수능특강 수학영역 **확률과 통계**

정답과 풀이

01 여러 가지 순열

유제 본문 5~9쪽

1 ② 2 ① 3 240 4 ③ 5 ④
6 18

Level 1 기초 연습 본문 10~11쪽

1 ④ 2 8 3 ② 4 256 5 ③
6 ③ 7 ③ 8 ②

Level 2 기본 연습 본문 12~13쪽

1 288 2 ④ 3 210 4 ⑤ 5 ④
6 700 7 ①

Level 3 실력 완성 본문 14쪽

1 13 2 378 3 ⑤

02 중복조합과 이항정리

유제 본문 17~23쪽

1 ① 2 150 3 ② 4 ⑤ 5 ①
6 ③ 7 ③ 8 21

Level 1 기초 연습 본문 24~25쪽

1 ② 2 ④ 3 ⑤ 4 ③ 5 ②
6 ④ 7 7 8 ⑤

Level 2 기본 연습 본문 26~27쪽

1 ③ 2 ① 3 ⑤ 4 32 5 ②
6 502 7 120

Level 3 실력 완성 본문 28쪽

1 141 2 40 3 ③

03 확률의 뜻과 활용

유제 본문 31~37쪽

1 12 2 ② 3 ② 4 ① 5 7
6 61 7 ② 8 5

Level 1 기초 연습 본문 38~39쪽

1 30 2 ⑤ 3 ② 4 ③ 5 ⑤
6 ④ 7 ⑤ 8 ②

Level 2 기본 연습 본문 40~41쪽

1 ③ 2 ④ 3 ③ 4 96 5 ⑤
6 ④ 7 ⑤ 8 ③

Level 3 실력 완성 본문 42쪽

1 ② 2 ① 3 91

04 조건부확률

유제 본문 45~51쪽

1 ③ 2 ⑤ 3 ④ 4 ③ 5 16
6 ③ 7 ③ 8 ③

Level 1 기초 연습 본문 52~53쪽

1 ④ 2 ④ 3 ② 4 ① 5 ②
6 ② 7 ② 8 ③

Level 2 기본 연습 본문 54~55쪽

1 ④ 2 ③ 3 ③ 4 ④ 5 25
6 187 7 115 8 ③

Level 3 실력 완성 본문 56쪽

1 65 2 12 3 80

05 이산확률변수의 확률분포

유제 본문 59~67쪽

1 ③ 2 ⑤ 3 ④ 4 ⑤ 5 22
6 ③ 7 3 8 ② 9 18 10 ④

Level 1 기초 연습 본문 68쪽

1 ① 2 ③ 3 ② 4 ④ 5 ④

Level 2 기본 연습 본문 69~70쪽

1 ④ 2 ② 3 ⑤ 4 34 5 ④
6 ⑤ 7 ③ 8 323

Level 3 실력 완성 본문 71쪽

1 151 2 ③ 3 ①

06 연속확률변수의 확률분포

유제 본문 75~81쪽

1 ② 2 4 3 ⑤ 4 78 5 ④
6 ④ 7 ① 8 ③

Level 1 기초 연습 본문 82쪽

1 ② 2 ② 3 ④ 4 ④ 5 ③

Level 2 기본 연습 본문 83~84쪽

1 ⑤ 2 ④ 3 ④ 4 ④ 5 ⑤
6 7 7 93 8 ③

Level 3 실력 완성 본문 85쪽

1 ⑤ 2 ③ 3 ②

07 통계적 추정

유제 본문 89~95쪽

1 ① 2 3 3 ⑤ 4 ① 5 ①
6 8 7 344 8 ④

Level 1 기초 연습 본문 96쪽

1 ⑤ 2 ③ 3 16 4 ③ 5 900

Level 2 기본 연습 본문 97~98쪽

1 ⑤ 2 120 3 ④ 4 34 5 32
6 ⑤ 7 ② 8 ③

Level 3 실력 완성 본문 99쪽

1 ① 2 ⑤ 3 ③

01 여러 가지 순열

유제 본문 5~9쪽

1 ② 2 ① 3 240 4 ③ 5 ④
6 18

1 3학년 학생, 빈 의자, 3학년 학생을 묶어 한 명으로 생각하면 4명이 원형으로 앉는 경우의 수는
$(4-1)!=3!=6$
또 3학년 학생 2명의 자리를 정하는 경우의 수는
$2!=2$
따라서 구하는 경우의 수는
$6\times2=12$

답 ②

2 여학생 2명을 묶어 한 명이라 생각하면 $(n+1)$명이 원형으로 앉는 경우의 수는
$\{(n+1)-1\}!=n!$
여학생 2명이 서로 자리를 바꾸는 경우의 수는
$2!=2$
즉, 여학생 2명이 이웃하도록 여학생 2명과 남학생 n명이 원형의 탁자에 둘러앉는 경우의 수는
$n!\times2$
따라서 $n!\times2=48$에서
$n!=24$
즉, $n=4$

답 ①

3 조건 (가)에서 집합 A를 정하는 경우의 수는
${}_6C_4={}_6C_2=15$
이때 집합 U의 원소 중 집합 A의 원소가 아닌 2개의 원소는 집합 B의 원소이다.
집합 A의 원소 중 집합 $A\cap B$의 원소를 정하는 경우의 수는
${}_2\Pi_4=2^4=16$
따라서 구하는 모든 순서쌍의 개수는
$15\times16=240$

답 240

4 모든 세 자리 자연수의 개수는
${}_6\Pi_3=6^3=216$
또 숫자 1이 포함되지 않은 세 자리 자연수의 개수는
5개의 숫자 2, 3, 4, 5, 6 중에서 중복을 허락하여 택한 3개의 수를 일렬로 나열하여 만든 세 자리 자연수의 개수이므로
${}_5\Pi_3=5^3=125$
따라서 구하는 세 자리 자연수의 개수는
$216-125=91$

답 ③

다른 풀이

(i) 숫자 1이 1개 포함된 경우
숫자 1의 자릿수를 정하는 경우의 수는
${}_3C_1=3$
나머지 두 수를 정하는 경우의 수는
${}_5\Pi_2=5^2=25$
즉, 세 자리 자연수의 개수는
$3\times25=75$

(ii) 숫자 1이 2개 포함된 경우
숫자 1의 자릿수를 정하는 경우의 수는
${}_3C_2=3$
나머지 한 수를 정하는 경우의 수는
${}_5\Pi_1=5^1=5$
즉, 세 자리 자연수의 개수는
$3\times5=15$

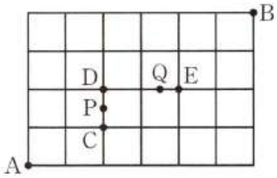
(iii) 숫자 1이 3개 포함된 경우
111뿐이므로 세 자리 자연수의 개수는
1

(i), (ii), (iii)에서 구하는 세 자리 자연수의 개수는
$75+15+1=91$

5 숫자 1, 3, 3, 3이 하나씩 적힌 카드 4장을 왼쪽부터 홀수 번째 놓이도록 나열하는 경우의 수는
$\frac{4!}{3!}=4$
또 숫자 2, 2, 4, 4가 하나씩 적힌 카드 4장을 왼쪽부터 짝수 번째 놓이도록 나열하는 경우의 수는
$\frac{4!}{2!\times2!}=6$
따라서 구하는 경우의 수는
$4\times6=24$

답 ④

6 A지점을 출발하여 B지점까지 최단 거리로 이동하고, P지점과 Q지점을 모두 지나야 하므로 A지점을 출발하여 C지점, D지점, E지점을 차례로 지나야 한다.



따라서 도로망에서 A → C → D → E → B로 이동하는 경우의 수는

$\frac{3!}{2!}\times1\times1\times\frac{4!}{2!\times2!}$

$=3\times1\times1\times6$

$=18$

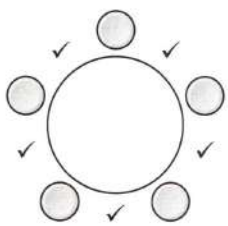
답 18

Level 1 기초 연습 본문 10~11쪽

1 ④ 2 8 3 ② 4 256 5 ③
6 ③ 7 ③ 8 ②

1 여학생 5명이 원형으로 앉는 경우의 수는

$(5-1)!=4!=24$



그림의 ✓ 표시된 5곳 중 2곳에 남학생 2명의 자리를 정하는 경우의 수는

$5\times4=20$

따라서 구하는 경우의 수는

$24\times20=480$

답 ④

2 정삼각형에 칠할 색을 정하는 경우의 수는

${}_4C_1=4$

나머지 3가지 색을 정삼각형 바깥쪽의 3개의 영역에 칠하는 경우의 수는 3가지 색을 원형으로 배열하는 경우의 수와 같으므로

$(3-1)!=2!=2$

따라서 구하는 경우의 수는

$4\times2=8$

답 8

3 3학년 학생 2명 사이에 앉는 2학년 학생 1명을 정하는 경우의 수는

${}_4C_1=4$

3학년 학생, 2학년 학생, 3학년 학생을 묶어 한 명으로 생각하면

4명이 원형으로 앉는 경우의 수는

$(4-1)!=3!=6$

또 3학년 학생 2명의 자리를 정하는 경우의 수는

$2!=2$

따라서 구하는 경우의 수는

$4\times6\times2=48$

답 ②

4 집합 U의 각 원소가 두 집합 A, B 중 한 집합의 원소이어야 하므로 구하는 모든 순서쌍의 개수는

${}_2\Pi_8=2^8=256$

답 256

5 (i) A과목을 선택하는 학생 수가 3인 경우

A과목을 선택하는 학생을 정하는 경우의 수는

${}_6C_3=20$

나머지 3명이 B과목 또는 C과목을 선택하는 경우의 수는

${}_2\Pi_3=2^3=8$

즉, A과목을 선택하는 학생 수가 3인 경우의 수는

$20\times8=160$

(ii) A과목을 선택하는 학생 수가 4인 경우

A과목을 선택하는 학생을 정하는 경우의 수는

${}_6C_4={}_6C_2=15$

나머지 2명이 B과목 또는 C과목을 선택하는 경우의 수는

${}_2\Pi_2=2^2=4$

즉, A과목을 선택하는 학생 수가 4인 경우의 수는

$15\times4=60$

(iii) A과목을 선택하는 학생 수가 5인 경우

A과목을 선택하는 학생을 정하는 경우의 수는

${}_6C_5={}_6C_1=6$

나머지 1명이 B과목 또는 C과목을 선택하는 경우의 수는

2

즉, A과목을 선택하는 학생 수가 5인 경우의 수는

$6\times2=12$

(iv) A과목을 선택하는 학생 수가 6인 경우

경우의 수는

1

(i)~(iv)에서 구하는 경우의 수는

$160+60+12+1=233$

답 ③

6 구하는 경우의 수는 $\frac{7!}{3!\times4!}=35$

답 ③

다른 풀이

구하는 경우의 수는 7개의 자리 중 흰 공 3개가 놓일 자리를 택하는 경우의 수와 같으므로

${}_7C_3=35$

7 자음을 X, X, X, 모음을 Y, Y, Y라 하면 6개의 문자 X, X, X, Y, Y, Y를 일렬로 나열한 후

X자리에 순서대로 K, N, R를 넣고, Y자리에 순서대로 A, E, O를 넣으면 된다.

따라서 구하는 경우의 수는

$\frac{6!}{3!\times3!}=20$

답 ③

8 홀수의 합이 3인 경우는

$1+1+1$과 3이고,

짝수의 합이 4인 경우는

$2+2$와 4이다.

(i) 주사위를 5번 던지는 경우

구하는 경우의 수는 1, 1, 1, 2, 2를 일렬로 나열하는 경우의 수와 같으므로

$\frac{5!}{3!\times2!}=10$

(ii) 주사위를 4번 던지는 경우

구하는 경우의 수는 1, 1, 1, 4를 일렬로 나열하는 경우의 수와 같으므로

$\frac{4!}{3!}=4$

(iii) 주사위를 3번 던지는 경우

구하는 경우의 수는 3, 2, 2를 일렬로 나열하는 경우의 수와 같으므로

$\frac{3!}{2!}=3$

(iv) 주사위를 2번 던지는 경우

구하는 경우의 수는 3, 4를 일렬로 나열하는 경우의 수와 같으므로

$2!=2$

(i)~(iv)에서 구하는 경우의 수는

$10+4+3+2=19$

답 ②

Level 2 기본 연습

본문 12~13쪽

1 288	**2** ④	**3** 210	**4** ⑤	**5** ④
6 700	**7** ①			

1 1학년 학생 2명을 묶어 한 명으로 생각하고,

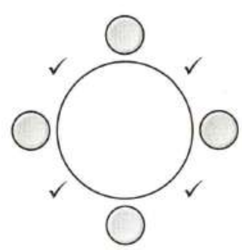
2학년 학생 2명도 묶어 한 명으로 생각하자.

1학년 학생 2명과 2학년 학생 2명이 서로 자리를 바꾸는 경우의 수는

$2!\times2!=4$

1학년 학생, 2학년 학생, 3학년 학생 2명이 원형으로 앉는 경우의 수는

$(4-1)!=3!=6$



그림의 ✓ 표시된 4곳 중 2곳에 교사 2명의 자리를 정하는 경우의 수는

$4\times3=12$

따라서 구하는 경우의 수는

$4\times6\times12=288$

답 288

2

	(나)	
(다)	(가)	(마)
	(라)	

그림의 (가)에 칠할 색을 정하는 경우의 수는

${}_9C_1=9$

나머지 8가지 색 중 그림의 (나), (다), (라), (마)에 칠할 4가지 색을 정하는 경우의 수는

${}_8C_4=\dfrac{8!}{4!\times4!}$

이 4가지 색을 원형으로 배열하는 경우의 수는

$(4-1)!=3!=6$

남은 4가지 색을 칠하는 경우의 수는

$4!$

따라서 구하는 경우의 수는

$9\times\dfrac{8!}{4!\times4!}\times6\times4!$

$=\dfrac{9!}{4!}\times6$

$=\dfrac{9!}{4}$

답 ④

다른 풀이

	(나)	(다)
	(가)	

그림의 (가)에 칠할 색을 정하는 경우의 수는

${}_9C_1=9$

나머지 8가지 색 중 한 색을 그림의 (나) 또는 (다)에 칠하는 경우의 수는

2

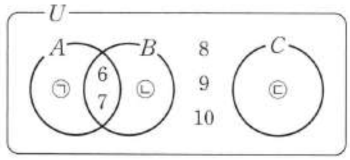
남은 7가지 색을 칠하는 경우의 수는

$7!$

따라서 구하는 경우의 수는

$9\times2\times7!=\dfrac{9!}{4}$

3 두 조건 (가), (나)를 만족시키도록 집합 U와 세 부분집합 A, B, C를 벤 다이어그램으로 나타내면 그림과 같다.



그림의 ㉠, ㉡, ㉢에 집합 U의 원소 1, 2, 3, 4, 5를 나누어 넣는 경우의 수는

1, 2, 3, 4, 5 각각에 대하여 3가지 방법이 있으므로

${}_3\Pi_5=3^5=243$

그런데 집합 C가 공집합인 경우는 제외해야 한다.

이때 집합 C가 공집합인 경우의 수는

1, 2, 3, 4, 5를 ㉠, ㉡에 나누어 넣는 경우의 수와 같으므로

${}_2\Pi_5=2^5=32$

또 $C=\{1, 2, 3, 4, 5\}$인 경우

$A=\{6, 7\}$, $B=\{6, 7\}$이므로 $A=B$이다.

따라서 구하는 경우의 수는

$243-32-1=210$

답 210

4 (i) 같은 숫자가 한 쌍 포함된 경우

같은 숫자 한 쌍을 정하는 경우의 수는

${}_4C_1=4$

같은 숫자 한 쌍과 서로 다른 세 숫자를 일렬로 나열하는 경우의 수는

$\dfrac{5!}{2!}=60$

이 경우 다섯 자리 자연수의 개수는

$4\times60=240$

(ii) 같은 숫자가 두 쌍 포함된 경우

같은 숫자 두 쌍을 정하는 경우의 수는

${}_4C_2=6$

나머지 한 숫자를 정하는 경우의 수는

${}_2C_1=2$

같은 숫자 두 쌍과 한 숫자를 일렬로 나열하는 경우의 수는

$\dfrac{5!}{2!\times2!}=30$

이 경우 다섯 자리 자연수의 개수는

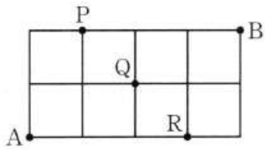
$6\times2\times30=360$

(i), (ii)에서 모든 다섯 자리 자연수의 개수는

$240+360=600$

답 ⑤

5



갑과 을이 같은 속력으로 이동하므로
갑과 을이 만날 수 있는 지점은 그림의 P지점, Q지점, R지점이다.
갑과 을이 P지점에서 만나고, 갑은 B지점에, 을은 A지점에 도착하는 경우의 수는

$\left(\frac{3!}{2!}\times 1\right)\times\left(1\times\frac{3!}{2!}\right)=9$

갑과 을이 Q지점에서 만나고, 갑은 B지점에, 을은 A지점에 도착하는 경우의 수는

$\left(\frac{3!}{2!}\times\frac{3!}{2!}\right)\times\left(\frac{3!}{2!}\times\frac{3!}{2!}\right)=81$

갑과 을이 R지점에서 만나고, 갑은 B지점에, 을은 A지점에 도착하는 경우의 수는

$\left(1\times\frac{3!}{2!}\right)\times\left(\frac{3!}{2!}\times 1\right)=9$

따라서 구하는 경우의 수는
$9+81+9=99$

답 ④

6 (i) 왼쪽 끝에 문자 A가 적힌 카드, 오른쪽 끝에 문자 A가 적힌 카드가 놓이는 경우
A, B, B, B, 1, 1, 1이 하나씩 적힌 7장의 카드를 일렬로 나열하는 경우의 수는

$\frac{7!}{3!\times 3!}=140$

(ii) 왼쪽 끝에 문자 B가 적힌 카드, 오른쪽 끝에 문자 B가 적힌 카드가 놓이는 경우
A, A, A, B, 1, 1, 1이 하나씩 적힌 7장의 카드를 일렬로 나열하는 경우의 수는

$\frac{7!}{3!\times 3!}=140$

(iii) 왼쪽 끝에 문자 A가 적힌 카드, 오른쪽 끝에 문자 B가 적힌 카드가 놓이는 경우
A, A, B, B, 1, 1, 1이 하나씩 적힌 7장의 카드를 일렬로 나열하는 경우의 수는

$\frac{7!}{2!\times 2!\times 3!}=210$

(iv) 왼쪽 끝에 문자 B가 적힌 카드, 오른쪽 끝에 문자 A가 적힌 카드가 놓이는 경우
A, A, B, B, 1, 1, 1이 하나씩 적힌 7장의 카드를 일렬로 나열하는 경우의 수는

$\frac{7!}{2!\times 2!\times 3!}=210$

(i)~(iv)에서 구하는 경우의 수는
$140+140+210+210=700$

답 700

7 함수 f의 치역과 공역이 일치하므로
$f(1)$, $f(2)$, $f(3)$, $f(4)$, $f(5)$의 값은 6, 7, 8, 9를 적어도 하나씩 가져야 한다.
$f(1)$, $f(2)$, $f(3)$, $f(4)$, $f(5)$의 값 중 6이 두 개인 경우 함수 f의 개수는 6, 6, 7, 8, 9를 일렬로 나열하는 경우의 수와 같으므로

$\frac{5!}{2!}=60$

같은 방법으로 $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$, $f(4)$, $f(5)$의 값 중 7이 두 개인 경우, 8이 두 개인 경우, 9가 두 개인 경우의 함수 f의 개수는 각각 60이다.
따라서 구하는 함수 f의 개수는
$60\times 4=240$

답 ①

다른 풀이

함수 f의 개수는
${}_4\Pi_5=4^5=1024$

(i) 함수 f의 치역의 원소의 개수가 1인 경우
함수 f의 치역이 $\{6\}$, $\{7\}$, $\{8\}$, $\{9\}$인 경우이므로
함수 f의 개수는
4

(ii) 함수 f의 치역의 원소의 개수가 2인 경우
함수 f의 치역이 $\{6, 7\}$, $\{6, 8\}$, $\{6, 9\}$, $\{7, 8\}$, $\{7, 9\}$, $\{8, 9\}$인 경우이므로
함수 f의 개수는
$6\times({}_2\Pi_5-2)$
$=6\times(32-2)$
$=180$

(iii) 함수 f의 치역의 원소의 개수가 3인 경우
함수 f의 치역이 $\{6, 7, 8\}$, $\{6, 7, 9\}$, $\{6, 8, 9\}$, $\{7, 8, 9\}$인 경우이므로
함수 f의 개수는
$4\times\{{}_3\Pi_5-3\times({}_2\Pi_5-2)-3\}$

$=4\times\{243-3\times(32-2)-3\}$
$=600$

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에서 구하는 함수 f의 개수는
$1024-(4+180+600)=240$

Level 3 실력 완성

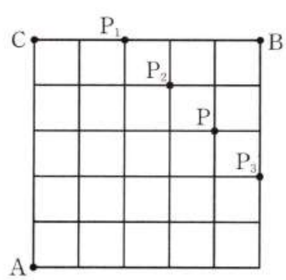
본문 14쪽

1 13　**2** 378　**3** ⑤

1 (ⅰ) 조건 (가)에서
홀수 1, 3, 5, 7이 적힌 상자에 카드를 넣는 경우의 수는
${}_4\Pi_4=4^4=2^8$
(ⅱ) 조건 (나)에서
짝수 4, 6이 적힌 상자에 카드를 넣는 경우의 수는
${}_4\Pi_2=4^2=2^4$
(ⅲ) 조건 (나)에서 $a_2+2\le a_8$이므로
순서쌍 (a_2, a_8)은
(2, 4), (2, 6), (2, 8), (4, 6), (4, 8), (6, 8)
이고, 그 개수는 6
(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에서 카드 8장을 상자에 넣는 경우의 수는
$2^8\times2^4\times6=2^8\times2^4\times2\times3$
$=3\times2^{13}$
따라서 $p=13$

답 13

2 (ⅰ) B지점에 도착하는 경우



그림의 P_1지점 또는 P_2지점 또는 P_3지점을 지나야 한다.
도로망에서 A → P_1 → B로 이동하는 경우의 수는
$\frac{7!}{2!\times5!}\times1=21\times1=21$
도로망에서 A → P_2 → B로 이동하는 경우의 수는
$\frac{7!}{3!\times4!}\times\frac{3!}{2!\times1!}=35\times3=105$
도로망에서 A → P_3 → B로 이동하는 경우의 수는
$\frac{7!}{5!\times2!}\times1=21\times1=21$
즉, $m=21+105+21=147$
(ⅱ) C지점에 도착하는 경우
도로망에서 A → P → C로 이동하는 경우의 수는
$\frac{7!}{4!\times3!}\times\frac{6!}{4!\times2!}=35\times15=525$
즉, $n=525$
(ⅰ), (ⅱ)에서
$|m-n|=|147-525|=|-378|=378$

답 378

다른 풀이
m의 값을 다음과 같이 구할 수 있다.
도로망에서 A → B로 이동하는 경우의 수는
$\frac{10!}{5!\times5!}=252$
도로망에서 A → P → B로 이동하는 경우의 수는
$\frac{7!}{4!\times3!}\times\frac{3!}{1!\times2!}=35\times3=105$
따라서 $m=252-105=147$

3 조건 (가)에서 a_i $(i=1, 2, 3, \cdots, 8)$의 값은 0 또는 1 또는 2이므로 8개의 정수 $a_1, a_2, a_3, \cdots, a_8$ 중에서 값이 1인 정수의 개수를 x, 값이 2인 정수의 개수를 y라 하면 값이 0인 정수의 개수는 $(8-x-y)$이다.
조건 (나)에서 8개의 정수 $a_1, a_2, a_3, \cdots, a_8$의 합이 8이므로
$1\times x+2\times y+0\times(8-x-y)=8$에서
$x+2y=8$
이때 $x\ge0$, $y\ge0$, $x+y\le8$이므로
순서쌍 (x, y)는 (0, 4), (2, 3), (4, 2), (6, 1), (8, 0) 뿐이다.
(ⅰ) $x=0$, $y=4$인 경우
순서쌍 $(a_1, a_2, a_3, \cdots, a_8)$의 개수는
0, 0, 0, 0, 2, 2, 2, 2를 일렬로 나열하는 경우의 수와 같으므로
$\frac{8!}{4!\times4!}=70$

(ii) $x=2$, $y=3$인 경우

순서쌍 $(a_1, a_2, a_3, \cdots, a_8)$의 개수는

0, 0, 0, 1, 1, 2, 2, 2를 일렬로 나열하는 경우의 수와 같으므로

$\frac{8!}{3!\times2!\times3!}=560$

(iii) $x=4$, $y=2$인 경우

순서쌍 $(a_1, a_2, a_3, \cdots, a_8)$의 개수는

0, 0, 1, 1, 1, 1, 2, 2를 일렬로 나열하는 경우의 수와 같으므로

$\frac{8!}{2!\times4!\times2!}=420$

(iv) $x=6$, $y=1$인 경우

순서쌍 $(a_1, a_2, a_3, \cdots, a_8)$의 개수는

0, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 2를 일렬로 나열하는 경우의 수와 같으므로

$\frac{8!}{6!}=56$

(v) $x=8$, $y=0$인 경우

순서쌍 $(a_1, a_2, a_3, \cdots, a_8)$의 개수는

1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1을 일렬로 나열하는 경우의 수와 같으므로

1

(i)~(v)에서 구하는 모든 순서쌍의 개수는

$70+560+420+56+1=1107$

답 ⑤

02 중복조합과 이항정리

유제 본문 17~23쪽

1 ① 2 150 3 ② 4 ⑤ 5 ①
6 ③ 7 ③ 8 21

1 (가) ● (나) ● (다) ● (라) ● (마)

빨간 공 4개를 먼저 나열하고, 그림의 (나), (다), (라) 위치에 흰 공을 각각 2개씩 먼저 놓은 후 (가), (나), (다), (라), (마) 중 흰 공 4개를 놓는 위치를 정하면 된다.

따라서 구하는 경우의 수는 서로 다른 5곳에서 중복을 허락하여 4곳을 택하는 중복조합의 수와 같으므로

${}_5H_4={}_{5+4-1}C_4={}_8C_4=70$

답 ①

2 모든 순서쌍 (a, b, c)의 개수는 1, 2, 3, 4에서 중복을 허락하여 세 수를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

${}_4H_3={}_{4+3-1}C_3={}_6C_3=20$

즉, $n=20$

이때 20개의 순서쌍에 사용된 숫자의 개수는 60이고, 숫자 1, 2, 3, 4는 각각 15개씩이다.

따라서

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} s_k &= \sum_{k=1}^{20} s_k \\ &=(1+2+3+4)\times15 \\ &=10\times15 \\ &=150\end{aligned}$$

답 150

3 $a\geq2$, $b\geq3$, $c\geq4$이므로

음이 아닌 세 정수 a', b', c'에 대하여

$a=a'+2$, $b=b'+3$, $c=c'+4$로 놓으면

$(a'+2)+(b'+3)+(c'+4)=15$에서

$a'+b'+c'=6$

따라서 구하는 순서쌍의 개수는

방정식 $a'+b'+c'=6$을 만족시키는 음이 아닌 정수 a', b', c'의 모든 순서쌍 (a', b', c')의 개수와 같으므로

${}_3H_6={}_{3+6-1}C_6={}_8C_6={}_8C_2=28$

답 ②

4 조건 (가)에서

$f(1) \le f(2) \le f(3) \le f(4) \le f(5)$이고,

조건 (나)에서 함수 f의 치역의 원소 중 가장 작은 값이 2이므로

$f(1)=2$

또 $f(2)$, $f(3)$, $f(4)$, $f(5)$의 값을 정하는 경우의 수는 집합 Y의 원소 중 2, 3, 4, 5, 6에서 중복을 허락하여 4개를 택하는 중복조합의 수와 같다.

따라서 구하는 함수 f의 개수는

${}_5\mathrm{H}_4 = {}_{5+4-1}\mathrm{C}_4 = {}_8\mathrm{C}_4 = 70$

답 ⑤

5 $\left(3x^2 - \dfrac{a}{x}\right)^5$의 전개식의 일반항은

${}_5\mathrm{C}_r(3x^2)^{5-r}\left(-\dfrac{a}{x}\right)^r = {}_5\mathrm{C}_r 3^{5-r}(-a)^r x^{10-3r}$

(단, $r=0, 1, 2, \cdots, 5$)

$10-3r=-2$에서 $r=4$이므로

$\dfrac{1}{x^2}$의 계수는

${}_5\mathrm{C}_4 \times 3^1 \times (-a)^4 = 15a^4$

따라서 $15a^4 = \dfrac{1}{15}$에서 $a^4 = \left(\dfrac{1}{15}\right)^2$

$a>0$이므로

$a = \dfrac{1}{\sqrt{15}} = \dfrac{\sqrt{15}}{15}$

답 ①

6 $(3a+2b)^6$의 전개식의 일반항은

${}_6\mathrm{C}_r(3a)^{6-r}(2b)^r = {}_6\mathrm{C}_r 3^{6-r} 2^r a^{6-r} b^r$

(단, $r=0, 1, 2, \cdots, 6$)

$r=2$일 때 $(3a+2b)^6$의 전개식에서 a^4b^2의 계수는

${}_6\mathrm{C}_2 \times 3^4 \times 2^2$

또 $r=4$일 때 $(3a+2b)^6$의 전개식에서 a^2b^4의 계수는

${}_6\mathrm{C}_4 \times 3^2 \times 2^4 = {}_6\mathrm{C}_2 \times 3^2 \times 2^4$

따라서

$$\frac{m}{n} = \frac{{}_6\mathrm{C}_2 \times 3^4 \times 2^2}{{}_6\mathrm{C}_2 \times 3^2 \times 2^4} = \frac{3^2}{2^2} = \frac{9}{4}$$

답 ③

7 ${}_n\mathrm{C}_0 + {}_n\mathrm{C}_1 + {}_n\mathrm{C}_2 + {}_n\mathrm{C}_3 + \cdots + {}_n\mathrm{C}_{n-1} + {}_n\mathrm{C}_n = 2^n$이므로

$${}_n\mathrm{C}_1 + {}_n\mathrm{C}_2 + {}_n\mathrm{C}_3 + \cdots + {}_n\mathrm{C}_{n-1} = 2^n - {}_n\mathrm{C}_0 - {}_n\mathrm{C}_n = 2^n - 2$$

따라서

$2^6-2=62$, $2^7-2=126$, $2^8-2=254$, $2^9-2=510$, $2^{10}-2=1022$

이므로 주어진 부등식을 만족시키는 자연수 n의 값은 7, 8, 9이고, 그 개수는 3이다.

답 ③

8 이항정리를 이용하여 $(1+x)^n$을 전개하면

$$(1+x)^n = {}_n\mathrm{C}_0 + {}_n\mathrm{C}_1 x + {}_n\mathrm{C}_2 x^2 + {}_n\mathrm{C}_3 x^3 + \cdots + {}_n\mathrm{C}_n x^n \quad \cdots\cdots ㉠$$

㉠에 $x=\dfrac{1}{2}$을 대입하면

$$\left(1+\frac{1}{2}\right)^n = {}_n\mathrm{C}_0 + {}_n\mathrm{C}_1 \times \frac{1}{2} + {}_n\mathrm{C}_2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 + {}_n\mathrm{C}_3 \times \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \cdots + {}_n\mathrm{C}_n \times \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

이므로 $a_n = \left(\dfrac{3}{2}\right)^n$

따라서

$$\sum_{k=1}^{10} a_k = \sum_{k=1}^{10} \left(\frac{3}{2}\right)^k = \frac{\frac{3}{2} \times \left\{\left(\frac{3}{2}\right)^{10} - 1\right\}}{\frac{3}{2} - 1} = 3 \times \left(\frac{3}{2}\right)^{10} - 3 = \frac{3^{11}}{2^{10}} - 3$$

이므로 $\displaystyle\sum_{k=1}^{10} a_k + 3 = \frac{3^{11}}{2^{10}}$

즉, $p=10$, $q=11$이므로

$p+q=10+11=21$

답 21

Level 1 **기초 연습** 본문 24~25쪽

1 ②	2 ④	3 ⑤	4 ③	5 ②
6 ④	7 7	8 ⑤		

1 ${}_3\mathrm{H}_2+{}_4\mathrm{H}_3+{}_5\mathrm{H}_4$

$={}_{3+2-1}\mathrm{C}_2+{}_{4+3-1}\mathrm{C}_3+{}_{5+4-1}\mathrm{C}_4$

$={}_4\mathrm{C}_2+{}_6\mathrm{C}_3+{}_8\mathrm{C}_4$

$=6+20+70=96$

답 ②

2 $f(1)\le f(2)\le f(3)$이므로

$f(1)$, $f(2)$, $f(3)$의 값을 정하는 경우의 수는

집합 Y의 원소 4, 5, 6, 7, 8에서 중복을 허락하여 3개를 택하는 중복조합의 수와 같다.

따라서 구하는 함수 f의 개수는

${}_5\mathrm{H}_3={}_{5+3-1}\mathrm{C}_3={}_7\mathrm{C}_3=35$

답 ④

3 다항식 $(a+b+c+d)^6$의 전개식에서 서로 다른 항의 개수는 서로 다른 4개의 문자 a, b, c, d에서 중복을 허락하여 6개를 택하는 중복조합의 수와 같다.

따라서 구하는 항의 개수는

${}_4\mathrm{H}_6={}_{4+6-1}\mathrm{C}_6={}_9\mathrm{C}_6={}_9\mathrm{C}_3=84$

답 ⑤

4 네 상자 A, B, C, D에 넣는 공의 개수를 각각 a, b, c, d라 하면

$a+b+c+d=10$

그런데 각 상자에 2개 이상씩 공을 넣어야 하므로

음이 아닌 네 정수 a', b', c', d'에 대하여

$a=a'+2$, $b=b'+2$, $c=c'+2$, $d=d'+2$로 놓으면

$(a'+2)+(b'+2)+(c'+2)+(d'+2)=10$에서

$a'+b'+c'+d'=2$

따라서 구하는 경우의 수는

방정식 $a'+b'+c'+d'=2$를 만족시키는 음이 아닌 정수 a', b', c', d'의 모든 순서쌍 (a', b', c', d')의 개수와 같으므로

${}_4\mathrm{H}_2={}_{4+2-1}\mathrm{C}_2={}_5\mathrm{C}_2=10$

답 ③

5 $(2x+k)^4$의 전개식의 일반항은

${}_4\mathrm{C}_r(2x)^rk^{4-r}={}_4\mathrm{C}_r2^rk^{4-r}x^r$ (단, $r=0, 1, 2, 3, 4$)

$r=2$일 때 x^2의 계수는

${}_4\mathrm{C}_2\times2^2\times k^2=24k^2$

따라서 $24k^2=96$에서 $k^2=4$

$k>0$이므로

$k=2$

답 ②

6 $(x-1)^2=x^2-2x+1$이므로

다항식 $(x-1)^2(2x+y)^6$의 전개식에서 x^6y^2항은

다항식 $(x-1)^2$의 전개식에서 x^2항과 다항식 $(2x+y)^6$의 전개식에서 x^4y^2항의 곱이다.

한편, $(2x+y)^6$의 전개식의 일반항은

${}_6\mathrm{C}_r(2x)^{6-r}y^r={}_6\mathrm{C}_r2^{6-r}x^{6-r}y^r$ (단, $r=0, 1, 2, \cdots, 6$)

$r=2$일 때 x^4y^2의 계수는

${}_6\mathrm{C}_2\times2^4=15\times16=240$

따라서 $(x-1)^2(2x+y)^6$의 전개식에서 x^6y^2의 계수는

$1\times240=240$

답 ④

7 $f(n)=2^{n+1}$, $g(n)=\frac{1}{2}\times2^{2n+1}=2^{2n}$이므로

$\frac{g(m)}{f(m)}=\frac{2^{2m}}{2^{m+1}}$

$=2^{m-1}$

따라서 $2^{m-1}=64=2^6$에서

$m-1=6$

즉, $m=7$

답 7

8 ${}_k\mathrm{C}_0+{}_k\mathrm{C}_1+{}_k\mathrm{C}_2+\cdots+{}_k\mathrm{C}_k=2^k$이므로

$2^k=16=2^4$에서

$k=4$

따라서

${}_k\mathrm{C}_0+{}_{k+1}\mathrm{C}_1+{}_{k+2}\mathrm{C}_2+{}_{k+3}\mathrm{C}_3+{}_{k+4}\mathrm{C}_4$

$={}_4\mathrm{C}_0+{}_5\mathrm{C}_1+{}_6\mathrm{C}_2+{}_7\mathrm{C}_3+{}_8\mathrm{C}_4$

$=({}_5\mathrm{C}_0+{}_5\mathrm{C}_1)+{}_6\mathrm{C}_2+{}_7\mathrm{C}_3+{}_8\mathrm{C}_4$

$=({}_6\mathrm{C}_1+{}_6\mathrm{C}_2)+{}_7\mathrm{C}_3+{}_8\mathrm{C}_4$

$=({}_7\mathrm{C}_2+{}_7\mathrm{C}_3)+{}_8\mathrm{C}_4$

$={}_8\mathrm{C}_3+{}_8\mathrm{C}_4$

$={}_9\mathrm{C}_4$

$=126$

답 ⑤

Level 2 기본 연습

본문 26~27쪽

1 ③ **2** ① **3** ⑤ **4** 32 **5** ②
6 502 **7** 120

1 a ■ b ■ c ■ d

그림과 같이 빨간색 카드 3장을 놓고,
빨간색 카드 가장 왼쪽, 두 카드의 사이, 빨간색 카드 가장 오른쪽에 놓이는 파란색 카드의 개수를 각각 a, b, c, d라 하자.
$a+b+c+d=7$이고,
조건을 만족시키도록 나열하려면
a, b, c는 모두 0 또는 짝수이어야 하고, d는 홀수이어야 한다.
음이 아닌 네 정수 a', b', c', d'에 대하여
$a=2a'$, $b=2b'$, $c=2c'$, $d=2d'+1$로 놓으면
$2a'+2b'+2c'+(2d'+1)=7$
$a'+b'+c'+d'=3$
따라서 구하는 경우의 수는
방정식 $a'+b'+c'+d'=3$을 만족시키는 음이 아닌 정수 a', b', c', d'의 모든 순서쌍 (a', b', c', d')의 개수와 같으므로
${}_4H_3={}_{4+3-1}C_3={}_6C_3=20$

답 ③

2 조건 (가)에서 $a+b+c+d$의 값이 짝수이고,
조건 (나)에서 a, b, c, d 중 적어도 하나는 홀수이므로
a, b, c, d 중 홀수의 개수는 2 또는 4이다.
(i) 홀수의 개수가 2인 경우
홀수 2개를 정하는 경우의 수는
${}_4C_2=6$
a와 b가 홀수라 하면 음이 아닌 네 정수 a', b', c', d'에 대하여
$a=2a'+1$, $b=2b'+1$, $c=2c'+2$, $d=2d'+2$
로 놓으면
$(2a'+1)+(2b'+1)+(2c'+2)+(2d'+2)=10$
$a'+b'+c'+d'=2$
방정식 $a'+b'+c'+d'=2$를 만족시키는 음이 아닌 정수 a', b', c', d'의 모든 순서쌍 (a', b', c', d')의 개수는
${}_4H_2={}_{4+2-1}C_2={}_5C_2=10$
이 경우 a, b, c, d 모두 6 이하의 자연수이므로
순서쌍 (a, b, c, d)의 개수는
$6\times10=60$
(ii) 홀수의 개수가 4인 경우
음이 아닌 네 정수 a'', b'', c'', d''에 대하여
$a=2a''+1$, $b=2b''+1$, $c=2c''+1$, $d=2d''+1$
로 놓으면
$(2a''+1)+(2b''+1)+(2c''+1)+(2d''+1)=10$
$a''+b''+c''+d''=3$
방정식 $a''+b''+c''+d''=3$을 만족시키는 음이 아닌 정수 a'', b'', c'', d''의 모든 순서쌍 (a'', b'', c'', d'')의 개수는
${}_4H_3={}_{4+3-1}C_3={}_6C_3=20$
그런데 순서쌍 (a'', b'', c'', d'')이
$(3, 0, 0, 0)$, $(0, 3, 0, 0)$, $(0, 0, 3, 0)$, $(0, 0, 0, 3)$
인 경우 조건을 만족시키지 않으므로
순서쌍 (a, b, c, d)의 개수는
$20-4=16$
(i), (ii)에서 구하는 모든 순서쌍 (a, b, c, d)의 개수는
$60+16=76$

답 ①

다른 풀이

a, b, c, d가 자연수이므로 음이 아닌 네 정수 a', b', c', d'에 대하여
$a=a'+1$, $b=b'+1$, $c=c'+1$, $d=d'+1$로 놓으면
조건 (가)에서
$(a'+1)+(b'+1)+(c'+1)+(d'+1)=10$
$a'+b'+c'+d'=6$
방정식 $a'+b'+c'+d'=6$을 만족시키는 음이 아닌 정수 a', b', c', d'의 모든 순서쌍 (a', b', c', d')의 개수는
${}_4H_6={}_{4+6-1}C_6={}_9C_6={}_9C_3=84$
그런데 순서쌍 (a', b', c', d')가
$(6, 0, 0, 0)$, $(0, 6, 0, 0)$, $(0, 0, 6, 0)$, $(0, 0, 0, 6)$
인 경우 조건을 만족시키지 않으므로 순서쌍 (a, b, c, d)의 개수는
$84-4=80$
한편, a, b, c, d가 모두 짝수인 경우 음이 아닌 네 정수 a'', b'', c'', d''에 대하여
$a=2a''+2$, $b=2b''+2$, $c=2c''+2$, $d=2d''+2$로 놓으면
$(2a''+2)+(2b''+2)+(2c''+2)+(2d''+2)=10$
$a''+b''+c''+d''=1$
방정식 $a''+b''+c''+d''=1$을 만족시키는 음이 아닌 정수 a'', b'', c'', d''의 모든 순서쌍 (a'', b'', c'', d'')의 개수는
4

따라서 구하는 모든 순서쌍 (a, b, c, d)의 개수는
$80-4=76$

3 조건 (나)에서 $f(1)=3$ 또는 $f(1)=4$ 또는 $f(1)=5$이다.
(i) $f(1)=3$인 경우
$f(2)$, $f(3)$, $f(4)$, $f(5)$의 값을 정하는 경우의 수는
3, 4, 5에서 중복을 허락하여 4개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로
${}_3\mathrm{H}_4={}_{3+4-1}\mathrm{C}_4={}_6\mathrm{C}_4={}_6\mathrm{C}_2=15$
그런데 조건 (다)에서 $f(1)+f(2)+f(3)=9$인 경우를 제외해야 한다.
즉, $f(1)=f(2)=f(3)=3$
이때 $f(4)$, $f(5)$의 값을 정하는 경우의 수는
3, 4, 5에서 중복을 허락하여 2개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로
${}_3\mathrm{H}_2={}_{3+2-1}\mathrm{C}_2={}_4\mathrm{C}_2=6$
즉, $f(1)=3$인 경우 함수 f의 개수는
$15-6=9$
(ii) $f(1)=4$인 경우
$f(2)$, $f(3)$, $f(4)$, $f(5)$의 값을 정하는 경우의 수는
4, 5에서 중복을 허락하여 4개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로
${}_2\mathrm{H}_4={}_{2+4-1}\mathrm{C}_4={}_5\mathrm{C}_4={}_5\mathrm{C}_1=5$
$f(1)=4$인 경우 조건 (다)를 만족시키므로
함수 f의 개수는 5
(iii) $f(1)=5$인 경우
모든 함숫값이 5이므로 조건 (다)를 만족시킨다.
즉, $f(1)=5$인 경우 함수 f의 개수는 1
(i), (ii), (iii)에서 구하는 함수 f의 개수는
$9+5+1=15$

답 ⑤

다른 풀이
조건 (가)와 조건 (나)를 만족시키는 함수 f의 개수는
3, 4, 5에서 중복을 허락하여 5개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로
${}_3\mathrm{H}_5={}_{3+5-1}\mathrm{C}_5={}_7\mathrm{C}_5={}_7\mathrm{C}_2=21$
한편, 조건 (가)와 조건 (나)를 만족시키면서
$f(1)+f(2)+f(3)\le 9$를 만족시키는 함수 f는
$f(1)=f(2)=f(3)=3$이어야 하고, $f(4)$, $f(5)$의 값을 정하는 경우의 수는 3, 4, 5에서 중복을 허락하여 2개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로
${}_3\mathrm{H}_2={}_{3+2-1}\mathrm{C}_2={}_4\mathrm{C}_2=6$
따라서 구하는 함수 f의 개수는
$21-6=15$

4 10 이하의 자연수 n에 대하여
$\left(x+\dfrac{1}{x^3}\right)^n$의 전개식의 일반항은
${}_n\mathrm{C}_r x^{n-r}\left(\dfrac{1}{x^3}\right)^r={}_n\mathrm{C}_r x^{n-4r}$ (단, $r=0, 1, 2, \cdots, n$)
이때 상수항이 존재하려면
$n-4r=0$에서 $n=4r$
즉, $\left(x+\dfrac{1}{x^3}\right)^n$의 전개식에서 $n=4$, $n=8$일 때 상수항이 존재한다.
따라서 구하는 상수항은
$${}_4\mathrm{C}_1+{}_8\mathrm{C}_2=4+28$$
$$=32$$

답 32

5 이항정리를 이용하여 다항식 $(1+x)^{30}$을 전개하면
$$(1+x)^{30}={}_{30}\mathrm{C}_0+{}_{30}\mathrm{C}_1x+{}_{30}\mathrm{C}_2x^2+{}_{30}\mathrm{C}_3x^3+\cdots+{}_{30}\mathrm{C}_{30}x^{30} \quad \cdots\cdots ㉠$$
㉠에 $x=3$을 대입하면
$$(1+3)^{30}={}_{30}\mathrm{C}_0+{}_{30}\mathrm{C}_1\times3+{}_{30}\mathrm{C}_2\times3^2+{}_{30}\mathrm{C}_3\times3^3+\cdots+{}_{30}\mathrm{C}_{30}\times3^{30}$$
$$2^{60}={}_{30}\mathrm{C}_0+{}_{30}\mathrm{C}_1\times3+{}_{30}\mathrm{C}_2\times3^2+{}_{30}\mathrm{C}_3\times3^3+\cdots+{}_{30}\mathrm{C}_{30}\times3^{30} \quad \cdots\cdots ㉡$$
또 ㉠에 $x=-3$을 대입하면
$$(1-3)^{30}={}_{30}\mathrm{C}_0+{}_{30}\mathrm{C}_1\times(-3)+{}_{30}\mathrm{C}_2\times(-3)^2+{}_{30}\mathrm{C}_3\times(-3)^3+\cdots+{}_{30}\mathrm{C}_{30}\times(-3)^{30}$$
$$2^{30}={}_{30}\mathrm{C}_0-{}_{30}\mathrm{C}_1\times3+{}_{30}\mathrm{C}_2\times3^2-{}_{30}\mathrm{C}_3\times3^3+\cdots+{}_{30}\mathrm{C}_{30}\times3^{30} \quad \cdots\cdots ㉢$$
㉡+㉢에서
$$2^{60}+2^{30}=2\times({}_{30}\mathrm{C}_0+{}_{30}\mathrm{C}_2\times3^2+{}_{30}\mathrm{C}_4\times3^4+\cdots+{}_{30}\mathrm{C}_{30}\times3^{30})$$
$$2^{30}\times(2^{30}+1)=2\times({}_{30}\mathrm{C}_0+{}_{30}\mathrm{C}_2\times3^2+{}_{30}\mathrm{C}_4\times3^4+\cdots+{}_{30}\mathrm{C}_{30}\times3^{30})$$
$$2^{29}\times(2^{30}+1)={}_{30}\mathrm{C}_0+{}_{30}\mathrm{C}_2\times3^2+{}_{30}\mathrm{C}_4\times3^4+\cdots+{}_{30}\mathrm{C}_{30}\times3^{30}$$
따라서 $m=29$

답 ②

6 조건 (가)의 $X\cap B=\varnothing$에서

3, 4, 5는 집합 X의 원소가 아니다.

또 조건 (가), (나)에서 집합 X가 집합 A의 부분집합이므로 $n(X)$의 값은 2 이상 9 이하의 자연수이다.

즉, $n(X)$와 집합 X의 개수를 표로 나타내면 다음과 같다.

$n(X)$	집합 X의 개수
2	${}_9C_2$
3	${}_9C_3$
4	${}_9C_4$
5	${}_9C_5$
6	${}_9C_6$
7	${}_9C_7$
8	${}_9C_8$
9	${}_9C_9$

따라서 구하는 집합 X의 개수는

${}_9C_2+{}_9C_3+{}_9C_4+{}_9C_5+{}_9C_6+{}_9C_7+{}_9C_8+{}_9C_9$

$=({}_9C_0+{}_9C_1+{}_9C_2+\cdots+{}_9C_9)-({}_9C_0+{}_9C_1)$

$=2^9-(1+9)$

$=512-10$

$=502$

답 502

7 문제에서

$f(n)={}_{2n+1}C_{n+1}+{}_{2n+1}C_{n+2}+{}_{2n+1}C_{n+3}+\cdots+{}_{2n+1}C_{2n+1}$ …… ㉠

${}_{2n+1}C_{n+1}={}_{2n+1}C_n$

${}_{2n+1}C_{n+2}={}_{2n+1}C_{n-1}$

${}_{2n+1}C_{n+3}={}_{2n+1}C_{n-2}$

$\vdots$

${}_{2n+1}C_{2n+1}={}_{2n+1}C_0$이므로

$f(n)={}_{2n+1}C_n+{}_{2n+1}C_{n-1}+{}_{2n+1}C_{n-2}+\cdots+{}_{2n+1}C_0$ …… ㉡

㉠+㉡에서

$2f(n)={}_{2n+1}C_0+{}_{2n+1}C_1+{}_{2n+1}C_2+\cdots+{}_{2n+1}C_{2n+1}$

$=2^{2n+1}$

즉, $f(n)=2^{2n}=4^n$

따라서

$\log_4\{f(1)\times f(2)\times f(3)\times\cdots\times f(15)\}$

$=\log_4(4^1\times4^2\times4^3\times\cdots\times4^{15})$

$=\log_4 4^{1+2+3+\cdots+15}$

$=1+2+3+\cdots+15$

$=\dfrac{15\times16}{2}$

$=120$

답 120

Level 3 실력 완성

본문 28쪽

1 141 **2** 40 **3** ③

1 (i) $f(3)=1,\ f(5)=5$인 경우

$f(1)=f(2)=1$이므로 $f(1),\ f(2)$의 값을 정하는 경우의 수는

1

$f(4)$의 값은 1, 2, 3, 4, 5 중 하나이므로 $f(4)$의 값을 정하는 경우의 수는

5

$f(6),\ f(7)$의 값을 정하는 경우의 수는 5, 6, 7 중에서 2개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

${}_3H_2={}_{3+2-1}C_2={}_4C_2=6$

이 경우 조건을 만족시키는 함수 f의 개수는

$1\times5\times6=30$

(ii) $f(3)=2,\ f(5)=6$인 경우

$f(1),\ f(2)$의 값을 정하는 경우의 수는 1, 2 중에서 2개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

${}_2H_2={}_{2+2-1}C_2={}_3C_2={}_3C_1=3$

$f(4)$의 값은 2, 3, 4, 5, 6 중 하나이므로 $f(4)$의 값을 정하는 경우의 수는

5

$f(6),\ f(7)$의 값을 정하는 경우의 수는 6, 7 중에서 2개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

${}_2H_2={}_{2+2-1}C_2={}_3C_2={}_3C_1=3$

이 경우 조건을 만족시키는 함수 f의 개수는

$3\times5\times3=45$

(iii) $f(3)=3$, $f(5)=7$인 경우

$f(1)$, $f(2)$의 값을 정하는 경우의 수는 1, 2, 3 중에서 2개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

${}_3H_2={}_{3+2-1}C_2={}_4C_2=6$

$f(4)$의 값은 3, 4, 5, 6, 7 중 하나이므로 $f(4)$의 값을 정하는 경우의 수는

5

$f(6)=f(7)=7$이므로 $f(6)$, $f(7)$의 값을 정하는 경우의 수는

1

이 경우 조건을 만족시키는 함수 f의 개수는

$6\times5\times1=30$

(iv) $f(3)=1$, $f(5)=6$인 경우

$f(1)=f(2)=1$이므로 $f(1)$, $f(2)$의 값을 정하는 경우의 수는

1

$f(4)$의 값은 1, 2, 3, 4, 5, 6 중 하나이므로 $f(4)$의 값을 정하는 경우의 수는

6

$f(6)$, $f(7)$의 값을 정하는 경우의 수는 6, 7 중에서 2개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

${}_2H_2={}_{2+2-1}C_2={}_3C_2={}_3C_1=3$

이 경우 조건을 만족시키는 함수 f의 개수는

$1\times6\times3=18$

(v) $f(3)=2$, $f(5)=7$인 경우

$f(1)$, $f(2)$의 값을 정하는 경우의 수는 1, 2 중에서 2개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

${}_2H_2={}_{2+2-1}C_2={}_3C_2={}_3C_1=3$

$f(4)$의 값은 2, 3, 4, 5, 6, 7 중 하나이므로 $f(4)$의 값을 정하는 경우의 수는

6

$f(6)=f(7)=7$이므로 $f(6)$, $f(7)$의 값을 정하는 경우의 수는

1

이 경우 조건을 만족시키는 함수 f의 개수는

$3\times6\times1=18$

(i)~(v)에서 구하는 함수 f의 개수는

$30+45+30+18+18=141$

답 141

다른 풀이

$a_1=f(1)-1$

$a_n=f(n)-f(n-1)$ $(n=2, 3, 4, 5, 6, 7)$

$a_8=7-f(7)$

이라 하면 a_n $(n=1, 2, 3, \cdots, 8)$은 음이 아닌 정수이고

$a_1+a_2+a_3+\cdots+a_8=6$

이때 $f(5)-f(3)=a_4+a_5$이므로

조건 (나)에서 $4\le a_4+a_5\le5$

(i) $a_4+a_5=4$인 경우

방정식 $a_4+a_5=4$를 만족시키는 음이 아닌 정수 a_4, a_5의 모든 순서쌍 (a_4, a_5)의 개수는

${}_2H_4={}_{2+4-1}C_4={}_5C_4={}_5C_1=5$

또 $a_1+a_2+a_3+a_6+a_7+a_8=2$이므로

방정식 $a_1+a_2+a_3+a_6+a_7+a_8=2$를 만족시키는 음이 아닌 정수 a_1, a_2, a_3, a_6, a_7, a_8의 모든 순서쌍 $(a_1, a_2, a_3, a_6, a_7, a_8)$의 개수는

${}_6H_2={}_{6+2-1}C_2={}_7C_2=21$

즉, 함수 f의 개수는

$5\times21=105$

(ii) $a_4+a_5=5$인 경우

방정식 $a_4+a_5=5$를 만족시키는 음이 아닌 정수 a_4, a_5의 모든 순서쌍 (a_4, a_5)의 개수는

${}_2H_5={}_{2+5-1}C_5={}_6C_5={}_6C_1=6$

또 $a_1+a_2+a_3+a_6+a_7+a_8=1$이므로

방정식 $a_1+a_2+a_3+a_6+a_7+a_8=1$을 만족시키는 음이 아닌 정수 a_1, a_2, a_3, a_6, a_7, a_8의 모든 순서쌍 $(a_1, a_2, a_3, a_6, a_7, a_8)$의 개수는

${}_6H_1={}_{6+1-1}C_1={}_6C_1=6$

즉, 함수 f의 개수는

$6\times6=36$

(i), (ii)에서 구하는 함수 f의 개수는

$105+36=141$

2 $\left(2x^3+\dfrac{1}{x^2}\right)^n$의 전개식의 일반항은

${}_nC_r(2x^3)^{n-r}\left(\dfrac{1}{x^2}\right)^r={}_nC_r2^{n-r}x^{3n-5r}$ (단, $r=0, 1, 2, \cdots, n$)

(i) $3n-5r=5$인 경우

$r=\dfrac{3n-5}{5}=\dfrac{3n}{5}-1$

r가 정수이므로 n은 5의 배수이고

$\left(2x^3+\dfrac{1}{x^2}\right)^n$의 전개식에서 x^5의 계수는

${}_nC_{\frac{3n}{5}-1}\times2^{\frac{2n}{5}+1}$

(ii) $3n-5r=10$인 경우

$r=\dfrac{3n-10}{5}=\dfrac{3n}{5}-2$

r가 정수이므로 n은 5의 배수이고

$\left(2x^3+\dfrac{1}{x^2}\right)^n$의 전개식에서 x^{10}의 계수는

${}_nC_{\frac{3n}{5}-2}\times 2^{\frac{2n}{5}+2}$

(i), (ii)에서 x^5의 계수와 x^{10}의 계수가 같으므로

${}_nC_{\frac{3n}{5}-1}\times 2^{\frac{2n}{5}+1}={}_nC_{\frac{3n}{5}-2}\times 2^{\frac{2n}{5}+1}\times 2$

${}_nC_{\frac{3n}{5}-1}=2\times {}_nC_{\frac{3n}{5}-2}$

$$\frac{n!}{\left(\frac{3n}{5}-1\right)!\times\left(\frac{2n}{5}+1\right)!}$$

$$=2\times\frac{n!}{\left(\frac{3n}{5}-2\right)!\times\left(\frac{2n}{5}+2\right)!}$$

$$\frac{1}{\frac{3n}{5}-1}=\frac{2}{\frac{2n}{5}+2}$$

$\dfrac{2n}{5}+2=2\left(\dfrac{3n}{5}-1\right)$에서

$n=5$

따라서 $\left(2x^3+\dfrac{1}{x^2}\right)^5$의 전개식의 일반항은

${}_5C_r 2^{5-r}x^{15-5r}$ (단, $r=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ 5$)

$15-5r=0$에서 $r=3$이므로

$\left(2x^3+\dfrac{1}{x^2}\right)^5$의 전개식에서 상수항은

$${}_5C_3\times 2^2={}_5C_2\times 2^2$$
$$=10\times 4$$
$$=40$$

답 40

3 집합 X의 원소 중 짝수의 개수가 8인 경우

집합 U의 짝수인 원소 15개 중에서 8개를 택하는 경우의 수는

${}_{15}C_8$

또 집합 U의 홀수인 원소 15개 중에서 7개 이하의 홀수를 택하는 경우의 수는

$${}_{15}C_0+{}_{15}C_1+{}_{15}C_2+\cdots+{}_{15}C_7$$
$$=\frac{1}{2}\times({}_{15}C_0+{}_{15}C_1+{}_{15}C_2+\cdots+{}_{15}C_{15})$$
$$=\frac{1}{2}\times 2^{15}$$
$$=2^{14}$$

즉, 짝수 8개를 원소로 갖는 집합 X의 개수는

${}_{15}C_8\times 2^{14}$

같은 방법으로 짝수 9개를 원소로 갖는 집합 X의 개수는

${}_{15}C_9\times 2^{14}$

같은 방법으로 짝수 10개를 원소로 갖는 집합 X의 개수는

${}_{15}C_{10}\times 2^{14}$

⋮

같은 방법으로 짝수 15개를 원소로 갖는 집합 X의 개수는

${}_{15}C_{15}\times 2^{14}$

따라서 구하는 모든 집합 X의 개수는

$${}_{15}C_8\times 2^{14}+{}_{15}C_9\times 2^{14}+{}_{15}C_{10}\times 2^{14}+\cdots+{}_{15}C_{15}\times 2^{14}$$
$$=({}_{15}C_8+{}_{15}C_9+{}_{15}C_{10}+\cdots+{}_{15}C_{15})\times 2^{14}$$
$$=\left\{\frac{1}{2}\times({}_{15}C_0+{}_{15}C_1+{}_{15}C_2+\cdots+{}_{15}C_{15})\right\}\times 2^{14}$$
$$=\left(\frac{1}{2}\times 2^{15}\right)\times 2^{14}$$
$$=2^{14}\times 2^{14}$$
$$=2^{28}$$

답 ③

03 확률의 뜻과 활용

유제 본문 31~37쪽

1 12 2 ② 3 ② 4 ① 5 7
6 61 7 ② 8 5

1 표본공간 S는
$S=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$
$2\le n\le 9$인 자연수 n에 대하여 사건 A_n은
$A_2=\{2, 4, 6, 8\}$, $A_3=\{3, 6, 9\}$, $A_4=\{4, 8\}$,
$A_5=\{5\}$, $A_6=\{6\}$, $A_7=\{7\}$, $A_8=\{8\}$, $A_9=\{9\}$
$B=\{2, 3, 5, 7\}$이므로
$B^C=\{1, 4, 6, 8, 9\}$
두 사건 A_n과 B^C이 서로 배반사건이 되려면
$A_n\cap B^C=\varnothing$이어야 하므로 n의 값은 5 또는 7이다.
따라서 구하는 모든 n의 값의 합은
$5+7=12$

답 12

2 서로 다른 두 개의 동전을 동시에 던지는 시행의 표본공간을 S라 하고, 동전의 앞면을 H, 뒷면을 T로 나타내면
$S=\{\text{HH, HT, TH, TT}\}$
같은 면이 나오는 사건이 A이므로
$A=\{\text{HH, TT}\}$
앞면이 한 번 이상 나오는 사건이 B이므로
$B=\{\text{HH, HT, TH}\}$
이때 $A\cap B=\{\text{HH}\}$이고 $B^C=\{\text{TT}\}$
한편, 사건 C가 사건 $A\cap B$와 서로 배반사건이므로
$C\cap(A\cap B)=\varnothing$에서
$C\subset(A\cap B)^C$
즉, $C\subset\{\text{HT, TH, TT}\}$ …… ㉠
사건 C가 사건 B^C과 서로 배반사건이므로
$C\cap B^C=\varnothing$에서
$C\subset B$
즉, $C\subset\{\text{HH, HT, TH}\}$ …… ㉡
㉠, ㉡을 동시에 만족시켜야 하므로
$C\subset\{\text{HT, TH}\}$
따라서 사건 C는 $C\ne\varnothing$이므로 사건 C의 개수는
$2^2-1=3$

답 ②

참고
$(A\cap B)\cup B^C=(A\cup B^C)\cap(B\cup B^C)$
$=(A\cup B^C)\cap S=A\cup B^C$
사건 C가 두 사건 $A\cap B$, B^C과 모두 배반사건이므로
$C\cap\{(A\cap B)\cup B^C\}=C\cap(A\cup B^C)=\varnothing$
$C\subset(A\cup B^C)^C=A^C\cap B=\{\text{HT, TH}\}$

3 참가자 7명에게 1번부터 7번까지 7개의 번호를 임의로 하나씩 부여하는 경우의 수는 7명을 일렬로 나열하는 경우의 수와 같으므로
${}_7\mathrm{P}_7=7!$
음치끼리는 서로 번호가 연속하지 않도록 번호를 부여하려면 음치가 아닌 참가자 4명을 일렬로 나열하고, 4명 사이에 있는 ∨로 표시된 3개의 자리와 양 끝의 ∨로 표시된 2개의 자리 중에서 서로 다른 3개의 자리를 택하여 번호를 부여하면 되므로 그 경우의 수는
$4!\times{}_5\mathrm{P}_3=4!\times 60$

∨	음치가 아닌 참가자	∨	음치가 아닌 참가자	∨	음치가 아닌 참가자	∨	음치가 아닌 참가자	∨

따라서 구하는 확률은
$\dfrac{4!\times 60}{7!}=\dfrac{2}{7}$

답 ②

다른 풀이
1번부터 7번까지 7개의 번호 중 서로 다른 3개의 번호를 임의로 택하여 음치 3명에게 부여하는 경우의 수는
${}_7\mathrm{P}_3=210$
음치끼리는 서로 번호가 연속하지 않도록 번호를 부여하려면 음치가 아닌 참가자 4명 사이에 있는 ∨로 표시된 3개의 자리와 양 끝의 ∨로 표시된 2개의 자리 중에서 서로 다른 3개의 자리를 택하여 번호를 부여하면 되므로 그 경우의 수는 ${}_5\mathrm{P}_3=60$

∨	음치가 아닌 참가자	∨	음치가 아닌 참가자	∨	음치가 아닌 참가자	∨	음치가 아닌 참가자	∨

따라서 구하는 확률은
$\dfrac{60}{210}=\dfrac{2}{7}$

4 한 개의 주사위를 두 번 던져서 나오는 경우의 수는

$6\times6=36$

원 $(x-a)^2+(y-b)^2=1$과 직선 $3x-4y+3=0$이 서로 접하려면 원의 중심 (a, b)와 직선 $3x-4y+3=0$ 사이의 거리가 원의 반지름의 길이 1과 같아야 한다.

즉, $\dfrac{|3a-4b+3|}{5}=1$

$|3a-4b+3|=5$

(i) $3a-4b+3=5$인 경우

$3a-4b=2$이므로

이것을 만족시키는 순서쌍 (a, b)는

$(2, 1)$, $(6, 4)$이므로 경우의 수는 2

(ii) $3a-4b+3=-5$인 경우

$3a-4b=-8$이므로

이것을 만족시키는 순서쌍 (a, b)는

$(4, 5)$이므로 경우의 수는 1

(i), (ii)에서 구하는 확률은

$\dfrac{2+1}{36}=\dfrac{1}{12}$

답 ①

5 집합 $X=\{1, 2, 3, 4\}$에 대하여 X에서 X로의 모든 함수 f의 개수는

${}_4\Pi_4=4^4=256$

$f(1)=f(2)$를 만족시키는 사건을 A, $f(3)=f(4)$를 만족시키는 사건을 B라 하자.

(i) $f(1)=f(2)$를 만족시키는 경우

집합 X에서 $f(1)$의 값을 선택하는 경우의 수는 4이고 이 각각에 대하여 집합 X에서 $f(3)$, $f(4)$의 값을 각각 선택하는 경우의 수는 ${}_4\Pi_2=4^2=16$이므로 $f(1)=f(2)$를 만족시키는 함수 f의 개수는

$4\times16=64$

따라서 $\mathrm{P}(A)=\dfrac{64}{256}=\dfrac{1}{4}$

(ii) $f(3)=f(4)$를 만족시키는 경우

집합 X에서 $f(3)$의 값을 선택하는 경우의 수는 4이고 이 각각에 대하여 집합 X에서 $f(1)$, $f(2)$의 값을 각각 선택하는 경우의 수는 ${}_4\Pi_2=4^2=16$이므로 $f(3)=f(4)$를 만족시키는 함수 f의 개수는

$4\times16=64$

따라서 $\mathrm{P}(B)=\dfrac{64}{256}=\dfrac{1}{4}$

(iii) $f(1)=f(2)$, $f(3)=f(4)$를 모두 만족시키는 경우

집합 X에서 $f(1)$의 값을 선택하는 경우의 수는 4이고 이 각각에 대하여 집합 X에서 $f(3)$의 값을 선택하는 경우의 수는 4이므로 $f(1)=f(2)$, $f(3)=f(4)$를 모두 만족시키는 함수 f의 개수는

$4\times4=16$

따라서 $\mathrm{P}(A\cap B)=\dfrac{16}{256}=\dfrac{1}{16}$

(i), (ii), (iii)에서 구하는 확률은 확률의 덧셈정리에 의하여

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(A\cup B)&=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)\\&=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}-\frac{1}{16}=\frac{7}{16}\end{aligned}$$

따라서 $p=\dfrac{7}{16}$이므로

$16p=16\times\dfrac{7}{16}=7$

답 7

6 10개의 공 중에서 임의로 2개의 공을 동시에 꺼내는 경우의 수는

${}_{10}\mathrm{C}_2=\dfrac{10\times9}{2\times1}=45$

한편, $f(x)=x^2-9x+18=(x-3)(x-6)$이므로

$x<3$ 또는 $x>6$에서 $f(x)>0$,

$3<x<6$에서 $f(x)<0$,

$f(3)=f(6)=0$

(i) $f(a)>0$이고 $f(b)>0$인 사건을 A라 하면

1, 2, 7, 8, 9, 10에서 서로 다른 두 수를 뽑는 경우의 수는

${}_6\mathrm{C}_2=\dfrac{6\times5}{2\times1}=15$이므로

$\mathrm{P}(A)=\dfrac{15}{45}=\dfrac{1}{3}$

(ii) $f(a)<0$이고 $f(b)<0$인 사건을 B라 하면

4, 5에서 서로 다른 두 수를 뽑는 경우의 수는

${}_2\mathrm{C}_2=1$이므로

$\mathrm{P}(B)=\dfrac{1}{45}$

(i), (ii)에서 두 사건 A와 B는 서로 배반사건이므로 구하는 확률은 확률의 덧셈정리에 의하여

$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)=\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{45}=\dfrac{16}{45}$

따라서 $p=45$, $q=16$이므로

$p+q=45+16=61$

답 61

7 노란 공 2개, 흰 공 3개, 검은 공 4개가 들어 있는 주머니에서 임의로 3개의 공을 동시에 꺼내는 경우의 수는

$_9\mathrm{C}_3=\frac{9\times8\times7}{3\times2\times1}=84$

꺼낸 3개의 공 중에서 어떤 두 공이 같은 색인 사건을 A라 하면 그 여사건 A^C은 꺼낸 3개의 공이 모두 다른 색이 나오는 사건이다.

이때 색이 모두 다른 3개의 공을 꺼내는 경우의 수는

$_2\mathrm{C}_1\times{}_3\mathrm{C}_1\times{}_4\mathrm{C}_1=24$이므로

$\mathrm{P}(A^C)=\frac{24}{84}=\frac{2}{7}$

따라서 구하는 확률은

$\mathrm{P}(A)=1-\mathrm{P}(A^C)=1-\frac{2}{7}=\frac{5}{7}$

답 ②

8 12개의 공 중에서 흰 공의 개수를 k $(1\le k\le 12)$라 하자.

2개의 공을 동시에 꺼낼 때, 흰 공을 1개 이상 꺼낼 확률이 $\frac{15}{22}$이므로 여사건의 확률에 의하여 꺼낸 2개의 공이 모두 흰 공이 아닐 확률은

$1-\frac{15}{22}=\frac{7}{22}$

이때 $12-k<2$이면 꺼낸 2개의 공이 모두 흰 공이 아닐 확률은 0이므로

$12-k\ge 2$, 즉 $k\le 10$

$\frac{_{12-k}\mathrm{C}_2}{_{12}\mathrm{C}_2}=\frac{7}{22}$ $(1\le k\le 10)$에서

$_{12-k}\mathrm{C}_2=\frac{7}{22}\times{}_{12}\mathrm{C}_2$

$=\frac{7}{22}\times\frac{12\times11}{2\times1}=21$

$\frac{(12-k)(11-k)}{2\times1}=21$, $(12-k)(11-k)=42$

$k^2-23k+90=0$

$(k-5)(k-18)=0$

$1\le k\le 10$이므로 $k=5$

따라서 흰 공의 개수는 5이다.

답 5

다른 풀이

12개의 공 중에서 흰 공이 아닌 공의 개수를 t $(1\le t\le 11)$이라 하자.

2개의 공을 동시에 꺼낼 때, 흰 공을 1개 이상 꺼낼 확률이 $\frac{15}{22}$이므로 여사건의 확률에 의하여 꺼낸 2개의 공이 모두 흰 공이 아닐 확률은

$1-\frac{15}{22}=\frac{7}{22}$

이때 $t<2$이면 2개의 공이 모두 흰 공이 아닐 확률이 0이므로

$2\le t\le 11$

$\frac{_t\mathrm{C}_2}{_{12}\mathrm{C}_2}=\frac{7}{22}$에서

$_t\mathrm{C}_2=\frac{7}{22}\times{}_{12}\mathrm{C}_2$

$t(t-1)=42$

$(t-7)(t+6)=0$

$2\le t\le 11$이므로 $t=7$

따라서 흰 공이 아닌 공의 개수가 7이므로 흰 공의 개수는 5이다.

참고

흰 공을 1개 이상 꺼낼 확률이 $\frac{15}{22}$이므로 $t\ne 12$이다.

Level 1 기초 연습

본문 38~39쪽

1 30	2 ⑤	3 ②	4 ③	5 ⑤
6 ④	7 ⑤	8 ②		

1 조건 (가)에서 $A\cup B=S$이고

조건 (나)에서 $A\cap B=\varnothing$이므로

표본공간 $S=\{1, 2, 3, 4, 5\}$의 각 원소는 두 사건 A, B 중 오직 한 사건에 속해야 하므로 경우의 수는

$_2\Pi_5=2^5=32$

이때 $A=\varnothing$인 경우와 $B=\varnothing$인 경우를 제외해야 하므로 구하는 순서쌍 (A, B)의 개수는

$32-2=30$

답 30

2 두 주머니 A, B에서 각각 임의로 공을 두 개씩 동시에 꺼내는 경우의 수는

$_4\mathrm{C}_2\times{}_3\mathrm{C}_2=\frac{4\times3}{2\times1}\times\frac{3\times2}{2\times1}=18$

주머니 A에서 꺼낸 두 개의 공에 적힌 수의 합은

3, 4, 5, 6, 7일 수 있고,

주머니 B에서 꺼낸 두 개의 공에 적힌 수의 곱은

3, 5, 15일 수 있으므로

3 또는 5일 때 서로 같다.

(ⅰ) 주머니 A에서 꺼낸 두 개의 공에 적힌 수의 합과 주머니 B에서 꺼낸 두 개의 공에 적힌 수의 곱이 모두 3인 경우
주머니 A에서 숫자 1, 2가 적혀 있는 공을 꺼내고 주머니 B에서 숫자 1, 3이 적혀 있는 공을 꺼내는 경우의 수는 $1\times1=1$

(ⅱ) 주머니 A에서 꺼낸 두 개의 공에 적힌 수의 합과 주머니 B에서 꺼낸 두 개의 공에 적힌 수의 곱이 모두 5인 경우
주머니 A에서 숫자 1, 4 또는 2, 3이 적혀 있는 공을 꺼내고 이 각각에 대하여 주머니 B에서 숫자 1, 5가 적혀 있는 공을 꺼내는 경우의 수는 $2\times1=2$

(ⅰ), (ⅱ)에서 구하는 확률은

$\frac{1+2}{18}=\frac{1}{6}$

답 ⑤

3 다섯 개의 숫자 1, 2, 2, 3, 3을 일렬로 나열하여 만든 다섯 자리 자연수의 개수는

$\frac{5!}{2!\times2!}=30$

백의 자리의 수가 1인 자연수의 개수는

2, 2, 3, 3을 일렬로 나열하는 경우의 수와 같으므로

$\frac{4!}{2!\times2!}=6$

따라서 구하는 확률은

$\frac{6}{30}=\frac{1}{5}$

답 ②

4 4명의 학생을 각각 1반부터 4반까지 4개의 반 중에서 한 개의 반에 임의로 배정하는 경우의 수는

${}_4\Pi_4=4^4=256$

학급 1반과 2반에 배정받은 학생 수의 합과 학급 3반과 4반에 배정받은 학생 수의 합이 서로 같으려면 1반과 2반에 배정받은 학생 수의 합과 3반과 4반에 배정받은 학생 수의 합이 모두 2이어야 한다.

4명의 학생 중에서 1반과 2반에 배정받을 학생을 선택하는 경우의 수는

${}_4C_2=6$

이 각각에 대하여 두 학급 1반과 2반에 배정하는 경우의 수는

${}_2\Pi_2=2^2=4$

이 각각에 대하여 남아 있는 2명의 학생을 두 학급 3반과 4반에 배정하는 경우의 수는

${}_2\Pi_2=2^2=4$

따라서 구하는 확률은

$\frac{6\times4\times4}{256}=\frac{3}{8}$

답 ③

5 두 사건 A, B에 대하여 확률의 덧셈정리에 의하여

$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)$이고,

$\mathrm{P}(A^C\cap B)=\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)$이므로

$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(A^C\cap B)$

따라서 $\mathrm{P}(A)=\frac{5}{6}-\frac{1}{3}=\frac{1}{2}$

이때 $\mathrm{P}(A\cap B^C)=\mathrm{P}(A)-\mathrm{P}(A\cap B)$에서

$\mathrm{P}(A\cap B)\geq0$이므로

$\mathrm{P}(A\cap B^C)$의 최댓값은 $\mathrm{P}(A\cap B)=0$일 때 $\frac{1}{2}$이다.

답 ⑤

6 집합 X의 10개의 원소 중에서 임의로 서로 다른 두 개의 원소를 동시에 선택하는 경우의 수는

${}_{10}C_2=\frac{10\times9}{2\times1}=45$

두 원소의 합이 10 이하의 소수인 사건을 A, 두 원소의 합이 10의 약수인 사건을 B라 하자.

(ⅰ) 두 원소의 합이 10 이하의 소수인 경우
3일 때, $1+2$로 경우의 수는 1
5일 때, $1+4$, $2+3$으로 경우의 수는 2
7일 때, $1+6$, $2+5$, $3+4$로 경우의 수는 3이므로
$\mathrm{P}(A)=\frac{1+2+3}{45}=\frac{6}{45}=\frac{2}{15}$

(ⅱ) 두 원소의 합이 10의 약수인 경우
5일 때, $1+4$, $2+3$으로 경우의 수는 2
10일 때, $1+9$, $2+8$, $3+7$, $4+6$으로 경우의 수는 4이므로
$\mathrm{P}(B)=\frac{2+4}{45}=\frac{6}{45}=\frac{2}{15}$

(ⅲ) 두 원소의 합이 10 이하의 소수이면서 10의 약수인 경우
5일 때, $1+4$, $2+3$으로 경우의 수는 2이므로
$\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{2}{45}$

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에서 구하는 확률은 확률의 덧셈정리에 의하여

$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)$

$=\frac{2}{15}+\frac{2}{15}-\frac{2}{45}=\frac{2}{9}$

답 ④

다른 풀이

집합 X의 10개의 원소 중에서 임의로 서로 다른 두 개의 원소를 동시에 선택하는 경우의 수는

${}_{10}C_2=\frac{10\times9}{2\times1}=45$

두 원소의 합이 10 이하의 소수인 사건을 A, 두 원소의 합이 10의 약수인 사건을 B라 하면 구하는 확률은 $P(A\cup B)$이다.

두 원소의 합이 3 또는 5 또는 7인 사건이 A, 두 원소의 합이 5 또는 10인 사건이 B이므로

두 원소의 합이 3 또는 5 또는 7 또는 10인 사건이 $A\cup B$이다.

두 원소의 합이 3일 때, $1+2$로 경우의 수는 1

두 원소의 합이 5일 때, $1+4$, $2+3$으로 경우의 수는 2

두 원소의 합이 7일 때, $1+6$, $2+5$, $3+4$로 경우의 수는 3

두 원소의 합이 10일 때, $1+9$, $2+8$, $3+7$, $4+6$으로 경우의 수는 4

따라서 $P(A\cup B)=\frac{1+2+3+4}{45}=\frac{10}{45}=\frac{2}{9}$

참고

10 이하의 자연수 중에서 서로 다른 두 개의 원소를 선택하므로 서로 다른 두 원소의 합은 2보다 크다.

7 서로 다른 7개의 메뉴를 월요일부터 일요일까지 일렬로 나열하는 경우의 수는 $7!$

토요일 또는 일요일 점심 메뉴로 채식 메뉴가 선정되는 사건을 A라 하면 사건 A의 여사건 A^C은 토요일과 일요일 점심 메뉴가 모두 채식이 아닌 메뉴로 선정되는 사건이다.

토요일과 일요일 점심 메뉴가 모두 채식이 아닌 메뉴로 선정되는 경우의 수는 ${}_5P_2\times5!$이므로

$P(A^C)=\frac{{}_5P_2\times5!}{7!}=\frac{10}{21}$

따라서 구하는 확률은

$P(A)=1-P(A^C)=1-\frac{10}{21}=\frac{11}{21}$

답 ⑤

다른 풀이

서로 다른 7개의 메뉴를 월요일부터 일요일까지 일렬로 나열하는 경우의 수는 $7!$

토요일 점심 메뉴로 채식 메뉴가 선정되는 사건을 A, 일요일 점심 메뉴로 채식 메뉴가 선정되는 사건을 B라 하면 구하는 확률은 $P(A\cup B)$이다.

(i) 토요일 점심 메뉴로 채식 메뉴가 선정되는 경우

서로 다른 채식 메뉴 2가지 중 토요일 점심 메뉴를 고르는 경우의 수는 ${}_2C_1=2$

이 각각에 대하여 나머지 요일의 점심 메뉴를 선정하는 경우의 수는 $6!$이므로

$P(A)=\frac{2\times6!}{7!}=\frac{2}{7}$

(ii) 일요일 점심 메뉴로 채식 메뉴가 선정되는 경우

서로 다른 채식 메뉴 2가지 중 일요일 점심 메뉴를 고르는 경우의 수는 ${}_2C_1=2$

이 각각에 대하여 나머지 요일의 점심 메뉴를 선정하는 경우의 수는 $6!$이므로

$P(B)=\frac{2\times6!}{7!}=\frac{2}{7}$

(iii) 토요일과 일요일 모두 점심 메뉴로 채식 메뉴가 선정되는 경우

서로 다른 채식 메뉴 2가지를 토요일과 일요일의 점심 메뉴로 선정하는 경우의 수는 $2!=2$

이 각각에 대하여 나머지 요일의 점심 메뉴를 선정하는 경우의 수는 $5!$이므로

$P(A\cap B)=\frac{2\times5!}{7!}=\frac{1}{21}$

(i), (ii), (iii)에서 구하는 확률은 확률의 덧셈정리에 의하여

$$\begin{aligned}P(A\cup B)&=P(A)+P(B)-P(A\cap B)\\&=\frac{2}{7}+\frac{2}{7}-\frac{1}{21}\\&=\frac{11}{21}\end{aligned}$$

8 두 자리 자연수의 개수는 90

$18=2\times3^2$이므로 18과 서로소이려면 2의 배수도 아니고 3의 배수도 아니어야 한다.

두 자리 자연수가 2의 배수가 되는 사건을 A, 3의 배수가 되는 사건을 B라 하면 사건 $A\cap B$는 두 자리 자연수가 6의 배수가 되는 사건이며 구하는 확률은 $P(A^C\cap B^C)$이다.

(i) 두 자리 자연수가 2의 배수인 경우

두 자리 자연수 중에서 2의 배수의 개수는 1부터 99까지 2의 배수의 개수 49에서 1부터 9까지 2의 배수의 개수 4를 빼면 되므로

$49-4=45$

그러므로 $P(A)=\frac{45}{90}=\frac{1}{2}$

(ii) 두 자리 자연수가 3의 배수인 경우

두 자리 자연수 중에서 3의 배수의 개수는 1부터 99까지 3의 배수의 개수 33에서 1부터 9까지 3의 배수의 개수 3을 빼면 되므로

$33-3=30$

그러므로 $P(B)=\frac{30}{90}=\frac{1}{3}$

(iii) 두 자리 자연수가 6의 배수인 경우

두 자리 자연수 중에서 6의 배수의 개수는 1부터 99까지 6의 배수의 개수 16에서 1부터 9까지 6의 배수의 개수 1을 빼면 되므로

$16-1=15$

그러므로 $P(A\cap B)=\frac{15}{90}=\frac{1}{6}$

(i), (ii), (iii)에서 확률의 덧셈정리에 의하여

$$\begin{aligned}P(A\cup B)&=P(A)+P(B)-P(A\cap B)\\&=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{6}=\frac{2}{3}\end{aligned}$$

따라서

$$\begin{aligned}P(A^C\cap B^C)&=P((A\cup B)^C)\\&=1-P(A\cup B)\\&=1-\frac{2}{3}=\frac{1}{3}\end{aligned}$$

답 ②

Level 2 기본 연습 본문 40~41쪽

1 ③	2 ④	3 ③	4 96	5 ⑤
6 ④	7 ⑤	8 ③		

1 한 개의 주사위를 두 번 던져서 나오는 경우의 수는

$6\times 6=36$

a가 b의 약수인 경우는 다음과 같다.

(i) $a=1$인 경우

b는 1, 2, 3, 4, 5, 6 중 한 개의 값이 될 수 있으므로 경우의 수는 6

(ii) $a=2$인 경우

b는 2, 4, 6 중 한 개의 값이 될 수 있으므로 경우의 수는 3

(iii) $a=3$인 경우

b는 3, 6 중 한 개의 값이 될 수 있으므로 경우의 수는 2

(iv) $a\geq 4$인 경우

$a=4$, $b=4$ 또는 $a=5$, $b=5$ 또는 $a=6$, $b=6$이므로 경우의 수는 3

(i)~(iv)에서 구하는 확률은

$\frac{6+3+2+3}{36}=\frac{7}{18}$

답 ③

2 주머니에서 임의로 3개의 공을 동시에 꺼내는 경우의 수는

${}_{10}C_3=120$

세 수의 합이 짝수이려면 세 수가 모두 짝수이거나 짝수가 1개, 홀수가 2개 나와야 한다. 또한 세 수의 곱이 5의 배수이려면 세 수 중 적어도 하나는 5 또는 10이어야 한다.

(i) 세 수가 모두 짝수인 경우

2, 4, 6, 8, 10 중 10이 반드시 포함되도록 3개를 택해야 하므로 경우의 수는

${}_4C_2=6$

(ii) 짝수가 1개, 홀수가 2개인 경우

짝수 중 1개, 홀수 중 2개를 꺼내는 경우의 수는

${}_5C_1\times{}_5C_2=50$이고,

5의 배수가 아닌 짝수 중 1개, 5의 배수가 아닌 홀수 중 2개를 꺼내는 경우의 수는 ${}_4C_1\times{}_4C_2=24$이므로

$50-24=26$

(i), (ii)에서 구하는 확률은

$\frac{6+26}{120}=\frac{4}{15}$

답 ④

다른 풀이

주머니에서 임의로 3개의 공을 동시에 꺼내는 경우의 수는

${}_{10}C_3=120$

세 수의 합이 짝수이려면 세 수가 모두 짝수이거나 짝수가 1개, 홀수가 2개 나와야 한다. 또한 세 수의 곱이 5의 배수이려면 세 수 중 적어도 하나는 5 또는 10이어야 한다.

(i) 세 수 중 한 개가 5인 경우

세 수 중 한 개가 5이고 세 수의 합이 짝수인 사건을 A라 하면

5를 제외한 홀수 중 1개, 짝수가 1개 나오는 경우의 수는

${}_4C_1\times{}_5C_1=20$이므로

$P(A)=\frac{20}{120}=\frac{1}{6}$

(ii) 세 수 중 한 개가 10인 경우
세 수 중 한 개가 10이고 세 수의 합이 짝수인 사건을 B라 하면
홀수가 2개 나오거나 10을 제외한 짝수 중 2개가 나오는 경우의 수는
${}_5C_2+{}_4C_2=10+6=16$이므로
$\mathrm{P}(B)=\frac{16}{120}=\frac{2}{15}$
(iii) 세 수 중 두 개가 5와 10인 경우
5를 제외한 홀수에서 1개 나오는 경우의 수는
${}_4C_1=4$이므로
$\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{4}{120}=\frac{1}{30}$
(i), (ii), (iii)에서 구하는 확률은 확률의 덧셈정리에 의하여
$$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{1}{6}+\frac{2}{15}-\frac{1}{30}=\frac{4}{15}$$

3 주머니 A, B, C에서 각각 임의로 한 장의 카드를 꺼내어 세 자리 자연수를 만드는 경우의 수는
$5\times3\times2=30$
이 세 자리 자연수가 6의 배수가 아닌 3의 배수가 되는 경우는 홀수인 3의 배수가 되는 경우이므로 a가 1 또는 3이어야 한다.
(i) a가 1인 사건을 A라 하면
세 자리 자연수가 3의 배수이어야 하므로
$a+b+c=1+b+c$가 3의 배수이어야 한다.
$b=5$일 때, $c=9$
$b=6$일 때, $c=8$
그러므로 $\mathrm{P}(A)=\frac{2}{30}=\frac{1}{15}$
(ii) a가 3인 사건을 B라 하면
세 자리 자연수가 3의 배수이어야 하므로
$a+b+c=3+b+c$가 3의 배수이어야 한다.
$b=6$일 때, $c=9$
$b=7$일 때, $c=8$
그러므로 $\mathrm{P}(B)=\frac{2}{30}=\frac{1}{15}$
두 사건 A와 B는 서로 배반사건이므로 (i), (ii)에서 구하는 확률은
$$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)=\frac{1}{15}+\frac{1}{15}=\frac{2}{15}$$
답 ③

4 $\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)$이므로
조건 (가)에서 $\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)=\frac{7}{6}$이고,
$\mathrm{P}(A)$, $\mathrm{P}(B)$는 $\frac{n}{6}$ (n은 6 이하의 자연수) 중 하나이므로
조건 (나)를 만족시키는 $\mathrm{P}(A)$, $\mathrm{P}(B)$의 값은
$\mathrm{P}(A)=\frac{1}{6}$, $\mathrm{P}(B)=1$ 또는
$\mathrm{P}(A)=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$, $\mathrm{P}(B)=\frac{5}{6}$ 또는
$\mathrm{P}(A)=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$, $\mathrm{P}(B)=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$이다.
(i) $\mathrm{P}(A)=\frac{1}{6}$, $\mathrm{P}(B)=1$인 경우
사건 $A\cap B$를 선택하는 경우의 수는 ${}_6C_1=6$이고,
두 사건 $A\cap B^C$과 $B\cap A^C$을 선택하는 경우의 수는 각각 ${}_5C_0$, ${}_5C_5$이므로
두 사건 A, B를 선택하는 경우의 수는
$6\times({}_5C_0\times{}_5C_5)=6$
(ii) $\mathrm{P}(A)=\frac{1}{3}$, $\mathrm{P}(B)=\frac{5}{6}$인 경우
사건 $A\cap B$를 선택하는 경우의 수는 ${}_6C_1=6$이고,
두 사건 $A\cap B^C$과 $B\cap A^C$을 선택하는 경우의 수는 각각 ${}_5C_1$, ${}_4C_4$이므로
두 사건 A, B를 선택하는 경우의 수는
$6\times({}_5C_1\times{}_4C_4)=30$
(iii) $\mathrm{P}(A)=\frac{1}{2}$, $\mathrm{P}(B)=\frac{2}{3}$인 경우
사건 $A\cap B$를 선택하는 경우의 수는 ${}_6C_1=6$이고,
두 사건 $A\cap B^C$과 $B\cap A^C$을 선택하는 경우의 수는 각각 ${}_5C_2$, ${}_3C_3$이므로
두 사건 A, B를 선택하는 경우의 수는
$6\times({}_5C_2\times{}_3C_3)=60$
(i), (ii), (iii)에서 구하는 경우의 수는
$6+30+60=96$
답 96

5 악기를 연주하는 1개 팀, 춤을 추는 2개 팀, 노래하는 3개 팀 모두 6개 팀의 공연 순서를 정하는 경우의 수는
$6!$
노래하는 3개 팀 중 이어서 공연하는 2개 팀을 선택하는 경우의 수는 ${}_3C_2$
춤을 추는 2개 팀과 노래하는 2개 팀을 묶어서 각각 1개 팀으로 생각하여 4개 팀의 공연 순서를 정하는 경우의 수는
$4!$

이때 노래하는 3개 팀이 이어서 공연하는 경우가 생기므로 그 경우의 수를 빼줘야 한다.
노래하는 3개 팀이 이어서 공연하는 경우는 노래하는 2개 팀 앞, 뒤에 노래하는 1개 팀이 공연하는 경우이므로 그 경우의 수는
$2\times3!$
이 각각에 대하여 춤을 추는 2개 팀의 공연 순서를 정하는 경우의 수는 $2!$이고,
이 각각에 대하여 노래하는 3개 팀 중 이어서 공연하는 2개 팀의 공연 순서를 정하는 경우의 수는
$2!$
따라서 조건 (가)와 조건 (나)를 모두 만족시키는 경우의 수는
${}_3\mathrm{C}_2\times(4!-2\times3!)\times2!\times2!$
이므로 구하는 확률은
$\frac{{}_3\mathrm{C}_2\times(4!-2\times3!)\times2!\times2!}{6!}=\frac{1}{5}$

답 ⑤

다른 풀이
악기를 연주하는 1개 팀, 춤을 추는 2개 팀, 노래하는 3개 팀 모두 6개 팀의 공연 순서를 정하는 경우의 수는 $6!$
노래하는 3개 팀 중 이어서 공연하는 2개 팀을 선택하는 경우의 수는 ${}_3\mathrm{C}_2$
춤을 추는 2개 팀과 노래하는 2개 팀을 묶어서 각각 1개 팀으로 생각하여 악기를 연주하는 1개 팀과 함께 3개 팀의 공연 순서를 정하는 경우의 수는 $3!$
이 각각에 대하여 노래하는 1개 팀의 공연 순서를 정하는 경우의 수는 악기를 연주하는 1개 팀, 춤을 추는 2개 팀, 노래하는 2개 팀 사이의 2자리와 양 끝의 2자리 총 4자리 중에서 노래하는 2개 팀의 앞, 뒤 2자리는 갈 수 없으므로
$4-2=2$
이 각각에 대하여 춤을 추는 2개 팀의 공연 순서를 정하는 경우의 수는 $2!$
이 각각에 대하여 노래하는 3개 팀 중 이어서 공연하는 2개 팀의 공연 순서를 정하는 경우의 수는 $2!$
따라서 조건 (가)와 조건 (나)를 모두 만족시키는 경우의 수는
${}_3\mathrm{C}_2\times3!\times2\times2!\times2!$
이므로 구하는 확률은
$\frac{{}_3\mathrm{C}_2\times3!\times2\times2!\times2!}{6!}=\frac{1}{5}$

6 숫자 1, 2, 3, 4, 5가 하나씩 적힌 5장의 카드를 임의로 일렬로 나열하는 경우의 수는
${}_5\mathrm{P}_5=5!=120$
2가 적힌 카드가 1이 적힌 카드와 3이 적힌 카드 사이에 있도록 나열하는 사건을 A, 3이 적힌 카드가 2가 적힌 카드와 4가 적힌 카드 사이에 있도록 나열하는 사건을 B라 하자.
(i) 2가 적힌 카드가 1이 적힌 카드와 3이 적힌 카드 사이에 있도록 나열하는 경우
5장의 카드를 놓을 5개의 자리 중에서 4와 5가 적힌 카드의 자리를 선택하는 경우의 수는
${}_5\mathrm{P}_2=5\times4=20$
이 각각에 대하여 남은 3개의 자리 중에서 가운데에 2가 적힌 카드를 놓고 나머지 2개의 자리에 1과 3이 적힌 카드를 놓아야 하므로
$\mathrm{P}(A)=\frac{20\times1\times2!}{120}=\frac{1}{3}$
(ii) 3이 적힌 카드가 2가 적힌 카드와 4가 적힌 카드 사이에 있도록 나열하는 경우
5장의 카드를 놓을 5개의 자리 중에서 1과 5가 적힌 카드의 자리를 선택하는 경우의 수는
${}_5\mathrm{P}_2=5\times4=20$
이 각각에 대하여 남은 3개의 자리 중에서 가운데에 3이 적힌 카드를 놓고 나머지 2개의 자리에 2와 4가 적힌 카드를 놓아야 하므로
$\mathrm{P}(B)=\frac{20\times1\times2!}{120}=\frac{1}{3}$
(iii) 2가 적힌 카드가 1이 적힌 카드와 3이 적힌 카드 사이에 있고, 3이 적힌 카드가 2가 적힌 카드와 4가 적힌 카드 사이에 있도록 나열하는 경우
카드에 적힌 수가 1, 2, 3, 4 또는 4, 3, 2, 1의 순서로 나열되어야 하고 그 각각에 대하여 카드 사이사이의 세 곳과 맨 왼쪽, 맨 오른쪽 두 곳에 5가 적힌 카드를 놓을 수 있으므로
$\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{2\times5}{120}=\frac{1}{12}$
(i), (ii), (iii)에서 구하는 확률은 확률의 덧셈정리에 의하여
$$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{12}=\frac{7}{12}$$

답 ④

7 1부터 10까지의 자연수가 하나씩 적혀 있는 10개의 공이 들어 있는 주머니에서 임의로 5개의 공을 동시에 꺼내는 경우의 수는

$${}_{10}C_5=\frac{10\times9\times8\times7\times6}{5\times4\times3\times2\times1}=252$$

꺼낸 공에 적혀 있는 수 중에서 가장 큰 수와 가장 작은 수의 합이 8 이하이거나 11 이상인 사건을 A라 하면 그 여사건 A^C은 꺼낸 공에 적혀 있는 수 중에서 가장 큰 수와 가장 작은 수의 합이 9이거나 10인 사건이다.

꺼낸 공에 적혀 있는 수 중에서 가장 큰 수를 M, 가장 작은 수를 m이라 하면 $M+m=9$ 또는 $M+m=10$인 경우의 수는 다음과 같다.

(i) $M+m=9$인 경우

$M=8$, $m=1$일 때, 2, 3, 4, 5, 6, 7 중에서 3개를 선택해야 하므로

$${}_6C_3=\frac{6\times5\times4}{3\times2\times1}=20$$

$M=7$, $m=2$일 때, 3, 4, 5, 6 중에서 3개를 선택해야 하므로

${}_4C_3={}_4C_1=4$

그러므로 이 경우의 수는

$20+4=24$

(ii) $M+m=10$인 경우

$M=9$, $m=1$일 때, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 중에서 3개를 선택해야 하므로

$${}_7C_3=\frac{7\times6\times5}{3\times2\times1}=35$$

$M=8$, $m=2$일 때, 3, 4, 5, 6, 7 중에서 3개를 선택해야 하므로

$${}_5C_3={}_5C_2=\frac{5\times4}{2\times1}=10$$

$M=7$, $m=3$일 때, 4, 5, 6 중에서 3개를 선택해야 하므로 ${}_3C_3={}_3C_0=1$

그러므로 이 경우의 수는

$35+10+1=46$

(i), (ii)에서

$$P(A^C)=\frac{24+46}{252}=\frac{70}{252}=\frac{5}{18}$$

따라서 구하는 확률은

$$P(A)=1-P(A^C)=1-\frac{5}{18}=\frac{13}{18}$$

답 ⑤

참고

$M\le6$인 경우 M과 m 사이에서 3개를 선택할 수 없거나 M이 가장 큰 수, m이 가장 작은 수라는 조건을 만족시키지 않는다.

8 6개의 의자를 원형으로 임의로 배열하는 경우의 수는

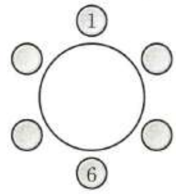
$(6-1)!=5!=120$

서로 마주 보는 2개의 의자에 적혀 있는 수의 곱이 6이 되는 두 수는 1, 6 또는 2, 3이다.

1, 6이 적혀 있는 두 의자를 서로 마주 보게 배열하는 사건을 A라 하고 2, 3이 적혀 있는 두 의자를 서로 마주 보게 배열하는 사건을 B라 하면 구하는 확률은 $P(A^C\cap B^C)$이다.

(i) 1, 6이 적혀 있는 두 의자를 서로 마주 보게 배열하는 경우

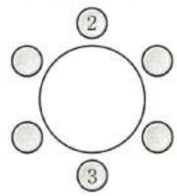
1, 6이 적혀 있는 두 의자를 서로 마주 보게 자리를 배치하고 나머지 4개의 의자를 배열하는 경우의 수는 $4!=24$이므로



$$P(A)=\frac{24}{120}=\frac{1}{5}$$

(ii) 2, 3이 적혀 있는 두 의자를 서로 마주 보게 배열하는 경우

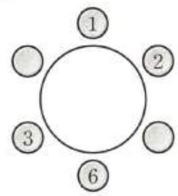
2, 3이 적혀 있는 두 의자를 서로 마주 보게 자리를 배치하고 나머지 4개의 의자를 배열하는 경우의 수는 $4!=24$이므로



$$P(B)=\frac{24}{120}=\frac{1}{5}$$

(iii) 1, 6이 적혀 있는 두 의자와 2, 3이 적혀 있는 두 의자를 각각 모두 서로 마주 보게 배열하는 경우

1, 6이 적혀 있는 두 의자를 서로 마주 보게 자리를 배치하고 2가 적혀 있는 의자의 자리를 선택하는 경우의 수는 ${}_4C_1$



이 각각에 대하여 3이 적혀 있는 의자는 2가 적혀 있는 의자와 마주 보게 위치를 정하고 나머지 4, 5가 적혀 있는 두 의자를 배열하는 경우의 수는 $2!$

그러므로 이 경우의 수는 ${}_4C_1\times1\times2!=8$이므로

$$P(A\cap B)=\frac{8}{120}=\frac{1}{15}$$

(i), (ii), (iii)에서 확률의 덧셈정리에 의하여

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=\frac{1}{5}+\frac{1}{5}-\frac{1}{15}=\frac{1}{3}$$

따라서

$$P(A^C\cap B^C)=P((A\cup B)^C)=1-P(A\cup B)=1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$$

답 ③

Level 3 실력 완성

본문 42쪽

1 ② **2** ① **3** 91

1 주머니에서 임의로 4개의 공을 동시에 꺼내는 경우의 수는
${}_9C_4=126$
$n(\{x_i|x_{i+1}-x_i=1,\ i=1,\ 2,\ 3\})=1$인 경우는 꺼낸 4개의 공에 적혀 있는 자연수 중 두 수만 연속된 자연수인 경우이므로 다음과 같이 나누어 경우의 수를 구할 수 있다.

(i) 연속된 두 수가 1, 2 또는 8, 9인 경우
연속된 두 수가 1, 2인 경우의 수는 3을 제외한 4, 5, 6, 7, 8, 9의 6개 중 2개를 선택하는 경우의 수 ${}_6C_2=15$에서 4, 5 또는 5, 6 또는 6, 7 또는 7, 8 또는 8, 9를 선택하는 경우의 수 5를 빼야 하므로
$15-5=10$
같은 방법으로 연속된 두 수가 8, 9인 경우의 수는 7을 제외한 1, 2, 3, 4, 5, 6의 6개 중 2개를 선택하는 경우의 수 ${}_6C_2=15$에서 1, 2 또는 2, 3 또는 3, 4 또는 4, 5 또는 5, 6을 선택하는 경우의 수 5를 빼야 하므로
$15-5=10$
그러므로 구하는 경우의 수는
$10+10=20$

(ii) 연속된 두 수가 2, 3 또는 7, 8인 경우
연속된 두 수가 2, 3인 경우의 수는 1과 4를 제외한 5, 6, 7, 8, 9의 5개 중 2개를 선택하는 경우의 수 ${}_5C_2=10$에서 5, 6 또는 6, 7 또는 7, 8 또는 8, 9를 선택하는 경우의 수 4를 빼야 하므로
$10-4=6$
같은 방법으로 연속된 두 수가 7, 8인 경우의 수는 6과 9를 제외한 1, 2, 3, 4, 5의 5개 중 2개를 선택하는 경우의 수 ${}_5C_2=10$에서 1, 2 또는 2, 3 또는 3, 4 또는 4, 5를 선택하는 경우의 수 4를 빼야 하므로
$10-4=6$
그러므로 구하는 경우의 수는
$6+6=12$

(iii) 연속된 두 수가 3, 4 또는 6, 7인 경우
연속된 두 수가 3, 4인 경우는 1을 포함하는 경우와 1을 포함하지 않은 경우로 나눌 수 있다.
1을 포함하는 경우의 수는 2와 5를 제외한 6, 7, 8, 9의 4개 중 1개를 선택하는 경우의 수이므로
${}_4C_1=4$
1을 포함하지 않은 경우의 수는 6, 7, 8, 9의 4개 중 2개를 선택하는 경우의 수 ${}_4C_2=6$에서 6, 7 또는 7, 8 또는 8, 9를 선택하는 경우의 수 3을 빼야 하므로
$6-3=3$
그러므로 연속된 두 수가 3, 4인 경우의 수는
$4+3=7$
같은 방법으로 연속된 두 수가 6, 7인 경우는 9를 포함하는 경우와 9를 포함하지 않은 경우로 나눌 수 있다.
9를 포함하는 경우의 수는 5와 8을 제외한 1, 2, 3, 4의 4개 중 1개를 선택하는 경우의 수이므로
${}_4C_1=4$
9를 포함하지 않은 경우의 수는 1, 2, 3, 4의 4개 중 2개를 선택하는 경우의 수 ${}_4C_2=6$에서 1, 2 또는 2, 3 또는 3, 4를 선택하는 경우의 수 3을 빼야 하므로
$6-3=3$
그러므로 연속된 두 수가 6, 7인 경우의 수는
$4+3=7$
따라서 구하는 경우의 수는
$7+7=14$

(iv) 연속된 두 수가 4, 5 또는 5, 6인 경우
연속된 두 수가 4, 5인 경우의 수는 3과 6을 제외한 1, 2, 7, 8, 9의 5개 중 2개를 선택하는 경우의 수 ${}_5C_2=10$에서 1, 2 또는 7, 8 또는 8, 9를 선택하는 경우의 수 3을 빼야 하므로
$10-3=7$
같은 방법으로 연속된 두 수가 5, 6인 경우의 수는 4와 7을 제외한 1, 2, 3, 8, 9의 5개 중 2개를 선택하는 경우의 수 ${}_5C_2=10$에서 1, 2 또는 2, 3 또는 8, 9를 선택하는 경우의 수 3을 빼야 하므로
$10-3=7$
그러므로 구하는 경우의 수는
$7+7=14$

(i)~(iv)에서 구하는 확률은
$\dfrac{20+12+14+14}{126}=\dfrac{60}{126}=\dfrac{10}{21}$

답 ②

다른 풀이
주머니에서 임의로 4개의 공을 동시에 꺼내는 경우의 수는
${}_9C_4=126$
$1\le x_1<x_2<x_3<x_4\le 9$
$x_1'=x_1-1,\ x_2'=x_2-x_1,\ x_3'=x_3-x_2,\ x_4'=x_4-x_3,$
$x_5'=9-x_4$라 하면
$n(\{x_i|x_{i+1}-x_i=1,\ i=1,\ 2,\ 3\})=1$인 경우의 수는
$x_1'+x_2'+x_3'+x_4'+x_5'=8$이고, $x_1'\ge 0,\ x_5'\ge 0$이면서 $x_2',\ x_3',\ x_4'$ 중 1인 자연수의 개수는 1이고 2 이상의 자연

수의 개수는 2인 순서쌍 $(x_1', x_2', x_3', x_4', x_5')$의 개수와 같다.

$x_2'=1$이면 $x_3'\ge 2$, $x_4'\ge 2$이고,

$x_1'\ge 0$, $x_5'\ge 0$에서 $x_1'+x_2'+x_3'+x_4'+x_5'=8$을 만족시키는 모든 순서쌍 $(x_1', x_2', x_3', x_4', x_5')$의 개수는

$x_1'+x_3'+x_4'+x_5'=7$에서

$x_3''=x_3'-2$, $x_4''=x_4'-2$라 하면

방정식 $x_1'+x_3''+x_4''+x_5'=3$을 만족시키는 음이 아닌 정수 x_1', x_3'', x_4'', x_5'의 모든 순서쌍 $(x_1', x_3'', x_4'', x_5')$의 개수와 같으므로

${}_4\mathrm{H}_3={}_{4+3-1}\mathrm{C}_3={}_6\mathrm{C}_3=20$

마찬가지 방법으로 $x_3'=1$ 또는 $x_4'=1$일 때도 각각의 경우의 수가 20이므로 구하는 확률은

$\dfrac{20\times 3}{126}=\dfrac{10}{21}$

2 함수 f는 집합 X에서 X로의 일대일대응이어야 하므로

함수 f의 개수는

${}_4\mathrm{P}_4=4!=24$

함수 $f\circ f$가 항등함수가 되는 사건을 A, 함수 $f\circ f\circ f$가 항등함수가 되는 사건을 B라 하면 구하는 확률은

$\mathrm{P}(A\cup B)$이다.

(i) 함수 $f\circ f$가 항등함수가 되는 경우

집합 X의 두 원소 x, y에 대하여 $f(x)=y$일 때,

$(f\circ f)(x)=f(f(x))=f(y)=x$이어야 하므로

1, 2, 3, 4의 4개의 원소를 2개씩 묶어 2묶음으로 나누는 경우의 수는

${}_4\mathrm{C}_2\times{}_2\mathrm{C}_2\times\dfrac{1}{2!}=3$

이 각각에 대하여 선택한 서로 다른 두 원소 x, y가 $f(x)=x$, $f(y)=y$ 또는 $f(x)=y$, $f(y)=x$이고, 이때 함수 f가 항등함수인 경우를 제외하면

항등함수가 아닌 함수 f의 개수는

$3\times({}_2\mathrm{C}_1\times{}_2\mathrm{C}_1-1)=9$

한편, 함수 f가 항등함수이면 함수 $f\circ f$도 항등함수가 되므로

$\mathrm{P}(A)=\dfrac{9+1}{24}=\dfrac{5}{12}$

(ii) 함수 $f\circ f\circ f$가 항등함수가 되는 경우

집합 X의 임의의 원소 x에 대하여 $f(x)=x$일 때,

$(f\circ f\circ f)(x)=x$이므로 조건을 만족시킨다. …… ㉠

집합 X의 서로 다른 두 원소 x, y에 대하여 $f(x)=y$일 때, $f(y)=x$이면

$(f\circ f\circ f)(x)=(f\circ f)(f(x))=(f\circ f)(y)$
$=f(f(y))=f(x)=y\neq x$

이므로 조건을 만족시키지 않는다. 즉, $f(y)\neq x$이어야 한다.

$z\neq x$, $z\neq y$인 집합 X의 원소 z에 대하여 $f(y)=z$일 때,

$(f\circ f\circ f)(x)=(f\circ f)(f(x))=(f\circ f)(y)$
$=f(f(y))=f(z)=x$

이므로 집합 X의 서로 다른 세 원소 x, y, z에 대하여

$f(x)=y$, $f(y)=z$, $f(z)=x$가 성립해야 한다.

또는 마찬가지 방법으로 $f(x)=z$일 때, $f(z)=y$, $f(y)=x$가 성립해야 한다.

이때 나머지 한 개의 원소를 w라 하면 $f(w)=w$이어야 한다.

1, 2, 3, 4의 4개의 원소 중 3개의 원소를 선택하는 경우의 수는 ${}_4\mathrm{C}_3=4$이고,

이 각각에 대하여 선택한 세 원소 x, y, z가

$f(x)=y$, $f(y)=z$, $f(z)=x$ 또는

$f(x)=z$, $f(y)=x$, $f(z)=y$일 수 있으므로

함수 f의 개수는

$4\times 2=8$ …… ㉡

그러므로 ㉠, ㉡에서

$\mathrm{P}(B)=\dfrac{1+8}{24}=\dfrac{9}{24}=\dfrac{3}{8}$

(iii) 두 함수 $f\circ f$와 $f\circ f\circ f$가 모두 항등함수가 되는 경우

집합 X의 모든 원소 x에 대하여 $f(x)=x$일 때, 두 함수 $f\circ f$와 $f\circ f\circ f$가 모두 항등함수가 되므로

$\mathrm{P}(A\cap B)=\dfrac{1}{24}$

(i), (ii), (iii)에서 구하는 확률은 확률의 덧셈정리에 의하여

$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)$
$=\dfrac{5}{12}+\dfrac{3}{8}-\dfrac{1}{24}=\dfrac{3}{4}$

답 ①

다른 풀이

함수 f는 집합 X에서 X로의 일대일대응이어야 하므로

함수 f의 개수는

${}_4\mathrm{P}_4=4!=24$

함수 $f\circ f$가 항등함수가 되는 사건을 A, 함수 $f\circ f\circ f$가 항등함수가 되는 사건을 B라 하면 구하는 확률은

$\mathrm{P}(A\cup B)$이다.

사건 A의 여사건 A^C은 함수 $f\circ f$가 항등함수가 아닌 사건이고 사건 B의 여사건 B^C은 함수 $f\circ f\circ f$가 항등함수가 아닌 사건이므로 사건 $A^C\cap B^C$은 함수 $f\circ f$와 함수

$f \circ f \circ f$가 모두 항등함수가 아닌 사건이다.

함수 $f \circ f$와 함수 $f \circ f \circ f$가 모두 항등함수가 아닌 함수 f의 개수는 1, $f(1)$, $(f \circ f)(1)$, $(f \circ f \circ f)(1)$의 값이 모두 다른 경우의 수이므로

${}_3\mathrm{P}_3=3!=6$

그러므로 $\mathrm{P}(A^C \cap B^C)=\frac{6}{24}=\frac{1}{4}$

따라서

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(A \cup B)&=1-\mathrm{P}((A \cup B)^C)\\&=1-\mathrm{P}(A^C \cap B^C)\\&=1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}\end{aligned}$$

참고

위에서 두 함수 $f \circ f$와 $f \circ f \circ f$가 모두 항등함수가 아니면 일대일대응인 함수 f는 모든 $x \in X$에 대하여 $f(x) \neq x$이다. 또한 항등함수가 아니다.

만약 일대일대응인 함수 $f(x)$가 어떤 $x \in X$에 대하여 $f(x)=x$이면 세 함수 f, $f \circ f$, $f \circ f \circ f$ 중 하나는 항등함수가 된다.

따라서 모든 $x \in X$에 대하여 $f(x) \neq x$이다.

한편, $f(x)=y$ $(x \neq y)$이고 $(f \circ f)(x)=x$이면 함수 $f \circ f$는 항등함수가 된다.

그러므로 두 함수 $f \circ f$, $f \circ f \circ f$가 모두 항등함수가 아닌 함수 f의 개수는

1, $f(1)$, $(f \circ f)(1)$, $(f \circ f \circ f)(1)$의 값이 모두 다른 경우의 수와 같다.

3 부등식 $x+y+z \leq 8$을 만족시키는 음이 아닌 정수 x, y, z의 모든 순서쌍 (x, y, z)의 개수는

${}_3\mathrm{H}_0+{}_3\mathrm{H}_1+{}_3\mathrm{H}_2+\cdots+{}_3\mathrm{H}_8$이고,

${}_n\mathrm{C}_r+{}_n\mathrm{C}_{r+1}={}_{n+1}\mathrm{C}_{r+1}$이므로

$$\begin{aligned}&{}_3\mathrm{H}_0+{}_3\mathrm{H}_1+{}_3\mathrm{H}_2+\cdots+{}_3\mathrm{H}_8\\&={}_2\mathrm{C}_0+{}_3\mathrm{C}_1+{}_4\mathrm{C}_2+\cdots+{}_{10}\mathrm{C}_8\\&={}_3\mathrm{C}_0+{}_3\mathrm{C}_1+{}_4\mathrm{C}_2+\cdots+{}_{10}\mathrm{C}_8\\&={}_4\mathrm{C}_1+{}_4\mathrm{C}_2+\cdots+{}_{10}\mathrm{C}_8\\&={}_5\mathrm{C}_2+{}_5\mathrm{C}_3+\cdots+{}_{10}\mathrm{C}_8\\&\quad\vdots\\&={}_{11}\mathrm{C}_8={}_{11}\mathrm{C}_3=\frac{11\times10\times9}{3\times2\times1}=165\end{aligned}$$

이 중에서 $(x-y)(z-1) \neq 0$이 성립하려면 $x \neq y$이고 $z \neq 1$이어야 한다.

$x=y$인 사건을 A, $z=1$인 사건을 B라 하면 구하는 확률은

$\mathrm{P}(A^C \cap B^C)=\mathrm{P}((A \cup B)^C)=1-\mathrm{P}(A \cup B)$

(i) $x=y$인 경우

$2x+z \leq 8$을 만족시키는 순서쌍 (x, y, z)의 개수는

$x=0$일 때, $z \leq 8$이므로 9

$x=1$일 때, $z \leq 6$이므로 7

$x=2$일 때, $z \leq 4$이므로 5

$x=3$일 때, $z \leq 2$이므로 3

$x=4$일 때, $z \leq 0$이므로 1

에서 $9+7+5+3+1=25$이므로

$\mathrm{P}(A)=\frac{25}{165}=\frac{5}{33}$

(ii) $z=1$인 경우

$x+y \leq 7$을 만족시키는 순서쌍 (x, y, z)의 개수는

$$\begin{aligned}&{}_2\mathrm{H}_0+{}_2\mathrm{H}_1+{}_2\mathrm{H}_2+\cdots+{}_2\mathrm{H}_7\\&={}_1\mathrm{C}_0+{}_2\mathrm{C}_1+{}_3\mathrm{C}_2+\cdots+{}_8\mathrm{C}_7\\&={}_2\mathrm{C}_0+{}_2\mathrm{C}_1+{}_3\mathrm{C}_2+\cdots+{}_8\mathrm{C}_7\\&={}_3\mathrm{C}_1+{}_3\mathrm{C}_2+\cdots+{}_8\mathrm{C}_7\\&={}_4\mathrm{C}_2+{}_4\mathrm{C}_3+\cdots+{}_8\mathrm{C}_7\\&\quad\vdots\\&={}_9\mathrm{C}_7={}_9\mathrm{C}_2=\frac{9\times8}{2\times1}=36\end{aligned}$$

이므로 $\mathrm{P}(B)=\frac{36}{165}=\frac{12}{55}$

(iii) $x=y$, $z=1$인 경우

$2x \leq 7$을 만족시키는 순서쌍 (x, y, z)의 개수는

$x \leq \frac{7}{2}$에서 4이므로

$\mathrm{P}(A \cap B)=\frac{4}{165}$

(i), (ii), (iii)에서 확률의 덧셈정리에 의하여

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(A \cup B)&=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A \cap B)\\&=\frac{5}{33}+\frac{12}{55}-\frac{4}{165}=\frac{19}{55}\end{aligned}$$

따라서 $1-\mathrm{P}(A \cup B)=1-\frac{19}{55}=\frac{36}{55}$

즉, $p=55$, $q=36$이므로

$p+q=55+36=91$

답 91

참고

부등식 $x+y+z \leq 8$을 만족시키는 음이 아닌 정수 x, y, z의 모든 순서쌍 (x, y, z)의 개수는 방정식 $x+y+z+w=8$을 만족시키는 음이 아닌 정수 x, y, z, w의 모든 순서쌍 (x, y, z, w)의 개수와 같으므로

${}_4\mathrm{H}_8={}_{11}\mathrm{C}_8={}_{11}\mathrm{C}_3=165$

04 조건부확률

유제 본문 45~51쪽

1 ③ 2 ⑤ 3 ④ 4 ③ 5 16
6 ③ 7 ③ 8 ③

1 $a \ge b$인 사건을 A, $b=0$인 사건을 B라 하면 구하는 확률은 $\mathrm{P}(B|A)$이다.
흰 공 6개, 검은 공 4개가 들어 있는 주머니에서 임의로 3개의 공을 동시에 꺼내는 경우의 수는

$${}_{10}\mathrm{C}_3=\frac{10\times9\times8}{3\times2\times1}=120$$

(i) $a \ge b$인 경우
$a=3$, $b=0$ 또는 $a=2$, $b=1$이어야 하므로
경우의 수는 ${}_6\mathrm{C}_3+{}_6\mathrm{C}_2\times{}_4\mathrm{C}_1=20+60=80$이고,

$$\mathrm{P}(A)=\frac{80}{120}=\frac{2}{3}$$

(ii) $a \ge b$이면서 $b=0$인 경우
$a=3$, $b=0$이므로
경우의 수는 ${}_6\mathrm{C}_3=20$이고,

$$\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{20}{120}=\frac{1}{6}$$

따라서 $\mathrm{P}(B|A)=\dfrac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}=\dfrac{\frac{1}{6}}{\frac{2}{3}}=\dfrac{1}{4}$

답 ③

참고
$n(A)=80$, $n(A\cap B)=20$이므로

$$\mathrm{P}(B|A)=\frac{n(A\cap B)}{n(A)}=\frac{20}{80}=\frac{1}{4}$$

2 여학생 12명 중에서 P날짜를 선택한 여학생이 7명이므로 Q날짜를 선택한 여학생은 5명이고, P날짜를 선택한 학생 수와 Q날짜를 선택한 학생 수가 각각 15명으로 같으므로 P날짜를 선택한 남학생은 8명, Q날짜를 선택한 남학생은 10명이다.
이것을 표로 나타내면 다음과 같다.

(단위: 명)

	P날짜	Q날짜
남학생	8	10
여학생	7	5

이 동아리 학생 30명 중에서 임의로 한 명을 뽑았을 때 남학생인 사건을 A, Q날짜를 선택한 학생인 사건을 B라 하면 구하는 확률은 $\mathrm{P}(B|A)$이다.

$$\mathrm{P}(A)=\frac{18}{30}=\frac{3}{5}$$

$\mathrm{P}(A\cap B)=\dfrac{10}{30}=\dfrac{1}{3}$이므로

$$\mathrm{P}(B|A)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}=\frac{\frac{1}{3}}{\frac{3}{5}}=\frac{5}{9}$$

답 ⑤

참고
$n(A)=18$, $n(A\cap B)=10$이므로

$$\mathrm{P}(B|A)=\frac{n(A\cap B)}{n(A)}=\frac{10}{18}=\frac{5}{9}$$

3 2, 2, 3, 3, 3의 숫자가 하나씩 적혀 있는 5장의 카드가 들어 있는 주머니에서 임의로 1장의 카드를 선택할 때 2가 적힌 카드를 선택하는 사건을 A, 상자에서 꺼낸 공이 모두 같은 색의 공인 사건을 B라 하자.
(i) 2가 적힌 카드를 선택하는 경우
2, 2, 3, 3, 3의 숫자가 하나씩 적혀 있는 5장의 카드 중에서 임의로 1장의 카드를 선택할 때 2가 적힌 카드를 선택할 확률은 $\mathrm{P}(A)=\dfrac{2}{5}$
상자에서 임의로 2개의 공을 동시에 꺼낼 때, 모두 같은 색의 공을 꺼낼 확률은 모두 흰 공을 꺼내거나 모두 검은 공을 꺼내는 확률이므로

$$\mathrm{P}(B|A)=\frac{{}_3\mathrm{C}_2}{{}_7\mathrm{C}_2}+\frac{{}_4\mathrm{C}_2}{{}_7\mathrm{C}_2}=\frac{3}{7}$$

따라서

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(A\cap B)&=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B|A)\\&=\frac{2}{5}\times\frac{3}{7}=\frac{6}{35}\end{aligned}$$

(ii) 3이 적힌 카드를 선택하는 경우
2, 2, 3, 3, 3의 숫자가 하나씩 적혀 있는 5장의 카드 중에서 임의로 1장의 카드를 선택할 때 3이 적힌 카드를 선택할 확률은 $\mathrm{P}(A^C)=\dfrac{3}{5}$
상자에서 임의로 3개의 공을 동시에 꺼낼 때, 모두 같은 색의 공을 꺼낼 확률은 모두 흰 공을 꺼내거나 모두 검은 공을 꺼내는 확률이므로

$$\mathrm{P}(B|A^C)=\frac{{}_3\mathrm{C}_3}{{}_7\mathrm{C}_3}+\frac{{}_4\mathrm{C}_3}{{}_7\mathrm{C}_3}=\frac{1}{7}$$

따라서

$$P(A^C\cap B)=P(A^C)P(B|A^C)$$
$$=\frac{3}{5}\times\frac{1}{7}=\frac{3}{35}$$

(ⅰ), (ⅱ)에서 구하는 확률은

$$P(B)=P(A\cap B)+P(A^C\cap B)$$
$$=\frac{6}{35}+\frac{3}{35}=\frac{9}{35}$$

답 ④

4 흰 공을 꺼내는 사건을 A, 주머니 P에서 공을 꺼내는 사건을 B라 하면 구하는 확률은 $P(B|A)$이다.

(ⅰ) 주머니 P에서 흰 공을 꺼내는 경우

한 개의 주사위를 한 번 던져서 1의 눈이 나올 확률은 $\frac{1}{6}$이고, 주머니 P에서 흰 공이 나올 확률은 $\frac{3}{5}$이므로

$$P(A\cap B)=P(B)P(A|B)$$
$$=\frac{1}{6}\times\frac{3}{5}=\frac{1}{10}$$

(ⅱ) 주머니 Q에서 흰 공을 꺼내는 경우

한 개의 주사위를 한 번 던져서 1의 눈이 나오지 않을 확률은 $\frac{5}{6}$이고, 주머니 Q에서 흰 공이 나올 확률은 $\frac{2}{5}$이므로

$$P(A\cap B^C)=P(B^C)P(A|B^C)$$
$$=\frac{5}{6}\times\frac{2}{5}=\frac{1}{3}$$

(ⅰ), (ⅱ)에서

$$P(A)=P(A\cap B)+P(A\cap B^C)$$
$$=\frac{1}{10}+\frac{1}{3}=\frac{13}{30}$$

따라서 $P(B|A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=\frac{\frac{1}{10}}{\frac{13}{30}}=\frac{3}{13}$

답 ③

5 $A=\{2, 3, 5\}$이므로 $P(A)=\frac{1}{2}$

(ⅰ) $n=1$일 때

$B_1=\{1\}$이므로

$A\cap B_1=\varnothing$, $P(B_1)=\frac{1}{6}$, $P(A\cap B_1)=0$

따라서 $P(A\cap B_1)\neq P(A)P(B_1)$이므로 두 사건 A와 B_1은 서로 독립이 아니다.

(ⅱ) $n=2$일 때

$B_2=\{1, 2\}$이므로

$A\cap B_2=\{2\}$, $P(B_2)=\frac{1}{3}$, $P(A\cap B_2)=\frac{1}{6}$

따라서 $P(A\cap B_2)=P(A)P(B_2)$이므로 두 사건 A와 B_2는 서로 독립이다.

(ⅲ) $n=3$일 때

$B_3=\{1, 3\}$이므로

$A\cap B_3=\{3\}$, $P(B_3)=\frac{1}{3}$, $P(A\cap B_3)=\frac{1}{6}$

따라서 $P(A\cap B_3)=P(A)P(B_3)$이므로 두 사건 A와 B_3은 서로 독립이다.

(ⅳ) $n=4$일 때

$B_4=\{1, 2, 4\}$이므로

$A\cap B_4=\{2\}$, $P(B_4)=\frac{1}{2}$, $P(A\cap B_4)=\frac{1}{6}$

따라서 $P(A\cap B_4)\neq P(A)P(B_4)$이므로 두 사건 A와 B_4는 서로 독립이 아니다.

(ⅴ) $n=5$일 때

$B_5=\{1, 5\}$이므로

$A\cap B_5=\{5\}$, $P(B_5)=\frac{1}{3}$, $P(A\cap B_5)=\frac{1}{6}$

따라서 $P(A\cap B_5)=P(A)P(B_5)$이므로 두 사건 A와 B_5는 서로 독립이다.

(ⅵ) $n=6$일 때

$B_6=\{1, 2, 3, 6\}$이므로

$A\cap B_6=\{2, 3\}$, $P(B_6)=\frac{2}{3}$, $P(A\cap B_6)=\frac{1}{3}$

따라서 $P(A\cap B_6)=P(A)P(B_6)$이므로 두 사건 A와 B_6은 서로 독립이다.

(ⅰ)~(ⅵ)에서 구하는 모든 n의 값의 합은

$2+3+5+6=16$

답 16

6 Ⅰ 디자인을 선택한 여학생의 수를 x라 하고, 졸업앨범 Ⅰ, Ⅱ 디자인을 선택한 남학생과 여학생 수를 표로 나타내면 다음과 같다.

(단위: 명)

	Ⅰ 디자인	Ⅱ 디자인
남학생	120	80
여학생	x	90

이 학교 3학년 전체 학생 중에서 임의로 뽑은 한 학생이 남학생인 사건이 A이므로

$$P(A)=\frac{120+80}{120+80+x+90}=\frac{200}{290+x}$$

이 학교 3학년 전체 학생 중에서 임의로 뽑은 한 학생이 Ⅱ 디자인을 선택한 학생인 사건이 B이므로

$$P(B)=\frac{80+90}{290+x}=\frac{170}{290+x}$$

또한 $P(A\cap B)=\frac{80}{290+x}$

두 사건 A와 B가 서로 독립이므로

$P(A\cap B)=P(A)P(B)$에서

$$\frac{80}{290+x}=\frac{200}{290+x}\times\frac{170}{290+x}$$

$80(290+x)=200\times170$

$x=135$

이때 이 학교 3학년 전체 학생 중에서 임의로 뽑은 한 학생이 Ⅰ 디자인을 선택한 여학생인 사건이 $A^C\cap B^C$이므로

$n(A^C\cap B^C)=135$

따라서 $P(A^C\cap B^C)=\frac{135}{290+135}=\frac{27}{85}$

답 ③

7 한 개의 주사위를 한 번 던져 3의 배수의 눈이 나올 확률은 $\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$이고, 3의 배수가 아닌 눈이 나올 확률은 $\frac{2}{3}$이다.

이때 한 개의 주사위를 3번 던져 나온 세 눈의 수의 곱이 9의 배수인 경우는 3의 배수의 눈만 3번 나오거나 3의 배수의 눈이 2번, 3의 배수가 아닌 눈이 1번 나오는 경우이다.

(ⅰ) 3의 배수의 눈만 3번 나올 확률은

$${}_3C_3\left(\frac{1}{3}\right)^3=\frac{1}{27}$$

(ⅱ) 3의 배수의 눈이 2번, 3의 배수가 아닌 눈이 1번 나올 확률은

$${}_3C_2\left(\frac{1}{3}\right)^2\left(\frac{2}{3}\right)^1=\frac{2}{9}$$

(ⅰ), (ⅱ)에서 구하는 확률은

$$\frac{1}{27}+\frac{2}{9}=\frac{7}{27}$$

답 ③

8 주사위를 한 번 던져 5의 약수의 눈이 나올 확률은 $\frac{1}{3}$이고, 5의 약수가 아닌 눈이 나올 확률은 $\frac{2}{3}$이다.

6번의 시행에서 5의 약수의 눈이 나오는 횟수를 a라 하면 5의 약수가 아닌 눈이 나오는 횟수는 $6-a$이다.

이때 6번의 시행 후 점 P의 좌표는

$3a-2(6-a)=5a-12$이고

점 Q의 좌표는 $2a-(6-a)=3a-6$이므로

점 P의 좌표가 점 Q의 좌표보다 크고 18보다 작으려면

$3a-6<5a-12<18$이므로

$3a-6<5a-12$에서 $a>3$이고,

$5a-12<18$에서 $a<6$

따라서 $3<a<6$이므로

$a=4$ 또는 $a=5$

(ⅰ) $a=4$일 확률은

$${}_6C_4\left(\frac{1}{3}\right)^4\left(\frac{2}{3}\right)^2=\frac{20}{243}$$

(ⅱ) $a=5$일 확률은

$${}_6C_5\left(\frac{1}{3}\right)^5\left(\frac{2}{3}\right)^1=\frac{4}{243}$$

(ⅰ), (ⅱ)에서 구하는 확률은

$$\frac{20}{243}+\frac{4}{243}=\frac{24}{243}=\frac{8}{81}$$

답 ③

Level 1 기초 연습

본문 52~53쪽

1 ④	2 ④	3 ②	4 ①	5 ②
6 ②	7 ②	8 ③		

1 $a+b$가 6의 배수인 사건을 A, $ab=8$인 사건을 B라 하면 구하는 확률은 $P(B|A)$이다.

한 개의 주사위를 2번 던져서 나오는 모든 경우의 수는

$6\times6=36$

$a+b$가 6의 배수가 되는 순서쌍 (a, b)는

$(1, 5)$, $(2, 4)$, $(3, 3)$, $(4, 2)$, $(5, 1)$, $(6, 6)$

의 6개이므로

$$P(A)=\frac{6}{36}=\frac{1}{6}$$

$a+b$가 6의 배수이면서 $ab=8$인 순서쌍 (a, b)는

$(2, 4)$, $(4, 2)$의 2개이므로

$$P(A\cap B)=\frac{2}{36}=\frac{1}{18}$$

따라서 $P(B|A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=\frac{\frac{1}{18}}{\frac{1}{6}}=\frac{1}{3}$

답 ④

2 이 학급 학생 중에서 임의로 선택한 한 명이 플로깅을 선택한 학생인 사건을 A, 남학생인 사건을 B라 하면 구하는 확률은 $P(B|A)$이다.
이 학급 학생 수는 27이고
플로깅을 선택한 학생 수는 $12+4=16$이므로
$P(A)=\frac{16}{27}$
플로깅을 선택한 남학생 수는 12이므로
$P(A\cap B)=\frac{12}{27}=\frac{4}{9}$
따라서 구하는 확률은

$$P(B|A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=\frac{\frac{4}{9}}{\frac{16}{27}}=\frac{3}{4}$$

답 ④

참고
$n(A)=16$, $n(A\cap B)=12$이므로
$P(B|A)=\frac{n(A\cap B)}{n(A)}=\frac{12}{16}=\frac{3}{4}$

3 주머니에서 임의로 2개의 공을 동시에 꺼낼 때, 같은 색의 공이 나오는 사건을 A, 모두 2가 적힌 공이 나오는 사건을 B라 하면 구하는 확률은 $P(B|A)$이다.
주머니에서 임의로 2개의 공을 동시에 꺼낼 때, 2개의 공이 모두 흰색이거나 모두 검은색일 확률은
$P(A)=\frac{{}_5C_2}{{}_{10}C_2}+\frac{{}_5C_2}{{}_{10}C_2}=\frac{4}{9}$
주머니에서 임의로 2개의 공을 동시에 꺼낼 때, 2개의 공 모두 2가 적힌 흰 공이거나 모두 2가 적힌 검은 공인 사건이 $A\cap B$이므로
$P(A\cap B)=\frac{{}_3C_2}{{}_{10}C_2}+\frac{{}_2C_2}{{}_{10}C_2}=\frac{4}{45}$
따라서 구하는 확률은

$$P(B|A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=\frac{\frac{4}{45}}{\frac{4}{9}}=\frac{1}{5}$$

답 ②

4 집합 $\{1, 2, 3, 4, 5\}$의 공집합이 아닌 모든 부분집합의 개수는
$2^5-1=31$
집합 $\{1, 2, 3, 4, 5\}$의 공집합이 아닌 모든 부분집합 중에서 임의로 선택한 한 집합의 원소의 개수가 짝수인 사건을 A, 선택한 한 집합의 원소의 최솟값이 2인 사건을 B라 하면 구하는 확률은 $P(B|A)$이다.
집합 $\{1, 2, 3, 4, 5\}$의 공집합이 아닌 부분집합 중 원소의 개수가 짝수인 부분집합의 개수는
${}_5C_2+{}_5C_4=10+5=15$
이므로
$P(A)=\frac{15}{31}$
집합 $\{1, 2, 3, 4, 5\}$의 공집합이 아닌 부분집합 중 원소의 개수가 짝수이고 원소의 최솟값이 2인 부분집합의 개수는 3, 4, 5의 원소 중에서 홀수 개의 원소를 선택하면 되므로
${}_3C_1+{}_3C_3=3+1=4$
즉, $P(A\cap B)=\frac{4}{31}$
따라서 구하는 확률은

$$P(B|A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=\frac{\frac{4}{31}}{\frac{15}{31}}=\frac{4}{15}$$

답 ①

5 6번째까지 시행을 한 후 시행을 멈추려면 5번째 시행까지 딸기 맛 사탕 3개와 포도 맛 사탕 2개를 꺼내고 6번째 시행에서 딸기 맛 사탕을 꺼내야 한다.
5번째 시행까지 딸기 맛 사탕 3개와 포도 맛 사탕 2개를 꺼내는 경우의 수는
$\frac{5!}{3!\times 2!}=10$
이때 딸기 맛, 딸기 맛, 딸기 맛, 포도 맛, 포도 맛 순서로 사탕을 꺼낼 확률은
$\frac{4}{8}\times\frac{3}{7}\times\frac{2}{6}\times\frac{4}{5}\times\frac{3}{4}=\frac{3}{70}$
나머지 9가지 경우의 확률도 모두 $\frac{3}{70}$이다.
한편, 6번째 시행에서 딸기 맛 사탕을 꺼낼 확률은 나머지 사탕 3개 중에서 딸기 맛 사탕 1개를 꺼낼 확률이므로 $\frac{1}{3}$이다.
따라서 구하는 확률은
$10\times\frac{3}{70}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{7}$

답 ②

6 주머니 A에서 임의로 1개의 공을 꺼낼 때, 꺼낸 공이 흰 공인 사건을 A라 하면 꺼낸 공이 검은 공인 사건은 A^C이다.
주머니 B에서 임의로 3개의 공을 동시에 꺼낼 때, 꺼낸 공이 모두 검은 공인 사건을 B라 하자.

(i) 주머니 A에서 임의로 1개의 공을 꺼낼 때, 흰 공이 나올 확률은

$\mathrm{P}(A)=\frac{1}{4}$

이 경우 주머니 B에서 임의로 3개의 공을 동시에 꺼낼 때, 꺼낸 공이 모두 검은 공일 확률은

$\mathrm{P}(B|A)=\frac{{}_3\mathrm{C}_3}{{}_7\mathrm{C}_3}=\frac{1}{35}$

따라서

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(A\cap B)&=\mathrm{P}(A)\times\mathrm{P}(B|A)\\&=\frac{1}{4}\times\frac{1}{35}=\frac{1}{140}\end{aligned}$$

(ii) 주머니 A에서 임의로 1개의 공을 꺼낼 때, 검은 공이 나올 확률은

$\mathrm{P}(A^C)=\frac{3}{4}$

이 경우 주머니 B에서 임의로 3개의 공을 동시에 꺼낼 때, 꺼낸 공이 모두 검은 공일 확률은

$\mathrm{P}(B|A^C)=\frac{{}_4\mathrm{C}_3}{{}_7\mathrm{C}_3}=\frac{4}{35}$

따라서

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(A^C\cap B)&=\mathrm{P}(A^C)\times\mathrm{P}(B|A^C)\\&=\frac{3}{4}\times\frac{4}{35}=\frac{3}{35}\end{aligned}$$

(i), (ii)에서 구하는 확률은

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(B)&=\mathrm{P}(A\cap B)+\mathrm{P}(A^C\cap B)\\&=\frac{1}{140}+\frac{3}{35}=\frac{13}{140}\end{aligned}$$

답 ②

7 $\mathrm{P}(A^C)=\frac{5}{6}$이므로

$\mathrm{P}(A)=1-\frac{5}{6}=\frac{1}{6}$

이때 두 사건 A와 B는 서로 독립이므로

$\mathrm{P}(B|A)=\mathrm{P}(B)=\frac{2}{3}$이고

$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)=\frac{1}{6}\times\frac{2}{3}=\frac{1}{9}$

따라서 $\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)$이므로

$\mathrm{P}(A\cup B)=\frac{1}{6}+\frac{2}{3}-\frac{1}{9}=\frac{13}{18}$

답 ②

8 A팀이 3승 2패로 승리하려면 5번의 경기 중 5번째 경기에서 A팀이 반드시 이기고 4번째까지의 경기에서 A팀이 2번 이기고 B팀이 2번 이기면 된다.
따라서 구하는 확률은

${}_4\mathrm{C}_2\left(\frac{2}{3}\right)^2\left(\frac{1}{3}\right)^2\times\frac{2}{3}=\frac{16}{81}$

답 ③

Level 2 기본 연습

본문 54~55쪽

1 ④	**2** ③	**3** ③	**4** ④	**5** 25
6 187	**7** 115	**8** ③		

1 집합 $X=\{1, 2, 3, 4\}$에 대하여 X에서 X로의 모든 함수의 개수는

${}_4\Pi_4=4^4=256$

함수 f가 $3f(2)=f(1)+f(3)$을 만족시키는 사건을 A, 집합 X의 어떤 원소 a에 대하여 $f(a)=4$인 사건을 B라 하면 구하는 확률은 $\mathrm{P}(B|A)$이다.
한편, $f(2)\geq 3$인 경우
$f(1)+f(3)\geq 9$인 경우는 없으므로
$f(2)=1$ 또는 $f(2)=2$인 경우뿐이다.

(i) $f(2)=1$인 경우

$f(1)=1$, $f(3)=2$ 또는 $f(1)=2$, $f(3)=1$

이고, 이 각각에 대하여 $f(4)$의 값을 정하는 경우의 수는 ${}_4\Pi_1=4$이므로

함수 f가 $3f(2)=f(1)+f(3)$을 만족시키는 경우의 수는

$2\times 4=8$ …… ㉠

이때 집합 X의 어떤 원소 a가 $f(a)=4$이려면 $f(4)=4$이어야 하므로 경우의 수는

$2\times 1=2$ …… ㉡

(ii) $f(2)=2$인 경우

$f(1)=2$, $f(3)=4$ 또는 $f(1)=4$, $f(3)=2$ 또는 $f(1)=3$, $f(3)=3$

이고 이 각각에 대하여 $f(4)$의 값을 정하는 경우의 수는 ${}_4\Pi_1=4$이므로

함수 f가 $3f(2)=f(1)+f(3)$을 만족시키는 경우의 수는

$3\times 4=12$ …… ㉢

이때 집합 X의 어떤 원소 a가 $f(a)=4$이려면

$f(1)=2$, $f(3)=4$ 또는 $f(1)=4$, $f(3)=2$일 때

$f(4)$는 1, 2, 3, 4 모두 가능하고,

$f(1)=3$, $f(3)=3$일 때 $f(4)=4$이어야 하므로

경우의 수는

$2\times4+1=9$ ...... ㉣

(i), (ii)의 ㉠, ㉢에서

$$\mathrm{P}(A)=\frac{8+12}{256}=\frac{20}{256}=\frac{5}{64}$$

(i), (ii)의 ㉡, ㉣에서

$$\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{2+9}{256}=\frac{11}{256}$$

따라서 $\mathrm{P}(B|A)=\dfrac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}=\dfrac{\frac{11}{256}}{\frac{5}{64}}=\dfrac{11}{20}$

답 ④

2 이 학교 전체 학생 중에서 임의로 뽑은 한 학생이 8월을 선택한 학생인 사건을 A, 여학생인 사건을 B라 하면 구하는 확률은 $\mathrm{P}(B|A)$이다.

이 학교 전체 학생 중 55 %가 남학생이므로

$\mathrm{P}(B^C)=0.55$

$\mathrm{P}(B)=1-\mathrm{P}(B^C)=1-0.55=0.45$

남학생의 60 %가 8월을 선택하였으므로

$\mathrm{P}(A|B^C)=0.6$

여학생의 60 %가 12월을 선택하였으므로

여학생의 40 %가 8월을 선택하였고

$\mathrm{P}(A|B)=0.4$

$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(B)\mathrm{P}(A|B)=0.45\times0.4=0.18$

$\mathrm{P}(A\cap B^C)=\mathrm{P}(B^C)\mathrm{P}(A|B^C)=0.55\times0.6=0.33$

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(A)&=\mathrm{P}(A\cap B)+\mathrm{P}(A\cap B^C)\\&=0.18+0.33=0.51\end{aligned}$$

따라서

$$\mathrm{P}(B|A)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}=\frac{0.18}{0.51}=\frac{6}{17}$$

답 ③

3 주머니에서 꺼낸 공에 적혀 있는 수가 홀수인 사건을 A, 공에 적혀 있는 수가 7인 사건을 B라 하면 구하는 확률은 $\mathrm{P}(B|A)$이다.

주머니에서 꺼낸 공에 적혀 있는 수가 홀수일 확률은 다음과 같다.

(i) 한 개의 주사위를 한 번 던져 나온 눈의 수가 2 이하일 경우

한 개의 주사위를 한 번 던져 나온 눈의 수가 2 이하이고 주머니 A에서 꺼낸 공에 적혀 있는 수가 홀수일 확률은

$$\frac{2}{6}\times\frac{3}{5}=\frac{1}{5}$$

(ii) 한 개의 주사위를 한 번 던져 나온 눈의 수가 3 이상일 경우

한 개의 주사위를 한 번 던져 나온 눈의 수가 3 이상이고 주머니 B에서 꺼낸 공에 적혀 있는 수가 홀수일 확률은

$$\frac{4}{6}\times\frac{2}{5}=\frac{4}{15}$$

(i), (ii)에서 주머니에서 꺼낸 공에 적혀 있는 수가 홀수일 확률은

$$\mathrm{P}(A)=\frac{1}{5}+\frac{4}{15}=\frac{7}{15}$$

한편, 주머니에서 꺼낸 공에 적혀 있는 수가 7이 되려면 한 개의 주사위를 한 번 던져 나온 눈의 수가 3 이상이고 주머니 B에서 꺼낸 공에 적혀 있는 수가 7이어야 하므로 확률은

$$\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{4}{6}\times\frac{1}{5}=\frac{2}{15}$$

따라서 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(B|A)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}=\frac{\frac{2}{15}}{\frac{7}{15}}=\frac{2}{7}$$

답 ③

4 두 사건 A와 B는 서로 독립이므로

$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)=\dfrac{1}{12}$ ...... ㉠

$3\mathrm{P}(A^C|B)=8\mathrm{P}(B|A)$에서

$3\mathrm{P}(A^C)=8\mathrm{P}(B)$

$3\{1-\mathrm{P}(A)\}=8\mathrm{P}(B)$

$\mathrm{P}(B)=\dfrac{3}{8}\{1-\mathrm{P}(A)\}$ ...... ㉡

㉡을 ㉠에 대입하면

$\mathrm{P}(A)\times\dfrac{3}{8}\{1-\mathrm{P}(A)\}=\dfrac{1}{12}$

$9\{\mathrm{P}(A)\}^2-9\mathrm{P}(A)+2=0$

$\{3\mathrm{P}(A)-1\}\{3\mathrm{P}(A)-2\}=0$

$\mathrm{P}(A)=\dfrac{1}{3}$ 또는 $\mathrm{P}(A)=\dfrac{2}{3}$

(i) $\mathrm{P}(A)=\dfrac{1}{3}$인 경우

$\mathrm{P}(B)=\dfrac{1}{4}$이므로

$\mathrm{P}(A)-\mathrm{P}(B)=\frac{1}{3}-\frac{1}{4}=\frac{1}{12}$

(ii) $\mathrm{P}(A)=\frac{2}{3}$인 경우

$\mathrm{P}(B)=\frac{1}{8}$이므로

$\mathrm{P}(A)-\mathrm{P}(B)=\frac{2}{3}-\frac{1}{8}=\frac{13}{24}$

(i), (ii)에서 가능한 모든 $\mathrm{P}(A)-\mathrm{P}(B)$의 값의 합은

$\frac{1}{12}+\frac{13}{24}=\frac{15}{24}=\frac{5}{8}$

답 ④

5 $1\le k\le 10$인 자연수 k에 대하여 k 이상의 수가 나오는 사건이 A_k이므로

$A_k=\{x\,|\,x$는 $k\le x\le 10$인 자연수$\}$

$\mathrm{P}(A_k)=\frac{10-k+1}{10}=\frac{11-k}{10}$

짝수가 나오는 사건이 B이므로

$B=\{2, 4, 6, 8, 10\}$

$\mathrm{P}(B)=\frac{5}{10}=\frac{1}{2}$

두 사건 A_k와 B가 서로 독립이려면

$\mathrm{P}(A_k\cap B)=\mathrm{P}(A_k)\mathrm{P}(B)$이어야 한다.

(i) $k=2n-1$ (n은 $1\le n\le 5$인 자연수)인 경우

$A_k\cap B=\{2n, 2n+2, \cdots, 10\}$

$\mathrm{P}(A_k\cap B)=\frac{6-n}{10}$

$\mathrm{P}(A_k)\mathrm{P}(B)=\frac{11-(2n-1)}{10}\times\frac{1}{2}=\frac{6-n}{10}$

$\mathrm{P}(A_k\cap B)=\mathrm{P}(A_k)\mathrm{P}(B)$이므로 두 사건 A_k와 B는 서로 독립이다.

(ii) $k=2n$ (n은 $1\le n\le 5$인 자연수)인 경우

$A_k\cap B=\{2n, 2n+2, \cdots, 10\}$

$\mathrm{P}(A_k\cap B)=\frac{6-n}{10}$

$\mathrm{P}(A_k)\mathrm{P}(B)=\frac{11-2n}{10}\times\frac{1}{2}=\frac{11-2n}{20}$

$\mathrm{P}(A_k\cap B)\ne\mathrm{P}(A_k)\mathrm{P}(B)$이므로 두 사건 A_k와 B는 서로 독립이 아니다.

(i), (ii)에서 두 사건 A_k와 B가 서로 독립이 되도록 하는 k의 값은 1, 3, 5, 7, 9이므로 구하는 모든 k의 값의 합은

$1+3+5+7+9=25$

답 25

참고

$A_k\cap B=\{2n, 2n+2, \cdots, 10\}$ (n은 $1\le n\le 5$인 자연수)

$n(A_k\cap B)=n(\{2n, 2n+2, \cdots, 10\})$
$=n(\{n, n+1, \cdots, 5\})$
$=6-n$

이므로

$\mathrm{P}(A_k\cap B)=\frac{6-n}{10}$

6 동전의 앞면이 나오는 횟수와 뒷면이 나오는 횟수의 곱이 6인 사건을 A, 동전을 5번 던지는 사건을 B, 동전의 앞면이 2번 나오는 사건을 C라 하면 구하는 확률은 $\mathrm{P}(C|A)$이다.

동전의 앞면이 나오는 횟수를 a, 뒷면이 나오는 횟수를 b라 할 때, $ab=6$일 확률은 다음과 같다.

(i) 3의 배수가 적혀 있는 카드를 꺼내는 경우

1부터 8까지의 자연수가 하나씩 적혀 있는 8장의 카드 중에서 임의로 한 장의 카드를 꺼낼 때, 3의 배수가 적혀 있는 카드를 꺼낼 확률은

$\frac{2}{8}=\frac{1}{4}$

이때 한 개의 동전을 7번 던지므로

$a+b=7$이고,

$ab=6$이므로

$a=1$, $b=6$ 또는 $a=6$, $b=1$

따라서

$\mathrm{P}(A\cap B^C)$

$=\frac{1}{4}\times\left\{{}_7\mathrm{C}_1\times\left(\frac{1}{2}\right)^1\left(\frac{1}{2}\right)^6+{}_7\mathrm{C}_6\times\left(\frac{1}{2}\right)^6\left(\frac{1}{2}\right)^1\right\}$

$=\frac{1}{4}\times\left\{{}_7\mathrm{C}_1\times\left(\frac{1}{2}\right)^7+{}_7\mathrm{C}_1\times\left(\frac{1}{2}\right)^7\right\}$

$=\frac{1}{2}\times{}_7\mathrm{C}_1\times\left(\frac{1}{2}\right)^7$

(ii) 3의 배수가 아닌 수가 적혀 있는 카드를 꺼내는 경우

1부터 8까지의 자연수가 하나씩 적혀 있는 8장의 카드 중에서 임의로 한 장의 카드를 꺼낼 때, 3의 배수가 아닌 수가 적혀 있는 카드를 꺼낼 확률은

$\frac{3}{4}$

이때 한 개의 동전을 5번 던지므로

$a+b=5$이고,

$ab=6$이므로

$a=2$, $b=3$ 또는 $a=3$, $b=2$

따라서

$\mathrm{P}(A\cap B)$
$=\frac{3}{4}\times\left\{{}_5\mathrm{C}_2\times\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^3+{}_5\mathrm{C}_3\times\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)^2\right\}$
$=\frac{3}{4}\times\left\{{}_5\mathrm{C}_2\times\left(\frac{1}{2}\right)^5+{}_5\mathrm{C}_2\times\left(\frac{1}{2}\right)^5\right\}$
$=\frac{3}{2}\times{}_5\mathrm{C}_2\times\left(\frac{1}{2}\right)^5$

(i), (ii)에서

$\mathrm{P}(A)=\mathrm{P}(A\cap B^C)+\mathrm{P}(A\cap B)$
$=\frac{1}{2}\times{}_7\mathrm{C}_1\times\left(\frac{1}{2}\right)^7+\frac{3}{2}\times{}_5\mathrm{C}_2\times\left(\frac{1}{2}\right)^5$

한편, 동전의 앞면이 2번 나오려면 3의 배수가 아닌 수가 적혀 있는 카드를 꺼내고 동전을 5번 던져 앞면이 2번 나와야 하므로

$\mathrm{P}(A\cap C)=\frac{3}{4}\times{}_5\mathrm{C}_2\times\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^3$
$=\frac{3}{4}\times{}_5\mathrm{C}_2\times\left(\frac{1}{2}\right)^5$

따라서

$\mathrm{P}(C|A)=\frac{\mathrm{P}(A\cap C)}{\mathrm{P}(A)}$
$=\frac{\frac{3}{4}\times{}_5\mathrm{C}_2\times\left(\frac{1}{2}\right)^5}{\frac{1}{2}\times{}_7\mathrm{C}_1\times\left(\frac{1}{2}\right)^7+\frac{3}{2}\times{}_5\mathrm{C}_2\times\left(\frac{1}{2}\right)^5}$
$=\frac{15}{\frac{7}{4}+30}=\frac{60}{127}$

이므로 $p=127$, $q=60$에서
$p+q=127+60=187$

답 187

7 한 개의 주사위를 한 번 던져 4 이하의 눈이 나올 확률은 $\frac{2}{3}$이고 5 이상의 눈이 나올 확률은 $\frac{1}{3}$이다.

9번의 시행에서 4 이하의 눈이 나오는 횟수를 a라 하면 5 이상의 눈이 나오는 횟수는 $9-a$이다.
이때 점 P는 시곗 바늘이 도는 방향으로
$3a-2(9-a)=5a-18$만큼 이동하고, 점 P가 꼭짓점 A에 있으려면 $5a-18=4k$ (k는 정수)이어야 한다.
a는 $0\le a\le 9$인 정수이고, k는 정수이므로
가능한 a와 k의 값은
$a=2$일 때, $k=-2$
$a=6$일 때, $k=3$

따라서 구하는 확률은
${}_9\mathrm{C}_2\left(\frac{2}{3}\right)^2\left(\frac{1}{3}\right)^7+{}_9\mathrm{C}_6\left(\frac{2}{3}\right)^6\left(\frac{1}{3}\right)^3$
$=\frac{16}{3^7}+\frac{112\times16}{3^8}$
$=115\times\left(\frac{2}{9}\right)^4$
이므로 $p=115$

답 115

8 상자에서 흰 공을 꺼낼 확률은 $\frac{2}{5}$, 검은 공을 꺼낼 확률은 $\frac{3}{5}$이고, 점 $(1,\ 0)$으로 이동할 때까지 흰 공을 꺼낸 횟수를 a라 하면 검은 공을 꺼낸 횟수는 $5-a$이다.
원점에서 출발한 점 P의 x좌표는 $a-(5-a)$이고,
점 P의 y좌표는 $-2a+3(5-a)$
즉, 점 P는 점 $(2a-5,\ -5a+15)$로 이동된다.
이 점의 좌표가 $(1,\ 0)$이려면
$2a-5=1$, $-5a+15=0$
이어야 하므로
$a=3$
따라서 5번의 시행에서 흰 공을 3번, 검은 공을 2번 꺼내야 하고, 각 시행은 서로 독립이므로 구하는 확률은
${}_5\mathrm{C}_3\left(\frac{2}{5}\right)^3\left(\frac{3}{5}\right)^2=\frac{144}{625}$

답 ③

Level 3 실력 완성

본문 56쪽

1 65 **2** 12 **3** 80

1 주머니 A에 들어 있는 검은 공의 개수가 홀수인 사건을 A, 처음 주머니 A에서 꺼낸 검은 공의 개수가 짝수인 사건을 B라 하면 구하는 확률은 $\mathrm{P}(B|A)$이다.
주머니 A에 들어 있는 검은 공의 개수가 홀수인 경우는 다음 세 가지가 있다.
(i) 처음 주머니 A에서 검은 공 3개를 꺼내는 경우
주머니 B에서 검은 공 2개를 꺼내거나 흰 공 2개를 꺼내는 경우이므로 확률은
$\frac{{}_4\mathrm{C}_3}{{}_6\mathrm{C}_3}\times\frac{{}_3\mathrm{C}_2+{}_6\mathrm{C}_2}{{}_9\mathrm{C}_2}=\frac{1}{5}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{10}$

(ii) 처음 주머니 A에서 검은 공 2개, 흰 공 1개를 꺼내는 경우 주머니 B에서 검은 공 1개, 흰 공 1개를 꺼내는 경우이므로 확률은

$$\frac{{}_4C_2 \times {}_2C_1}{{}_6C_3} \times \frac{{}_2C_1 \times {}_7C_1}{{}_9C_2} = \frac{3}{5} \times \frac{7}{18} = \frac{7}{30}$$

(iii) 처음 주머니 A에서 검은 공 1개, 흰 공 2개를 꺼내는 경우 주머니 B에서 흰 공 2개를 꺼내는 경우이므로 확률은

$$\frac{{}_4C_1 \times {}_2C_2}{{}_6C_3} \times \frac{{}_8C_2}{{}_9C_2} = \frac{1}{5} \times \frac{7}{9} = \frac{7}{45}$$

(i), (ii), (iii)에서

$$\mathrm{P}(A) = \frac{1}{10} + \frac{7}{30} + \frac{7}{45} = \frac{22}{45}$$

$$\mathrm{P}(A \cap B) = \frac{7}{30}$$

따라서 $\mathrm{P}(B|A) = \dfrac{\mathrm{P}(A \cap B)}{\mathrm{P}(A)} = \dfrac{\frac{7}{30}}{\frac{22}{45}} = \dfrac{21}{44}$

이므로 $p=44$, $q=21$에서

$p+q=44+21=65$

답 65

2 방정식 $a+b+c=5$와 부등식 $a \le b \le c$를 모두 만족시키는 자연수 a, b, c는

$a=b=1$, $c=3$ 또는 $a=1$, $b=c=2$

로 순서쌍 (a, b, c)의 개수는 2이고,

부등식 $x+y+z \le 7$을 만족시키는 자연수 x, y, z의 모든 순서쌍 (x, y, z)의 개수는

$x=x'+1$, $y=y'+1$, $z=z'+1$

(x', y', z'은 음이 아닌 정수)

로 놓으면

$(x'+1)+(y'+1)+(z'+1) \le 7$

$x'+y'+z' \le 4$에서

${}_3H_0 + {}_3H_1 + {}_3H_2 + {}_3H_3 + {}_3H_4$

$= {}_2C_0 + {}_3C_1 + {}_4C_2 + {}_5C_3 + {}_6C_4 = 35$

이므로 갑이 순서쌍 (a, b, c) 중에서 임의로 한 개를 선택하고 그 각각에 대하여 을이 순서쌍 (x, y, z) 중에서 임의로 한 개를 선택하는 경우의 수는

${}_2C_1 \times {}_{35}C_1 = 2 \times 35 = 70$

세 수 $a+x$, $b+y$, $c+z$가 모두 짝수인 사건을 A, $x \times y \times z$가 홀수인 사건을 B라 하면 구하는 확률은 $\mathrm{P}(B|A)$이다.

(i) $a=b=1$, $c=3$인 경우

세 수 $a+x$, $b+y$, $c+z$가 모두 짝수이려면 x, y, z가 모두 홀수이어야 하므로 $x+y+z \le 7$을 만족시키는 모든 순서쌍 (x, y, z)의 개수는

$x=2x_1'+1$, $y=2y_1'+1$, $z=2z_1'+1$

(x_1', y_1', z_1'은 음이 아닌 정수)

라 하면

$(2x_1'+1)+(2y_1'+1)+(2z_1'+1) \le 7$

$2x_1'+2y_1'+2z_1' \le 4$

$x_1'+y_1'+z_1' \le 2$에서

${}_3H_0 + {}_3H_1 + {}_3H_2 = {}_2C_0 + {}_3C_1 + {}_4C_2 = 10$

(ii) $a=1$, $b=c=2$인 경우

세 수 $a+x$, $b+y$, $c+z$가 모두 짝수이려면 x는 홀수, y와 z는 짝수이어야 하므로 $x+y+z \le 7$을 만족시키는 모든 순서쌍 (x, y, z)의 개수는

$x=2x_2'+1$, $y=2y_2'+2$, $z=2z_2'+2$

(x_2', y_2', z_2'은 음이 아닌 정수)

라 하면

$(2x_2'+1)+(2y_2'+2)+(2z_2'+2) \le 7$

$2x_2'+2y_2'+2z_2' \le 2$

$x_2'+y_2'+z_2' \le 1$에서

${}_3H_0 + {}_3H_1 = {}_2C_0 + {}_3C_1 = 4$

(i), (ii)에서 $\mathrm{P}(A) = \dfrac{10+4}{70} = \dfrac{1}{5}$

$x \times y \times z$가 홀수이려면 x, y, z가 모두 홀수이어야 하므로

$$\mathrm{P}(A \cap B) = \frac{10}{70} = \frac{1}{7}$$

따라서 $\mathrm{P}(B|A) = \dfrac{\mathrm{P}(A \cap B)}{\mathrm{P}(A)} = \dfrac{\frac{1}{7}}{\frac{1}{5}} = \dfrac{5}{7}$

이므로 $p=7$, $q=5$에서

$p+q=7+5=12$

답 12

참고

$x'+y'+z' \le 4$를 만족시키는 음이 아닌 정수 x', y', z'의 모든 순서쌍 (x', y', z')의 개수는 방정식 $x'+y'+z'+w=4$를 만족시키는 음이 아닌 정수 x', y', z', w의 모든 순서쌍 (x', y', z', w)의 개수와 같으므로

${}_4H_4 = {}_7C_4 = {}_7C_3 = 35$

3 한 개의 주사위를 한 번 던질 때, 나오는 눈의 수가 2 이하일 확률은 $\dfrac{1}{3}$이고 나오는 눈의 수가 3 이상일 확률은 $\dfrac{2}{3}$이다.

$1 \le n \le 7$인 자연수 n에 대하여 n번째 시행까지 나오는 눈의 수가 2 이하인 시행 횟수를 t $(1 \le t \le n \le 7)$이라 하면
$a_n=3t$, $b_n=2(n-t)$이므로
$3t-2(n-t)=1$
즉, $5t=2n+1$을 만족시키는 자연수 t는
$n=2$일 때, $t=1$
$n=7$일 때, $t=3$
(i) $a_7-b_7=1$인 경우
7번째 시행까지 나오는 눈의 수가 2 이하인 시행 횟수가 3이므로
이 경우의 확률은
$${}_7C_3\left(\frac{1}{3}\right)^3\left(\frac{2}{3}\right)^4=\frac{560}{3^7}$$
(ii) $a_2-b_2=1$이면서 $a_7-b_7=1$인 경우
첫 번째 시행에서 2 이하의 눈이 나오고 두 번째 시행에서 3 이상의 눈이 나오거나 첫 번째 시행에서 3 이상의 눈이 나오고 두 번째 시행에서 2 이하의 눈이 나오면 $a_2-b_2=1$이므로 처음으로 $a_k-b_k=1$이 되는 k의 값이 7이라는 조건을 만족시키지 않는다.
3번째 시행부터 7번째 시행까지 5번의 시행 중 나오는 눈의 수가 2 이하인 시행 횟수를 s라 하면
$3s-2(5-s)=0$에서
$s=2$
그러므로 $a_2-b_2=1$이면서 $a_7-b_7=1$일 확률은 첫 번째와 두 번째 시행에서 각각 2 이하의 눈과 3 이상의 눈이 한 번씩 나오고, 3번째 시행부터 7번째 시행까지 2 이하의 눈이 2번, 3 이상의 눈이 3번 나오는 확률이므로
$${}_2C_1\times\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}\times{}_5C_2\left(\frac{1}{3}\right)^2\left(\frac{2}{3}\right)^3=\frac{320}{3^7}$$
(i), (ii)에서 구하는 확률은
$$\frac{560}{3^7}-\frac{320}{3^7}=\frac{240}{3^7}=\frac{80}{3^6}$$
따라서 $p=80$

답 80

05 이산확률변수의 확률분포

유제

본문 59~67쪽

1 ③	2 ⑤	3 ④	4 ⑤	5 22
6 ③	7 3	8 ②	9 18	10 ④

1 $|2X-5|=1$에서
$2X-5=-1$ 또는 $2X-5=1$
$X=2$ 또는 $X=3$이고 이산확률변수 X의 확률질량함수가
$$\mathrm{P}(X=x)=\frac{9-2x}{16}\ (x=1, 2, 3, 4)$$
이므로
$$\mathrm{P}(|2X-5|=1)=\mathrm{P}(X=2)+\mathrm{P}(X=3)=\frac{5}{16}+\frac{3}{16}=\frac{1}{2}$$

답 ③

2 이산확률변수 X가 갖는 값은 2, 3, 4, 5, 6이므로
$\mathrm{P}(X\ge 3)=1-\mathrm{P}(X=2)$
5개의 공이 들어 있는 주머니에서 2개의 공을 동시에 꺼내는 경우의 수는
$${}_5C_2=\frac{5\times4}{2\times1}=10$$
$\mathrm{P}(X=2)$의 값은 꺼낸 2개의 공에 적혀 있는 두 수의 합이 2일 확률, 즉 1이 적혀 있는 공 2개를 꺼낼 확률이므로
$$\mathrm{P}(X=2)=\frac{{}_2C_2}{10}=\frac{1}{10}$$
따라서 구하는 값은
$$\mathrm{P}(X\ge3)=1-\mathrm{P}(X=2)=1-\frac{1}{10}=\frac{9}{10}$$

답 ⑤

3 확률변수 X의 확률질량함수가
$$\mathrm{P}(X=x)=\frac{k}{x^2+1}\ (x=-2, -1, 0, 1, 2)$$
이므로 확률변수 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	-2	-1	0	1	2	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{k}{5}$	$\frac{k}{2}$	k	$\frac{k}{2}$	$\frac{k}{5}$	1

이산확률변수 X가 갖는 모든 값에 대한 확률의 합은 1이므로

$\frac{k}{5}+\frac{k}{2}+k+\frac{k}{2}+\frac{k}{5}=\frac{12}{5}k=1$

$k=\frac{5}{12}$

따라서

$$\begin{aligned}P(X>0)&=P(X=1)+P(X=2)\\&=\frac{k}{2}+\frac{k}{5}\\&=\frac{7}{10}k\\&=\frac{7}{10}\times\frac{5}{12}=\frac{7}{24}\end{aligned}$$

답 ④

4 6개의 공이 들어 있는 주머니에서 임의로 3개의 공을 동시에 꺼내는 경우의 수는

${}_6C_3=\frac{6\times5\times4}{3\times2\times1}=20$

이때 a, b의 값은

$a=0$, $b=3$ 또는 $a=1$, $b=2$ 또는

$a=2$, $b=1$ 또는 $a=3$, $b=0$이므로

$ab=0$ 또는 $ab=2$

따라서 이산확률변수 X가 갖는 값은 0, 2이고,

$$\begin{aligned}P(X=0)&=\frac{{}_3C_0\times{}_3C_3+{}_3C_3\times{}_3C_0}{20}\\&=\frac{1\times1+1\times1}{20}=\frac{1}{10}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}P(X=2)&=\frac{{}_3C_1\times{}_3C_2+{}_3C_2\times{}_3C_1}{20}\\&=\frac{3\times3+3\times3}{20}=\frac{9}{10}\end{aligned}$$

이므로 확률변수 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	0	2	합계
$P(X=x)$	$\frac{1}{10}$	$\frac{9}{10}$	1

따라서 $E(X)=0\times\frac{1}{10}+2\times\frac{9}{10}=\frac{9}{5}$

답 ⑤

5 $E(X)=4$이므로

$V(X)=E((X-4)^2)=9$

$\sigma(X)=\sqrt{V(X)}=\sqrt{9}=3$

이때 $V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2$이므로

$E(X^2)=V(X)+\{E(X)\}^2=9+4^2=25$

따라서 $E(X^2)-\sigma(X)=25-3=22$

답 22

6 확률변수 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	1	2	3	4	합계
$P(X=x)$	$2a$	$3a$	$4a$	$5a$	1

이산확률변수 X가 갖는 모든 값에 대한 확률의 합은 1이므로

$2a+3a+4a+5a=14a=1$

$a=\frac{1}{14}$

$E(X)=1\times\frac{2}{14}+2\times\frac{3}{14}+3\times\frac{4}{14}+4\times\frac{5}{14}=\frac{20}{7}$

$E(X^2)=1^2\times\frac{2}{14}+2^2\times\frac{3}{14}+3^2\times\frac{4}{14}+4^2\times\frac{5}{14}=\frac{65}{7}$

$$\begin{aligned}V(X)&=E(X^2)-\{E(X)\}^2\\&=\frac{65}{7}-\left(\frac{20}{7}\right)^2=\frac{55}{49}\end{aligned}$$

따라서 $\frac{V(X)}{a^2}=14^2\times\frac{55}{49}=220$

답 ③

7 $E(4X+1)=5$에서

$4E(X)+1=5$, $E(X)=1$

$E(X^2)+1=5$에서

$E(X^2)=4$

따라서

$V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2=4-1=3$

$\sigma(X)=\sqrt{V(X)}=\sqrt{3}$

이므로

$$\begin{aligned}\sigma(\sqrt{3}X-\sqrt{3})&=|\sqrt{3}|\sigma(X)\\&=\sqrt{3}\times\sqrt{3}=3\end{aligned}$$

답 3

8 $P(X=1)=\frac{{}_5C_1}{30}=\frac{5}{30}=\frac{1}{6}$

$P(X=2)=\frac{{}_5C_2}{30}=\frac{10}{30}=\frac{1}{3}$

$\mathrm{P}(X=3)=\frac{{}_5\mathrm{C}_3}{30}=\frac{10}{30}=\frac{1}{3}$

$\mathrm{P}(X=4)=\frac{{}_5\mathrm{C}_4}{30}=\frac{5}{30}=\frac{1}{6}$

확률변수 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	1	2	3	4	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	1

$\mathrm{E}(X)=1\times\frac{1}{6}+2\times\frac{1}{3}+3\times\frac{1}{3}+4\times\frac{1}{6}=\frac{5}{2}$

$\mathrm{E}(X^2)=1^2\times\frac{1}{6}+2^2\times\frac{1}{3}+3^2\times\frac{1}{3}+4^2\times\frac{1}{6}=\frac{43}{6}$

$\mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2=\frac{43}{6}-\left(\frac{5}{2}\right)^2=\frac{11}{12}$

따라서

$$\begin{aligned}\mathrm{V}(5-12X)&=(-12)^2\mathrm{V}(X)\\&=12^2\times\frac{11}{12}=132\end{aligned}$$

답 ②

다른 풀이

$\mathrm{E}(X)=\frac{5}{2}$임을 구한 다음 $\mathrm{V}(X)$를 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\begin{aligned}\mathrm{V}(X)&=\mathrm{E}\left(\left(X-\frac{5}{2}\right)^2\right)\\&=\left(1-\frac{5}{2}\right)^2\times\frac{1}{6}+\left(2-\frac{5}{2}\right)^2\times\frac{1}{3}+\left(3-\frac{5}{2}\right)^2\times\frac{1}{3}\\&\quad+\left(4-\frac{5}{2}\right)^2\times\frac{1}{6}\\&=\frac{3}{8}+\frac{1}{12}+\frac{1}{12}+\frac{3}{8}=\frac{11}{12}\end{aligned}$$

9 확률변수 X가 이항분포 $\mathrm{B}\left(n, \frac{1}{3}\right)$을 따르므로

$\mathrm{E}(X)=n\times\frac{1}{3}=\frac{n}{3}$

$\mathrm{V}(X)=n\times\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}=\frac{2}{9}n$

이때 $\mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2$이므로

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(X^2)&=\mathrm{V}(X)+\{\mathrm{E}(X)\}^2\\&=\frac{2}{9}n+\left(\frac{n}{3}\right)^2=40\end{aligned}$$

$n^2+2n-360=0$

$(n-18)(n+20)=0$

n은 자연수이므로 $n=18$

답 18

10 $$\begin{aligned}\mathrm{P}(X=x)&={}_{100}\mathrm{C}_x\frac{4^{100-x}}{5^{100}}={}_{100}\mathrm{C}_x\frac{4^{100-x}}{5^{100-x+x}}\\&={}_{100}\mathrm{C}_x\left(\frac{1}{5}\right)^x\left(\frac{4}{5}\right)^{100-x}\ (x=0, 1, 2, \cdots, 100)\end{aligned}$$

이므로 확률변수 X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(100, \frac{1}{5}\right)$을 따른다.

따라서

$\sigma(X)=\sqrt{100\times\frac{1}{5}\times\frac{4}{5}}=4$

이므로

$$\begin{aligned}\sigma\left(\frac{X}{2}+2\right)&=\left|\frac{1}{2}\right|\sigma(X)\\&=\frac{1}{2}\times4=2\end{aligned}$$

답 ④

Level 1 기초 연습

본문 68쪽

1 ① 2 ③ 3 ② 4 ④ 5 ④

1 이산확률변수 X가 갖는 값은 1, 2, 3이므로

$$\begin{aligned}&\mathrm{P}(X\le2)-\mathrm{P}(X\ge2)\\&=\{\mathrm{P}(X=1)+\mathrm{P}(X=2)\}-\{\mathrm{P}(X=2)+\mathrm{P}(X=3)\}\\&=\mathrm{P}(X=1)-\mathrm{P}(X=3)\end{aligned}$$

8개의 공이 들어 있는 주머니에서 6개의 공을 동시에 꺼내는 경우의 수는

${}_8\mathrm{C}_6={}_8\mathrm{C}_2=\frac{8\times7}{2\times1}=28$

$\mathrm{P}(X=1)$의 값은 흰 공 1개, 검은 공 5개를 꺼낼 확률이므로

$\mathrm{P}(X=1)=\frac{{}_3\mathrm{C}_1\times{}_5\mathrm{C}_5}{28}=\frac{3\times1}{28}=\frac{3}{28}$

$\mathrm{P}(X=3)$의 값은 흰 공 3개, 검은 공 3개를 꺼낼 확률이므로

$\mathrm{P}(X=3)=\frac{{}_3\mathrm{C}_3\times{}_5\mathrm{C}_3}{28}=\frac{1\times10}{28}=\frac{5}{14}$

따라서

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(X\le2)-\mathrm{P}(X\ge2)&=\mathrm{P}(X=1)-\mathrm{P}(X=3)\\&=\frac{3}{28}-\frac{5}{14}\\&=-\frac{1}{4}\end{aligned}$$

답 ①

2 이산확률변수 X가 갖는 모든 값에 대한 확률의 합은 1이므로

$\frac{1}{3}+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=1$

$\frac{a+b}{ab}=\frac{2}{3}$ ...... ㉠

$E(X)=1\times\frac{1}{3}+a\times\frac{1}{a}+b\times\frac{1}{b}=\frac{7}{3}$

$E(X^2)=1^2\times\frac{1}{3}+a^2\times\frac{1}{a}+b^2\times\frac{1}{b}=a+b+\frac{1}{3}$

이때 $V(X)=\frac{26}{9}$이므로

$V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2$

$=\left(a+b+\frac{1}{3}\right)-\left(\frac{7}{3}\right)^2=\frac{26}{9}$

$a+b=8$ ...... ㉡

㉠에 ㉡을 대입하면

$\frac{8}{ab}=\frac{2}{3}$

$ab=8\times\frac{3}{2}=12$

따라서

$a^2+b^2=(a+b)^2-2ab=8^2-2\times12=40$

답 ③

참고

$a<b$이므로 $a+b=8$, $ab=12$를 연립하여 풀면

$a=2$, $b=6$

3 $P(X=x)=\frac{a}{\sqrt{x}+\sqrt{x+1}}$

$=\frac{a(\sqrt{x}-\sqrt{x+1})}{(\sqrt{x}+\sqrt{x+1})(\sqrt{x}-\sqrt{x+1})}$

$=a(-\sqrt{x}+\sqrt{x+1})$ $(x=1, 2, 3, \cdots, 8)$

이산확률변수 X가 갖는 모든 값에 대한 확률의 합은 1이므로

$\sum_{x=1}^{8}P(X=x)$

$=a\sum_{x=1}^{8}(-\sqrt{x}+\sqrt{x+1})$

$=a\{(-\sqrt{1}+\sqrt{2})+(-\sqrt{2}+\sqrt{3})+(-\sqrt{3}+\sqrt{4})+\cdots+(-\sqrt{8}+\sqrt{9})\}$

$=a(-\sqrt{1}+\sqrt{9})$

$=a(-1+3)=2a=1$

따라서 $a=\frac{1}{2}$

답 ②

4 확률변수 X가 이항분포 $B(20, p)$를 따르므로

$E(X)=20p$ ...... ㉠

이때 $E(2X-5)=15$에서

$2E(X)-5=15$

$E(X)=10$ ...... ㉡

㉠, ㉡에서

$20p=10$

$p=\frac{1}{2}$

그러므로 확률변수 X는 이항분포 $B\left(20, \frac{1}{2}\right)$을 따르고 X의 확률질량함수는

$P(X=x)={}_{20}C_x\left(\frac{1}{2}\right)^x\left(\frac{1}{2}\right)^{20-x}$

$=\frac{{}_{20}C_x}{2^{20}}$

따라서

$\frac{P(X=2)}{P(X=1)}=\frac{\frac{{}_{20}C_2}{2^{20}}}{\frac{{}_{20}C_1}{2^{20}}}$

$=\frac{{}_{20}C_2}{{}_{20}C_1}$

$=\frac{\frac{20\times19}{2\times1}}{20}=\frac{19}{2}$

답 ④

5 숫자 11, 12, 13, 14, 15 중에서 11과 13이 소수이므로 5장의 카드 중에서 임의로 한 장의 카드를 택할 때 소수가 적혀 있는 카드를 택할 확률은 $\frac{2}{5}$이다.

그러므로 확률변수 X는 이항분포 $B\left(25, \frac{2}{5}\right)$를 따른다.

따라서

$E(X)=25\times\frac{2}{5}=10$

$V(X)=25\times\frac{2}{5}\times\frac{3}{5}=6$

이므로

$E(X)-V(X)=10-6=4$

답 ④

Level 2 기본 연습

본문 69~70쪽

1 ④ 2 ② 3 ⑤ 4 34 5 ④
6 ⑤ 7 ③ 8 323

1 두 개의 주사위 A, B를 동시에 던져서 나오는 두 눈의 수가 각각 a, b $(1\le a\le 6,\ 1\le b\le 6)$이므로 a, b의 모든 순서쌍 (a, b)의 개수는
$6\times 6=36$
이때 확률변수 X가 갖는 값은 자연수이므로
$\mathrm{P}(3\le X\le 4)=\mathrm{P}(X=3)+\mathrm{P}(X=4)$

(i) $X=3$일 때
ab의 양의 약수의 개수가 3이려면
$ab=p^2$ (p는 소수)의 꼴이어야 한다.
$1\le ab\le 36$이므로
$ab=2^2$ 또는 $ab=3^2$ 또는 $ab=5^2$이어야 하고
$ab=2^2$을 만족시키는 a, b의 순서쌍 (a, b)의 개수는
$(1, 4)$, $(2, 2)$, $(4, 1)$로 3
$ab=3^2$을 만족시키는 a, b의 순서쌍 (a, b)의 개수는
$(3, 3)$으로 1
$ab=5^2$을 만족시키는 a, b의 순서쌍 (a, b)의 개수는
$(5, 5)$로 1
그러므로 $\mathrm{P}(X=3)=\dfrac{3+1+1}{36}=\dfrac{5}{36}$

(ii) $X=4$일 때
ab의 양의 약수의 개수가 4이려면
$ab=q^3$ (q는 소수) 또는 $ab=rs$ (r, s는 서로 다른 소수)의 꼴이어야 한다.
$1\le ab\le 36$이므로
$ab=2^3$ 또는 $ab=3^3$ 또는 $ab=2\times 3$ 또는
$ab=2\times 5$ 또는 $ab=3\times 5$이어야 하고
$ab=2^3$을 만족시키는 a, b의 순서쌍 (a, b)의 개수는
$(2, 4)$, $(4, 2)$로 2
$ab=3^3$을 만족시키는 a, b의 값은 존재하지 않는다.
$ab=2\times 3$을 만족시키는 a, b의 순서쌍 (a, b)의 개수는
$(1, 6)$, $(2, 3)$, $(3, 2)$, $(6, 1)$로 4
$ab=2\times 5$를 만족시키는 a, b의 순서쌍 (a, b)의 개수는
$(2, 5)$, $(5, 2)$로 2
$ab=3\times 5$를 만족시키는 a, b의 순서쌍 (a, b)의 개수는
$(3, 5)$, $(5, 3)$으로 2
그러므로 $\mathrm{P}(X=4)=\dfrac{2+4+2+2}{36}=\dfrac{5}{18}$

(i), (ii)에 의하여 구하는 값은
$$\mathrm{P}(3\le X\le 4)=\mathrm{P}(X=3)+\mathrm{P}(X=4)$$
$$=\frac{5}{36}+\frac{5}{18}=\frac{5}{12}$$

답 ④

2 여섯 개의 숫자 0, 1, 1, 2, 2, 2를 일렬로 나열하여 만들 수 있는 여섯 자리 자연수의 개수는
$\dfrac{6!}{2!\times 3!}-\dfrac{5!}{2!\times 3!}=50$
이고, 이산확률변수 X가 갖는 값은 0, 1, 2, 3이다.

(i) $X=0$일 때
두 개의 숫자 1, 1을 하나의 문자 a로 생각하고, a, 2, 2, 2를 일렬로 나열하는 경우의 수는
$\dfrac{4!}{3!}=4$
이 각각에 대하여 다섯 개의 숫자의 사이사이와 오른쪽 끝 중에 숫자 0을 넣는 경우의 수는
${}_5\mathrm{C}_1=5$
그러므로 $\mathrm{P}(X=0)=\dfrac{4\times 5}{50}=\dfrac{2}{5}$

(ii) $X=1$일 때
세 개의 숫자 1, 2, 1을 하나의 문자 b로 생각하고, b, 2, 2를 일렬로 나열하는 경우의 수는
$\dfrac{3!}{2!}=3$
이 각각에 대하여 다섯 개의 숫자의 사이사이와 오른쪽 끝 중에 숫자 0을 넣는 경우의 수는
${}_5\mathrm{C}_1=5$
그러므로 $\mathrm{P}(X=1)=\dfrac{3\times 5}{50}=\dfrac{3}{10}$

(iii) $X=2$일 때
네 개의 숫자 1, 2, 2, 1을 하나의 문자 c로 생각하고, c, 2를 일렬로 나열하는 경우의 수는
$2!=2$
이 각각에 대하여 다섯 개의 숫자의 사이사이와 오른쪽 끝 중에 숫자 0을 넣는 경우의 수는
${}_5\mathrm{C}_1=5$
그러므로 $\mathrm{P}(X=2)=\dfrac{2\times 5}{50}=\dfrac{1}{5}$

(iv) $X=3$일 때
다섯 개의 숫자 1, 2, 2, 2, 1의 사이사이와 오른쪽 끝 중에 숫자 0을 넣는 경우의 수는
${}_5\mathrm{C}_1=5$

그러므로 $\mathrm{P}(X=3)=\frac{5}{50}=\frac{1}{10}$

(i)~(iv)에 의하여 확률변수 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	0	1	2	3	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{2}{5}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{10}$	1

따라서

$\frac{\mathrm{P}(X=2)}{\mathrm{P}(X=0)}+\frac{\mathrm{P}(X=3)}{\mathrm{P}(X=1)}=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=\frac{5}{6}$

답 ②

3 이산확률변수 X가 갖는 모든 값에 대한 확률의 합은 1이므로

$\mathrm{P}(X=1)+\mathrm{P}(X=2)+\mathrm{P}(X=3)+\cdots+\mathrm{P}(X=9)=1$

수열 $\{\mathrm{P}(X=n)\}$이 공차가 d인 등차수열이므로

$\frac{9\times\{\mathrm{P}(X=1)+\mathrm{P}(X=9)\}}{2}=1$

$\frac{9\times 2\mathrm{P}(X=5)}{2}=1$

$\mathrm{P}(X=5)=\frac{1}{9}$

한편, $d>0$이므로

$\mathrm{P}(X=1)<\mathrm{P}(X=2)<\mathrm{P}(X=3)<\cdots<\mathrm{P}(X=9)$

또 $\mathrm{P}(X=1)=\mathrm{P}(X=5)-4d=\frac{1}{9}-4d$

$\mathrm{P}(X=1)\geq 0$이므로

$\frac{1}{9}-4d\geq 0$에서 $d\leq\frac{1}{36}$

따라서 d의 최댓값은 $\frac{1}{36}$이다.

$d=\frac{1}{36}$일 때

$\mathrm{P}(X=1)=\frac{1}{9}-4\times\frac{1}{36}=0$

9 이하의 자연수 n에 대하여

$\mathrm{P}(X=n)=0+(n-1)\times\frac{1}{36}=\frac{n-1}{36}$

즉,

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(X)&=\sum_{n=1}^{9}\{n\times\mathrm{P}(X=n)\}\\&=\sum_{n=1}^{9}\left(n\times\frac{n-1}{36}\right)\\&=\frac{1}{36}\sum_{n=1}^{9}(n^2-n)\\&=\frac{1}{36}\times\left(\frac{9\times10\times19}{6}-\frac{9\times10}{2}\right)=\frac{20}{3}\end{aligned}$$

답 ⑤

4 두 주머니 A, B에서 각각 3개의 공을 동시에 꺼내는 경우의 수는

${}_5\mathrm{C}_3\times{}_5\mathrm{C}_3={}_5\mathrm{C}_2\times{}_5\mathrm{C}_2=10\times10=100$

이고, 이산확률변수 X가 갖는 값은 1, 2, 3이다.

(i) $X=1$일 때

1, 2, 3, 4, 5 중 같은 숫자 한 개를 택하는 경우의 수는

${}_5\mathrm{C}_1=5$

이 각각에 대하여 두 주머니 A, B에서 같은 숫자를 제외한 서로 다른 숫자가 적힌 두 개의 공을 각각 택하여 서로 다른 숫자가 적힌 네 개의 공을 꺼내는 경우의 수는

${}_4\mathrm{C}_2\times{}_2\mathrm{C}_2=6$

그러므로 $\mathrm{P}(X=1)=\frac{5\times6}{100}=\frac{3}{10}$

(ii) $X=2$일 때

1, 2, 3, 4, 5 중 같은 숫자 두 개를 택하는 경우의 수는

${}_5\mathrm{C}_2=10$

이 각각에 대하여 두 주머니 A, B에서 두 개의 같은 숫자를 제외한 다른 숫자가 적힌 한 개의 공을 각각 택하여 서로 다른 숫자가 적힌 두 개의 공을 꺼내는 경우의 수는

${}_3\mathrm{C}_1\times{}_2\mathrm{C}_1=6$

그러므로 $\mathrm{P}(X=2)=\frac{10\times6}{100}=\frac{3}{5}$

(iii) $X=3$일 때

1, 2, 3, 4, 5 중 같은 숫자 세 개를 택하는 경우의 수는

${}_5\mathrm{C}_3=10$

그러므로 $\mathrm{P}(X=3)=\frac{10}{100}=\frac{1}{10}$

(i), (ii), (iii)에 의하여 확률변수 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	1	2	3	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{3}{10}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{1}{10}$	1

$\mathrm{E}(X)=1\times\frac{3}{10}+2\times\frac{3}{5}+3\times\frac{1}{10}=\frac{9}{5}$

$\mathrm{E}(X^2)=1^2\times\frac{3}{10}+2^2\times\frac{3}{5}+3^2\times\frac{1}{10}=\frac{18}{5}$

$$\begin{aligned}\mathrm{V}(X)&=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2\\&=\frac{18}{5}-\left(\frac{9}{5}\right)^2\\&=\frac{9}{25}\end{aligned}$$

따라서 $p=25$, $q=9$이므로

$p+q=34$

답 34

5 이산확률변수 X가 갖는 모든 값에 대한 확률의 합은 1이므로

$a+\frac{1}{2}+b=1$

$b=\frac{1}{2}-a$ ⋯⋯ ㉠

이고

$\mathrm{E}(X)=1\times a+2\times\frac{1}{2}+4\times b=a+4b+1$

$=a+4\left(\frac{1}{2}-a\right)+1=3-3a$

$\mathrm{E}(X^2)=1^2\times a+2^2\times\frac{1}{2}+4^2\times b=a+16b+2$

$=a+16\left(\frac{1}{2}-a\right)+2=10-15a$

$\mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2$

$=10-15a-(3-3a)^2$

$=-9a^2+3a+1$

한편, X의 분산 $\mathrm{V}(X)$와 표준편차 $\sigma(X)$가 같으므로

$\mathrm{V}(X)=\sigma(X)$

$\mathrm{V}(X)=\sqrt{\mathrm{V}(X)}$

$\sqrt{\mathrm{V}(X)}\{\sqrt{\mathrm{V}(X)}-1\}=0$

이때 $ab>0$, 즉 $a>0$, $b>0$이므로 ㉠에서 $0<a<\frac{1}{2}$이다.

$0<a<\frac{1}{2}$일 때 $\mathrm{V}(X)=-9a^2+3a+1\neq0$이므로

$\sqrt{\mathrm{V}(X)}=1$, 즉 $\mathrm{V}(X)=1$

$-9a^2+3a+1=1$

$3a(3a-1)=0$

$0<a<\frac{1}{2}$이므로 $a=\frac{1}{3}$

따라서 $b=\frac{1}{2}-a=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$이므로

$\frac{a}{b}=2$

답 ④

6 이산확률변수 X가 갖는 모든 값에 대한 확률의 합은 1이므로

$a+2a+3a+4a+\frac{1}{2}=1$

$10a=\frac{1}{2}$, $a=\frac{1}{20}$

이산확률변수 X가 갖는 값이 -2, -1, 0, 1, 2이므로 이산확률변수 $|X|$가 갖는 값은 0, 1, 2이다.

$\mathrm{P}(|X|=0)=\mathrm{P}(X=0)=3a=3\times\frac{1}{20}=\frac{3}{20}$

$\mathrm{P}(|X|=1)=\mathrm{P}(X=-1)+\mathrm{P}(X=1)$

$=2a+4a=6a$

$=6\times\frac{1}{20}=\frac{3}{10}$

$\mathrm{P}(|X|=2)=\mathrm{P}(X=-2)+\mathrm{P}(X=2)$

$=a+\frac{1}{2}$

$=\frac{1}{20}+\frac{1}{2}=\frac{11}{20}$

이므로 확률변수 $|X|$의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

$\lvert X\rvert$	0	1	2	합계
$\mathrm{P}(\lvert X\rvert=x)$	$\frac{3}{20}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{11}{20}$	1

$\mathrm{E}(|X|)=0\times\frac{3}{20}+1\times\frac{3}{10}+2\times\frac{11}{20}=\frac{7}{5}$

$\mathrm{E}(|X|^2)=0^2\times\frac{3}{20}+1^2\times\frac{3}{10}+2^2\times\frac{11}{20}=\frac{5}{2}$

$\mathrm{V}(|X|)=\mathrm{E}(|X|^2)-\{\mathrm{E}(|X|)\}^2$

$=\frac{5}{2}-\left(\frac{7}{5}\right)^2=\frac{27}{50}$

따라서

$\mathrm{V}(|10X|)=10^2\mathrm{V}(|X|)$

$=100\times\frac{27}{50}=54$

답 ⑤

7 이항분포 $\mathrm{B}(3,\ p)$를 따르는 확률변수 X의 확률질량함수는

$\mathrm{P}(X=x)={}_3\mathrm{C}_x p^x(1-p)^{3-x}$ $(x=0,\ 1,\ 2,\ 3)$

이므로

$\mathrm{P}(X\geq2)={}_3\mathrm{C}_2 p^2(1-p)+{}_3\mathrm{C}_3 p^3$

$=3p^2(1-p)+p^3$

$=-2p^3+3p^2$

이항분포 $\mathrm{B}\left(9,\ \frac{1}{2}\right)$을 따르는 확률변수 Y의 확률질량함수는

$\mathrm{P}(Y=y)={}_9\mathrm{C}_y\left(\frac{1}{2}\right)^y\left(\frac{1}{2}\right)^{9-y}=\frac{{}_9\mathrm{C}_y}{2^9}$ $(y=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ 9)$

이므로

$\mathrm{P}(Y\geq5)=\frac{{}_9\mathrm{C}_5+{}_9\mathrm{C}_6+{}_9\mathrm{C}_7+{}_9\mathrm{C}_8+{}_9\mathrm{C}_9}{2^9}=\frac{2^8}{2^9}=\frac{1}{2}$

이때 $\mathrm{P}(X\geq2)+\mathrm{P}(Y\geq5)=1$에서

$\mathrm{P}(X\geq 2)=1-\mathrm{P}(Y\geq 5)=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$

이므로

$-2p^3+3p^2=\frac{1}{2}$, $4p^3-6p^2+1=0$

$(2p-1)(2p^2-2p-1)=0$

$p=\frac{1}{2}$ 또는 $p=\frac{1-\sqrt{3}}{2}$ 또는 $p=\frac{1+\sqrt{3}}{2}$

$\frac{1-\sqrt{3}}{2}<0$, $\frac{1+\sqrt{3}}{2}>1$이므로 $p=\frac{1}{2}$

따라서 확률변수 X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(3, \frac{1}{2}\right)$을 따르고

$\mathrm{E}(X)=3\times\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$

$\mathrm{V}(X)=3\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{3}{4}$

이므로

$\mathrm{E}(X)+\mathrm{V}(X)=\frac{3}{2}+\frac{3}{4}=\frac{9}{4}$

답 ③

8 주머니 A를 택한 후 꺼낸 1개의 공에 적힌 수가 소수인 2일 확률은

$\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{6}$

주머니 B를 택한 후 꺼낸 1개의 공에 적힌 수가 소수인 3 또는 5일 확률은

$\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}=\frac{2}{9}$

주머니 C를 택한 후 꺼낸 1개의 공에 적힌 수가 소수인 7일 확률은

$\frac{1}{3}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{12}$

그러므로 주어진 시행을 한 번 할 때 꺼낸 공에 적힌 수가 소수일 확률은

$\frac{1}{6}+\frac{2}{9}+\frac{1}{12}=\frac{17}{36}$

따라서 확률변수 X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(432, \frac{17}{36}\right)$을 따르고

$\mathrm{V}(X)=432\times\frac{17}{36}\times\frac{19}{36}=\frac{323}{3}$

이므로

$$\begin{aligned}\mathrm{V}(\sqrt{3}X+\sqrt{3})&=(\sqrt{3})^2\mathrm{V}(X)\\&=3\times\frac{323}{3}=323\end{aligned}$$

답 323

Level 3 실력 완성

본문 71쪽

1 151 **2** ③ **3** ①

1 주사위를 한 번 던져서 나오는 눈의 수가 6의 약수일 확률은 $\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$, 나오는 눈의 수가 6의 약수가 아닐 확률은 $\frac{1}{3}$이고, 이산확률변수 X가 갖는 값은 0, 1, 2, 3, 4이다.

(i) $X=0$일 때

두 번째 시행까지 상자에 흰 공만 2개씩 2번 넣는 경우이므로

$\mathrm{P}(X=0)=\left(\frac{2}{3}\right)^2=\frac{4}{9}$

(ii) $X=1$일 때

두 번째 시행까지 검은 공 1개를 1번, 흰 공 2개를 1번 넣고 세 번째 시행에서 흰 공 2개를 넣는 경우이므로

$\mathrm{P}(X=1)={}_2\mathrm{C}_1\left(\frac{1}{3}\right)^1\left(\frac{2}{3}\right)^1\times\frac{2}{3}=\frac{8}{27}$

(iii) $X=2$일 때

세 번째 시행까지 검은 공 1개를 2번, 흰 공 2개를 1번 넣는 경우이므로

$\mathrm{P}(X=2)={}_3\mathrm{C}_2\left(\frac{1}{3}\right)^2\left(\frac{2}{3}\right)^1=\frac{2}{9}$

(iv) $X=3$일 때

세 번째 시행까지 검은 공 1개를 3번 넣고 네 번째 시행에서 흰 공 2개를 넣는 경우이므로

$\mathrm{P}(X=3)=\left(\frac{1}{3}\right)^3\times\frac{2}{3}=\frac{2}{81}$

(v) $X=4$일 때

네 번째 시행까지 검은 공 1개를 4번 넣는 경우이므로

$\mathrm{P}(X=4)=\left(\frac{1}{3}\right)^4=\frac{1}{81}$

(i)~(v)에 의하여 확률변수 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	0	1	2	3	4	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{4}{9}$	$\frac{8}{27}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{2}{81}$	$\frac{1}{81}$	1

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(X)&=0\times\frac{4}{9}+1\times\frac{8}{27}+2\times\frac{2}{9}+3\times\frac{2}{81}+4\times\frac{1}{81}\\&=\frac{70}{81}\end{aligned}$$

따라서 $p=81$, $q=70$이므로

$p+q=151$

답 151

2 A가 B 또는 C와 가위바위보를 한 번 할 때, A가 이기거나 비기거나 질 확률은 모두 $\frac{1}{3}$이고, 이산확률변수 X가 갖는 값은 0, 1, 2, 3, 4, 6이다.

(i) $X=0$일 때

B, C에게 모두 지는 경우이므로

$P(X=0)=\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{9}$

(ii) $X=1$일 때

B, C 중 한 사람에게는 비기고 한 사람에게 지는 경우이므로

$P(X=1)=\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{2}{9}$

(iii) $X=2$일 때

B, C에게 모두 비기는 경우이므로

$P(X=2)=\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{9}$

(iv) $X=3$일 때

B, C 중 한 사람에게는 이기고 한 사람에게 지는 경우이므로

$P(X=3)=\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{2}{9}$

(v) $X=4$일 때

B, C 중 한 사람에게는 이기고 한 사람에게 비기는 경우이므로

$P(X=4)=\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{2}{9}$

(vi) $X=6$일 때

B, C에게 모두 이기는 경우이므로

$P(X=6)=\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{9}$

(i)~(vi)에 의하여 확률변수 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	0	1	2	3	4	6	합계
$P(X=x)$	$\frac{1}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{9}$	1

$$E(X)=0\times\frac{1}{9}+1\times\frac{2}{9}+2\times\frac{1}{9}+3\times\frac{2}{9}+4\times\frac{2}{9}+6\times\frac{1}{9}$$
$$=\frac{8}{3}$$
$$E(X^2)=0^2\times\frac{1}{9}+1^2\times\frac{2}{9}+2^2\times\frac{1}{9}+3^2\times\frac{2}{9}+4^2\times\frac{2}{9}+6^2\times\frac{1}{9}$$
$$=\frac{92}{9}$$

이므로

$$V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2$$
$$=\frac{92}{9}-\left(\frac{8}{3}\right)^2=\frac{28}{9}$$

따라서

$$V(6X+10)=6^2V(X)=36\times\frac{28}{9}=112$$

답 ③

3 함수 f가 집합 $A=\{1, 2, 3, 4\}$에서 A로의 함수이므로 $f(1)+f(2)=4$에서

$f(1)=1$, $f(2)=3$ 또는

$f(1)=f(2)=2$ 또는

$f(1)=3$, $f(2)=1$

(i) $f(1)=1$, $f(2)=3$일 때

함수 f의 치역의 원소의 개수가 2이므로 치역은 $\{1, 3\}$이다.

이때 $f(3)$, $f(4)$의 값을 순서쌍 $(f(3), f(4))$로 나타내면

$(1, 1)$, $(1, 3)$, $(3, 1)$, $(3, 3)$

이므로 $f(1)=1$, $f(2)=3$일 때 주어진 조건을 만족시키는 함수의 개수는 4이고, 이 4개의 함수 모두 $f(3)+f(4)$의 값은 짝수이다.

(ii) $f(1)=f(2)=2$일 때

함수 f의 치역의 원소의 개수가 2이므로 치역은 $\{1, 2\}$ 또는 $\{2, 3\}$ 또는 $\{2, 4\}$이다.

치역이 $\{1, 2\}$일 때 $f(3)$, $f(4)$의 값을 순서쌍 $(f(3), f(4))$로 나타내면

$\underline{(1, 1)}$, $(1, 2)$, $(2, 1)$

치역이 $\{2, 3\}$일 때 $f(3)$, $f(4)$의 값을 순서쌍 $(f(3), f(4))$로 나타내면

$(2, 3)$, $(3, 2)$, $\underline{(3, 3)}$

치역이 $\{2, 4\}$일 때 $f(3)$, $f(4)$의 값을 순서쌍 $(f(3), f(4))$로 나타내면

$\underline{(2, 4)}$, $\underline{(4, 2)}$, $\underline{(4, 4)}$

이므로 $f(1)=f(2)=2$일 때 주어진 조건을 만족시키는 함수의 개수는 9이고, 이 9개의 함수 중에서 밑줄 친 5개의 함수가 $f(3)+f(4)$의 값이 짝수이다.

(iii) $f(1)=3$, $f(2)=1$일 때

(i)과 마찬가지로 주어진 조건을 만족시키는 함수의 개수는 4이고, 이 4개의 함수 모두 $f(3)+f(4)$의 값은 짝수이다.

(i), (ii), (iii)에서 주어진 조건을 만족시키는 함수 f의 개수는 $4+9+4=17$이고, 이 17개의 함수 중에서 $f(3)+f(4)$의 값이 짝수인 함수의 개수는 $4+5+4=13$이다.

따라서 확률변수 X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(n,\ \frac{13}{17}\right)$을 따르므로

$\mathrm{V}(X)=104$에서

$\mathrm{V}(X)=n\times\frac{13}{17}\times\frac{4}{17}=\frac{52}{289}n=104$

$n=578$이고

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(n-X)&=n-\mathrm{E}(X)\\&=578-578\times\frac{13}{17}\\&=578\times\left(1-\frac{13}{17}\right)\\&=578\times\frac{4}{17}=136\end{aligned}$$

답 ①

06 연속확률변수의 확률분포

유제 본문 75~81쪽

1 ②	2 4	3 ⑤	4 78	5 ④
6 ④	7 ①	8 ③		

1 함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축 및 두 직선 $x=-2$, $x=2$로 둘러싸인 부분의 넓이는 1이므로

$\frac{1}{2}\times2\times3a+\frac{1}{2}\times2\times a=4a=1$

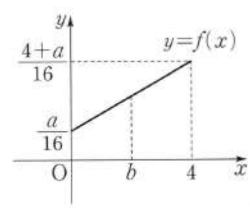
$a=\frac{1}{4}$

따라서 $f(x)=\begin{cases}-\frac{3}{8}x & (-2\le x<0)\\ \frac{1}{8}x & (0\le x\le2)\end{cases}$ 이므로

$$\begin{aligned}&\mathrm{P}(-1\le X\le2)\\&=\mathrm{P}(-1\le X\le0)+\mathrm{P}(0\le X\le2)\\&=\frac{1}{2}\times1\times\frac{3}{8}+\frac{1}{2}\times2\times\frac{1}{4}\\&=\frac{7}{16}\end{aligned}$$

답 ②

2 함수 $y=f(x)$의 그래프는 그림과 같다.



함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축, y축 및 직선 $x=4$로 둘러싸인 부분의 넓이는 1이므로

$\frac{1}{2}\times4\times\{f(0)+f(4)\}$

$=\frac{1}{2}\times4\times\left(\frac{a}{16}+\frac{4+a}{16}\right)=\frac{a+2}{4}=1$

$a=2$

즉, $f(x)=\frac{x+2}{16}$

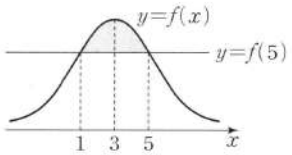
한편, $\mathrm{P}(0\le X\le b)=\frac{3}{8}$에서 $0<b<4$이고

$\mathrm{P}(0\le X\le b)=\frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{8}+\frac{b+2}{16}\right)\times b=\frac{b^2+4b}{32}=\frac{3}{8}$

$b^2+4b-12=0$
$(b-2)(b+6)=0$
$0<b<4$이므로 $b=2$
따라서 $a+b=2+2=4$

답 4

3 평균이 3인 정규분포를 따르는 확률변수 X의 확률밀도함수 $y=f(x)$의 그래프는 직선 $x=3$에 대하여 대칭이므로
$f(5)=f(1)=a$
$\mathrm{P}(1\le X\le 5)=2\mathrm{P}(3\le X\le 5)=2\times b=2b$



$\mathrm{P}(1\le X\le 5)$의 값은 곡선 $y=f(x)$와 x축 및 두 직선 $x=1$, $x=5$로 둘러싸인 부분의 넓이와 같으므로 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=f(5)$, 즉 $y=a$로 둘러싸인 부분의 넓이를 S라 하면
$S=\mathrm{P}(1\le X\le 5)-4\times f(5)$
$=2b-4a=2(b-2a)$

답 ⑤

4 정규분포 $\mathrm{N}(m,\ \sigma^2)$을 따르는 확률변수 X의 확률밀도함수를 $f(x)$라 하면 함수 $y=f(x)$의 그래프는 직선 $x=m$에 대하여 대칭이므로
$\mathrm{P}(X\ge 22)=\mathrm{P}(X\le 30)$에서
$m=\frac{22+30}{2}=26$
$\mathrm{P}(X\le 20)=\mathrm{P}(X\ge m+2\sigma)$에서
$\frac{20+(m+2\sigma)}{2}=m$
$\sigma=\frac{m-20}{2}=\frac{26-20}{2}=3$
따라서 $m\times\sigma=26\times 3=78$

답 78

5 $Z=\frac{X-30}{4}$으로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.
따라서 구하는 확률은
$\mathrm{P}(|X-29|\le 2)=\mathrm{P}(27\le X\le 31)$
$=\mathrm{P}\left(\frac{27-30}{4}\le Z\le\frac{31-30}{4}\right)$
$=\mathrm{P}(-0.75\le Z\le 0.25)$
$=\mathrm{P}(-0.75\le Z\le 0)+\mathrm{P}(0\le Z\le 0.25)$
$=\mathrm{P}(0\le Z\le 0.75)+\mathrm{P}(0\le Z\le 0.25)$
$=0.2734+0.0987=0.3721$

답 ④

6 이 고등학교의 수학 시험에 응시한 수험생의 시험 점수를 확률변수 X라 하면 X는 정규분포 $\mathrm{N}(m,\ 10^2)$을 따르고, $Z=\frac{X-m}{10}$으로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.
$\mathrm{P}(X\ge 65)=0.9032>0.5$에서 $65<m$이므로
$\mathrm{P}(X\ge 65)=\mathrm{P}\left(Z\ge\frac{65-m}{10}\right)$
$=\mathrm{P}\left(\frac{65-m}{10}\le Z\le 0\right)+\mathrm{P}(Z\ge 0)$
$=\mathrm{P}\left(0\le Z\le\frac{m-65}{10}\right)+0.5=0.9032$
$\mathrm{P}\left(0\le Z\le\frac{m-65}{10}\right)=0.4032$
주어진 표준정규분포표에서 $\mathrm{P}(0\le Z\le 1.3)=0.4032$이므로
$\frac{m-65}{10}=1.3$
따라서 $m=78$

답 ④

7 확률변수 X가 이항분포 $\mathrm{B}(192,\ p)$를 따르고 $\mathrm{V}(X)=36$이므로
$\mathrm{V}(X)=192\times p\times(1-p)=36$
$16p^2-16p+3=0$
$(4p-1)(4p-3)=0$
$p=\frac{1}{4}$ 또는 $p=\frac{3}{4}$
$p=\frac{1}{4}$이면 $\mathrm{E}(X)=192\times\frac{1}{4}=48$
$p=\frac{3}{4}$이면 $\mathrm{E}(X)=192\times\frac{3}{4}=144$
$\mathrm{E}(X)<50$이므로 $p=\frac{1}{4}$
이때 192는 충분히 큰 수이므로 확률변수 X는 근사적으로

정규분포 $N(48,\ 6^2)$을 따르고, $Z=\frac{X-48}{6}$로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $N(0,\ 1)$을 따른다.

따라서

$P(51\le X\le 54)$

$=P\left(\frac{51-48}{6}\le Z\le \frac{54-48}{6}\right)$

$=P(0.5\le Z\le 1)$

$=P(0\le Z\le 1)-P(0\le Z\le 0.5)$

$=0.3413-0.1915=0.1498$

답 ①

8 900번의 조사 결과 무채색인 자동차의 수를 확률변수 X라 하면 X는 이항분포 $B\left(900,\ \frac{4}{5}\right)$를 따르므로

$E(X)=900\times\frac{4}{5}=720$

$V(X)=900\times\frac{4}{5}\times\frac{1}{5}=144$

이때 900은 충분히 큰 수이므로 확률변수 X는 근사적으로 정규분포 $N(720,\ 12^2)$을 따르고, $Z=\frac{X-720}{12}$으로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $N(0,\ 1)$을 따른다.

따라서 구하는 확률은

$P(X\le 696)$

$=P\left(Z\le\frac{696-720}{12}\right)$

$=P(Z\le -2)$

$=0.5-P(0\le Z\le 2)$

$=0.5-0.4772=0.0228$

답 ③

Level 1 **기초 연습** 본문 82쪽

1 ② 2 ② 3 ④ 4 ④ 5 ③

1 함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축 및 직선 $x=3$으로 둘러싸인 부분의 넓이는 1이므로

$\frac{1}{2}\times 1\times k+\frac{1}{2}\times(k+3k)\times 1+\frac{1}{2}\times(3k+4k)\times 1=6k=1$

따라서 $k=\frac{1}{6}$

답 ②

2 평균이 4인 정규분포를 따르는 확률변수 X의 확률밀도함수의 그래프는 직선 $x=4$에 대하여 대칭이므로

$P(X\ge a)=P(X\le b)$에서

$\frac{a+b}{2}=4$

$a+b=8$

이때 a, b가 $a<b$인 자연수이므로 가능한 a의 값은 1 또는 2 또는 3이다.

$a=1$일 때 $b=7$이고 $ab=7$

$a=2$일 때 $b=6$이고 $ab=12$

$a=3$일 때 $b=5$이고 $ab=15$

따라서 ab의 최솟값은 7이다.

답 ②

3 정규분포를 따르는 확률변수 X의 평균과 표준편차를 각각 m, σ라 하면 확률변수 $Z=\frac{X-m}{\sigma}$은 표준정규분포 $N(0,\ 1)$을 따르므로

$P(X\ge 10)=P\left(Z\ge\frac{10-m}{\sigma}\right)$

$=P(Z\ge -1)$

에서 $\frac{10-m}{\sigma}=-1$

$m-\sigma=10$ …… ㉠

$P(X\ge 25)=P\left(Z\ge\frac{25-m}{\sigma}\right)$

$=P\left(Z\le\frac{m-25}{\sigma}\right)$

$=P(Z\le -2)$

에서 $\frac{m-25}{\sigma}=-2$

$m+2\sigma=25$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$m=15$, $\sigma=5$

따라서

$E(X)+V(X)=m+\sigma^2$

$=15+5^2=40$

답 ④

4 이 공장에서 생산하는 테니스공 한 개의 무게를 확률변수 X라 하면 X는 정규분포 $N(57.6,\ 0.4^2)$을 따르고,

$Z=\dfrac{X-57.6}{0.4}$으로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

따라서 구하는 확률은

$\mathrm{P}(57\le X\le 58)$

$=\mathrm{P}\left(\dfrac{57-57.6}{0.4}\le Z\le \dfrac{58-57.6}{0.4}\right)$

$=\mathrm{P}(-1.5\le Z\le 1)$

$=\mathrm{P}(0\le Z\le 1.5)+\mathrm{P}(0\le Z\le 1)$

$=0.4332+0.3413$

$=0.7745$

답 ④

5 확률변수 X가 이항분포 $\mathrm{B}\left(720,\ \dfrac{1}{6}\right)$을 따르므로

$\mathrm{E}(X)=720\times\dfrac{1}{6}=120$

$\mathrm{V}(X)=720\times\dfrac{1}{6}\times\dfrac{5}{6}=100$

이때 720은 충분히 큰 수이므로 확률변수 X는 근사적으로 정규분포 $\mathrm{N}(120,\ 10^2)$을 따르고, $Z=\dfrac{X-120}{10}$으로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

$\mathrm{P}(X\le a)=\mathrm{P}\left(Z\le\dfrac{a-120}{10}\right)=0.9332$ …… ㉠

㉠에서 $\dfrac{a-120}{10}>0$이어야 하므로

$\mathrm{P}(X\le a)=\mathrm{P}\left(Z\le\dfrac{a-120}{10}\right)$

$=\mathrm{P}(Z\le 0)+\mathrm{P}\left(0\le Z\le\dfrac{a-120}{10}\right)$

$=0.5+\mathrm{P}\left(0\le Z\le\dfrac{a-120}{10}\right)$

$=0.9332$

$\mathrm{P}\left(0\le Z\le\dfrac{a-120}{10}\right)=0.4332$

주어진 표준정규분포표에서

$\mathrm{P}(0\le Z\le 1.5)=0.4332$이므로

$\dfrac{a-120}{10}=1.5$

$a-120=15$

따라서 $a=135$

답 ③

Level 2 기본 연습 본문 83~84쪽

1 ⑤	2 ④	3 ④	4 ④	5 ⑤
6 7	7 93	8 ③		

1 $0<k<\dfrac{4}{5}$이므로

$f(0)=\dfrac{|-5k|}{5}=k$

$f(4)=\dfrac{|4-5k|}{5}=\dfrac{4-5k}{5}$

이고 함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축 및 두 직선 $x=0$, $x=4$로 둘러싸인 부분의 넓이는 1이므로

$\dfrac{1}{2}\times 5k\times f(0)+\dfrac{1}{2}\times(4-5k)\times f(4)$

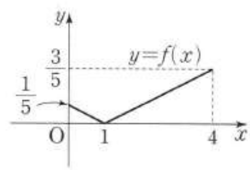
$=\dfrac{1}{2}\times 5k\times k+\dfrac{1}{2}\times(4-5k)\times\dfrac{4-5k}{5}$

$=5k^2-4k+\dfrac{8}{5}=1$

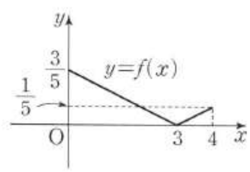
$25k^2-20k+3=0$

$(5k-1)(5k-3)=0$

$k=\dfrac{1}{5}$ 또는 $k=\dfrac{3}{5}$



[그림 1]



[그림 2]

(i) $k=\dfrac{1}{5}$일 때

$f(x)=\dfrac{|x-1|}{5}$이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 [그림 1]과 같고

$\mathrm{P}(0\le X\le 5k)=\mathrm{P}(0\le X\le 1)=\dfrac{1}{2}\times 1\times\dfrac{1}{5}=\dfrac{1}{10}$

(ii) $k=\dfrac{3}{5}$일 때

$f(x)=\dfrac{|x-3|}{5}$이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 [그림 2]와 같고

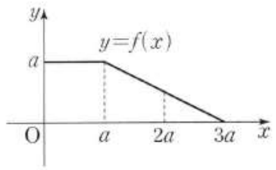
$\mathrm{P}(0\le X\le 5k)=\mathrm{P}(0\le X\le 3)=\dfrac{1}{2}\times 3\times\dfrac{3}{5}=\dfrac{9}{10}$

(i), (ii)에 의하여 $\mathrm{P}(0\le X\le 5k)$의 최댓값과 최솟값은 각각 $M=\dfrac{9}{10}$, $m=\dfrac{1}{10}$

따라서 $\dfrac{M}{m}=9$

답 ⑤

2 함수 $y=f(x)$의 그래프는 그림과 같다.



함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축, y축으로 둘러싸인 부분의 넓이는 1이므로

$a\times a+\frac{1}{2}\times 2a\times a=1$

$2a^2=1$에서 $a^2=\frac{1}{2}$

$\mathrm{P}\left(\frac{a}{3}\le X\le 2a\right)$

$=\mathrm{P}\left(\frac{a}{3}\le X\le a\right)+\mathrm{P}(a\le X\le 2a)$

$=\frac{2}{3}a\times a+\frac{1}{2}\times\left(a+\frac{a}{2}\right)\times a$

$=\left(\frac{2}{3}+\frac{3}{4}\right)a^2$

$=\left(\frac{2}{3}+\frac{3}{4}\right)\times\frac{1}{2}$

$=\frac{17}{24}$

따라서 $a^2+\mathrm{P}\left(\frac{a}{3}\le X\le 2a\right)=\frac{1}{2}+\frac{17}{24}=\frac{29}{24}$

답 ④

3 확률변수 X가 평균이 10인 정규분포를 따르므로
$\mathrm{P}(9\le X\le 10)=a$, $\mathrm{P}(11\le X\le 13)=b$, $\mathrm{P}(X\le 7)=c$
라 하면

$a+b+c$

$=\mathrm{P}(9\le X\le 10)+\mathrm{P}(11\le X\le 13)+\mathrm{P}(X\le 7)$

$=\mathrm{P}(9\le X\le 10)+\mathrm{P}(7\le X\le 9)+\mathrm{P}(X\le 7)$

$=\mathrm{P}(X\le 10)=0.5$ …… ㉠

한편, a, b, c가 이 순서대로 등차수열을 이루므로

$2b=a+c$ …… ㉡

㉠, ㉡에서

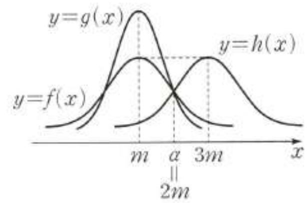
$b+(a+c)=3b=0.5$

$b=\frac{1}{6}$

따라서 $\mathrm{P}(7\le X\le 9)=\mathrm{P}(11\le X\le 13)=b=\frac{1}{6}$

답 ④

4 $\mathrm{E}(X_1)=m$, $\mathrm{E}(X_3)=3m$에서 $\mathrm{E}(X_1)<\mathrm{E}(X_3)$이고 $f(m)=h(3m)$이므로 곡선 $y=h(x)$는 곡선 $y=f(x)$를 x축의 방향으로 $2m$만큼 평행이동한 것이다. 이때 두 곡선 $y=f(x)$, $y=h(x)$는 각각 직선 $x=m$, $x=3m$에 대하여 대칭이므로 두 곡선 $y=f(x)$, $y=h(x)$는 직선 $x=\frac{m+3m}{2}$, 즉 $x=2m$에 대하여 대칭이고, 두 곡선 $y=f(x)$, $y=h(x)$가 만나는 점의 x좌표는 $2m$이다.
따라서 $f(2m)=h(2m)$
이때 $f(\alpha)=g(\alpha)=h(\alpha)$인 실수 α가 존재하므로 $\alpha=2m$, 즉 $f(2m)=g(2m)=h(2m)$이다.
또한 $\mathrm{E}(X_1)=\mathrm{E}(X_2)=m$이고 $f(m)<g(m)$이므로 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$는 모두 직선 $x=m$에 대하여 대칭이고, 곡선 $y=g(x)$는 곡선 $y=f(x)$보다 중앙 부분이 높다.
따라서 세 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$, $y=h(x)$의 개형은 그림과 같다.



두 곡선 $y=f(x)$, $y=h(x)$가 직선 $x=2m$에 대하여 대칭이므로

$\mathrm{P}(m\le X_1\le 2m)=\mathrm{P}(2m\le X_3\le 3m)$

이때 $8\mathrm{P}(X_3\le m)=\frac{4}{5}$에서

$\mathrm{P}(X_3\le m)=\frac{4}{5}\times\frac{1}{8}=\frac{1}{10}$

$\mathrm{P}(m\le X_1\le 2m)+\mathrm{P}(m\le X_2\le 2m)+\mathrm{P}(m\le X_3\le 2m)$

$=\frac{4}{5}$

이므로

$\mathrm{P}(m\le X_2\le \alpha)$

$=\mathrm{P}(m\le X_2\le 2m)$

$=\frac{4}{5}-\{\mathrm{P}(m\le X_1\le 2m)+\mathrm{P}(m\le X_3\le 2m)\}$

$=\frac{4}{5}-\{\mathrm{P}(2m\le X_3\le 3m)+\mathrm{P}(m\le X_3\le 2m)\}$

$=\frac{4}{5}-\mathrm{P}(m\le X_3\le 3m)$

$=\frac{4}{5}-\left\{\frac{1}{2}-\mathrm{P}(X_3\le m)\right\}$

$=\frac{4}{5}-\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{10}\right)=\frac{2}{5}$

답 ④

5 확률변수 X가 정규분포 $\mathrm{N}(50,\ (2\sigma)^2)$을 따르므로

$Z_1=\frac{X-50}{2\sigma}$으로 놓으면 확률변수 Z_1은 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따르고,

확률변수 Y가 정규분포 $\mathrm{N}(56,\ \sigma^2)$을 따르므로

$Z_2=\frac{Y-56}{\sigma}$으로 놓으면 확률변수 Z_2도 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

이때

$$\mathrm{P}(48\le X\le 56)=\mathrm{P}\left(\frac{48-50}{2\sigma}\le Z_1\le\frac{56-50}{2\sigma}\right)=\mathrm{P}\left(-\frac{1}{\sigma}\le Z_1\le\frac{3}{\sigma}\right)$$

$$\mathrm{P}(a\le Y\le a+4)=\mathrm{P}\left(\frac{a-56}{\sigma}\le Z_2\le\frac{a-52}{\sigma}\right)$$

이므로 $\mathrm{P}(48\le X\le 56)=\mathrm{P}(a\le Y\le a+4)$에서

$$\mathrm{P}\left(-\frac{1}{\sigma}\le Z_1\le\frac{3}{\sigma}\right)=\mathrm{P}\left(\frac{a-56}{\sigma}\le Z_2\le\frac{a-52}{\sigma}\right)$$

두 확률변수 $Z_1,\ Z_2$가 모두 표준정규분포를 따르므로

$-\frac{1}{\sigma}=\frac{a-56}{\sigma},\ \frac{3}{\sigma}=\frac{a-52}{\sigma}$

또는 $-\frac{1}{\sigma}=-\frac{a-52}{\sigma},\ \frac{3}{\sigma}=-\frac{a-56}{\sigma}$

$-\frac{1}{\sigma}=\frac{a-56}{\sigma},\ \frac{3}{\sigma}=\frac{a-52}{\sigma}$에서 $a=55$

$-\frac{1}{\sigma}=-\frac{a-52}{\sigma},\ \frac{3}{\sigma}=-\frac{a-56}{\sigma}$에서 $a=53$

따라서 a의 값은 53 또는 55이므로 모든 실수 a의 값의 합은

$53+55=108$

답 ⑤

6 이 비누 공방에서 만든 수제비누 한 개의 무게를 확률변수 X라 하고 수제비누 한 개의 무게의 평균을 m이라 하면 X는 정규분포 $\mathrm{N}(m,\ 5^2)$을 따르고, $Z=\frac{X-m}{5}$으로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

이때 $\mathrm{P}(|X-m|\ge a)\le 0.1616$이므로

$\mathrm{P}(X\ge m+a)+\mathrm{P}(X\le m-a)$

$=\mathrm{P}\left(Z\ge\frac{(m+a)-m}{5}\right)+\mathrm{P}\left(Z\le\frac{(m-a)-m}{5}\right)$

$=\mathrm{P}\left(Z\ge\frac{a}{5}\right)+\mathrm{P}\left(Z\le-\frac{a}{5}\right)$

$=2\mathrm{P}\left(Z\ge\frac{a}{5}\right)\le 0.1616$

$\mathrm{P}\left(Z\ge\frac{a}{5}\right)\le 0.0808$

이때 $\mathrm{P}(Z\ge 0)=0.5$이므로

$\mathrm{P}\left(0\le Z\le\frac{a}{5}\right)\ge 0.4192$

주어진 표준정규분포표에서 $\mathrm{P}(0\le Z\le 1.4)=0.4192$이므로

$\frac{a}{5}\ge 1.4,\ a\ge 7$

따라서 a의 최솟값은 7이다.

답 7

7 이 과수원에서 수확한 사과 한 개의 당도를 확률변수 X라 하면 X는 정규분포 $\mathrm{N}(12,\ 4^2)$을 따르고, $Z=\frac{X-12}{4}$로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

이 과수원에서 임의로 선택한 사과 한 개가 판매 가능한 상품일 사건을 A, 특상품일 사건을 B라 하면

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(A)&=\mathrm{P}(X\ge 9)=\mathrm{P}\left(Z\ge\frac{9-12}{4}\right)\\&=\mathrm{P}(Z\ge -0.75)\\&=\mathrm{P}(Z\le 0.75)\\&=0.5+\mathrm{P}(0\le Z\le 0.75)\\&=0.5+0.27=0.77\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(B)&=\mathrm{P}(X\ge 16)=\mathrm{P}\left(Z\ge\frac{16-12}{4}\right)\\&=\mathrm{P}(Z\ge 1)\\&=0.5-\mathrm{P}(0\le Z\le 1)\\&=0.5-0.34=0.16\end{aligned}$$

이고 $\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(B)$이다.

따라서 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(B|A)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}=\frac{\mathrm{P}(B)}{\mathrm{P}(A)}=\frac{0.16}{0.77}=\frac{16}{77}$$

이므로 $p=77,\ q=16$

즉, $p+q=77+16=93$

답 93

8 한 개의 주사위를 한 번 던질 때 5의 약수의 눈이 나올 확률은 $\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$

한 개의 주사위를 한 번 던지는 시행을 162번 반복했을 때 5의 약수의 눈이 나오는 횟수를 확률변수 Y라 하면 Y는 이항분포 $\mathrm{B}\left(162,\ \frac{1}{3}\right)$을 따르므로

$\mathrm{E}(Y)=162\times\frac{1}{3}=54$

$\mathrm{V}(Y)=162\times\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}=36$

이때 162는 충분히 큰 수이므로 확률변수 Y는 근사적으로 정규분포 $N(54,\ 6^2)$을 따르고, $Z=\frac{Y-54}{6}$로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $N(0,\ 1)$을 따른다.

한편,

$X=Y+2(162-Y)=324-Y$

이므로

$P(261\le X\le 282)$
$=P(261\le 324-Y\le 282)$
$=P(42\le Y\le 63)$
$=P\left(\frac{42-54}{6}\le Z\le \frac{63-54}{6}\right)$
$=P(-2\le Z\le 1.5)$
$=P(0\le Z\le 2)+P(0\le Z\le 1.5)$
$=0.4772+0.4332$
$=0.9104$

답 ③

다른 풀이

한 개의 주사위를 한 번 던지는 시행을 162번 반복했을 때 5의 약수의 눈이 나오지 않는 횟수를 확률변수 Y라 하면 Y는 이항분포 $B\left(162,\ \frac{2}{3}\right)$를 따르므로

$E(Y)=162\times\frac{2}{3}=108$

$V(Y)=162\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}=36$

이때 162는 충분히 큰 수이므로 확률변수 Y는 근사적으로 정규분포 $N(108,\ 6^2)$을 따르고, $Z=\frac{Y-108}{6}$로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $N(0,\ 1)$을 따른다.

한편,

$X=(162-Y)+2Y=162+Y$

이므로

$P(261\le X\le 282)$
$=P(261\le 162+Y\le 282)$
$=P(99\le Y\le 120)$
$=P\left(\frac{99-108}{6}\le Z\le \frac{120-108}{6}\right)$
$=P(-1.5\le Z\le 2)$
$=P(0\le Z\le 1.5)+P(0\le Z\le 2)$
$=0.4332+0.4772$
$=0.9104$

Level 3 실력 완성

본문 85쪽

1 ⑤ 2 ③ 3 ②

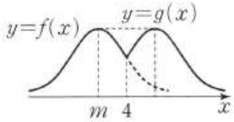
1 곡선 $y=f(8-x)$는 곡선 $y=f(x)$를 y축에 대하여 대칭이동한 후 x축의 방향으로 8만큼 평행이동한 것으로 임의의 양수 t에 대하여

$g(4-t)=f(4-t)$

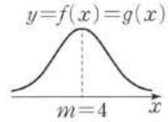
$g(4+t)=f(8-(4+t))=f(4-t)$

즉, $g(4-t)=g(4+t)$이므로 곡선 $y=g(x)$는 직선 $x=4$에 대하여 대칭이다.

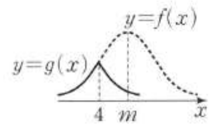
자연수 m의 값에 따라 곡선 $y=g(x)$의 개형은 그림과 같다.



$m<4$일 때



$m=4$일 때



$m>4$일 때

ㄱ. $m=4$이면 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$는 일치한다. 이때 확률변수 X는 정규분포 $N(4,\ 2^2)$을 따르고, $Z_1=\frac{X-4}{2}$로 놓으면 확률변수 Z_1은 표준정규분포 $N(0,\ 1)$을 따르므로 곡선 $y=g(x)$와 x축 및 두 직선 $x=4$, $x=6$으로 둘러싸인 부분의 넓이를 S_1이라 하면

$S_1=P(4\le X\le 6)$
$=P\left(\frac{4-4}{2}\le Z_1\le \frac{6-4}{2}\right)$
$=P(0\le Z_1\le 1)$
$=0.3413$ (참)

ㄴ. $m=5$일 때 곡선 $y=g(x)$와 x축 사이의 넓이를 S_2라 하면 S_2는 $x\le 4$에서 곡선 $y=f(x)$와 x축 사이의 넓이의 2배이다. 이때 확률변수 X는 정규분포 $N(5,\ 2^2)$을 따르고, $Z_2=\frac{X-5}{2}$로 놓으면 확률변수 Z_2는 표준정규분포 $N(0,\ 1)$을 따르므로

$S_2=2\mathrm{P}(X\le 4)$

$=2\mathrm{P}\left(Z_2\le\frac{4-5}{2}\right)$

$=2\mathrm{P}(Z_2\le -0.5)$

$=2\{0.5-\mathrm{P}(0\le Z_2\le 0.5)\}$

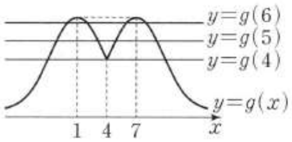
$=2\times(0.5-0.1915)$

$=0.6170$ (참)

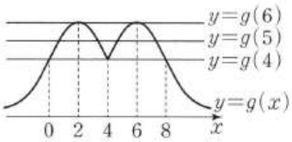
ㄷ. $m\ge 4$이면 $a_4+a_5+a_6=1+2+2=5$이므로

$a_4+a_5+a_6=9$이려면 $m<4$이어야 한다.

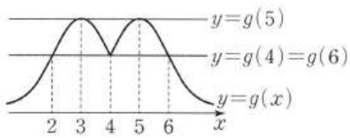
$m=1,\ 2,\ 3$일 때 곡선 $y=g(x)$는 그림과 같다.



$m=1$일 때



$m=2$일 때



$m=3$일 때

$m=1$이면

$a_4+a_5+a_6=3+4+4=11$

$m=2$이면

$a_4+a_5+a_6=3+4+2=9$

$m=3$이면

$a_4+a_5+a_6=3+2+3=8$

따라서 $a_4+a_5+a_6=9$이려면 $m=2$이어야 한다.

곡선 $y=g(x)$와 x축, y축 및 직선 $x=8$로 둘러싸인 부분의 넓이를 S_3이라 하면 S_3은 곡선 $y=f(x)$와 x축, y축 및 직선 $x=4$로 둘러싸인 부분의 넓이의 2배이다. 이때 확률변수 X는 정규분포 $\mathrm{N}(2,\ 2^2)$을 따르고,

$Z_3=\frac{X-2}{2}$로 놓으면 확률변수 Z_3은 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따르므로

$S_3=2\mathrm{P}(0\le X\le 4)$

$=2\mathrm{P}\left(\frac{0-2}{2}\le Z_3\le\frac{4-2}{2}\right)$

$=2\mathrm{P}(-1\le Z_3\le 1)$

$=4\mathrm{P}(0\le Z_3\le 1)$

$=4\times 0.3413$

$=1.3652$ (참)

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

답 ⑤

2 $Z=\frac{X-m}{\sigma}$으로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

$\mathrm{P}(-\sigma\le X\le 2m+\sigma)$

$=\mathrm{P}\left(\frac{-\sigma-m}{\sigma}\le Z\le\frac{2m+\sigma-m}{\sigma}\right)$

$=\mathrm{P}\left(-1-\frac{m}{\sigma}\le Z\le 1+\frac{m}{\sigma}\right)$

$=2\mathrm{P}\left(0\le Z\le 1+\frac{m}{\sigma}\right)$

조건 (나)에서

$2\mathrm{P}\left(0\le Z\le 1+\frac{m}{\sigma}\right)=0.9876$이므로

$\mathrm{P}\left(0\le Z\le 1+\frac{m}{\sigma}\right)=0.4938$

이때 주어진 표준정규분포표에서

$\mathrm{P}(0\le Z\le 2.5)=0.4938$이므로

$1+\frac{m}{\sigma}=2.5,\ \frac{m}{\sigma}=\frac{3}{2}$

$2m=3\sigma$

m과 σ가 모두 자연수이므로 m은 3의 배수, σ는 2의 배수이다.

자연수 n에 대하여 $m=3n,\ \sigma=2n$이라 하면

$m\times\sigma=3n\times 2n=6n^2$

조건 (가)에서 $6n^2<720$

$n^2<120$이므로 $n=10$, 즉 $m=30,\ \sigma=20$일 때 $m\times\sigma$의 값이 최대이다.

따라서 확률변수 X는 정규분포 $\mathrm{N}(30,\ 20^2)$을 따르고, 확률변수 $Z=\frac{X-30}{20}$은 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따르므로

$\mathrm{P}(X\ge 60)=\mathrm{P}\left(Z\ge\frac{60-30}{20}\right)$

$=\mathrm{P}(Z\ge 1.5)$

$=0.5-\mathrm{P}(0\le Z\le 1.5)$

$=0.5-0.4332$

$=0.0668$

답 ③

3 한 개의 주사위를 한 번 던져 3의 배수의 눈이 나오면 주사위를 더 던지지 않고, 3의 배수가 아닌 눈이 나오면 주사위를 다시 한 번만 더 던져 3의 배수의 눈이 나오는지를 확인하는 시행에서 3의 배수의 눈이 나올 확률은 주사위를 한 번 던져 3의 배수의 눈이 나오거나 주사위를 한 번 던져 3의 배수가 아닌 눈이 나오고 주사위를 다시 한 번 던져 3의 배수의 눈이 나올 확률이다.

즉, 주사위를 한 번 던져 3의 배수의 눈이 나올 확률이 $\frac{1}{3}$이므로 1회의 시행에서 3의 배수의 눈이 나올 확률은

$\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{5}{9}$

그러므로 확률변수 X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(1620,\ \frac{5}{9}\right)$를 따른다.

이때

$\mathrm{E}(X)=1620\times\frac{5}{9}=900$

$\mathrm{V}(X)=1620\times\frac{5}{9}\times\frac{4}{9}=400$

이고, 1620은 충분히 큰 수이므로 확률변수 X는 근사적으로 정규분포 $\mathrm{N}(900,\ 20^2)$을 따르고, $Z=\frac{X-900}{20}$으로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

따라서

$\mathrm{P}(880\le X\le 910)$

$=\mathrm{P}\left(\frac{880-900}{20}\le Z\le\frac{910-900}{20}\right)$

$=\mathrm{P}(-1\le Z\le 0.5)$

$=\mathrm{P}(-1\le Z\le 0)+\mathrm{P}(0\le Z\le 0.5)$

$=\mathrm{P}(0\le Z\le 1)+\mathrm{P}(0\le Z\le 0.5)$

$=0.3413+0.1915$

$=0.5328$

답 ②

07 통계적 추정

유제 본문 89~95쪽

1 ①	2 3	3 ⑤	4 ①	5 ①
6 8	7 344	8 ④		

1 이 모집단에서 임의추출한 크기가 3인 표본을 $(X_1,\ X_2,\ X_3)$이라 하면 $\overline{X}=2$인 경우는

$(0,\ 2,\ 4),\ (0,\ 4,\ 2),\ (2,\ 0,\ 4),\ (2,\ 4,\ 0),\ (4,\ 0,\ 2),\ (4,\ 2,\ 0),\ (2,\ 2,\ 2)$일 때이므로

$\mathrm{P}(\overline{X}=2)=6\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{6}+\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}$

$=\frac{1}{6}+\frac{1}{27}=\frac{11}{54}$

답 ①

2 $a,\ b,\ c$가 이 순서대로 등차수열을 이루므로

$2b=a+c$

확률변수 X가 갖는 모든 값에 대한 확률의 합은 1이므로

$a+b+c=(a+c)+b=3b=1$

$b=\frac{1}{3}$

이 모집단에서 임의추출한 크기가 2인 표본을 $(X_1,\ X_2)$라 하면 $\overline{X}=\frac{3}{2}$인 경우는 $(1,\ 2),\ (2,\ 1)$일 때이므로

$\mathrm{P}\left(\overline{X}=\frac{3}{2}\right)=\frac{1}{3}\times c+c\times\frac{1}{3}=\frac{2}{3}c=\frac{1}{18}$

$c=\frac{1}{12}$

$a=1-(b+c)=1-\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{12}\right)=\frac{7}{12}$

따라서

$\mathrm{E}(X)=0\times\frac{7}{12}+1\times\frac{1}{3}+2\times\frac{1}{12}=\frac{1}{2}$

이므로

$\mathrm{E}(6X)=6\mathrm{E}(X)=6\times\frac{1}{2}=3$

답 3

3 모평균이 6, 모표준편차가 $\sqrt{2}$이고 표본의 크기가 9이므로

$\mathrm{E}(\overline{X})=6,\ \mathrm{V}(\overline{X})=\frac{(\sqrt{2})^2}{9}=\frac{2}{9}$

$\mathrm{E}(3\overline{X}+k)+\mathrm{V}(3\overline{X}+k)=30$에서

$\{3\mathrm{E}(\overline{X})+k\}+3^2\mathrm{V}(\overline{X})$

$=3\times6+k+9\times\frac{2}{9}$

$=k+20=30$

따라서 $k=10$

답 ⑤

4 확률변수 X가 갖는 모든 값에 대한 확률의 합은 1이므로

$a+b+\frac{2}{5}=1$

$b=\frac{3}{5}-a$ …… ㉠

$\mathrm{E}(X)=\mathrm{E}(\overline{X})=\frac{1}{5}$이므로

$\mathrm{E}(X)=-1\times a+0\times b+1\times\frac{2}{5}$

$=-a+\frac{2}{5}=\frac{1}{5}$

$a=\frac{1}{5}$

$a=\frac{1}{5}$을 ㉠에 대입하면

$b=\frac{3}{5}-\frac{1}{5}=\frac{2}{5}$

한편,

$\mathrm{E}(X^2)=(-1)^2\times\frac{1}{5}+0^2\times\frac{2}{5}+1^2\times\frac{2}{5}=\frac{3}{5}$

$\mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2$

$=\frac{3}{5}-\left(\frac{1}{5}\right)^2=\frac{14}{25}$

$\sigma(X)=\sqrt{\mathrm{V}(X)}=\frac{\sqrt{14}}{5}$

이고 표본의 크기가 14이므로

$\sigma(\overline{X})=\frac{\sigma(X)}{\sqrt{14}}=\frac{\frac{\sqrt{14}}{5}}{\sqrt{14}}=\frac{1}{5}$

따라서

$\sigma(5\overline{X})=|5|\sigma(\overline{X})=5\times\frac{1}{5}=1$

답 ①

5 이 공장에서 생산하는 아이스크림 1개의 무게를 확률변수 X라 하면 X는 정규분포 $\mathrm{N}(150,\ 8^2)$을 따른다.

이때 표본의 크기가 16이므로

$\mathrm{E}(\overline{X})=\mathrm{E}(X)=150,\ \sigma(\overline{X})=\frac{\sigma(X)}{\sqrt{16}}=2$

따라서 확률변수 $\overline{X}$는 정규분포 $\mathrm{N}(150,\ 2^2)$을 따르고,

$Z=\frac{\overline{X}-150}{2}$으로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

$|\overline{X}-149|\le3$에서

$-3\le\overline{X}-149\le3$

$146\le\overline{X}\le152$

이므로

$\mathrm{P}(|\overline{X}-149|\le3)$

$=\mathrm{P}(146\le\overline{X}\le152)$

$=\mathrm{P}\left(\frac{146-150}{2}\le Z\le\frac{152-150}{2}\right)$

$=\mathrm{P}(-2\le Z\le1)$

$=\mathrm{P}(0\le Z\le2)+\mathrm{P}(0\le Z\le1)$

$=0.4772+0.3413$

$=0.8185$

답 ①

6 $\mathrm{E}(\overline{X})=m,\ \sigma(\overline{X})=\frac{\sigma}{\sqrt{9}}=\frac{\sigma}{3}$

이므로 확률변수 $\overline{X}$는 정규분포 $\mathrm{N}\left(m,\ \left(\frac{\sigma}{3}\right)^2\right)$을 따르고,

$\mathrm{E}(\overline{Y})=2m,\ \sigma(\overline{Y})=\frac{2\sigma}{\sqrt{4}}=\sigma$

이므로 확률변수 $\overline{Y}$는 정규분포 $\mathrm{N}(2m,\ \sigma^2)$을 따른다.

이때 $Z_1=\frac{\overline{X}-m}{\frac{\sigma}{3}},\ Z_2=\frac{\overline{Y}-2m}{\sigma}$으로 놓으면 두 확률변수 $Z_1,\ Z_2$는 모두 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

$\mathrm{P}(\overline{X}\le a)=\mathrm{P}\left(Z_1\le\frac{a-m}{\frac{\sigma}{3}}\right)=\mathrm{P}\left(Z_1\le\frac{3(a-m)}{\sigma}\right)$

$\mathrm{P}(\overline{Y}\ge a)=\mathrm{P}\left(Z_2\ge\frac{a-2m}{\sigma}\right)$

$\mathrm{P}(\overline{X}\le a)=\mathrm{P}(\overline{Y}\ge a)$이므로

$\mathrm{P}\left(Z_1\le\frac{3(a-m)}{\sigma}\right)=\mathrm{P}\left(Z_2\ge\frac{a-2m}{\sigma}\right)$

이때 두 확률변수 $Z_1,\ Z_2$는 모두 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따르므로

$\frac{3(a-m)}{\sigma}=-\frac{a-2m}{\sigma}$

$3(a-m)=-a+2m$

$4a=5m,\ \frac{m}{a}=\frac{4}{5}$

따라서 $10\times\frac{m}{a}=10\times\frac{4}{5}=8$

답 8

7 크기가 81인 표본으로부터 구한 표본평균의 값을 $\bar{x}$라 하자. 모표준편차가 6이므로 모평균 m에 대한 신뢰도 99 %의 신뢰구간은

$\bar{x}-2.58\times\frac{6}{\sqrt{81}}\le m\le\bar{x}+2.58\times\frac{6}{\sqrt{81}}$

$\bar{x}-2.58\times\frac{2}{3}\le m\le\bar{x}+2.58\times\frac{2}{3}$

$\bar{x}-1.72\le m\le\bar{x}+1.72$

따라서

$a=\bar{x}-1.72,\ b=\bar{x}+1.72$

이므로

$100(b-a)=100\times3.44=344$

답 344

8 표본평균이 $\bar{x}=250$, 표본표준편차가 $s=40$이고 표본의 크기가 400으로 충분히 크므로 모평균 m에 대한 신뢰도 95 %의 신뢰구간은

$250-1.96\times\frac{40}{\sqrt{400}}\le m\le250+1.96\times\frac{40}{\sqrt{400}}$

$250-1.96\times2\le m\le250+1.96\times2$

따라서 $246.08\le m\le253.92$

답 ④

Level 1 기초 연습

본문 96쪽

1 ⑤ **2** ③ **3** 16 **4** ③ **5** 900

1 확률변수 X가 갖는 모든 값에 대한 확률의 합은 1이므로

$\frac{1}{4}+a+\frac{1}{2}=1,\ a=\frac{1}{4}$

이 모집단에서 임의추출한 크기가 2인 표본을 $(X_1,\ X_2)$라 하자.

표본평균 $\bar{X}$가 갖는 값은 1, 2, 3, 4, 5이고 $\bar{X}=1$인 경우는 (1, 1)일 때이므로

$$\begin{aligned}P(\bar{X}\ge8a)&=P(\bar{X}\ge2)\\&=1-P(\bar{X}=1)\\&=1-\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}\\&=\frac{15}{16}\end{aligned}$$

답 ⑤

2 $E(\bar{X})=100,\ \sigma(\bar{X})=\frac{5}{\sqrt{n}}$

이므로 $E(\bar{X})-\sigma(\bar{X})\ge99$에서

$100-\frac{5}{\sqrt{n}}\ge99$

$\frac{5}{\sqrt{n}}\le1$

$\sqrt{n}\ge5$

$n\ge25$

따라서 자연수 n의 최솟값은 25이다.

답 ③

3 $E(\bar{X})=40,\ \sigma(\bar{X})=\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

이므로 확률변수 $\bar{X}$는 정규분포 $N\left(40,\ \left(\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)^2\right)$을 따르고,

$Z=\frac{\bar{X}-40}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$으로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $N(0,\ 1)$을 따른다.

그러므로 $2\bar{X}-80=\frac{\bar{X}-40}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$에서

$2(\bar{X}-40)=\frac{\sqrt{n}}{\sigma}(\bar{X}-40)$

$\frac{\sqrt{n}}{\sigma}=2,\ n=4\sigma^2$

이고 $n+\sigma^2=10$에서

$n+\sigma^2=4\sigma^2+\sigma^2=5\sigma^2=10$

$\sigma^2=2$

따라서 $n=10-\sigma^2=8$이므로

$n\times\sigma^2=16$

답 16

4 확률변수 X가 정규분포 $N(33,\ 5^2)$을 따르므로

$Z_1=\frac{X-33}{5}$으로 놓으면 확률변수 Z_1은 표준정규분포 $N(0,\ 1)$을 따른다.

또한

$E(\bar{X})=33,\ \sigma(\bar{X})=\frac{\sigma(X)}{\sqrt{4}}=\frac{5}{2}$

이므로 확률변수 $\bar{X}$는 정규분포 $N\left(33,\ \left(\frac{5}{2}\right)^2\right)$을 따르고,

$Z_2=\frac{\bar{X}-33}{\frac{5}{2}}$으로 놓으면 확률변수 Z_2는 표준정규분포 $N(0,\ 1)$을 따른다.

따라서

$\mathrm{P}(X\le 34)+\mathrm{P}(\overline{X}\le 34)$

$=\mathrm{P}\left(Z_1\le \dfrac{34-33}{5}\right)+\mathrm{P}\left(Z_2\le \dfrac{34-33}{\frac{5}{2}}\right)$

$=\mathrm{P}(Z_1\le 0.2)+\mathrm{P}(Z_2\le 0.4)$

$=\{0.5+\mathrm{P}(0\le Z_1\le 0.2)\}+\{0.5+\mathrm{P}(0\le Z_2\le 0.4)\}$

$=(0.5+0.0793)+(0.5+0.1554)$

$=1.2347$

답 ③

5 표본평균이 $\overline{x}$, 모표준편차가 $\sigma=10$, 표본의 크기가 n이므로 모평균 m에 대한 신뢰도 99 %의 신뢰구간은

$\overline{x}-2.58\times\dfrac{10}{\sqrt{n}}\le m\le \overline{x}+2.58\times\dfrac{10}{\sqrt{n}}$

즉, $a=\overline{x}-2.58\times\dfrac{10}{\sqrt{n}}$, $b=\overline{x}+2.58\times\dfrac{10}{\sqrt{n}}$

이때 $b-a=1.72$이므로

$2\times 2.58\times\dfrac{10}{\sqrt{n}}=1.72$

$\sqrt{n}=30$

따라서 $n=900$

답 900

Level 2 기본 연습

본문 97~98쪽

1 ⑤	2 120	3 ④	4 34	5 32
6 ⑤	7 ②	8 ③		

1 확률변수 X가 갖는 모든 값에 대한 확률의 합은 1이므로

$a+b+a=1$

$b=1-2a$ …… ㉠

이 모집단에서 임의추출한 크기가 2인 표본을 (X_1, X_2)라 하면 $\overline{X_1}=2$인 경우는

$(1, 3), (2, 2), (3, 1)$일 때이므로

$\mathrm{P}(\overline{X_1}=2)=a\times a+b\times b+a\times a$

$=2a^2+b^2=\dfrac{3}{8}$ …… ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면

$2a^2+(1-2a)^2=\dfrac{3}{8}$

$48a^2-32a+5=0$

$(12a-5)(4a-1)=0$

$a=\dfrac{5}{12}$ 또는 $a=\dfrac{1}{4}$

이때 $a+b=1-a>\dfrac{2}{3}$, 즉 $a<\dfrac{1}{3}$이므로 $a=\dfrac{1}{4}$

$b=1-2a=1-2\times\dfrac{1}{4}=\dfrac{1}{2}$

한편, 이 모집단에서 임의추출한 크기가 4인 표본을 (X_3, X_4, X_5, X_6)이라 하면 표본평균 $\overline{X_2}$가 갖는 값은 $\dfrac{n}{4}$ $(n=4, 5, 6, \cdots, 12)$이다.

$\overline{X_2}=1$인 경우는 $(1, 1, 1, 1)$일 때이고,

$\overline{X_2}=\dfrac{5}{4}$인 경우는 $(1, 1, 1, 2), (1, 1, 2, 1), (1, 2, 1, 1), (2, 1, 1, 1)$일 때이므로

$\mathrm{P}\left(\overline{X_2}\le\dfrac{5}{4}\right)=\mathrm{P}(\overline{X_2}=1)+\mathrm{P}\left(\overline{X_2}=\dfrac{5}{4}\right)$

$=a^4+4a^3b$

$=\dfrac{1}{4^4}+4\times\dfrac{1}{4^3}\times\dfrac{1}{2}$

$=\dfrac{9}{256}$

답 ⑤

2 표본의 크기가 n이므로 $\mathrm{V}(\overline{X})=\dfrac{\mathrm{V}(X)}{n}$

또한 $\mathrm{E}(\overline{X})=\mathrm{E}(X)$이므로

$\mathrm{E}(X)-\mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(\overline{X})+\mathrm{V}(n\overline{X})-20$에서

$-\mathrm{V}(X)=n^2\mathrm{V}(\overline{X})-20$

$-\mathrm{V}(X)=n^2\times\dfrac{\mathrm{V}(X)}{n}-20$

$(n+1)\mathrm{V}(X)=20$

이때 n과 $\mathrm{V}(X)$가 모두 2 이상인 자연수이므로 가능한 n, $\mathrm{V}(X)$의 모든 순서쌍 $(n, \mathrm{V}(X))$는

$(3, 5), (4, 4), (9, 2)$

한편,

$\mathrm{V}(nX)+\mathrm{V}(n\overline{X})=n^2\mathrm{V}(X)+n^2\mathrm{V}(\overline{X})$

$=n^2\mathrm{V}(X)+n^2\times\dfrac{\mathrm{V}(X)}{n}$

$=n(n+1)\mathrm{V}(X)=20n$

이므로 $\mathrm{V}(nX)+\mathrm{V}(n\overline{X})$의 값은

$n=3$일 때 $\mathrm{V}(3X)+\mathrm{V}(3\overline{X})=20\times 3=60$

$n=4$일 때 $\mathrm{V}(4X)+\mathrm{V}(4\overline{X})=20\times 4=80$

$n=9$일 때 $\mathrm{V}(9X)+\mathrm{V}(9\overline{X})=20\times 9=180$

따라서 $M=180$, $m=60$이므로

$M-m=180-60=120$

답 120

3 확률변수 X가 갖는 모든 값에 대한 확률의 합은 1이므로

$a+b+\frac{1}{2}=1$

$a+b=\frac{1}{2}$ ...... ㉠

$\mathrm{E}(X)=2$이므로

$\mathrm{E}(X)=-2\times a+1\times b+4\times\frac{1}{2}=2$

$b=2a$ ...... ㉡

㉠에 ㉡을 대입하여 풀면 $a=\frac{1}{6}$, $b=\frac{1}{3}$이므로

$\mathrm{E}(X^2)=(-2)^2\times\frac{1}{6}+1^2\times\frac{1}{3}+4^2\times\frac{1}{2}=9$

이고

$\mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2=9-2^2=5$

이때 표본의 크기가 n이므로

$\mathrm{V}(\overline{X}_n)=\frac{\mathrm{V}(X)}{n}=\frac{5}{n}$

따라서

$\sum_{n=2}^{10}\frac{1}{\mathrm{V}(\overline{X}_n)}=\frac{1}{5}\sum_{n=2}^{10}n=\frac{1}{5}\times\frac{9(2+10)}{2}=\frac{54}{5}$

답 ④

4 $\mathrm{E}(\overline{X})=m$, $\sigma(\overline{X})=\frac{6}{\sqrt{n}}$이므로 확률변수 $\overline{X}$는 정규분포 $\mathrm{N}\left(m, \left(\frac{6}{\sqrt{n}}\right)^2\right)$을 따른다.

이때 확률변수 X의 확률밀도함수 $f(x)$가 $x=30$에서 최댓값을 가지므로 $m=30$이다.

$Z=\frac{\overline{X}-30}{\frac{6}{\sqrt{n}}}$으로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0, 1)$을 따르므로

$\mathrm{P}(\overline{X}\ge m+3)=\mathrm{P}(\overline{X}\ge 33)$

$=\mathrm{P}\left(Z\ge\frac{33-30}{\frac{6}{\sqrt{n}}}\right)$

$=\mathrm{P}\left(Z\ge\frac{\sqrt{n}}{2}\right)=0.1587$

$\mathrm{P}\left(0\le Z\le\frac{\sqrt{n}}{2}\right)=0.5-\mathrm{P}\left(Z\ge\frac{\sqrt{n}}{2}\right)$

$=0.5-0.1587=0.3413$

주어진 표준정규분포표에서 $\mathrm{P}(0\le Z\le 1)=0.3413$이므로

$\frac{\sqrt{n}}{2}=1$, $n=4$

따라서 $m+n=30+4=34$

답 34

5 $\mathrm{E}(\overline{X})=m$, $\sigma(\overline{X})=\frac{\sigma}{5}$

이므로 확률변수 $\overline{X}$는 정규분포 $\mathrm{N}\left(m, \left(\frac{\sigma}{5}\right)^2\right)$을 따르고,

$\mathrm{E}(\overline{Y})=\frac{m}{3}$, $\sigma(\overline{Y})=\frac{\sigma}{5}$

이므로 확률변수 $\overline{Y}$는 정규분포 $\mathrm{N}\left(\frac{m}{3}, \left(\frac{\sigma}{5}\right)^2\right)$을 따른다.

이때 $Z_1=\frac{\overline{X}-m}{\frac{\sigma}{5}}$, $Z_2=\frac{\overline{Y}-\frac{m}{3}}{\frac{\sigma}{5}}$으로 놓으면

두 확률변수 Z_1, Z_2는 모두 표준정규분포 $\mathrm{N}(0, 1)$을 따른다.

$\mathrm{P}(\overline{X}\ge 20)=\mathrm{P}(\overline{Y}\le 20)$이므로

$\mathrm{P}\left(Z_1\ge\frac{20-m}{\frac{\sigma}{5}}\right)=\mathrm{P}\left(Z_2\le\frac{20-\frac{m}{3}}{\frac{\sigma}{5}}\right)$

$\mathrm{P}\left(Z_1\ge\frac{5}{\sigma}(20-m)\right)=\mathrm{P}\left(Z_2\le\frac{5}{\sigma}\left(20-\frac{m}{3}\right)\right)$에서

$\frac{5}{\sigma}(20-m)=-\frac{5}{\sigma}\left(20-\frac{m}{3}\right)$

$20-m=-\left(20-\frac{m}{3}\right)$

$m=30$

또한 $\mathrm{P}(\overline{X}\le m+\sigma)=\mathrm{P}(\overline{Y}\le 12)$이므로

$\mathrm{P}\left(Z_1\le\frac{(m+\sigma)-m}{\frac{\sigma}{5}}\right)=\mathrm{P}\left(Z_2\le\frac{12-\frac{m}{3}}{\frac{\sigma}{5}}\right)$

$\mathrm{P}(Z_1\le 5)=\mathrm{P}\left(Z_2\le\frac{5}{\sigma}\left(12-\frac{30}{3}\right)\right)$에서

$\frac{10}{\sigma}=5$

$\sigma=2$

따라서 $m+\sigma=30+2=32$

답 32

다른 풀이

m의 값을 다음과 같이 구할 수도 있다.

$\sigma(\overline{X})=\sigma(\overline{Y})$이므로 두 확률변수 $\overline{X}$, $\overline{Y}$의 확률밀도함수를 각각 $f(x)$, $g(x)$라 하면 곡선 $y=f(x)$를 x축의 방향으로 평행이동하면 곡선 $y=g(x)$와 일치한다.

이때 $\mathrm{P}(\overline{X}\ge 20)=\mathrm{P}(\overline{Y}\le 20)$이므로 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$가 만나는 점의 x좌표는 20이고 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$는 직선 $x=20$에 대하여 대칭이다.

따라서 $\frac{1}{2}\left(m+\frac{m}{3}\right)=20$이므로

$m=30$

6 A제품 1개의 무게를 확률변수 X라 하고, 확률변수 X가 정규분포 $\mathrm{N}(m,\ \sigma^2)$을 따른다고 하면 구하는 확률은 $\mathrm{P}(X\le 100)$이다.

임의추출한 크기가 9인 표본의 표본평균을 $\overline{X}$라 하면

$\mathrm{E}(\overline{X})=m,\ \sigma(\overline{X})=\dfrac{\sigma(X)}{\sqrt{9}}=\dfrac{\sigma}{3}$

이므로 확률변수 $\overline{X}$는 정규분포 $\mathrm{N}\left(m,\ \left(\dfrac{\sigma}{3}\right)^2\right)$을 따르고,

$Z_1=\dfrac{\overline{X}-m}{\frac{\sigma}{3}}$으로 놓으면 확률변수 Z_1은 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

$\mathrm{P}(9\overline{X}\ge 900)=\mathrm{P}(\overline{X}\ge 100)=0.9332$에서

$\mathrm{P}\left(Z_1\ge \dfrac{100-m}{\frac{\sigma}{3}}\right)=0.9332$

$\mathrm{P}\left(Z_1\ge \dfrac{3}{\sigma}(100-m)\right)=0.9332$

$\mathrm{P}\left(\dfrac{3}{\sigma}(100-m)\le Z_1\le 0\right)+0.5=0.9332$

$\mathrm{P}\left(\dfrac{3}{\sigma}(100-m)\le Z_1\le 0\right)=0.4332$

주어진 표준정규분포표에서 $\mathrm{P}(0\le Z\le 1.5)=0.4332$이므로

$\dfrac{3}{\sigma}(100-m)=-1.5$

$\dfrac{100-m}{\sigma}=-0.5$

이때 $Z_2=\dfrac{X-m}{\sigma}$으로 놓으면 확률변수 Z_2는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따르므로

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(X\le 100)&=\mathrm{P}\left(Z_2\le \dfrac{100-m}{\sigma}\right)\\&=\mathrm{P}(Z_2\le -0.5)\\&=\mathrm{P}(Z_2\ge 0.5)\\&=0.5-\mathrm{P}(0\le Z_2\le 0.5)\\&=0.5-0.1915\\&=0.3085\end{aligned}$$

답 ⑤

7 표본평균이 $\overline{x_1}$, 모표준편차가 $\sigma=4$, 표본의 크기가 25이므로 모평균 m에 대한 신뢰도 95 %의 신뢰구간은

$\overline{x_1}-1.96\times\dfrac{4}{\sqrt{25}}\le m\le \overline{x_1}+1.96\times\dfrac{4}{\sqrt{25}}$

$\overline{x_1}-1.96\times\dfrac{4}{5}\le m\le \overline{x_1}+1.96\times\dfrac{4}{5}$

즉, $a=\overline{x_1}-1.96\times\dfrac{4}{5}$, $b=\overline{x_1}+1.96\times\dfrac{4}{5}$

이때 $a+b=70$이므로

$2\overline{x_1}=70$, $\overline{x_1}=35$

따라서 $a=35-1.96\times\dfrac{4}{5}$, $b=35+1.96\times\dfrac{4}{5}$

$\overline{x_2}=72-\overline{x_1}=72-35=37$

한편, 표본평균이 $\overline{x_2}=37$, 모표준편차가 $\sigma=4$, 표본의 크기가 400이므로 모평균 m에 대한 신뢰도 95%의 신뢰구간은

$37-1.96\times\dfrac{4}{\sqrt{400}}\le m\le 37+1.96\times\dfrac{4}{\sqrt{400}}$

$37-1.96\times\dfrac{1}{5}\le m\le 37+1.96\times\dfrac{1}{5}$

즉, $c=37-1.96\times\dfrac{1}{5}$, $d=37+1.96\times\dfrac{1}{5}$

따라서

$$\begin{aligned}d-a&=\left(37+1.96\times\dfrac{1}{5}\right)-\left(35-1.96\times\dfrac{4}{5}\right)\\&=2+1.96=3.96\end{aligned}$$

답 ②

8 $\sigma(2.58X-2.58)=10$에서

$|2.58|\sigma(X)=10$, $\sigma(X)=\dfrac{10}{2.58}$

이 모집단에서 임의추출한 크기가 n인 표본평균의 값을 $\overline{x}$라 하면 모평균 m에 대한 신뢰도 99 %의 신뢰구간은

$\overline{x}-2.58\times\dfrac{\frac{10}{2.58}}{\sqrt{n}}\le m\le \overline{x}+2.58\times\dfrac{\frac{10}{2.58}}{\sqrt{n}}$

$\overline{x}-\dfrac{10}{\sqrt{n}}\le m\le \overline{x}+\dfrac{10}{\sqrt{n}}$

이므로

$f(n)=b-a=2\times\dfrac{10}{\sqrt{n}}=\dfrac{20}{\sqrt{n}}$

부등식 $f(n)\le k$에서

$\dfrac{20}{\sqrt{n}}\le k$

$\sqrt{n}\ge \dfrac{20}{k}$

$n\ge \dfrac{400}{k^2}$

따라서

$k=4$일 때, $n\ge \dfrac{400}{4^2}=25$에서 $a_4=25$

$k=8$일 때, $n\ge \dfrac{400}{8^2}=\dfrac{25}{4}$에서 $a_8=7$

이므로

$a_4+a_8=32$

답 ③

Level 3 실력 완성

본문 99쪽

1 ① 2 ⑤ 3 ③

1 한 번의 시행에서 바닥과 닿은 면에 적힌 숫자가 1인 횟수를 확률변수 Y라 하고, 바닥과 닿은 면에 적힌 숫자가 1일 확률을 p라 하면 확률변수 Y는 이항분포 $\mathrm{B}(3, p)$를 따른다.

$\mathrm{E}(Y)=\frac{1}{2}$이므로

$3p=\frac{1}{2}$에서 $p=\frac{1}{6}$

즉, 정육면체의 오직 한 면에 숫자 1이 적혀 있다.

한편, n개의 면에 숫자 2가 적혀 있다고 하면 $(5-n)$개의 면에 숫자 3이 적혀 있다.

바닥과 닿은 면에 적힌 숫자를 확률변수 X라 하면

$\mathrm{E}(X)=\mathrm{E}(\overline{X})=2$

이므로

$1\times\frac{1}{6}+2\times\frac{n}{6}+3\times\frac{5-n}{6}=2$

$\frac{16-n}{6}=2$에서 $n=4$이므로

확률변수 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	1	2	3	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{6}$	1

이때 바닥과 닿은 면에 적힌 수를 (X_1, X_2, X_3)이라 하면 $\overline{X}=2$인 경우는

$(1, 2, 3), (1, 3, 2), (2, 1, 3), (2, 3, 1), (3, 1, 2), (3, 2, 1), (2, 2, 2)$

일 때이므로

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(\overline{X}=2)&=6\times\frac{1}{6}\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{6}+\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}\\&=\frac{1}{9}+\frac{8}{27}\\&=\frac{11}{27}\end{aligned}$$

답 ①

2 $\mathrm{E}(\overline{X})=m$, $\sigma(\overline{X})=\frac{\sigma(X)}{\sqrt{n}}=\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

이므로 확률변수 $\overline{X}$는 정규분포 $\mathrm{N}\left(m, \left(\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)^2\right)$을 따른다.

ㄱ. $m=1$이면 $\mathrm{E}(X)=\mathrm{E}(\overline{X})=1$이므로

$$\begin{aligned}&\mathrm{E}(2X)+\mathrm{E}(\overline{X}+2)\\&=2\mathrm{E}(X)+\{\mathrm{E}(\overline{X})+2\}\\&=2\times1+(1+2)\\&=5\ (\text{참})\end{aligned}$$

ㄴ. $3\mathrm{E}(X^2)-3\mathrm{E}(\overline{X}^2)=2\sigma^2$에서

$\mathrm{E}(X^2)-\mathrm{E}(\overline{X}^2)=\frac{2}{3}\sigma^2$

이때

$\mathrm{E}(X^2)=\{\mathrm{E}(X)\}^2+\mathrm{V}(X)=m^2+\sigma^2$

$\mathrm{E}(\overline{X}^2)=\{\mathrm{E}(\overline{X})\}^2+\mathrm{V}(\overline{X})=m^2+\frac{\sigma^2}{n}$

이므로

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(X^2)-\mathrm{E}(\overline{X}^2)&=(m^2+\sigma^2)-\left(m^2+\frac{\sigma^2}{n}\right)\\&=\frac{n-1}{n}\sigma^2=\frac{2}{3}\sigma^2\end{aligned}$$

$\frac{n-1}{n}=\frac{2}{3}$

$n=3$

따라서 $\frac{\sigma(X)}{\sigma(\overline{X})}=\frac{\sigma}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}=\sqrt{n}=\sqrt{3}$ (참)

ㄷ. $\mathrm{V}(X)+\mathrm{V}(\overline{X})=\sigma^2+\frac{\sigma^2}{n}=\frac{n+1}{n}\sigma^2$

$\frac{\mathrm{V}(X)+\mathrm{V}(\overline{X})}{\sigma^2}=\frac{n+1}{n}$

이므로

$$\begin{aligned}&\sum_{n=3}^{47}\log_2\frac{\mathrm{V}(X)+\mathrm{V}(\overline{X})}{\sigma^2}\\&=\sum_{n=3}^{47}\log_2\frac{n+1}{n}\\&=\log_2\frac{4}{3}+\log_2\frac{5}{4}+\log_2\frac{6}{5}+\cdots+\log_2\frac{48}{47}\\&=\log_2\left(\frac{4}{3}\times\frac{5}{4}\times\frac{6}{5}\times\cdots\times\frac{48}{47}\right)\\&=\log_2 16\\&=\log_2 2^4\\&=4\ (\text{참})\end{aligned}$$

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

답 ⑤

3 이 택시 호출 앱을 이용하여 택시를 호출한 고객 중에서 임의추출한 n명의 대기 시간의 표본평균의 값이 9이므로 모평균 m에 대한 신뢰도 95 %의 신뢰구간은

$9-1.96\times\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\le m\le 9+1.96\times\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

즉, $a=9-1.96\times\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$, $b=9+1.96\times\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

또한 다시 임의추출한 n명의 대기 시간의 표본평균이 11.27이므로 모평균 m에 대한 신뢰도 99 %의 신뢰구간은

$11.27-2.58\times\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\le m\le 11.27+2.58\times\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

즉, $b=11.27-2.58\times\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$, $c=11.27+2.58\times\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

그러므로

$b=9+1.96\times\frac{\sigma}{\sqrt{n}}=11.27-2.58\times\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

$(1.96+2.58)\times\frac{\sigma}{\sqrt{n}}=11.27-9$

$4.54\times\frac{\sigma}{\sqrt{n}}=2.27$

$\frac{\sigma}{\sqrt{n}}=\frac{1}{2}$

따라서

$a=9-1.96\times\frac{1}{2}=8.02$

$c=11.27+2.58\times\frac{1}{2}=12.56$

이므로

$a+c=20.58$

답 ③

MEMO