 꺼낸 6개의 공 중에 같은 숫자가 적힌 공의 쌍의 수를 확률변수 X라 하자. $\mathrm{V}(X)=\frac{q}{p}$일 때, $p+q$의 값을 구하시오.

(단, 같은 숫자가 적힌 두 개의 공을 한 쌍으로 보고, p와 q는 서로소인 자연수이다.)

[23010-0124]

5 이산확률변수 X의 확률분포를 표로 나타내면 오른쪽과 같다. X의 분산과 표준편차가 같을 때, $\frac{a}{b}$의 값은? (단, $ab>0$)

X	1	2	4	합계
$P(X=x)$	a	$\frac{1}{2}$	b	1

① $\frac{1}{4}$　② $\frac{1}{2}$　③ 1　④ 2　⑤ 4

[23010-0125]

6 이산확률변수 X의 확률분포를 표로 나타내면 오른쪽과 같다. $V(|10X|)$의 값은?

X	-2	-1	0	1	2	합계
$P(X=x)$	a	$2a$	$3a$	$4a$	$\frac{1}{2}$	1

① 50　② 51　③ 52　④ 53　⑤ 54

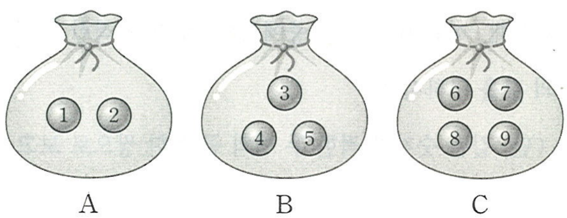
[23010-0126]

7 확률변수 X는 이항분포 $B(3, p)$를 따르고, 확률변수 Y는 이항분포 $B\left(9, \frac{1}{2}\right)$을 따른다.
$P(X\geq 2)+P(Y\geq 5)=1$일 때, $E(X)+V(X)$의 값은?

① $\frac{7}{4}$　② 2　③ $\frac{9}{4}$　④ $\frac{5}{2}$　⑤ $\frac{11}{4}$

[23010-0127]

8 그림과 같이 주머니 A에는 숫자 1, 2가 하나씩 적힌 공 2개가 들어 있고, 주머니 B에는 숫자 3, 4, 5가 하나씩 적힌 공 3개가 들어 있고, 주머니 C에는 숫자 6, 7, 8, 9가 하나씩 적힌 공 4개가 들어 있다. 세 주머니 A, B, C 중에서 임의로 1개의 주머니를 택한 후, 그 주머니에서 임의로 1개의 공을 꺼내어 공에 적혀 있는 수를 확인한 후 다시 넣는 시행을 한다. 이 시행을 432번 반복할 때, 꺼낸 공에 적힌 수가 소수인 횟수를 확률변수 X라 하자. $V(\sqrt{3}X+\sqrt{3})$의 값을 구하시오.



[23010-0128]

1 충분히 많은 흰 공, 검은 공과 비어 있는 상자 1개가 있다. 한 개의 주사위를 던져서 다음 시행을 한다.

> 주사위를 한 번 던져서 나오는 눈의 수가
> 6의 약수이면 흰 공 2개를 상자에 넣고,
> 6의 약수가 아니면 검은 공 1개를 상자에 넣는다.

이 시행을 반복하여 상자에 들어 있는 공의 개수가 처음으로 4보다 크거나 같을 때, 상자에 들어 있는 검은 공의 개수를 확률변수 X라 하자. $\mathrm{E}(X)=\frac{q}{p}$일 때, $p+q$의 값을 구하시오.

(단, p와 q는 서로소인 자연수이다.)

[23010-0129]

2 A는 B, C와 각각 한 번씩 가위바위보를 한다. A가 이기면 3점, 비기면 1점을 얻고, 지면 점수를 얻지 못한다. A가 B, C와 차례로 가위바위보를 한 후 얻은 점수의 합을 확률변수 X라 할 때, $\mathrm{V}(6X+10)$의 값은?

$\left(\text{단, A가 B, C와의 가위바위보에서 이길 확률과 비길 확률은 각각 } \frac{1}{3}\text{이다.}\right)$

① 110 ② 111 ③ 112 ④ 113 ⑤ 114

[23010-0130]

3 다음 조건을 만족시키는 모든 함수 f 중에서 임의로 하나를 택하는 시행을 n번 반복할 때, $f(3)+f(4)$의 값이 짝수인 함수를 택하는 횟수를 확률변수 X라 하자.

> (가) 함수 f는 집합 $A=\{1, 2, 3, 4\}$에서 A로의 함수이다.
> (나) $f(1)+f(2)=4$
> (다) 함수 f의 치역의 원소의 개수는 2이다.

$\mathrm{V}(X)=104$일 때, $\mathrm{E}(n-X)$의 값은?

① 136 ② 137 ③ 138 ④ 139 ⑤ 140

대표 기출 문제

EBS

출제 경향 확률변수와 확률분포의 의미를 이해하고 이산확률변수 X 또는 이산확률변수 $aX+b$의 평균과 분산을 구하는 문제가 출제된다.

2022학년도 대수능 9월 모의평가

두 이산확률변수 X, Y의 확률분포를 표로 나타내면 각각 다음과 같다.

X	1	3	5	7	9	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	a	b	c	b	a	1

Y	1	3	5	7	9	합계
$\mathrm{P}(Y=y)$	$a+\frac{1}{20}$	b	$c-\frac{1}{10}$	b	$a+\frac{1}{20}$	1

$\mathrm{V}(X)=\frac{31}{5}$일 때, $10\times\mathrm{V}(Y)$의 값을 구하시오. [4점]

출제 의도 확률분포가 표로 주어진 이산확률변수의 분산을 구할 수 있는지를 묻는 문제이다.

풀이 이산확률변수 X가 갖는 모든 값에 대한 확률의 합은 1이므로

$$a+b+c+b+a=2a+2b+c=1$$

$$\mathrm{E}(X)=1\times a+3\times b+5\times c+7\times b+9\times a=5(2a+2b+c)=5\times 1=5$$

$$\begin{aligned}\mathrm{V}(X)&=\mathrm{E}((X-5)^2)\\&=(1-5)^2\times a+(3-5)^2\times b+(5-5)^2\times c+(7-5)^2\times b+(9-5)^2\times a\\&=32a+8b\end{aligned}$$

이때 $\mathrm{V}(X)=\frac{31}{5}$이므로 $32a+8b=\frac{31}{5}$

한편,

$$\mathrm{E}(Y)=1\times\left(a+\frac{1}{20}\right)+3\times b+5\times\left(c-\frac{1}{10}\right)+7\times b+9\times\left(a+\frac{1}{20}\right)=5(2a+2b+c)=5\times 1=5$$

$$\begin{aligned}\mathrm{V}(Y)&=\mathrm{E}((Y-5)^2)\\&=(1-5)^2\times\left(a+\frac{1}{20}\right)+(3-5)^2\times b+(5-5)^2\times\left(c-\frac{1}{10}\right)+(7-5)^2\times b+(9-5)^2\times\left(a+\frac{1}{20}\right)\\&=32a+8b+\frac{8}{5}\end{aligned}$$

이때 $32a+8b=\frac{31}{5}$이므로

$$\mathrm{V}(Y)=32a+8b+\frac{8}{5}=\frac{31}{5}+\frac{8}{5}=\frac{39}{5}$$

따라서 $10\times\mathrm{V}(Y)=10\times\frac{39}{5}=78$

답 78

대표 기출 문제

EBS

출제 경향 이항분포의 의미를 이해하고, 이항분포를 따르는 확률변수 X의 평균과 분산에 대한 간단한 계산문제 또는 이항분포에서 확률변수의 성질을 이용하여 독립시행의 횟수, 확률, 평균과 분산 등을 구하는 문제가 출제된다.

2021학년도 대수능

좌표평면의 원점에 점 P가 있다. 한 개의 주사위를 사용하여 다음 시행을 한다.

> 주사위를 한 번 던져 나온 눈의 수가
> 2 이하이면 점 P를 x축의 양의 방향으로 3만큼,
> 3 이상이면 점 P를 y축의 양의 방향으로 1만큼
> 이동시킨다.

이 시행을 15번 반복하여 이동된 점 P와 직선 $3x+4y=0$ 사이의 거리를 확률변수 X라 하자. $\mathrm{E}(X)$의 값은? [4점]

① 13　② 15　③ 17　④ 19　⑤ 21

출제 의도 이항분포를 따르는 확률변수의 평균을 구할 수 있는지를 묻는 문제이다.

풀이 주사위를 15번 던져서 2 이하의 눈이 나오는 횟수를 확률변수 Y라 하면 확률변수 Y는 이항분포 $\mathrm{B}\left(15, \frac{1}{3}\right)$을 따르므로

$$\mathrm{E}(Y)=15\times\frac{1}{3}=5$$

이때 원점에 있던 점 P가 이동된 점의 좌표는

$$(3Y,\ 15-Y)$$

이므로 점 P와 직선 $3x+4y=0$ 사이의 거리 X는

$$X=\frac{|3\times3Y+4\times(15-Y)|}{\sqrt{3^2+4^2}}=\frac{|5Y+60|}{5}=Y+12$$

따라서

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(X)&=\mathrm{E}(Y+12)\\&=\mathrm{E}(Y)+12\\&=5+12=17\end{aligned}$$

답 ③

06 연속확률변수의 확률분포

1. 연속확률변수

확률변수 X가 어떤 구간에 속하는 모든 실수의 값을 가질 때, X를 연속확률변수라고 한다.

참고 길이, 무게, 온도, 시간 등의 값을 확률변수 X라 하면 X는 어떤 범위에 속하는 모든 실수의 값을 갖는다.

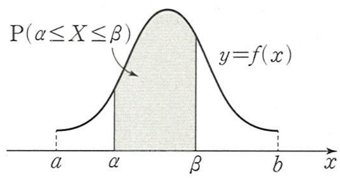
2. 확률밀도함수

일반적으로 $a \le X \le b$의 모든 실수의 값을 가지는 연속확률변수 X에 대하여 $a \le x \le b$에서 정의된 함수 $f(x)$가 다음의 세 가지를 모두 만족시킬 때, 함수 $f(x)$를 연속확률변수 X의 확률밀도함수라고 한다.

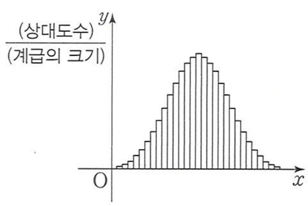
① $f(x) \ge 0$ (단, $a \le x \le b$)

② 함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축 및 두 직선 $x=a$, $x=b$로 둘러싸인 부분의 넓이는 1이다.

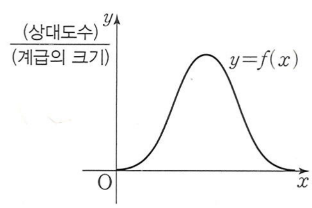
③ $\mathrm{P}(\alpha \le X \le \beta)$는 함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축 및 두 직선 $x=\alpha$, $x=\beta$로 둘러싸인 부분의 넓이와 같다. (단, $a \le \alpha \le \beta \le b$)



설명 연속확률변수 X의 $\dfrac{(\text{상대도수})}{(\text{계급의 크기})}$를 히스토그램으로 나타내면 히스토그램의 각 구간에 세워진 직사각형의 넓이는 각 구간의 상대도수를 나타내고, 상대도수의 합이 1이므로 모든 직사각형들의 넓이의 합은 항상 1이다.
이때 조사 대상의 수를 한없이 늘리고, 계급의 크기를 0에 가깝게 하여 히스토그램을 그리면 [그림 1]과 같이 어떤 곡선 모양에 가까워지고, 이 과정을 계속하면 [그림 2]와 같이 매끄러운 곡선이 된다.



[그림 1]



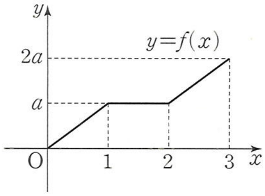
[그림 2]

참고 연속확률변수 X가 하나의 값을 가질 확률은 0이다.
즉, $\mathrm{P}(X=\alpha)=\mathrm{P}(X=\beta)=0$이므로

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(\alpha<X<\beta)&=\mathrm{P}(\alpha \le X<\beta)\\&=\mathrm{P}(\alpha<X \le \beta)\\&=\mathrm{P}(\alpha \le X \le \beta)\end{aligned}$$

예제 1 연속확률변수와 확률밀도함수

연속확률변수 X가 갖는 값의 범위는 $0\le X\le 3$이고, 확률변수 X의 확률밀도함수 $y=f(x)$의 그래프가 그림과 같을 때, $\mathrm{P}(a\le X\le 6a)$의 값은? (단, a는 상수이다.)



① $\frac{10}{27}$ ② $\frac{11}{27}$ ③ $\frac{4}{9}$

④ $\frac{13}{27}$ ⑤ $\frac{14}{27}$

길잡이 $0\le x\le 3$에서 정의된 함수 $f(x)$가 확률밀도함수이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축 및 직선 $x=3$으로 둘러싸인 부분의 넓이는 1이다.

풀이 $f(x)$가 확률밀도함수이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축 및 직선 $x=3$으로 둘러싸인 부분의 넓이는 1이다.

즉, $\frac{1}{2}\times 1\times a+1\times a+\frac{1}{2}\times(a+2a)\times 1=3a=1$이므로 $a=\frac{1}{3}$

따라서 $f(x)=\begin{cases} \frac{1}{3}x & (0\le x<1) \\ \frac{1}{3} & (1\le x<2) \\ \frac{1}{3}x-\frac{1}{3} & (2\le x\le 3) \end{cases}$이므로

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(a\le X\le 6a)&=\mathrm{P}\left(\frac{1}{3}\le X\le 2\right)\\&=\mathrm{P}\left(\frac{1}{3}\le X\le 1\right)+\mathrm{P}(1\le X\le 2)\\&=\frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{9}+\frac{1}{3}\right)\times\frac{2}{3}+1\times\frac{1}{3}=\frac{13}{27}\end{aligned}$$

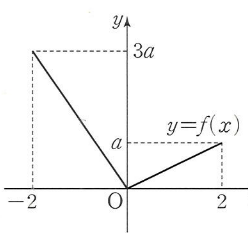
답 ④

유제

정답과 풀이 48쪽

1 [23010-0131]

연속확률변수 X가 갖는 값의 범위는 $-2\le X\le 2$이고, 확률변수 X의 확률밀도함수 $y=f(x)$의 그래프가 그림과 같을 때, $\mathrm{P}(-1\le X\le 2)$의 값은? (단, a는 상수이다.)



① $\frac{3}{8}$ ② $\frac{7}{16}$ ③ $\frac{1}{2}$

④ $\frac{9}{16}$ ⑤ $\frac{5}{8}$

2 [23010-0132]

연속확률변수 X가 갖는 값의 범위는 $0\le X\le 4$이고, 확률변수 X의 확률밀도함수 $f(x)$가 $f(x)=\frac{x+a}{16}$ $(0\le x\le 4)$이다. $\mathrm{P}(0\le X\le b)=\frac{3}{8}$일 때, $a+b$의 값을 구하시오. (단, a, b는 상수이다.)

06 연속확률변수의 확률분포

3. 정규분포

연속확률변수 X가 모든 실수의 값을 갖고, 그 확률밀도함수 $f(x)$가 두 상수 m, σ $(\sigma>0)$에 대하여

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} \quad (e\text{는 } 2.718281\cdots\text{인 무리수})$$

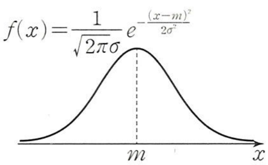
일 때 X의 확률분포를 정규분포라고 한다.

이때 확률변수 X의 평균과 표준편차는 각각 m, σ임이 알려져 있다.

또한 평균이 m, 표준편차가 σ인 정규분포를 $\mathrm{N}(m, \sigma^2)$과 같이 나타내고, 확률변수 X는 정규분포 $\mathrm{N}(m, \sigma^2)$을 따른다고 한다.

4. 정규분포를 따르는 확률변수의 확률밀도함수의 그래프

정규분포 $\mathrm{N}(m, \sigma^2)$을 따르는 연속확률변수 X의 확률밀도함수 $f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$의 그래프는 오른쪽 그림과 같은 모양이고, 다음과 같은 성질을 가지고 있음이 알려져 있다.



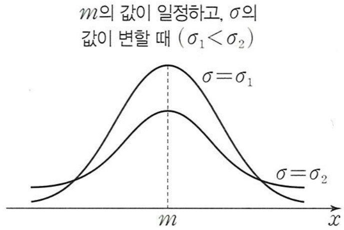
① 직선 $x=m$에 대하여 좌우 대칭인 종 모양의 곡선이다.

② x축을 점근선으로 하며, $x=m$일 때 최댓값 $\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}$을 갖는다.

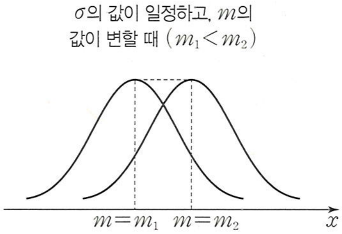
③ 곡선과 x축 사이의 넓이는 1이다.

④ 평균 m의 값이 일정할 때, [그림 1]과 같이 σ의 값이 커지면 곡선의 중앙 부분이 낮아지면서 양쪽으로 퍼지고, σ의 값이 작아지면 곡선의 중앙 부분이 높아지면서 좁아지지만 대칭축의 위치는 같다.

⑤ 표준편차 σ의 값이 일정할 때, [그림 2]와 같이 m의 값이 변하면 대칭축의 위치는 바뀌지만 곡선의 모양은 같다.



[그림 1]



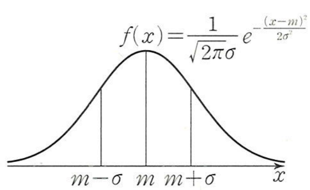
[그림 2]

참고 확률변수 X가 정규분포 $\mathrm{N}(m, \sigma^2)$을 따를 때, 다음을 만족시킨다.

① $\mathrm{P}(X\le m)=\mathrm{P}(X\ge m)=0.5$

② $\mathrm{P}(m-\sigma\le X\le m)=\mathrm{P}(m\le X\le m+\sigma)$

③ $\mathrm{P}(m-k\sigma\le X\le m)=\mathrm{P}(m\le X\le m+k\sigma)$ (단, k는 양의 상수)



예제 2 정규분포

확률변수 X가 평균이 m인 정규분포를 따르고

$$\mathrm{P}(m-1\le X\le m+2)=0.7,\ \mathrm{P}(X\le m+1)=0.8$$

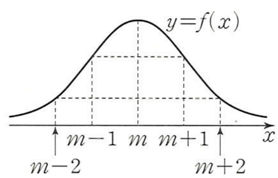
일 때, $\mathrm{P}(|X-m|\ge 2)$의 값은?

① 0.1 ② 0.2 ③ 0.3 ④ 0.4 ⑤ 0.5

길잡이 정규분포 $\mathrm{N}(m,\ \sigma^2)$을 따르는 연속확률변수 X의 확률밀도함수 $y=f(x)$의 그래프는 직선 $x=m$에 대하여 대칭이고, 이 그래프와 x축 사이의 넓이는 1이다.

풀이 평균이 m인 정규분포를 따르는 확률변수 X의 확률밀도함수를 $f(x)$라 하면 함수 $y=f(x)$의 그래프는 직선 $x=m$에 대하여 대칭이므로

$$\mathrm{P}(X\ge m-1)=\mathrm{P}(X\le m+1)=0.8$$



이때 $\mathrm{P}(m-1\le X\le m+2)=0.7$이므로

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(X\ge m+2)&=\mathrm{P}(X\ge m-1)-\mathrm{P}(m-1\le X\le m+2)\\&=0.8-0.7=0.1\end{aligned}$$

따라서

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(|X-m|\ge 2)&=\mathrm{P}(X-m\ge 2)+\mathrm{P}(X-m\le -2)\\&=\mathrm{P}(X\ge m+2)+\mathrm{P}(X\le m-2)\\&=2\mathrm{P}(X\ge m+2)\\&=2\times 0.1=0.2\end{aligned}$$

답 ②

유제

정답과 풀이 49쪽

3 [23010-0133]

평균이 3인 정규분포를 따르고 확률밀도함수가 $f(x)$인 확률변수 X에 대하여

$$f(1)=a,\ \mathrm{P}(3\le X\le 5)=b$$

일 때, 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=f(5)$로 둘러싸인 부분의 넓이로 항상 옳은 것은? (단, a, b는 상수이다.)

① $2(2a+b)$ ② $2(a+b)$ ③ $2b$ ④ $2(b-a)$ ⑤ $2(b-2a)$

4 [23010-0134]

정규분포 $\mathrm{N}(m,\ \sigma^2)$을 따르는 확률변수 X가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\mathrm{P}(X\ge 22)=\mathrm{P}(X\le 30)$
(나) $\mathrm{P}(X\le 20)=\mathrm{P}(X\ge m+2\sigma)$

$m\times\sigma$의 값을 구하시오.

06 연속확률변수의 확률분포

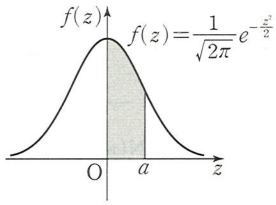
5. 표준정규분포

(1) 정규분포 중에서 평균이 0, 표준편차가 1인 정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 표준정규분포라고 한다.

(2) 확률변수 Z가 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따를 때, Z의 확률밀도함수 $f(z)$는

$$f(z)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{z^2}{2}}\ (e\text{는 }2.718281\cdots\text{인 무리수})$$

이다. 이때 임의의 양수 a에 대하여 $\mathrm{P}(0\le Z\le a)$는 오른쪽 그림에서 색칠된 부분의 넓이와 같다.



참고 확률변수 Z가 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따를 때, $\mathrm{P}(0\le Z\le a)$의 값은 표준정규분포표를 이용하여 구할 수 있다.
예를 들어 $\mathrm{P}(0\le Z\le 1.96)$의 값은 표준정규분포표의 왼쪽에 있는 수 중에서 1.9를 찾고, 표의 위쪽에 있는 수 중에서 0.06을 찾아 1.9의 가로줄과 0.06의 세로줄이 만나는 곳의 수를 찾으면 된다.
즉, $\mathrm{P}(0\le Z\le 1.96)=0.4750$이다.

z	0.00	0.01	⋯	0.06	⋯
0.0	.0000	.0040	⋯	.0239	⋯
0.1	.0398	.0438	⋯	.0636	⋯
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
1.9	.4713	.4719	⋯	.4750	⋯
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

6. 정규분포와 표준정규분포의 관계

확률변수 X가 정규분포 $\mathrm{N}(m,\ \sigma^2)\ (\sigma>0)$을 따를 때, 확률변수

$$Z=\frac{X-m}{\sigma}$$

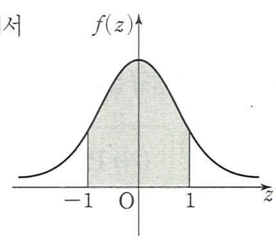
은 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다는 사실이 알려져 있다.

이때 $\mathrm{P}(a\le X\le b)$는 $Z=\frac{X-m}{\sigma}$을 이용하여 다음과 같이 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따르는 확률변수 Z로 바꾸어 구한다.

$$\mathrm{P}(a\le X\le b)=\mathrm{P}\left(\frac{a-m}{\sigma}\le\frac{X-m}{\sigma}\le\frac{b-m}{\sigma}\right)$$
$$=\mathrm{P}\left(\frac{a-m}{\sigma}\le Z\le\frac{b-m}{\sigma}\right)$$

예 확률변수 X가 정규분포 $\mathrm{N}(8,\ 2^2)$을 따를 때, $\mathrm{P}(6\le X\le 10)$의 값을 구해 보자.
$Z=\frac{X-8}{2}$로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따르고, 표준정규분포표에서 $\mathrm{P}(0\le Z\le 1)=0.3413$이므로

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(6\le X\le 10)&=\mathrm{P}\left(\frac{6-8}{2}\le\frac{X-8}{2}\le\frac{10-8}{2}\right)\\&=\mathrm{P}(-1\le Z\le 1)\\&=2\mathrm{P}(0\le Z\le 1)\\&=2\times 0.3413\\&=0.6826\end{aligned}$$



예제 3 표준정규분포

어느 과수원에서 수확한 수박 한 개의 무게는 평균이 12 kg, 표준편차가 1.6 kg인 정규분포를 따른다고 한다. 이 과수원에서 수확한 수박 중 임의로 선택한 수박 한 개의 무게가 12.8 kg 이상 14.4 kg 이하일 확률을 오른쪽 표준정규분포표를 이용하여 구한 것은?

z	$\mathrm{P}(0\le Z\le z)$
0.5	0.1915
1.0	0.3413
1.5	0.4332
2.0	0.4772

① 0.0919 ② 0.1915 ③ 0.2417
④ 0.2857 ⑤ 0.3413

길잡이 정규분포를 따르는 확률변수의 어떤 구간에서의 확률은 표준정규분포를 따르는 확률변수로 바꾸어 구한다.

풀이 이 과수원에서 수확한 수박 한 개의 무게를 확률변수 X라 하면 X는 정규분포 $\mathrm{N}(12,\ 1.6^2)$을 따르고,

$Z=\dfrac{X-12}{1.6}$로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

따라서 구하는 확률은

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(12.8\le X\le 14.4)&=\mathrm{P}\left(\frac{12.8-12}{1.6}\le Z\le\frac{14.4-12}{1.6}\right)\\&=\mathrm{P}(0.5\le Z\le 1.5)\\&=\mathrm{P}(0\le Z\le 1.5)-\mathrm{P}(0\le Z\le 0.5)\\&=0.4332-0.1915=0.2417\end{aligned}$$

답 ③

유제

정답과 풀이 49쪽

5 [23010-0135]

확률변수 X가 정규분포 $\mathrm{N}(30,\ 4^2)$을 따를 때, $\mathrm{P}(|X-29|\le 2)$의 값을 오른쪽 표준정규분포표를 이용하여 구한 것은?

z	$\mathrm{P}(0\le Z\le z)$
0.25	0.0987
0.50	0.1915
0.75	0.2734
1.00	0.3413

① 0.1974 ② 0.2426 ③ 0.2902
④ 0.3721 ⑤ 0.3830

6 [23010-0136]

어느 고등학교의 수학 시험에 응시한 수험생의 시험 점수는 평균이 m점, 표준편차가 10점인 정규분포를 따른다고 한다. 이 수학 시험에 응시한 수험생 중 임의로 선택한 수험생 한 명의 점수가 65점 이상일 확률이 0.9032일 때, m의 값을 오른쪽 표준정규분포표를 이용하여 구한 것은?

z	$\mathrm{P}(0\le Z\le z)$
1.0	0.3413
1.1	0.3643
1.2	0.3849
1.3	0.4032

① 75 ② 76 ③ 77
④ 78 ⑤ 80

06 연속확률변수의 확률분포

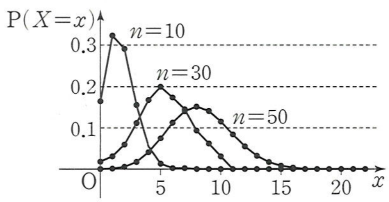
7. 이항분포와 정규분포의 관계

(1) 이항분포와 정규분포의 관계를 나타내는 그래프

한 개의 주사위를 n번 던질 때, 1의 눈이 나오는 횟수를 X라 하면 확률변수 X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(n,\ \frac{1}{6}\right)$을 따른다.

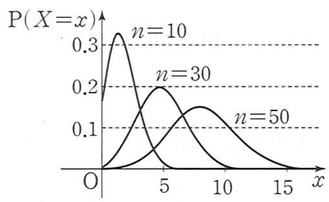
[그림 1]은 주사위를 던지는 횟수가 $n=10$, $n=30$, $n=50$일 때의 이항분포를 그래프로 나타낸 것이고, 점들을 부드럽게 연결하면 [그림 2]를 얻을 수 있다.

일반적으로 이항분포 $\mathrm{B}(n,\ p)$의 그래프는 n의 값이 커지면 정규분포의 확률밀도함수의 그래프에 가까워짐이 알려져 있다.



[그림 1]

⇨



[그림 2]

(2) 이항분포와 정규분포의 관계

확률변수 X가 이항분포 $\mathrm{B}(n,\ p)$를 따를 때, n이 충분히 크면 X는 근사적으로 정규분포 $\mathrm{N}(np,\ npq)$를 따른다. (단, $q=1-p$)

이때 확률변수 $Z=\dfrac{X-np}{\sqrt{npq}}$는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

참고 일반적으로 $np\geq 5$, $nq\geq 5$이면 n이 충분히 큰 것으로 생각한다.

예 확률변수 X가 이항분포 $\mathrm{B}\left(100,\ \frac{1}{2}\right)$을 따를 때, $\mathrm{P}(55\leq X\leq 60)$의 값을 구해 보자.

$$\mathrm{E}(X)=100\times\frac{1}{2}=50$$

$$\mathrm{V}(X)=100\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=25$$

이때 100은 충분히 큰 수이므로 확률변수 X는 근사적으로 정규분포 $\mathrm{N}(50,\ 5^2)$을 따르고, $Z=\dfrac{X-50}{5}$으로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

표준정규분포표에서 $\mathrm{P}(0\leq Z\leq 1)=0.3413$, $\mathrm{P}(0\leq Z\leq 2)=0.4772$이므로

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(55\leq X\leq 60)&=\mathrm{P}\left(\frac{55-50}{5}\leq\frac{X-50}{5}\leq\frac{60-50}{5}\right)\\&=\mathrm{P}(1\leq Z\leq 2)\\&=\mathrm{P}(0\leq Z\leq 2)-\mathrm{P}(0\leq Z\leq 1)\\&=0.4772-0.3413\\&=0.1359\end{aligned}$$

예제 4 이항분포와 정규분포의 관계

한 개의 주사위를 한 번 던지는 시행을 450번 반복할 때, 3의 배수의 눈이 나오는 횟수를 확률변수 X라 하자. $\mathrm{P}(X\le 156)$의 값을 오른쪽 표준정규분포표를 이용하여 구한 것은?

z	$\mathrm{P}(0\le Z\le z)$
0.2	0.0793
0.4	0.1554
0.6	0.2257
0.8	0.2881

① 0.5762 ② 0.5793 ③ 0.6554
④ 0.7257 ⑤ 0.7881

길잡이 확률변수 X가 이항분포 $\mathrm{B}(n, p)$를 따를 때, n이 충분히 크면 X는 근사적으로 정규분포 $\mathrm{N}(np, npq)$를 따른다. (단, $q=1-p$)

풀이 한 개의 주사위를 한 번 던져서 3의 배수의 눈이 나올 확률은 $\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$이므로 확률변수 X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(450, \frac{1}{3}\right)$을 따른다.

$$\mathrm{E}(X)=450\times\frac{1}{3}=150,\ \mathrm{V}(X)=450\times\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}=100$$

이때 450은 충분히 큰 수이므로 확률변수 X는 근사적으로 정규분포 $\mathrm{N}(150, 10^2)$을 따르고, $Z=\frac{X-150}{10}$으로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0, 1)$을 따른다.

따라서

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(X\le 156)&=\mathrm{P}\left(Z\le\frac{156-150}{10}\right)=\mathrm{P}(Z\le 0.6)=0.5+\mathrm{P}(0\le Z\le 0.6)\\&=0.5+0.2257=0.7257\end{aligned}$$

답 ④

유제

정답과 풀이 49쪽

7 [23010-0137]

확률변수 X가 이항분포 $\mathrm{B}(192, p)$를 따르고 $\mathrm{E}(X)<50$, $\mathrm{V}(X)=36$일 때, $\mathrm{P}(51\le X\le 54)$의 값을 오른쪽 표준정규분포표를 이용하여 구한 것은?

z	$\mathrm{P}(0\le Z\le z)$
0.5	0.1915
1.0	0.3413
1.5	0.4332
2.0	0.4772

① 0.1498 ② 0.2857 ③ 0.3413
④ 0.3830 ⑤ 0.4332

8 [23010-0138]

어느 도시에 등록된 자동차 중에서 색상이 무채색인 자동차의 비율이 전체의 $\frac{4}{5}$라고 한다. 이 도시에 등록된 자동차 중에서 임의로 한 대를 선택하여 색상이 무채색인지를 조사하는 시행을 900번 반복할 때, 색상이 무채색인 자동차가 696대 이하일 확률을 오른쪽 표준정규분포표를 이용하여 구한 것은?

z	$\mathrm{P}(0\le Z\le z)$
1.0	0.3413
1.5	0.4332
2.0	0.4772
2.5	0.4938

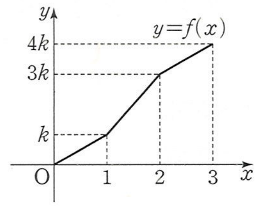
① 0.0062 ② 0.0124 ③ 0.0228
④ 0.0668 ⑤ 0.1587

Level 1 기초 연습

정답과 풀이 50쪽

[23010-0139]

1 연속확률변수 X가 갖는 값의 범위는 $0 \le X \le 3$이고, 확률변수 X의 확률밀도함수 $y=f(x)$의 그래프가 그림과 같을 때, 상수 k의 값은?



① $\frac{1}{12}$　② $\frac{1}{6}$　③ $\frac{1}{4}$
④ $\frac{1}{3}$　⑤ $\frac{5}{12}$

[23010-0140]

2 $a<b$인 두 자연수 a, b와 평균이 4인 정규분포를 따르는 확률변수 X에 대하여 $\mathrm{P}(X \ge a)=\mathrm{P}(X \le b)$일 때, ab의 최솟값은?

① 4　② 7　③ 10　④ 13　⑤ 16

[23010-0141]

3 정규분포를 따르는 확률변수 X와 표준정규분포를 따르는 확률변수 Z에 대하여

$$\mathrm{P}(X \ge 10)=\mathrm{P}(Z \ge -1),\ \mathrm{P}(X \ge 25)=\mathrm{P}(Z \le -2)$$

일 때, $\mathrm{E}(X)+\mathrm{V}(X)$의 값은?

① 10　② 20　③ 30　④ 40　⑤ 50

[23010-0142]

4 어느 공장에서 생산하는 테니스공 한 개의 무게는 평균이 57.6 g, 표준편차가 0.4 g인 정규분포를 따른다고 한다. 이 공장에서 생산한 테니스공 중 임의로 선택한 테니스공 한 개의 무게가 57 g 이상 58 g 이하일 확률을 오른쪽 표준정규분포표를 이용하여 구한 것은?

z	$\mathrm{P}(0 \le Z \le z)$
0.5	0.1915
1.0	0.3413
1.5	0.4332
2.0	0.4772

① 0.6247　② 0.6687　③ 0.6826
④ 0.7745　⑤ 0.8413

[23010-0143]

5 확률변수 X가 이항분포 $\mathrm{B}\left(720, \frac{1}{6}\right)$을 따른다. $\mathrm{P}(X \le a)=0.9332$일 때, 상수 a의 값을 오른쪽 표준정규분포표를 이용하여 구한 것은?

z	$\mathrm{P}(0 \le Z \le z)$
0.5	0.1915
1.0	0.3413
1.5	0.4332
2.0	0.4772

① 65　② 100　③ 135
④ 170　⑤ 205

[23010-0144]

1 연속확률변수 X가 갖는 값의 범위는 $0\le X\le 4$이고, $0<k<\frac{4}{5}$인 실수 k에 대하여 확률변수 X의 확률밀도함수 $f(x)$가 $f(x)=\frac{|x-5k|}{5}$ $(0\le x\le 4)$일 때, $\mathrm{P}(0\le X\le 5k)$의 최댓값과 최솟값을 각각 M, m이라 하자. $\frac{M}{m}$의 값은?

① 5 ② 6 ③ 7 ④ 8 ⑤ 9

[23010-0145]

2 양의 상수 a에 대하여 연속확률변수 X가 갖는 값의 범위는 $0\le X\le 3a$이고, 확률변수 X의 확률밀도함수 $f(x)$가

$$f(x)=\begin{cases} a & (0\le x\le a) \\ \dfrac{3a-x}{2} & (a<x\le 3a) \end{cases}$$

일 때, $a^2+\mathrm{P}\left(\frac{a}{3}\le X\le 2a\right)$의 값은?

① $\frac{13}{12}$ ② $\frac{9}{8}$ ③ $\frac{7}{6}$ ④ $\frac{29}{24}$ ⑤ $\frac{5}{4}$

[23010-0146]

3 평균이 10인 정규분포를 따르는 확률변수 X에 대하여 $\mathrm{P}(9\le X\le 10)$, $\mathrm{P}(11\le X\le 13)$, $\mathrm{P}(X\le 7)$의 값이 이 순서대로 등차수열을 이룰 때, $\mathrm{P}(7\le X\le 9)$의 값은?

① $\frac{1}{3}$ ② $\frac{1}{4}$ ③ $\frac{1}{5}$ ④ $\frac{1}{6}$ ⑤ $\frac{1}{7}$

[23010-0147]

4 세 확률변수 X_1, X_2, X_3이 각각 평균이 m, m, $3m$인 정규분포를 따른다. 세 확률변수 X_1, X_2, X_3의 확률밀도함수를 각각 $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$라 하면 세 함수 $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $f(m)=h(3m)<g(m)$
(나) $f(\alpha)=g(\alpha)=h(\alpha)$인 실수 α가 존재한다.

$$8\mathrm{P}(X_3\le m)=\mathrm{P}(m\le X_1\le 2m)+\mathrm{P}(m\le X_2\le 2m)+\mathrm{P}(m\le X_3\le 2m)=\frac{4}{5}$$

일 때, $\mathrm{P}(m\le X_2\le \alpha)$의 값은? (단, $m>0$)

① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{3}{10}$ ③ $\frac{7}{20}$ ④ $\frac{2}{5}$ ⑤ $\frac{9}{20}$

[23010-0148]

5 양수 σ에 대하여 확률변수 X는 정규분포 $\mathrm{N}(50,\ (2\sigma)^2)$을 따르고 확률변수 Y는 정규분포 $\mathrm{N}(56,\ \sigma^2)$을 따를 때, $\mathrm{P}(48 \le X \le 56) = \mathrm{P}(a \le Y \le a+4)$를 만족시키는 모든 실수 a의 값의 합은?

① 100 ② 102 ③ 104 ④ 106 ⑤ 108

[23010-0149]

6 어느 비누 공방에서 만든 수제비누 한 개의 무게는 표준편차가 5인 정규분포를 따르고, 이 공방에서 만든 수제비누 한 개의 무게가 평균과 a 이상 차이가 나면 불량품으로 분류된다. 이 공방에서 만든 수제비누 중 임의로 선택한 한 개의 수제비누가 불량품으로 분류될 확률이 0.1616 이하가 되도록 하는 양수 a의 최솟값을 오른쪽 표준정규분포표를 이용하여 구하시오. (단, 무게의 단위는 g이다.)

z	$\mathrm{P}(0 \le Z \le z)$
1.0	0.3413
1.2	0.3849
1.4	0.4192
1.6	0.4452

[23010-0150]

7 어느 과수원에서 수확한 사과 한 개의 당도는 평균이 12, 표준편차가 4인 정규분포를 따른다고 한다. 이 과수원에서 수확한 사과의 당도가 9 이상이면 판매 가능한 상품으로 분류되며, 16 이상이면 특상품으로 분류된다. 이 과수원에서 임의로 선택한 사과 한 개가 판매 가능한 상품일 때, 이 사과가 특상품일 확률을 오른쪽 표준정규분포표를 이용하여 구하면 $\dfrac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오.

(단, 당도의 단위는 Brix이고, p와 q는 서로소인 자연수이다.)

z	$\mathrm{P}(0 \le Z \le z)$
0.25	0.01
0.50	0.19
0.75	0.27
1.00	0.34

[23010-0151]

8 한 개의 주사위를 한 번 던져서 나온 눈의 수가 5의 약수이면 1점을 얻고, 5의 약수가 아니면 2점을 얻는 게임이 있다. 이 게임을 162번 반복하여 얻을 수 있는 총 점수를 확률변수 X라 하자. $\mathrm{P}(261 \le X \le 282)$의 값을 오른쪽 표준정규분포표를 이용하여 구한 것은?

z	$\mathrm{P}(0 \le Z \le z)$
0.5	0.1915
1.0	0.3413
1.5	0.4332
2.0	0.4772

① 0.8185 ② 0.8413 ③ 0.9104
④ 0.9554 ⑤ 0.9772

[23010-0152]

1 자연수 m에 대하여 확률변수 X가 정규분포 $\mathrm{N}(m,\ 2^2)$을 따르고 확률변수 X의 확률밀도함수가 $f(x)$이다. 함수 $g(x)=\begin{cases} f(x) & (x<4) \\ f(8-x) & (x\ge 4) \end{cases}$에 대하여 오른쪽 표준정규분포표를 이용하여 **보기**에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

z	$\mathrm{P}(0\le Z\le z)$
0.5	0.1915
1.0	0.3413
1.5	0.4332
2.0	0.4772

보기

ㄱ. $m=4$일 때 곡선 $y=g(x)$와 x축 및 두 직선 $x=4$, $x=6$으로 둘러싸인 부분의 넓이는 0.3413이다.

ㄴ. $m=5$일 때 곡선 $y=g(x)$와 x축 사이의 넓이는 0.6170이다.

ㄷ. 자연수 n에 대하여 방정식 $g(x)=g(n)$의 서로 다른 실근의 개수를 a_n이라 할 때, $a_4+a_5+a_6=9$이면 곡선 $y=g(x)$와 x축, y축 및 직선 $x=8$로 둘러싸인 부분의 넓이는 1.3652이다.

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

[23010-0153]

2 평균이 m, 표준편차가 σ인 정규분포를 따르는 확률변수 X가 다음 조건을 만족시킨다.

z	$\mathrm{P}(0\le Z\le z)$
1.0	0.3413
1.5	0.4332
2.0	0.4772
2.5	0.4938

(가) m과 σ는 모두 자연수이고, $m\times\sigma$의 값은 720보다 작다.

(나) $\mathrm{P}(-\sigma\le X\le 2m+\sigma)=0.9876$

$m\times\sigma$의 값이 최대일 때, $\mathrm{P}(X\ge 60)$의 값을 오른쪽 표준정규분포표를 이용하여 구한 것은?

① 0.0062 ② 0.0228 ③ 0.0668 ④ 0.1587 ⑤ 0.3413

[23010-0154]

3 한 개의 주사위를 한 번 던져 3의 배수의 눈이 나오면 주사위를 더 던지지 않고, 3의 배수의 눈이 나오지 않으면 주사위를 한 번만 더 던져 3의 배수의 눈이 나오는지를 확인하는 시행을 한다. 이 시행을 1620번 반복할 때, 3의 배수의 눈이 나오는 횟수를 확률변수 X라 하자. $\mathrm{P}(880\le X\le 910)$의 값을 오른쪽 표준정규분포표를 이용하여 구한 것은?

z	$\mathrm{P}(0\le Z\le z)$
0.5	0.1915
1.0	0.3413
1.5	0.4332
2.0	0.4772

① 0.3830 ② 0.5328 ③ 0.6826
④ 0.7745 ⑤ 0.9104

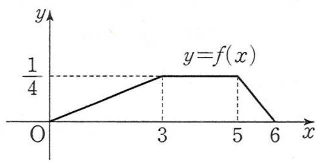
대표 기출 문제

EBS

출제 경향 확률밀도함수의 그래프를 이용하여 연속확률변수의 확률을 구하는 문제가 출제된다.

2022학년도 대수능

두 연속확률변수 X와 Y가 갖는 값의 범위는 $0\le X\le 6$, $0\le Y\le 6$이고, X와 Y의 확률밀도함수는 각각 $f(x)$, $g(x)$이다. 확률변수 X의 확률밀도함수 $f(x)$의 그래프는 그림과 같다.



$0\le x\le 6$인 모든 x에 대하여

$$f(x)+g(x)=k\ (k\text{는 상수})$$

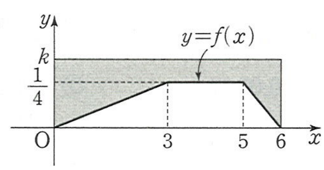
를 만족시킬 때, $\mathrm{P}(6k\le Y\le 15k)=\dfrac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오.

(단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

출제 의도 확률밀도함수의 그래프를 이용하여 어떤 구간에서의 확률을 구할 수 있는지를 묻는 문제이다.

풀이 $0\le x\le 6$인 모든 실수 x에 대하여 $f(x)+g(x)=k$ (k는 상수)이므로

$$g(x)=k-f(x)$$



이때 $0\le Y\le 6$이고 확률밀도함수의 정의에 의하여 $g(x)=k-f(x)\ge 0$, 즉 $k\ge f(x)$이므로 그림과 같이 함수 $y=f(x)$의 그래프와 y축 및 두 직선 $x=6$, $y=k$로 둘러싸인 부분의 넓이는 1이고, $0\le x\le 6$에서 함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이도 1이므로

$$k\times 6=2,\ k=\frac{1}{3}$$

이때 $0\le x\le 3$에서 $f(x)=\dfrac{1}{12}x$이고 $\mathrm{P}(6k\le Y\le 15k)=\mathrm{P}(2\le Y\le 5)$의 값은 함수 $y=f(x)$의 그래프와 세 직선 $x=2$, $x=5$, $y=\dfrac{1}{3}$로 둘러싸인 부분의 넓이이므로

$$\mathrm{P}(2\le Y\le 5)=\left[1\times\frac{1}{3}-\frac{1}{2}\times\{f(2)+f(3)\}\times 1\right]+2\times\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)=\frac{7}{24}$$

따라서 $p=24$, $q=7$이므로

$$p+q=31$$

답 31

대표 기출 문제

EBS

출제 경향 실생활에서 정규분포를 따르는 확률변수가 어떤 범위의 값을 가질 확률을 표준정규분포표를 이용하여 구하는 문제가 출제된다.

2019학년도 대수능

어느 회사 직원들의 어느 날의 출근 시간은 평균이 66.4분, 표준편차가 15분인 정규분포를 따른다고 한다. 이 날 출근 시간이 73분 이상인 직원들 중에서 40 %, 73분 미만인 직원들 중에서 20 %가 지하철을 이용하였고, 나머지 직원들은 다른 교통수단을 이용하였다. 이 날 출근한 이 회사 직원들 중 임의로 선택한 1명이 지하철을 이용하였을 확률은?

(단, Z가 표준정규분포를 따르는 확률변수일 때, $\mathrm{P}(0\le Z\le 0.44)=0.17$로 계산한다.) [4점]

① 0.306 ② 0.296 ③ 0.286 ④ 0.276 ⑤ 0.266

출제 의도 정규분포를 따르는 확률변수가 어떤 범위의 값을 가질 확률을 구하고, 확률의 곱셈정리를 활용할 수 있는지를 묻는 문제이다.

풀이 직원들의 출근 시간을 확률변수 X라 하면 X는 정규분포 $\mathrm{N}(66.4,\ 15^2)$을 따르고,

$Z=\dfrac{X-66.4}{15}$로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(X\ge 73)&=\mathrm{P}\left(Z\ge \frac{73-66.4}{15}\right)\\&=\mathrm{P}(Z\ge 0.44)\\&=0.5-\mathrm{P}(0\le Z\le 0.44)\\&=0.5-0.17=0.33\end{aligned}$$

이고

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(X<73)&=1-\mathrm{P}(X\ge 73)\\&=1-0.33=0.67\end{aligned}$$

따라서 구하는 확률은

$$0.33\times 0.4+0.67\times 0.2=0.266$$

답 ⑤

07 통계적 추정

1. 모집단과 표본

(1) 통계 조사에서 조사의 대상이 되는 집단 전체를 모집단이라 하고, 조사하기 위하여 모집단에서 뽑은 일부분을 표본이라고 한다. 이때 모집단에서 표본을 뽑는 것을 추출이라고 한다.

(2) 통계 조사에서 모집단 전체를 조사하는 것을 전수조사라 하고, 모집단의 일부분, 즉 표본을 조사하는 것을 표본조사라고 한다. 이때 표본에 포함된 대상의 개수를 표본의 크기라고 한다.

(3) 모집단에서 표본을 추출할 때, 모집단에 속하는 각 대상이 같은 확률로 추출되도록 하는 방법을 임의추출이라고 한다.

2. 모평균과 표본평균

(1) 어떤 모집단에서 조사하고자 하는 특성을 나타내는 확률변수를 X라 할 때, X의 평균, 분산, 표준편차를 각각 모평균, 모분산, 모표준편차라 하고, 기호로 각각 m, σ^2, σ와 같이 나타낸다.

(2) 모집단에서 임의추출한 크기가 n인 표본을 X_1, X_2, X_3, $\cdots$, X_n이라 할 때, 이 표본의 평균, 분산, 표준편차를 각각 표본평균, 표본분산, 표본표준편차라 하고, 기호로 $\overline{X}$, S^2, S와 같이 나타낸다. 이때 $\overline{X}$, S^2, S는 다음과 같이 구한다.

① $\overline{X}=\dfrac{1}{n}(X_1+X_2+X_3+\cdots+X_n)$

② $S^2=\dfrac{1}{n-1}\{(X_1-\overline{X})^2+(X_2-\overline{X})^2+(X_3-\overline{X})^2+\cdots+(X_n-\overline{X})^2\}$ (단, $n\geq 2$)

③ $S=\sqrt{S^2}$

3. 표본평균의 확률분포

모평균 m은 고정된 상수이지만 표본평균 $\overline{X}$는 임의추출된 표본에 따라 여러 가지 값을 가질 수 있으므로 확률변수이다. 따라서 $\overline{X}$의 확률분포를 구할 수 있다.

예 모집단의 확률변수 X의 확률분포가 오른쪽 표와 같을 때, 이 모집단에서 임의추출한 크기가 2인 표본 (X_1, X_2)와 그 표본평균 $\overline{X}=\dfrac{X_1+X_2}{2}$는 다음과 같다.

X	1	2	3	합계
$P(X=x)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	1

(X_1, X_2)	(1, 1)	(1, 2)	(1, 3)	(2, 1)	(2, 2)	(2, 3)	(3, 1)	(3, 2)	(3, 3)
$\overline{X}$	1	1.5	2	1.5	2	2.5	2	2.5	3

따라서 확률변수 $\overline{X}$의 확률분포를 표로 나타내면 오른쪽과 같다. 이때

$$P(\overline{X}=1)=P(X=1)\times P(X=1)=\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{9}$$

$\overline{X}$	1	1.5	2	2.5	3	합계
$P(\overline{X}=\overline{x})$	$\frac{1}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{9}$	1

예제 1 표본평균의 확률분포

모집단의 확률변수 X의 확률분포를 표로 나타내면 오른쪽과 같다. 이 모집단에서 크기가 2인 표본을 임의추출하여 구한 표본평균을 $\overline{X}$라 하자. $\mathrm{P}(X\leq 2)=2\mathrm{P}(\overline{X}=3)$일 때, $\dfrac{b}{a}$의 값을 구하시오.

X	1	2	3	4	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	a	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{4}$	b	1

길잡이 모집단에서 임의추출한 크기가 2인 표본을 X_1, X_2라 할 때, 이 표본의 평균인 표본평균 $\overline{X}$는 $\overline{X}=\dfrac{X_1+X_2}{2}$이다.

풀이 확률변수 X가 갖는 모든 값에 대한 확률의 합은 1이므로

$$a+\frac{3}{8}+\frac{1}{4}+b=1,\ a+b=\frac{3}{8} \qquad \cdots\cdots ㉠$$

$$\mathrm{P}(X\leq 2)=\mathrm{P}(X=1)+\mathrm{P}(X=2)=a+\frac{3}{8}$$

이 모집단에서 임의추출한 크기가 2인 표본을 (X_1, X_2)라 하면 $\overline{X}=3$인 경우는 $(2, 4)$, $(3, 3)$, $(4, 2)$일 때이므로

$$\mathrm{P}(\overline{X}=3)=\frac{3}{8}\times b+\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}+b\times\frac{3}{8}=\frac{3}{4}b+\frac{1}{16}$$

$\mathrm{P}(X\leq 2)=2\mathrm{P}(\overline{X}=3)$에서

$$a+\frac{3}{8}=2\left(\frac{3}{4}b+\frac{1}{16}\right),\ a-\frac{3}{2}b=-\frac{1}{4} \qquad \cdots\cdots ㉡$$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=\dfrac{1}{8}$, $b=\dfrac{1}{4}$

따라서 $\dfrac{b}{a}=\dfrac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{8}}=2$

답 2

유제

정답과 풀이 56쪽

1 [23010-0155]

모집단의 확률변수 X의 확률분포를 표로 나타내면 오른쪽과 같다. 이 모집단에서 크기가 3인 표본을 임의추출하여 구한 표본평균을 $\overline{X}$라 할 때, $\mathrm{P}(\overline{X}=2)$의 값은?

X	0	2	4	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	1

① $\dfrac{11}{54}$　② $\dfrac{2}{9}$　③ $\dfrac{13}{54}$　④ $\dfrac{7}{27}$　⑤ $\dfrac{5}{18}$

2 [23010-0156]

모집단의 확률변수 X의 확률분포를 표로 나타내면 오른쪽과 같고, a, b, c는 이 순서대로 등차수열을 이룬다. 이 모집단에서 크기가 2인 표본을 임의추출하여 구한 표본평균을 $\overline{X}$라 하자. $\mathrm{P}\left(\overline{X}=\dfrac{3}{2}\right)=\dfrac{1}{18}$일 때, $\mathrm{E}(6X)$의 값을 구하시오.

X	0	1	2	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	a	b	c	1

4. 표본평균의 평균, 분산, 표준편차

모평균이 m, 모표준편차가 σ인 모집단에서 크기가 n인 표본을 임의추출할 때, 표본평균 $\overline{X}$에 대하여 다음이 성립한다.

(1) $\mathrm{E}(\overline{X})=m$

(2) $\mathrm{V}(\overline{X})=\dfrac{\sigma^2}{n}$

(3) $\sigma(\overline{X})=\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$

설명 모집단의 확률변수 X의 확률분포가 오른쪽 표와 같을 때, 모평균 m, 모분산 σ^2, 모표준편차 σ는 각각 다음과 같다.

X	2	4	6	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	1

$$m=2\times\frac{1}{3}+4\times\frac{1}{3}+6\times\frac{1}{3}=4$$

$$\sigma^2=2^2\times\frac{1}{3}+4^2\times\frac{1}{3}+6^2\times\frac{1}{3}-4^2=\frac{8}{3}$$

$$\sigma=\sqrt{\frac{8}{3}}=\frac{2\sqrt{6}}{3}$$

이 모집단에서 임의추출한 크기가 2인 표본을 (X_1, X_2)라 할 때, 그 표본평균 $\overline{X}=\dfrac{X_1+X_2}{2}$가 갖는 값은 2, 3, 4, 5, 6이고 확률변수 $\overline{X}$의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

$\overline{X}$	2	3	4	5	6	합계
$\mathrm{P}(\overline{X}=\overline{x})$	$\frac{1}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{9}$	1

$$\mathrm{E}(\overline{X})=2\times\frac{1}{9}+3\times\frac{2}{9}+4\times\frac{1}{3}+5\times\frac{2}{9}+6\times\frac{1}{9}=4$$

$$\mathrm{V}(\overline{X})=2^2\times\frac{1}{9}+3^2\times\frac{2}{9}+4^2\times\frac{1}{3}+5^2\times\frac{2}{9}+6^2\times\frac{1}{9}-4^2=\frac{4}{3}$$

$$\sigma(\overline{X})=\sqrt{\frac{4}{3}}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$$

이때 표본의 크기가 $n=2$이므로

$$\frac{\sigma^2}{n}=\frac{8}{3}\times\frac{1}{2}=\frac{4}{3},\ \frac{\sigma}{\sqrt{n}}=\frac{2\sqrt{6}}{3}\times\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$$

따라서 다음이 성립한다.

① $\mathrm{E}(\overline{X})=4=m$

② $\mathrm{V}(\overline{X})=\dfrac{4}{3}=\dfrac{\sigma^2}{n}$

③ $\sigma(\overline{X})=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}=\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$

예제 2 표본평균의 평균, 분산, 표준편차

모집단의 확률변수 X의 확률분포를 표로 나타내면 오른쪽과 같다. $\mathrm{E}(X^2)=9$일 때, 이 모집단에서 크기가 4인 표본을 임의추출하여 구한 표본평균 $\overline{X}$에 대하여 $\mathrm{V}(\overline{X})$의 값은?

X	1	3	5	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	a	b	$\frac{1}{4}$	1

① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{9}{16}$ ③ $\frac{5}{8}$ ④ $\frac{11}{16}$ ⑤ $\frac{3}{4}$

길잡이 모평균이 m, 모분산이 σ^2인 모집단에서 크기가 n인 표본을 임의추출하여 구한 표본평균 $\overline{X}$에 대하여 $\mathrm{V}(\overline{X})=\frac{\sigma^2}{n}$임을 이용한다.

풀이 확률변수 X가 갖는 모든 값에 대한 확률의 합은 1이므로

$$a+b+\frac{1}{4}=1,\ a+b=\frac{3}{4} \qquad \cdots\cdots ㉠$$

또한 $\mathrm{E}(X^2)=1^2\times a+3^2\times b+5^2\times\frac{1}{4}=9$에서 $a+9b=\frac{11}{4}$ ⋯⋯ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=\frac{1}{2},\ b=\frac{1}{4}$

$$\mathrm{E}(X)=1\times\frac{1}{2}+3\times\frac{1}{4}+5\times\frac{1}{4}=\frac{5}{2}$$

이므로

$$\mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2=9-\left(\frac{5}{2}\right)^2=\frac{11}{4}$$

이때 표본의 크기가 4이므로

$$\mathrm{V}(\overline{X})=\frac{\mathrm{V}(X)}{4}=\frac{11}{16}$$

답 ④

유제

정답과 풀이 56쪽

3 [23010-0157]

모평균이 6, 모표준편차가 $\sqrt{2}$인 모집단에서 크기가 9인 표본을 임의추출하여 구한 표본평균을 $\overline{X}$라 하자. $\mathrm{E}(3\overline{X}+k)+\mathrm{V}(3\overline{X}+k)=30$을 만족시키는 상수 k의 값은?

① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

4 [23010-0158]

모집단의 확률변수 X의 확률분포를 표로 나타내면 오른쪽과 같다. 이 모집단에서 크기가 14인 표본을 임의추출하여 구한 표본평균을 $\overline{X}$라 하자. $\mathrm{E}(\overline{X})=\frac{1}{5}$일 때, $\sigma(5\overline{X})$의 값은?

X	-1	0	1	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	a	b	$\frac{2}{5}$	1

① 1 ② $\sqrt{2}$ ③ $\sqrt{3}$ ④ 2 ⑤ $\sqrt{5}$

07 통계적 추정

5. 표본평균의 분포

모평균이 m, 모표준편차가 σ인 모집단에서 임의추출한 크기가 n인 표본의 표본평균 $\overline{X}$에 대하여 다음이 성립한다.

(1) 모집단이 정규분포 $\mathrm{N}(m, \sigma^2)$을 따르면 표본평균 $\overline{X}$는 정규분포 $\mathrm{N}\left(m, \dfrac{\sigma^2}{n}\right)$을 따른다.

(2) 모집단이 정규분포를 따르지 않을 때에도 표본의 크기 n이 충분히 크면 표본평균 $\overline{X}$는 근사적으로 정규분포 $\mathrm{N}\left(m, \dfrac{\sigma^2}{n}\right)$을 따른다.

예 ① 모집단의 확률변수 X가 정규분포 $\mathrm{N}(50, 8^2)$을 따르고, 이 모집단에서 크기가 4인 표본을 임의추출할 때 표본평균을 $\overline{X}$라 하면

$$m=\mathrm{E}(X)=50$$
$$\sigma^2=\mathrm{V}(X)=8^2=64$$

이므로

$$\mathrm{E}(\overline{X})=\mathrm{E}(X)=50$$
$$\mathrm{V}(\overline{X})=\frac{\mathrm{V}(X)}{n}=\frac{64}{4}=16$$

따라서 표본평균 $\overline{X}$는 정규분포 $\mathrm{N}(50, 4^2)$을 따른다.

② 정규분포 $\mathrm{N}(50, 8^2)$을 따르는 모집단에서 크기가 4인 표본을 임의추출할 때 표본평균 $\overline{X}$는 정규분포 $\mathrm{N}(50, 4^2)$을 따르므로 확률변수 $Z=\dfrac{\overline{X}-50}{4}$은 표준정규분포 $\mathrm{N}(0, 1)$을 따른다. 따라서 $\mathrm{P}(\overline{X}\geq 54)$의 값을 오른쪽 표준정규분포표를 이용하여 구해 보면 다음과 같다.

z	$\mathrm{P}(0\leq Z\leq z)$
0.5	0.1915
1.0	0.3413
1.5	0.4332
2.0	0.4772

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(\overline{X}\geq 54)&=\mathrm{P}\left(\frac{\overline{X}-50}{4}\geq\frac{54-50}{4}\right)\\&=\mathrm{P}(Z\geq 1)\\&=0.5-\mathrm{P}(0\leq Z\leq 1)\\&=0.5-0.3413\\&=0.1587\end{aligned}$$

예제 3 표본평균의 분포

어느 쇼핑사이트의 고객 1명이 이 사이트에 머무는 시간은 평균이 12분, 표준편차가 4분인 정규분포를 따른다고 한다. 이 쇼핑사이트의 고객 중에서 임의추출한 25명이 이 사이트에 머무는 시간의 표본평균이 13.6분 이상일 확률을 오른쪽 표준정규분포표를 이용하여 구한 것은?

z	$\mathrm{P}(0 \le Z \le z)$
0.5	0.1915
1.0	0.3413
1.5	0.4332
2.0	0.4772

① 0.0228 ② 0.0456 ③ 0.0668
④ 0.0896 ⑤ 0.1336

길잡이 크기가 25인 표본의 표본평균 $\overline{X}$에 대한 확률분포를 구하고, 표준정규분포표를 이용하여 확률을 구한다.

풀이 이 쇼핑사이트의 고객 1명이 이 사이트에 머무는 시간을 확률변수 X라 하면 X는 정규분포 $\mathrm{N}(12,\ 4^2)$을 따른다.
이때 크기가 25인 표본의 표본평균을 $\overline{X}$라 하면

$$\mathrm{E}(\overline{X})=\mathrm{E}(X)=12,\ \sigma(\overline{X})=\frac{\sigma(X)}{\sqrt{25}}=\frac{4}{5}$$

이므로 확률변수 $\overline{X}$는 정규분포 $\mathrm{N}\left(12,\ \left(\frac{4}{5}\right)^2\right)$을 따르고, $Z=\dfrac{\overline{X}-12}{\frac{4}{5}}$로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.
따라서 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(\overline{X}\ge 13.6)=\mathrm{P}\left(Z\ge\frac{13.6-12}{\frac{4}{5}}\right)=\mathrm{P}(Z\ge 2)=0.5-\mathrm{P}(0\le Z\le 2)=0.5-0.4772=0.0228$$

답 ①

유제

정답과 풀이 57쪽

5 [23010-0159]

어느 공장에서 생산하는 아이스크림 1개의 무게는 평균이 150 g, 표준편차가 8 g인 정규분포를 따른다고 한다. 이 공장에서 생산한 아이스크림 중에서 임의추출한 16개의 무게의 표본평균을 $\overline{X}$라 할 때, $\mathrm{P}(|\overline{X}-149|\le 3)$의 값을 오른쪽 표준정규분포표를 이용하여 구한 것은?

z	$\mathrm{P}(0 \le Z \le z)$
0.5	0.1915
1.0	0.3413
1.5	0.4332
2.0	0.4772

① 0.8185 ② 0.8413 ③ 0.9104
④ 0.9332 ⑤ 0.9544

6 [23010-0160]

양수 σ에 대하여 정규분포 $\mathrm{N}(m,\ \sigma^2)$을 따르는 모집단에서 크기가 9인 표본을 임의추출하여 구한 표본평균을 $\overline{X}$, 정규분포 $\mathrm{N}(2m,\ (2\sigma)^2)$을 따르는 모집단에서 크기가 4인 표본을 임의추출하여 구한 표본평균을 $\overline{Y}$라 하자. $\mathrm{P}(\overline{X}\le a)=\mathrm{P}(\overline{Y}\ge a)$일 때, $10\times\dfrac{m}{a}$의 값을 구하시오.

(단, a는 $a\ne 0$인 상수이다.)

07 통계적 추정

6. 모평균의 추정

(1) 모집단에서 추출한 표본에서 얻은 자료를 이용하여 모집단의 어떤 성질을 확률적으로 추측하는 것을 추정이라고 한다.

(2) 정규분포 $\mathrm{N}(m, \sigma^2)$을 따르는 모집단에서 크기가 n인 표본을 임의추출하여 구한 표본평균 $\overline{X}$의 값이 $\overline{x}$일 때, 모평균 m에 대한 신뢰구간은 다음과 같다.

① 신뢰도 95 %의 신뢰구간

$$\overline{x}-1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\le m\le\overline{x}+1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

② 신뢰도 99 %의 신뢰구간

$$\overline{x}-2.58\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\le m\le\overline{x}+2.58\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

설명 ① 모집단의 분포가 정규분포 $\mathrm{N}(m, \sigma^2)$을 따를 때, 크기가 n인 표본을 임의추출하면 표본평균 $\overline{X}$는 정규분포 $\mathrm{N}\left(m, \frac{\sigma^2}{n}\right)$을 따르고, 확률변수 $Z=\dfrac{\overline{X}-m}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$은 표준정규분포 $\mathrm{N}(0, 1)$을 따른다.

이때 표준정규분포표에서 $\mathrm{P}(-1.96\le Z\le 1.96)=0.95$이므로

$$\begin{aligned}\mathrm{P}\left(-1.96\le\frac{\overline{X}-m}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\le 1.96\right)&=\mathrm{P}\left(-1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\le\overline{X}-m\le 1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)\\&=\mathrm{P}\left(-1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\le m-\overline{X}\le 1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)\\&=\mathrm{P}\left(\overline{X}-1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\le m\le\overline{X}+1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)\\&=0.95\end{aligned}$$

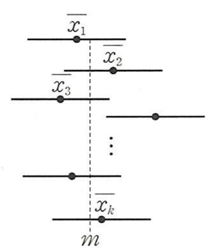
따라서 모집단으로부터 크기가 n인 표본을 임의추출하여 구한 표본평균 $\overline{X}$의 값을 $\overline{x}$라 할 때,

$$\overline{x}-1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\le m\le\overline{x}+1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

를 모평균 m에 대한 신뢰도 95 %의 신뢰구간이라고 한다.

② 표본평균 $\overline{X}$는 확률변수이므로 추출되는 표본에 따라 표본평균 $\overline{X}$의 값 $\overline{x}$가 달라지고 그에 따라 신뢰구간도 달라진다. 이와 같은 신뢰구간 중에는 오른쪽 그림과 같이 모평균 m을 포함하는 것과 포함하지 않는 것이 있을 수 있다.

따라서 모평균 m에 대하여 신뢰도 95 %의 신뢰구간이란 크기가 n인 표본을 여러 번 임의추출하여 신뢰구간을 각각 구하면 그 중에서 95 %는 모평균 m을 포함할 것으로 기대된다는 것을 의미한다.



참고 모평균의 신뢰구간을 구할 때 모표준편차 σ의 값을 알 수 없는 경우가 많다. 이 경우 표본의 크기 n이 충분히 크면 모표준편차 σ 대신 표본표준편차 s를 이용하여 모평균의 신뢰구간을 구할 수 있다는 것이 알려져 있다.

예제 4 모평균의 추정

어느 회사에서 생산하는 컬링 스톤 1개의 무게는 평균이 m, 표준편차가 σ인 정규분포를 따른다고 한다. 이 회사에서 생산한 컬링 스톤 중에서 64개를 임의추출하여 구한 표본평균이 19.96일 때, 이 결과를 이용하여 구한 이 회사에서 생산하는 컬링 스톤 1개의 무게의 평균 m에 대한 신뢰도 95 %의 신뢰구간은 $a \le m \le 20.03$이다. $a+7\sigma$의 값은? (단, 무게의 단위는 kg이고, Z가 표준정규분포를 따르는 확률변수일 때, $\mathrm{P}(|Z| \le 1.96)=0.95$로 계산한다.)

① 21.81 ② 21.83 ③ 21.85 ④ 21.87 ⑤ 21.89

길잡이 모집단의 분포가 정규분포 $\mathrm{N}(m, \sigma^2)$을 따를 때, 크기가 n인 표본을 임의추출하여 구한 표본평균 $\overline{X}$의 값을 $\overline{x}$라 하면 모평균 m에 대한 신뢰도 95 %의 신뢰구간은

$$\overline{x}-1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \le m \le \overline{x}+1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

풀이 표본평균이 $\overline{x}=19.96$, 모표준편차가 σ, 표본의 크기가 64이므로 모평균 m에 대한 신뢰도 95 %의 신뢰구간은

$$19.96-1.96\times\frac{\sigma}{\sqrt{64}} \le m \le 19.96+1.96\times\frac{\sigma}{\sqrt{64}},\ 19.96-1.96\times\frac{\sigma}{8} \le m \le 19.96+1.96\times\frac{\sigma}{8}$$

이때 $19.96+1.96\times\frac{\sigma}{8}=20.03$이므로

$$\sigma=\frac{2}{7},\ a=19.96-1.96\times\frac{2}{8\times7}=19.89$$

따라서 $a+7\sigma=19.89+7\times\frac{2}{7}=21.89$

답 ⑤

유제

정답과 풀이 58쪽

7 [23010-0161]

어느 농구리그의 한 경기에서 3점슛을 시도하는 횟수는 평균이 m, 표준편차가 6인 정규분포를 따른다고 한다. 이 농구리그의 경기 중에서 81회의 경기를 임의추출하여 구한 표본평균을 이용하여 이 농구리그의 한 경기에서 3점슛을 시도하는 횟수의 평균 m에 대한 신뢰도 99 %의 신뢰구간을 구하면 $a \le m \le b$이다. $100(b-a)$의 값을 구하시오.

(단, Z가 표준정규분포를 따르는 확률변수일 때, $\mathrm{P}(|Z| \le 2.58)=0.99$로 계산한다.)

8 [23010-0162]

어느 회사에서 생산하는 건전지 1개의 수명은 평균이 m일인 정규분포를 따른다고 한다. 이 회사에서 생산한 건전지 중에서 400개를 임의추출하여 구한 건전지 수명의 표본평균이 250일, 표본표준편차가 40일이었다. 이 결과를 이용하여 구한 이 회사에서 생산한 건전지 1개의 수명의 평균 m에 대한 신뢰도 95%의 신뢰구간은?

(단, Z가 표준정규분포를 따르는 확률변수일 때, $\mathrm{P}(|Z| \le 1.96)=0.95$로 계산한다.)

① $245.99 \le m \le 254.01$ ② $246.14 \le m \le 253.86$ ③ $246.05 \le m \le 253.95$
④ $246.08 \le m \le 253.92$ ⑤ $246.11 \le m \le 253.89$

정답과 풀이 58쪽

[23010-0163]

1 모집단의 확률변수 X의 확률분포를 표로 나타내면 오른쪽과 같다. 이 모집단에서 크기가 2인 표본을 임의추출하여 구한 표본평균을 $\overline{X}$라 할 때, $\mathrm{P}(\overline{X} \geq 8a)$의 값은?

X	1	3	5	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{1}{4}$	a	$\frac{1}{2}$	1

① $\frac{11}{16}$ ② $\frac{3}{4}$ ③ $\frac{13}{16}$ ④ $\frac{7}{8}$ ⑤ $\frac{15}{16}$

[23010-0164]

2 모평균이 100, 모표준편차가 5인 정규분포를 따르는 모집단에서 크기가 n인 표본을 임의추출하여 구한 표본평균을 $\overline{X}$라 할 때, $\mathrm{E}(\overline{X})-\sigma(\overline{X}) \geq 99$를 만족시키는 자연수 n의 최솟값은?

① 9 ② 16 ③ 25 ④ 36 ⑤ 49

[23010-0165]

3 정규분포 $\mathrm{N}(40, \sigma^2)$을 따르는 모집단에서 크기가 n인 표본을 임의추출하여 구한 표본평균을 $\overline{X}$라 할 때, $Z=2\overline{X}-80$으로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0, 1)$을 따른다. $n+\sigma^2=10$일 때, $n \times \sigma^2$의 값을 구하시오. (단, $\sigma>0$)

[23010-0166]

4 모집단의 확률변수 X가 정규분포 $\mathrm{N}(33, 5^2)$을 따른다. 이 모집단에서 크기가 4인 표본을 임의추출하여 구한 표본평균을 $\overline{X}$라 하자. $\mathrm{P}(X \leq 34)+\mathrm{P}(\overline{X} \leq 34)$의 값을 오른쪽 표준정규분포표를 이용하여 구한 것은?

z	$\mathrm{P}(0 \leq Z \leq z)$
0.2	0.0793
0.4	0.1554
0.6	0.2257
0.8	0.2881

① 1.1554 ② 1.1586 ③ 1.2347
④ 1.2881 ⑤ 1.3050

[23010-0167]

5 모평균이 m, 모표준편차가 10인 정규분포를 따르는 모집단에서 크기가 n인 표본을 임의추출하여 구한 표본평균의 값 $\overline{x}$를 이용하여 구한 모평균 m에 대한 신뢰도 99 %의 신뢰구간은 $a \leq m \leq b$이다. $b-a=1.72$일 때, 자연수 n의 값을 구하시오.

(단, Z가 표준정규분포를 따르는 확률변수일 때, $\mathrm{P}(|Z| \leq 2.58)=0.99$로 계산한다.)

정답과 풀이 59쪽

[23010-0168]

1 모집단의 확률변수 X의 확률분포를 표로 나타내면 오른쪽과 같다. 이 모집단에서 크기가 2인 표본을 임의추출하여 구한 표본평균을 $\overline{X_1}$라 하고, 크기가 4인 표본을 임의추출하여 구한 표본평균을 $\overline{X_2}$라 하자. $a+b>\frac{2}{3}$, $\mathrm{P}(\overline{X_1}=2)=\frac{3}{8}$일 때, $\mathrm{P}\left(\overline{X_2}\le\frac{5}{4}\right)$의 값은?

X	1	2	3	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	a	b	a	1

① $\frac{1}{256}$ ② $\frac{3}{256}$ ③ $\frac{5}{256}$ ④ $\frac{7}{256}$ ⑤ $\frac{9}{256}$

[23010-0169]

2 정규분포를 따르는 모집단에서 크기가 n인 표본을 임의추출하여 구한 표본평균을 $\overline{X}$라 하자. 모집단의 확률변수 X에 대하여

$$\mathrm{E}(X)-\mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(\overline{X})+\mathrm{V}(n\overline{X})-20$$

이 성립한다. n과 $\mathrm{V}(X)$가 모두 2 이상인 자연수일 때, $\mathrm{V}(nX)+\mathrm{V}(n\overline{X})$의 최댓값과 최솟값을 각각 M, m이라 하자. $M-m$의 값을 구하시오.

[23010-0170]

3 모집단의 확률변수 X의 확률분포를 표로 나타내면 오른쪽과 같다. 이 모집단에서 크기가 n인 표본을 임의추출하여 구한 표본평균을 $\overline{X_n}$라 하자. $\mathrm{E}(X)=2$일 때, $\sum_{n=2}^{10}\frac{1}{\mathrm{V}(\overline{X_n})}$의 값은?

X	-2	1	4	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	a	b	$\frac{1}{2}$	1

① $\frac{51}{5}$ ② $\frac{52}{5}$ ③ $\frac{53}{5}$ ④ $\frac{54}{5}$ ⑤ 11

[23010-0171]

4 정규분포 $\mathrm{N}(m,\ 6^2)$을 따르는 모집단에서 크기가 n인 표본을 임의추출하여 구한 표본평균을 $\overline{X}$라 하자. 모집단의 확률변수 X의 확률밀도함수 $f(x)$는 $x=30$에서 최댓값을 갖고, $\mathrm{P}(\overline{X}\ge m+3)=0.1587$일 때, $m+n$의 값을 오른쪽 표준정규분포표를 이용하여 구하시오.

z	$\mathrm{P}(0\le Z\le z)$
1.0	0.3413
1.5	0.4332
2.0	0.4772
2.5	0.4938

[23010-0172]

5 정규분포 $\mathrm{N}(m, \sigma^2)$을 따르는 모집단에서 크기가 25인 표본을 임의추출하여 구한 표본평균을 $\overline{X}$라 하고, 정규분포 $\mathrm{N}\left(\frac{m}{3}, \sigma^2\right)$을 따르는 모집단에서 크기가 25인 표본을 임의추출하여 구한 표본평균을 $\overline{Y}$라 하자.
$\mathrm{P}(\overline{X} \geq 20) = \mathrm{P}(\overline{Y} \leq 20)$, $\mathrm{P}(\overline{X} \leq m+\sigma) = \mathrm{P}(\overline{Y} \leq 12)$일 때, $m+\sigma$의 값을 구하시오. (단, $\sigma > 0$)

[23010-0173]

6 어느 공장에서 생산하는 A제품의 무게는 정규분포를 따른다고 한다. 이 공장에서 생산한 A제품 중에서 임의로 택한 A제품 9개를 상자에 넣어 전체 무게가 900 이상일 확률이 0.9332일 때, 이 공장에서 임의로 택한 A제품 1개의 무게가 100 이하일 확률을 오른쪽 표준정규분포표를 이용하여 구한 것은?
(단, 상자의 무게는 고려하지 않고, 무게의 단위는 g이다.)

z	$\mathrm{P}(0 \leq Z \leq z)$
0.5	0.1915
1.0	0.3413
1.5	0.4332
2.0	0.4772

① 0.0228 ② 0.0668 ③ 0.1587
④ 0.2857 ⑤ 0.3085

[23010-0174]

7 모평균이 m, 모표준편차가 4인 정규분포를 따르는 모집단에서 크기가 25인 표본을 임의추출하여 구한 표본평균의 값 $\overline{x_1}$를 이용하여 모평균 m에 대한 신뢰도 95 %의 신뢰구간을 구하면 $a \leq m \leq b$이다. 이 모집단에서 크기가 400인 표본을 임의추출하여 구한 표본평균의 값 $\overline{x_2}$를 이용하여 모평균 m에 대한 95 %의 신뢰구간을 구하면 $c \leq m \leq d$이다. $a+b=70$, $\overline{x_1}+\overline{x_2}=72$일 때, $d-a$의 값은?
(단, Z가 표준정규분포를 따르는 확률변수일 때, $\mathrm{P}(|Z| \leq 1.96) = 0.95$로 계산한다.)

① 3.95 ② 3.96 ③ 3.97 ④ 3.98 ⑤ 3.99

[23010-0175]

8 모집단의 확률변수 X가 평균이 m인 정규분포를 따르고 $\sigma(2.58X-2.58)=10$이다. 이 모집단에서 크기가 n인 표본을 임의추출하여 구한 표본평균을 이용하여 모평균 m에 대한 신뢰도 99 %의 신뢰구간을 구하면 $a \leq m \leq b$이다. $f(n)=b-a$라 할 때, n에 대한 부등식 $f(n) \leq k$를 만족시키는 자연수 n의 최솟값을 a_k라 하자. a_4+a_8의 값은?
(단, k는 자연수이고, Z가 표준정규분포를 따르는 확률변수일 때, $\mathrm{P}(|Z| \leq 2.58) = 0.99$로 계산한다.)

① 30 ② 31 ③ 32 ④ 33 ⑤ 34

[23010-0176]

1 각 면에 숫자 1, 2, 3 중 한 숫자가 적힌 정육면체를 던져서 바닥과 닿은 면에 적힌 숫자를 확인하는 시행을 3회 반복한다. 바닥과 닿은 면에 적힌 세 수의 평균을 확률변수 $\overline{X}$라 하면 $E(\overline{X})=2$이다. 바닥과 닿은 면에 적힌 숫자가 1인 횟수의 평균이 $\frac{1}{2}$일 때, $P(\overline{X}=2)$의 값은?

① $\frac{11}{27}$ ② $\frac{4}{9}$ ③ $\frac{13}{27}$ ④ $\frac{14}{27}$ ⑤ $\frac{5}{9}$

[23010-0177]

2 모집단의 확률변수 X는 정규분포 $N(m, \sigma^2)$을 따른다. 이 모집단에서 크기가 n인 표본을 임의추출하여 구한 표본평균을 $\overline{X}$라 할 때, **보기**에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? (단, $\sigma>0$)

보기

ㄱ. $m=1$이면 $E(2X)+E(\overline{X}+2)=5$이다.

ㄴ. $3E(X^2)-3E(\overline{X}^2)=2\sigma^2$이면 $\frac{\sigma(X)}{\sigma(\overline{X})}=\sqrt{3}$이다.

ㄷ. $\sum_{n=3}^{47} \log_2 \frac{V(X)+V(\overline{X})}{\sigma^2}=4$

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

[23010-0178]

3 어느 택시 호출 앱을 이용하여 택시를 호출한 고객 1명의 대기 시간은 모평균이 m, 모표준편차가 σ인 정규분포를 따른다고 한다. 이 앱을 이용하여 택시를 호출한 고객 중에서 n명을 임의추출하여 구한 대기 시간의 표본평균이 9일 때, 이 결과를 이용하여 구한 모평균 m에 대한 신뢰도 95 %의 신뢰구간은 $a \le m \le b$이다. 이 앱을 이용하여 택시를 호출한 고객 중에서 다시 n명을 임의추출하여 구한 대기 시간의 표본평균이 11.27일 때, 이 결과를 이용하여 구한 모평균 m에 대한 신뢰도 99 %의 신뢰구간은 $b \le m \le c$이다. $a+c$의 값은?
(단, 대기 시간의 단위는 분이고, Z가 표준정규분포를 따르는 확률변수일 때, $P(|Z| \le 1.96)=0.95$, $P(|Z| \le 2.58)=0.99$로 계산한다.)

① 18.58 ② 19.58 ③ 20.58 ④ 21.58 ⑤ 22.58

대표 기출 문제

EBS

출제 경향 모집단의 모평균, 모분산, 모표준편차를 이용하여 모집단에서 임의추출한 표본에서 구한 표본평균의 평균, 분산, 표준편차를 구하는 문제와 표본평균의 분포를 이용하여 표본평균에 대한 확률을 구하는 문제가 출제된다.

2021학년도 대수능 9월 모의평가

어느 회사에서 일하는 플랫폼 근로자의 일주일 근무 시간은 평균이 m시간, 표준편차가 5시간인 정규분포를 따른다고 한다. 이 회사에서 일하는 플랫폼 근로자 중에서 임의추출한 36명의 일주일 근무 시간의 표본평균이 38시간 이상일 확률을 오른쪽 표준정규분포표를 이용하여 구한 값이 0.9332일 때, m의 값은? [3점]

z	$\mathrm{P}(0 \le Z \le z)$
0.5	0.1915
1.0	0.3413
1.5	0.4332
2.0	0.4772

① 38.25 ② 38.75 ③ 39.25
④ 39.75 ⑤ 40.25

출제 의도 모집단의 분포를 이용하여 표본평균의 분포를 구한 후, 표본평균에 대한 확률을 구할 수 있는지를 묻는 문제이다.

풀이 이 회사에서 일하는 플랫폼 근로자의 일주일 근무 시간을 확률변수 X라 하면 X는 정규분포 $\mathrm{N}(m,\ 5^2)$을 따른다.
임의추출한 크기가 36인 표본의 표본평균을 $\overline{X}$라 하면

$$\mathrm{E}(\overline{X})=m,\ \sigma(\overline{X})=\frac{\sigma(X)}{\sqrt{36}}=\frac{5}{6}$$

이므로 확률변수 $\overline{X}$는 정규분포 $\mathrm{N}\left(m,\ \left(\frac{5}{6}\right)^2\right)$을 따르고, $Z=\dfrac{\overline{X}-m}{\frac{5}{6}}$으로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.
이때 $\mathrm{P}(\overline{X}\ge 38)=0.9332$이므로

$$\mathrm{P}\left(Z\ge\frac{38-m}{\frac{5}{6}}\right)=0.9332$$

$$\mathrm{P}\left(Z\ge\frac{6(38-m)}{5}\right)=0.9332$$

$$\mathrm{P}\left(\frac{6(38-m)}{5}\le Z\le 0\right)+0.5=0.9332$$

$$\mathrm{P}\left(\frac{6(38-m)}{5}\le Z\le 0\right)=0.4332$$

주어진 표준정규분포표에서 $\mathrm{P}(0\le Z\le 1.5)=0.4332$이므로

$$\frac{6(38-m)}{5}=-1.5$$

따라서 $m=39.25$

답 ③

대표 기출 문제

EBS

출제 경향 모집단에서 임의추출한 표본에서 구한 표본평균의 값을 이용하여 모평균의 신뢰구간을 구하는 문제가 출제된다.

2022학년도 대수능

어느 자동차 회사에서 생산하는 전기 자동차의 1회 충전 주행 거리는 평균이 m이고 표준편차가 σ인 정규분포를 따른다고 한다.

이 자동차 회사에서 생산한 전기 자동차 100대를 임의추출하여 얻은 1회 충전 주행 거리의 표본평균이 $\overline{x_1}$일 때, 모평균 m에 대한 신뢰도 95 %의 신뢰구간이 $a \le m \le b$이다. 이 자동차 회사에서 생산한 전기 자동차 400대를 임의추출하여 얻은 1회 충전 주행 거리의 표본평균이 $\overline{x_2}$일 때, 모평균 m에 대한 신뢰도 99 %의 신뢰구간이 $c \le m \le d$이다.

$\overline{x_1} - \overline{x_2} = 1.34$이고 $a = c$일 때, $b - a$의 값은? (단, 주행 거리의 단위는 km이고, Z가 표준정규분포를 따르는 확률변수일 때 $\mathrm{P}(|Z| \le 1.96) = 0.95$, $\mathrm{P}(|Z| \le 2.58) = 0.99$로 계산한다.) [3점]

① 5.88 ② 7.84 ③ 9.80 ④ 11.76 ⑤ 13.72

출제 의도 표본평균을 이용하여 모평균의 신뢰구간을 구할 수 있는지를 묻는 문제이다.

풀이 이 자동차 회사에서 생산한 전기 자동차 중에서 임의추출한 100대의 자동차의 1회 충전 주행 거리의 표본평균이 $\overline{x_1}$이므로 모평균 m에 대한 신뢰도 95 %의 신뢰구간은

$$\overline{x_1} - 1.96 \times \frac{\sigma}{\sqrt{100}} \le m \le \overline{x_1} + 1.96 \times \frac{\sigma}{\sqrt{100}},\ \overline{x_1} - 1.96 \times \frac{\sigma}{10} \le m \le \overline{x_1} + 1.96 \times \frac{\sigma}{10}$$

또한 다시 임의추출한 400대의 전기 자동차의 1회 충전 주행 거리의 표본평균이 $\overline{x_2}$이므로 모평균 m에 대한 신뢰도 99 %의 신뢰구간은

$$\overline{x_2} - 2.58 \times \frac{\sigma}{\sqrt{400}} \le m \le \overline{x_2} + 2.58 \times \frac{\sigma}{\sqrt{400}},\ \overline{x_2} - 2.58 \times \frac{\sigma}{20} \le m \le \overline{x_2} + 2.58 \times \frac{\sigma}{20}$$

이때 $a = c$, $\overline{x_1} - \overline{x_2} = 1.34$이므로

$$\overline{x_1} - 1.96 \times \frac{\sigma}{10} = \overline{x_2} - 2.58 \times \frac{\sigma}{20}$$

$$\overline{x_1} - \overline{x_2} = 1.96 \times \frac{\sigma}{10} - 2.58 \times \frac{\sigma}{20} = 0.67 \times \frac{\sigma}{10} = 1.34$$

$$\sigma = \frac{10 \times 1.34}{0.67} = 20$$

따라서 $b - a = 2 \times 1.96 \times \frac{20}{10} = 7.84$

답 ②