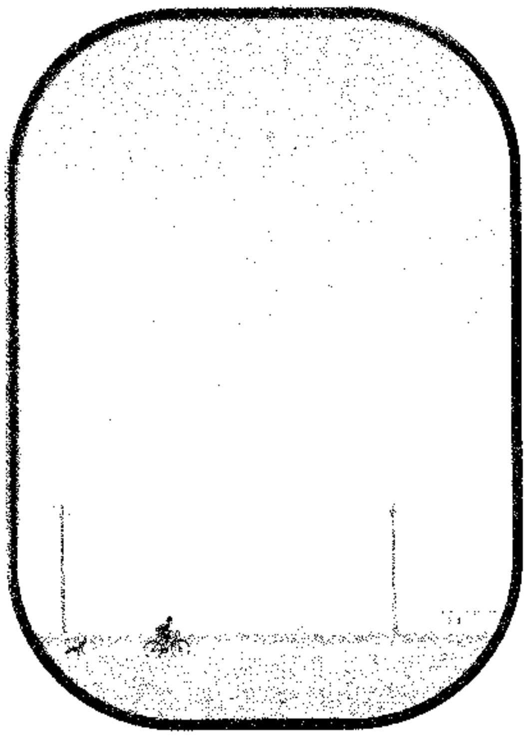
수능완성



수학영역 | **수학 Ⅰ·수학 Ⅱ·기하**

정답과 풀이

01 지수함수와 로그함수

정답 본문 6~15쪽

필수 유형 ❶ ①	01 ④	02 ③	03 ④
	04 5		
필수 유형 ❷ ①	05 ①	06 ④	07 16
	08 48		
필수 유형 ❸ 2	09 ①	10 ②	11 5
	12 ③		
필수 유형 ❹ ①	13 ①	14 ④	15 37
필수 유형 ❺ ②	16 ②	17 8	18 ⑤
필수 유형 ❻ ⑤	19 ③	20 ④	21 ③
필수 유형 ❼ ③	22 ③	23 ②	24 7
필수 유형 ❽ 15	25 4	26 ①	27 6
필수 유형 ❾ 192	28 ⑤	29 ①	30 22
필수 유형 ❿ ④	31 ①	32 ②	33 23

필수 유형 ❶

$-n^2+9n-18=-(n^2-9n+18)=-(n-3)(n-6)$이므로

$-n^2+9n-18$의 n제곱근 중에서 음의 실수는

$-n^2+9n-18<0$일 때, 홀수 n에 대하여 $\sqrt[n]{-n^2+9n-18}$이고

$-n^2+9n-18>0$일 때, 짝수 n에 대하여 $-\sqrt[n]{-n^2+9n-18}$이다.

(i) $-n^2+9n-18<0$일 때

$-(n-3)(n-6)<0$에서 $(n-3)(n-6)>0$이므로

$n<3$ 또는 $n>6$

즉, $2\le n<3$ 또는 $6<n\le 11$을 만족시키는 홀수는 7, 9, 11이다.

(ii) $-n^2+9n-18>0$일 때

$-(n-3)(n-6)>0$에서 $(n-3)(n-6)<0$이므로 $3<n<6$

즉, 이를 만족시키는 짝수는 4이다.

(i), (ii)에 의하여 조건을 만족시키는 모든 n의 값의 합은

$4+7+9+11=31$

답 ①

01

$(\sqrt[3]{5})^3=5$, $\sqrt[3]{27}\times\sqrt[4]{16}=\sqrt[3]{3^3}\times\sqrt[4]{2^4}=3\times2=6$,

$\sqrt[3]{\sqrt{64}}=\sqrt[6]{64}=\sqrt[6]{2^6}=2$이므로

$(\sqrt[3]{5})^3+\sqrt[3]{27}\times\sqrt[4]{16}-\sqrt[3]{\sqrt{64}}=5+6-2=9$

답 ④

02

$a>0$, $b>0$일 때, 지수법칙에 의하여 $(ab)^{12}=a^{12}b^{12}$

$a^3=\sqrt[4]{5}$이므로 $a^{12}=(a^3)^4=(\sqrt[4]{5})^4=5$

$b^4=\sqrt[3]{3}$이므로 $b^{12}=(b^4)^3=(\sqrt[3]{3})^3=3$

따라서 $(ab)^{12}=a^{12}b^{12}=5\times3=15$

답 ③

03

m^2-4m-5의 네제곱근 중 실수인 것이 존재하지 않으려면

$m^2-4m-5<0$이어야 한다.

$m^2-4m-5<0$에서 $(m+1)(m-5)<0$이므로

$-1<m<5$

따라서 조건을 만족시키는 자연수 m의 최댓값은 4이다.

답 ④

04

$x^2-65x+64=0$에서 $(x-1)(x-64)=0$

$x=1$ 또는 $x=64$이므로 $A=\{1, 64\}$

또한 $x^2-7x+10<0$에서 $(x-2)(x-5)<0$

$2<x<5$이므로 부등식 $x^2-7x+10<0$을 만족시키는 자연수 x의 값은 3, 4이다. 즉, $B=\{3, 4\}$

(i) $a=1$, $n=3$인 경우

$x^3=1$에서 $x^3-1=0$

$(x-1)(x^2+x+1)=0$

$x=1$ 또는 $x=\frac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}$이므로 1의 세제곱근 중 실수인 것의 개수는 1이다.

(ii) $a=1$, $n=4$인 경우

$x^4=1$에서 $x^4-1=0$

$(x^2-1)(x^2+1)=0$

$x=\pm1$ 또는 $x=\pm i$이므로 1의 네제곱근 중 실수인 것의 개수는 2이다.

(iii) $a=64$, $n=3$인 경우

$x^3=64$에서 $x^3-64=0$

$(x-4)(x^2+4x+16)=0$

$x=4$ 또는 $x=-2\pm2\sqrt{3}i$이므로 64의 세제곱근 중 실수인 것의 개수는 1이다.

(iv) $a=64$, $n=4$인 경우

$x^4=64$에서 $x^4-64=0$

$(x^2-8)(x^2+8)=0$

$x=\pm2\sqrt{2}$ 또는 $x=\pm2\sqrt{2}i$이므로 64의 네제곱근 중 실수인 것의 개수는 2이다.

(i)~(iv)에서 1은 1의 세제곱근이면서 동시에 1의 네제곱근이므로 집합 C의 원소 중에서 실수인 것의 개수는 $1+2+1+2-1=5$이다.

답 5

필수 유형 ❷

$\frac{1}{\sqrt[4]{3}}=3^{-\frac{1}{4}}$이므로

$$\frac{1}{\sqrt[4]{3}}\times3^{-\frac{7}{4}}=3^{-\frac{1}{4}}\times3^{-\frac{7}{4}}$$
$$=3^{-\frac{1}{4}-\frac{7}{4}}$$
$$=3^{-2}=\frac{1}{9}$$

답 ①

05

$(2-\sqrt{2})^{1+\sqrt{3}}\times(2-\sqrt{2})^{1-\sqrt{3}}+2^{\frac{5}{2}}=(2-\sqrt{2})^{(1+\sqrt{3})+(1-\sqrt{3})}+4\sqrt{2}$

$=(2-\sqrt{2})^2+4\sqrt{2}$

$=4-4\sqrt{2}+2+4\sqrt{2}=6$

답 ①

06

$2^{\frac{4}{3}}\times6^{\frac{2}{3}}=2^{\frac{4}{3}}\times(2\times3)^{\frac{2}{3}}=2^{\frac{4}{3}}\times2^{\frac{2}{3}}\times3^{\frac{2}{3}}=(2^6\times3^2)^{\frac{1}{3}}=\sqrt[3]{2^6\times3^2}$

따라서 $p=6$, $q=2$이므로

$p+q=6+2=8$

답 ④

07

$f(x)=x\sqrt{x}=x^{\frac{3}{2}}$이므로 $f(f(n))=\left(n^{\frac{3}{2}}\right)^{\frac{3}{2}}=n^{\frac{3}{2}\times\frac{3}{2}}=n^{\frac{9}{4}}$

$n^{\frac{9}{4}}$의 값이 1보다 큰 자연수가 되려면 n은 1보다 큰 자연수 k에 대하여 $n=k^4$의 꼴이어야 한다. 즉, 자연수 n의 최솟값은 1보다 큰 자연수의 네제곱의 꼴로 표현되는 자연수 중 가장 작은 값이므로

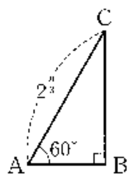
$2^4=16$

답 16

08

한 내각의 크기가 $60°$이고 한 변의 길이가 $2^{\frac{n}{3}}$인 직각삼각형의 세 꼭짓점을 A, B, C라 하면 직각삼각형 ABC는 다음과 같다.

(i) 그림과 같이 길이가 $2^{\frac{n}{3}}$인 변이 빗변인 직각삼각형일 때



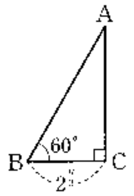
$\angle A=60°$, $\overline{AC}=2^{\frac{n}{3}}$이라 하면

$\overline{AB}=2^{\frac{n}{3}}\times\cos 60°$, $\overline{BC}=2^{\frac{n}{3}}\times\sin 60°$

이므로 직각삼각형 ABC의 넓이는

$\frac{1}{2}\times\left(2^{\frac{n}{3}}\times\cos 60°\right)\times\left(2^{\frac{n}{3}}\times\sin 60°\right)=\frac{\sqrt{3}}{8}\times2^{\frac{2n}{3}}$

(ii) 그림과 같이 길이가 $2^{\frac{n}{3}}$인 변의 양 끝 각의 크기가 $60°$, $90°$인 직각삼각형일 때



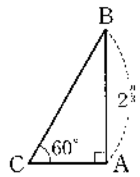
$\angle B=60°$, $\overline{BC}=2^{\frac{n}{3}}$이라 하면

$\overline{AC}=2^{\frac{n}{3}}\times\tan 60°$

이므로 직각삼각형 ABC의 넓이는

$\frac{1}{2}\times2^{\frac{n}{3}}\times\left(2^{\frac{n}{3}}\times\tan 60°\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}\times2^{\frac{2n}{3}}$

(iii) 그림과 같이 길이가 $2^{\frac{n}{3}}$인 변과 마주 보는 각의 크기가 $60°$인 직각삼각형일 때



$\angle C=60°$, $\overline{AB}=2^{\frac{n}{3}}$이라 하면

$\overline{AC}\times\tan 60°=2^{\frac{n}{3}}$에서 $\overline{AC}=2^{\frac{n}{3}}\times\frac{1}{\sqrt{3}}$

이므로 직각삼각형 ABC의 넓이는

$\frac{1}{2}\times2^{\frac{n}{3}}\times\left(2^{\frac{n}{3}}\times\frac{1}{\sqrt{3}}\right)=\frac{\sqrt{3}}{6}\times2^{\frac{2n}{3}}$

(i), (ii), (iii)에 의하여 $f(n)=\frac{\sqrt{3}}{2}\times2^{\frac{2n}{3}}$이므로

$f(3)\times f(6)=\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\times2^2\right)\times\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\times2^4\right)=48$

답 48

필수 유형 ❸

$\log_4\frac{2}{3}+\log_4 24=\log_4\left(\frac{2}{3}\times24\right)=\log_4 16=2$

답 2

09

로그의 성질에 의하여

$\log_2(\sqrt{17}+1)+\log_2(\sqrt{17}-1)-\log_2 8$

$=\log_2\{(\sqrt{17}+1)(\sqrt{17}-1)\}-3$

$=\log_2 16-3=4-3=1$

답 ①

10

$\log_{(x-2)}\{-x^2+(2a+3)x-a(a+3)\}$이 정의되기 위해서는 밑의 조건 $x-2\neq1$, $x-2>0$과 진수의 조건

$-x^2+(2a+3)x-a(a+3)>0$을 모두 만족시켜야 한다.

밑의 조건에 의하여 $x\neq3$, $x>2$ ······ ㉠

진수의 조건에 의하여

$-x^2+(2a+3)x-a(a+3)=-(x-a)\{x-(a+3)\}>0$

$(x-a)\{x-(a+3)\}<0$에서

$a<x<a+3$ ······ ㉡

a가 자연수이므로 ㉡을 만족시키는 자연수 x의 값은 $a+1$, $a+2$이다.

(i) $a+1=4$일 때

$a=3$이므로 ㉠, ㉡에 의하여 $3<x<6$이므로 주어진 로그의 값이 정의되도록 하는 자연수 x의 값은 4, 5이다.

즉, 조건을 만족시키지 않는다.

(ii) $a+2=4$일 때

$a=2$이므로 ㉠, ㉡에 의하여 $2<x<5$, $x\neq3$이므로 주어진 로그의 값이 정의되도록 하는 자연수 x의 값은 4뿐이다.

즉, 조건을 만족시킨다.

(i), (ii)에 의하여 $a=2$

답 ②

11

$a=2^m$, $b=3^{3n+1}$이므로

$\log_2(\log_2 a)+\log_2(\log_3 b)=\log_2(\log_2 2^m)+\log_2(\log_3 3^{3n+1})$

$=\log_2 m+\log_2(3n+1)$

$=\log_2 m(3n+1)$

이므로 $\log_2 m(3n+1)=4$에서 $m(3n+1)=16$

$3n+1$이 16의 양의 약수이어야 하므로 자연수 n의 값은 1 또는 5이다.

$n=1$이면 $m=4$이고 $n=5$이면 $m=1$이므로 $m+n$의 최솟값은 5이다.

답 5

12

두 물체 A, B의 단면의 넓이를 각각 S_A, S_B라 하고 두께를 각각 L_A, L_B라 하자.

물체 A의 열전도율 P_A는 다음을 만족시킨다.

$\log_a P_A = k + \log_a \frac{S_A T}{L_A}$ …… ㉠

물체 B는 물체 A에 비하여 단면의 넓이를 25 % 확장시키고 두께를 50 % 증가시켰으므로

$S_B = \left(1+\frac{25}{100}\right)S_A = \frac{5}{4}S_A$, $L_B = \left(1+\frac{50}{100}\right)L_A = \frac{3}{2}L_A$

이고 물체 B의 열전도율 P_B는 다음을 만족시킨다.

$$\log_a P_B = k + \log_a \frac{S_B T}{L_B} = k + \log_a \frac{\frac{5}{4}S_A T}{\frac{3}{2}L_A}$$

$$= k + \log_a \frac{S_A T}{L_A} + \log_a \frac{5}{6} \quad \cdots\cdots \text{㉡}$$

㉠, ㉡에서 $\log_a P_B - \log_a P_A = \log_a \frac{5}{6}$

즉, $\log_a \frac{P_B}{P_A} = \log_a \frac{5}{6}$이므로 $\frac{P_B}{P_A} = \frac{5}{6}$

답 ③

필수 유형 4

$\log_a b = \frac{\log_b c}{2} = \frac{\log_c a}{4} = k$라 하면 $k>0$이고

$\log_a b = k$, $\log_b c = 2k$, $\log_c a = 4k$

$\log_a b \times \log_b c \times \log_c a = 1$에서 $k \times 2k \times 4k = 8k^3 = 1$

$k^3 = \frac{1}{8}$, $k = \frac{1}{2}$이므로

$\log_a b + \log_b c + \log_c a = k + 2k + 4k = 7k = \frac{7}{2}$

답 ①

13

$$\log_3 6 \times \log_4 81 - \frac{1}{\log_3 2} = \frac{\log 6}{\log 3} \times \frac{\log 81}{\log 4} - \log_2 3$$

$$= \frac{\log 6}{\log 3} \times \frac{4\log 3}{2\log 2} - \log_2 3$$

$$= \frac{2\log 6}{\log 2} - \log_2 3$$

$$= 2\log_2 6 - \log_2 3$$

$$= \log_2 36 - \log_2 3$$

$$= \log_2 12$$

이므로 $k = \log_2 12$

따라서 $2^k = 12$

답 ①

14

수직인 두 직선의 기울기의 곱이 -1이므로

두 점 $(\log_3 2, \log_9 a)$, $(\log_3 54, \log_9 a^2)$을 지나는 직선의 기울기는 $\frac{1}{2}$이다.

따라서 $\frac{\log_9 a^2 - \log_9 a}{\log_3 54 - \log_3 2} = \frac{\log_9 a}{\log_3 27} = \frac{\log_9 a}{3} = \frac{1}{2}$에서

$\log_9 a = \frac{3}{2}$이므로

$a = 9^{\frac{3}{2}} = (3^2)^{\frac{3}{2}} = 3^{2\times\frac{3}{2}} = 3^3 = 27$

답 ④

15

$\frac{1}{\log_9 27} = \frac{1}{\log_{3^2} 3^3} = \frac{1}{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3}$

$\frac{1}{3}\log_b b^5 = \frac{5}{3}\log_b b = \frac{5}{3}$

$\log_a a^{\frac{2}{3}} = \frac{2}{3}\log_a a = \frac{2}{3}$이므로

$A = \left\{\log_a b, \frac{2}{3}, \frac{5}{3}\right\}$, $B = \left\{2, \frac{2}{3}, \log_2 a + \log_2 b\right\}$

$A = B$이기 위해서는 $\log_a b = 2$, $\log_2 a + \log_2 b = \frac{5}{3}$이어야 한다.

$\log_a b = 2$에서 $\frac{\log_2 b}{\log_2 a} = 2$이므로

$\log_2 b = 2\log_2 a$ …… ㉠

$\log_2 a + \log_2 b = \frac{5}{3}$에 ㉠을 대입하면 $\log_2 a = \frac{5}{9}$

㉠에서 $\log_2 b = \frac{10}{9}$

이때 $\log_a 2 + \log_b 2 = \frac{1}{\log_2 a} + \frac{1}{\log_2 b} = \frac{9}{5} + \frac{9}{10} = \frac{27}{10}$

따라서 $p = 10$, $q = 27$이므로

$p + q = 10 + 27 = 37$

답 37

필수 유형 5

곡선 $y = 2^{x+2} - 1$을 x축에 대하여 대칭이동한 곡선은

$y = -2^{x+2} + 1$이므로 $f(x) = -2^{x+2} + 1$

곡선 $y = f(x)$와 y축이 만나는 점의 좌표가 $(0, a)$이므로

$a = -2^{0+2} + 1$, $a = -3$

한편, 점근선은 직선 $y = 1$이므로 $b = 1$

따라서 $a + b = (-3) + 1 = -2$

답 ②

16

곡선 $y = 2^{x+2} - 3$을 x축의 방향으로 -1만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동하면 $y - 2 = 2^{(x+1)+2} - 3$, 즉 $y = 2^{x+3} - 1$이므로

$f(x) = 2^{x+3} - 1$

이때 점근선은 직선 $y = -1$이므로 $a = -1$

따라서 $f(a) = f(-1) = 2^2 - 1 = 3$이므로

$a + f(a) = -1 + 3 = 2$

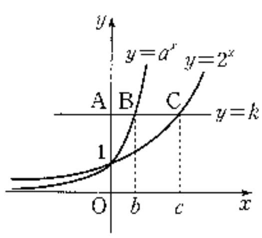
답 ②

17

두 점 B, C의 x좌표를 각각 b, c $(0<b<c)$라 하면

$\overline{AB} : \overline{BC} = 1 : 2$이므로

$c = 3b$ …… ㉠



두 점 B, C의 y좌표는 서로 같으므로

$a^b = 2^c$ …… ㉡

㉠, ㉡에서

$a^b = 2^{3b} = 8^b$ …… ㉢

따라서 $a>2$, $b>0$이므로 ㉢에서 $a=8$

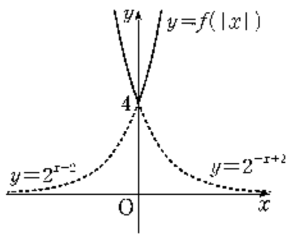
답 8

18

ㄱ. $x\geq0$일 때, $|x|=x$이므로 $f(|x|)=f(x)=2^{x+2}$이고

$x<0$일 때, $|x|=-x$이므로 $f(|x|)=f(-x)=2^{-x+2}$이다.

따라서 함수 $y=f(|x|)$의 그래프는 그림과 같다.



따라서 치역은 $\{y\mid y\geq4\}$이다. (참)

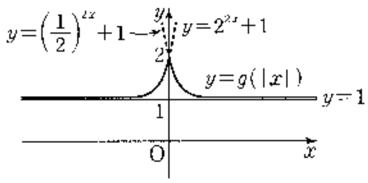
ㄴ. (i) $x\geq0$일 때, $|x|=x$이므로

$g(|x|)=g(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^{2x}+1$

(ii) $x<0$일 때, $|x|=-x$이므로

$g(|x|)=g(-x)=\left(\frac{1}{2}\right)^{-2x}+1=2^{2x}+1$

$g(0)=2$이므로 (i), (ii)에 의하여 함수 $y=g(|x|)$의 그래프는 그림과 같다.



따라서 함수 $y=g(|x|)$의 최댓값은 2이므로 모든 실수 x에 대하여 $g(|x|)\leq2$이다. (참)

ㄷ. ㄱ에서 함수 $y=f(|x|)$의 그래프가 y축과 만나는 점은 점 $(0, 4)$이고, ㄴ에서 함수 $y=g(|x|)$의 그래프가 y축과 만나는 점은 점 $(0, 2)$이므로 $g(0)=2$

이때 두 함수 $y=f(|x|)$, $y=g(|x|)+k$의 그래프가 y축 위의 점에서 만나므로 함수 $y=g(|x|)+k$의 그래프가 점 $(0, 4)$를 지나야 한다.

따라서 $4=g(0)+k$에서 $k=4-g(0)$이므로 $k=2$이다.

함수 $y=g(|x|)$의 그래프의 점근선은 직선 $y=1$이고 함수 $y=g(|x|)+2$의 그래프는 함수 $y=g(|x|)$의 그래프를 y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 그래프이므로 점근선은 직선 $y=3$이다.

(참)

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

답 ⑤

필수 유형 ❻

$\left(\frac{1}{9}\right)^{x}=(3^{-2})^{x}=3^{-2x}$이므로 부등식 $\left(\frac{1}{9}\right)^{x}<3^{21-4x}$에서 $3^{-2x}<3^{21-4x}$이다.

밑 3은 1보다 크므로 $-2x<21-4x$에서

$x<\frac{21}{2}=10.5$

따라서 부등식을 만족시키는 자연수 x의 값은 1, 2, 3, $\cdots$, 10이고 그 개수는 10이다.

답 ⑤

19

$3^{x}=t$라 하면 $t>0$이고 $9^{x}=t^{2}$이므로 방정식 $2\times9^{x}+63=(3^{x}+6)^{2}$은

$2t^{2}+63=(t+6)^{2}$, $t^{2}-12t+27=0$, $(t-3)(t-9)=0$

$t=3$ 또는 $t=9$

따라서 $3^{x}=3$에서 $x=1$이고 $3^{x}=9$에서 $x=2$이므로 모든 실수 x의 값의 합은

$1+2=3$

답 ③

20

곡선 $y=2^{x}$과 직선 $x=n$이 만나는 점 A_n의 좌표는 $(n, 2^{n})$

곡선 $y=(\sqrt{2})^{x}$과 직선 $x=n$이 만나는 점 B_n의 좌표는 $\left(n, 2^{\frac{n}{2}}\right)$

$f(n)=\frac{1}{2}\times\overline{OP_n}\times\overline{A_nP_n}=\frac{1}{2}\times n\times2^{n}=\frac{n}{2}\times2^{n}$

$g(n)=\frac{1}{2}\times\overline{OP_n}\times\overline{B_nP_n}=\frac{1}{2}\times n\times2^{\frac{n}{2}}=\frac{n}{2}\times2^{\frac{n}{2}}$

부등식 $f(n)-4\times g(n)\geq16n$에서

$\frac{n}{2}\times2^{n}-4\times\frac{n}{2}\times2^{\frac{n}{2}}\geq16n$, $2^{n}-4\times2^{\frac{n}{2}}\geq32$

$2^{\frac{n}{2}}=t$라 하면 $t>0$이고 $t^{2}-4t-32\geq0$

$(t+4)(t-8)\geq0$이므로 $t\geq8$

즉, $2^{\frac{n}{2}}\geq8=2^{3}$이므로 $\frac{n}{2}\geq3$, $n\geq6$

따라서 자연수 n의 최솟값은 6이다.

답 ④

21

부등식 $\left(\frac{1}{2}\right)^{-x^{2}+4x+1}\leq4^{x-3}$에서

$2^{x^{2}-4x-1}\leq2^{2x-6}$이고 밑 2가 1보다 크므로

$x^{2}-4x-1\leq2x-6$

$x^{2}-6x+5\leq0$, $(x-1)(x-5)\leq0$, $1\leq x\leq5$

따라서 부등식을 만족시키는 정수 x의 값은 1, 2, 3, 4, 5이므로

$A=\{1, 2, 3, 4, 5\}$

$a\in A$에 대하여

$x=3^{a^{2}}\times\left(\frac{1}{3}\right)^{6a-k}=3^{a(a-6)+k}$이므로

$a=1$일 때, $x=3^{-5+k}$

$a=2$일 때, $x=3^{-8+k}$

$a=3$일 때, $x=3^{-9+k}$

$a=4$일 때, $x=3^{-8+k}$

$a=5$일 때, $x=3^{-5+k}$

집합 $B=\{3^{-5+k}, 3^{-8+k}, 3^{-9+k}\}$이므로

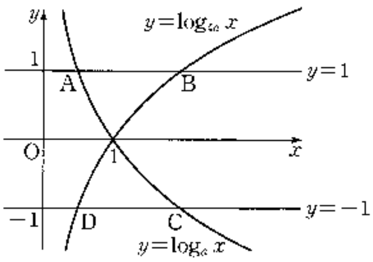
집합 B의 모든 원소의 곱은

$3^{-5+k}\times3^{-8+k}\times3^{-9+k}=3^{-22+3k}$

즉, $3^{-22+3k}=3^{2}$에서 $-22+3k=2$이므로 $k=8$

답 ③

필수 유형 ❼



ㄱ. $A(a,\ 1)$, $B(4a,\ 1)$이므로 선분 AB를 $1:4$로 외분하는 점의 좌표는 $\left(\frac{4a-4a}{1-4},\ \frac{1-4}{1-4}\right)$, 즉 $(0,\ 1)$이다. (참)

ㄴ. 사각형 ABCD가 직사각형이면 점 A와 점 D, 점 B와 점 C는 x축에 대하여 대칭이므로 x좌표가 각각 같다. 한편, 점 D의 좌표는 $\left(\frac{1}{4a},\ -1\right)$이므로 $a=\frac{1}{4a}$에서 $4a^2=1$이고 $\frac{1}{4}<a<1$이므로
$a=\frac{1}{2}$ (참)

ㄷ. 네 점의 좌표가 각각 $A(a,\ 1)$, $B(4a,\ 1)$, $C\left(\frac{1}{a},\ -1\right)$,
$D\left(\frac{1}{4a},\ -1\right)$이므로 $\overline{AB}=3a$, $\overline{CD}=\frac{3}{4a}$
$\overline{AB}<\overline{CD}$이면 $3a<\frac{3}{4a}$에서 $a^2<\frac{1}{4}$이고, $\frac{1}{4}<a<1$이므로
$\frac{1}{4}<a<\frac{1}{2}$ (거짓)

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다. 답 ③

22

곡선 $y=\log_3(ax+b)$가 점 $(0,\ 2)$를 지나므로 $2=\log_3 b$에서 $b=9$
곡선 $y=\log_3(ax+9)$의 점근선이 직선 $x=-\frac{9}{a}$이므로
$-\frac{9}{a}=-3$에서 $a=3$
따라서 주어진 곡선은 $y=\log_3(3x+9)$이고 이 곡선이 점 $(2,\ k)$를 지나므로
$k=\log_3(3\times2+9)=\log_3 15=\log_3(3\times5)=1+\log_3 5$

답 ③

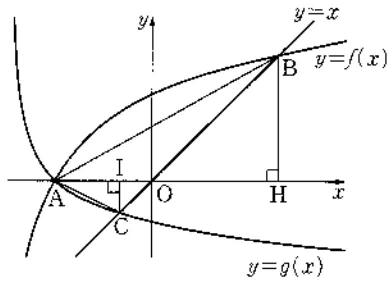
23

곡선 $y=\log_a x$와 직선 $x=n$이 만나는 점의 x좌표가 n이므로 점 P_n의 좌표는 $(n,\ \log_a n)$이고 점 P_{n+1}의 좌표는 $(n+1,\ \log_a(n+1))$이다.
주어진 직사각형은 선분 P_nP_{n+1}을 대각선으로 하고 모든 변이 x축 또는 y축과 평행하므로 그 넓이 $f(n)$은
$f(n)=\{(n+1)-n\}\times\{\log_a(n+1)-\log_a n\}$
$\quad=\log_a(n+1)-\log_a n=\log_a\frac{n+1}{n}$
따라서
$f(2)+f(3)+f(4)+f(5)$
$=\log_a\frac{3}{2}+\log_a\frac{4}{3}+\log_a\frac{5}{4}+\log_a\frac{6}{5}=\log_a\left(\frac{3}{2}\times\frac{4}{3}\times\frac{5}{4}\times\frac{6}{5}\right)$
$=\log_a 3=3$
이므로 $a^3=3$에서 $a=\sqrt[3]{3}$

답 ②

24

함수 $g(x)=\log_{\frac{1}{3}}(x+4)$의 그래프가 x축과 만나는 점의 좌표는 $(-3,\ 0)$이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프가 점 $(-3,\ 0)$을 지난다.
즉, $0=\log_a(-3-m)$에서 $m=-4$이므로 $f(x)=\log_a(x+4)$

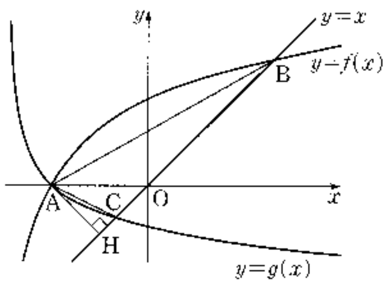


점 B는 직선 $y=x$ 위의 점이므로 점 B의 좌표를 $(k,\ k)$ $(k>0)$이라 하고 점 B에서 x축에 내린 수선의 발을 H, 점 $C(-1,\ -1)$에서 x축에 내린 수선의 발을 I라 하면 $\overline{CI}=1$이고 $\overline{BH}=k$
한편, 삼각형 ABC의 넓이는 원점 O에 대하여 두 삼각형 OAC와 OAB의 넓이의 합이므로
(삼각형 ABC의 넓이)$=\frac{1}{2}\times\overline{OA}\times\overline{CI}+\frac{1}{2}\times\overline{OA}\times\overline{BH}$
$=\frac{1}{2}\times3\times1+\frac{1}{2}\times3\times k=\frac{3}{2}(1+k)$
즉, $\frac{3}{2}(1+k)=\frac{15}{2}$에서 $k=4$
점 B가 곡선 $y=f(x)$ 위의 점이므로 $4=\log_a(4+4)$에서 $a^4=8$
$a>1$이므로 $a=2^{\frac{3}{4}}$
따라서 $p=4$, $q=3$이므로 $p+q=4+3=7$

답 7

다른 풀이

함수 $g(x)=\log_{\frac{1}{3}}(x+4)$의 그래프가 x축과 만나는 점의 좌표는 $(-3,\ 0)$이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프가 점 $(-3,\ 0)$을 지난다.
즉, $0=\log_a(-3-m)$에서 $m=-4$이므로 $f(x)=\log_a(x+4)$



한편, 점 $A(-3,\ 0)$에서 직선 $y=x$, 즉 $x-y=0$에 내린 수선의 발을 H라 하면
$\overline{AH}=\frac{|-3-0|}{\sqrt{2}}=\frac{3\sqrt{2}}{2}$
또한 점 B의 좌표를 $(k,\ k)$라 하면 $k>0$이고 $C(-1,\ -1)$이므로
$\overline{BC}=\sqrt{2(k+1)^2}=\sqrt{2}(k+1)$
삼각형 ABC의 넓이는 $\frac{1}{2}\times\sqrt{2}(k+1)\times\frac{3\sqrt{2}}{2}=\frac{15}{2}$에서 $k=4$
점 $B(4,\ 4)$가 곡선 $y=f(x)$ 위의 점이므로 $4=\log_a(4+4)$에서 $a^4=8$
$a>1$이므로 $a=2^{\frac{3}{4}}$
따라서 $p=4$, $q=3$이므로 $p+q=4+3=7$

필수 유형 ❽

로그의 진수의 조건에 의하여 $f(x)>0$, $x>1$

$f(x)>0$에서 $0<x<7$이고, $x>1$이므로 $1<x<7$

$\log_3 f(x)+\log_{\frac{1}{3}}(x-1)\le 0$에서

$\log_3 f(x)-\log_3(x-1)\le 0$

$\log_3 f(x)\le\log_3(x-1)$

$f(x)\le x-1$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

$1<x<7$에서 ㉠을 만족시키는 x의 값의 범위는 $4\le x<7$

따라서 부등식을 만족시키는 모든 자연수 x의 값은 4, 5, 6이고 그 합은 $4+5+6=15$

답 15

25

로그의 진수의 조건에 의하여 $x>\frac{1}{3}$, $x>3$에서 $x>3$

$\log_4(3x-1)+\log_4(x-3)=\log_4 11$에서

$\log_4(3x-1)(x-3)=\log_4 11$이므로 $(3x-1)(x-3)=11$

$3x^2-10x-8=0$, $(3x+2)(x-4)=0$

따라서 $x=-\frac{2}{3}$ 또는 $x=4$

$x>3$이므로 구하는 실수 x의 값은 4이다.

답 4

26

$$\log_3\frac{x}{3}\times\log_3\frac{x}{9}=(\log_3 x-\log_3 3)(\log_3 x-\log_3 9)$$
$$=(\log_3 x-1)(\log_3 x-2)$$

$\log_3 x=t$라 하면

$(t-1)(t-2)<6$에서 $t^2-3t-4<0$

$(t+1)(t-4)<0$이므로 $-1<t<4$

즉, $-1<\log_3 x<4$, $\frac{1}{3}<x<81$

따라서 부등식을 만족시키는 자연수 x의 최댓값은 80이다.

답 ①

27

사각형 ABDC는 두 변 AB와 CD가 평행한 사다리꼴이다.

$\overline{\mathrm{AB}}=\log_4 n-\log_{\frac{1}{2}} n=\frac{1}{2}\log_2 n+\log_2 n=\frac{3}{2}\log_2 n$

$\overline{\mathrm{CD}}=\log_4 m-\log_{\frac{1}{2}} m=\frac{1}{2}\log_2 m+\log_2 m=\frac{3}{2}\log_2 m$

사다리꼴 ABDC의 넓이는

$\frac{1}{2}\times\left(\frac{3}{2}\log_2 m+\frac{3}{2}\log_2 n\right)\times(m-n)$이므로

$\frac{1}{2}\times\left(\frac{3}{2}\log_2 m+\frac{3}{2}\log_2 n\right)\times(m-n)=\frac{9}{2}$

$\frac{3}{4}(m-n)\log_2 mn=\frac{9}{2}$

$\log_2 mn=\frac{6}{m-n}$

$mn=2^{\frac{6}{m-n}}$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

이때 m, n이 2 이상의 자연수이고 $m>n$이므로 $m-n$은 자연수이다. mn은 자연수이므로 ㉠을 만족시키기 위해서는 $m-n$이 6의 양의 약수이어야 한다.

(i) $m-n=1$일 때, $m=n+1$이고

$mn=64$에서 $n(n+1)=64$, $n^2+n-64=0$

이때 이를 만족시키는 2 이상의 자연수 n은 존재하지 않는다.

(ii) $m-n=2$일 때, $m=n+2$이고

$mn=8$에서 $n(n+2)=8$, $n^2+2n-8=0$, $(n+4)(n-2)=0$

n은 2 이상의 자연수이므로 $n=2$이고 $m=4$

(iii) $m-n=3$일 때, $m=n+3$이고

$mn=4$에서 $n(n+3)=4$, $n^2+3n-4=0$, $(n+4)(n-1)=0$

이때 이를 만족시키는 2 이상의 자연수 n은 존재하지 않는다.

(iv) $m-n=6$일 때, $m=n+6$이고

$mn=2$에서 $n(n+6)=2$, $n^2+6n-2=0$

이때 이를 만족시키는 2 이상의 자연수 n은 존재하지 않는다.

(i)~(iv)에 의하여 $m=4$, $n=2$이므로

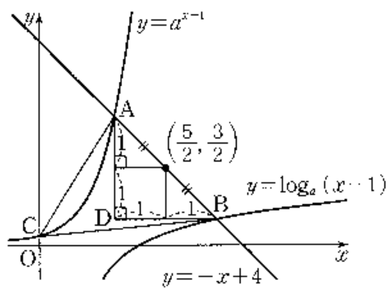
$m+n=4+2=6$

답 6

필수 유형 ❾

두 곡선 $y=a^{x-1}$, $y=\log_a(x-1)$은 두 곡선 $y=a^x$, $y=\log_a x$를 x축의 방향으로 각각 1만큼 평행이동한 것이다. 두 곡선 $y=a^x$, $y=\log_a x$는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로 두 곡선 $y=a^x$, $y=\log_a x$를 x축의 방향으로 각각 1만큼 평행이동한 두 곡선 $y=a^{x-1}$, $y=\log_a(x-1)$은 직선 $y=x-1$에 대하여 대칭이다.

따라서 두 점 A, B는 두 직선 $y=x-1$과 $y=-x+4$의 교점인 점 $\left(\frac{5}{2}, \frac{3}{2}\right)$에 대하여 대칭이다.



$\overline{\mathrm{AB}}=2\sqrt{2}$이므로 그림의 직각이등변삼각형 ADB에서

$\mathrm{A}\left(\frac{3}{2}, \frac{5}{2}\right)$, $\mathrm{B}\left(\frac{7}{2}, \frac{1}{2}\right)$임을 알 수 있다.

함수 $y=a^{x-1}$의 그래프가 점 $\mathrm{A}\left(\frac{3}{2}, \frac{5}{2}\right)$를 지나므로 $a^{\frac{1}{2}}=\frac{5}{2}$, $a=\frac{25}{4}$

따라서 점 C의 좌표는 $\left(0, \frac{4}{25}\right)$이다.

선분 AB를 밑변으로 할 때, 점 C와 직선 $x+y-4=0$ 사이의 거리는

$$\frac{\left|0+\frac{4}{25}-4\right|}{\sqrt{2}}=\frac{\frac{96}{25}}{\sqrt{2}}=\frac{48\sqrt{2}}{25}$$

이므로 삼각형 ABC의 넓이 S는 $S=\frac{1}{2}\times 2\sqrt{2}\times\frac{48\sqrt{2}}{25}=\frac{96}{25}$

따라서 $50\times S=50\times\frac{96}{25}=192$

답 192

28

함수 $f(x)=2^{x-1}+a$의 역함수는 $y=2^{x-1}+a$에서 x와 y를 바꾸면

$x=2^{y-1}+a$이고

$y=\log_2(x-a)+1$이므로 $a=2$

한편, 함수 $g(x)=\log_2(x-2)+1$의 그래프를 x축의 방향으로 m만큼 평행이동하면 $g(x-m)=\log_2(x-m-2)+1$이고, 이 함수의 그래프의 점근선은 $x=m+2$이므로 $m+2=5$에서 $m=3$

따라서 $a+m=2+3=5$

답 ⑤

29

곡선 $y=\log_2(x-1)-1$을 x축의 방향으로 -1만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동하면 곡선 $y=\log_2 x$가 되고, 점 $(5, 1)$을 x축의 방향으로 -1만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동하면 점 $(4, 2)$가 되며 이 점은 직선 l 위의 점이다.

곡선 $y=\log_2 x$와 곡선 $y=2^x$은 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로 직선 l과 곡선 $y=2^x$이 만나는 점의 좌표는 $(2, 4)$이다.

따라서 $a=2$, $b=4$이므로 $\frac{b}{a}=\frac{4}{2}=2$

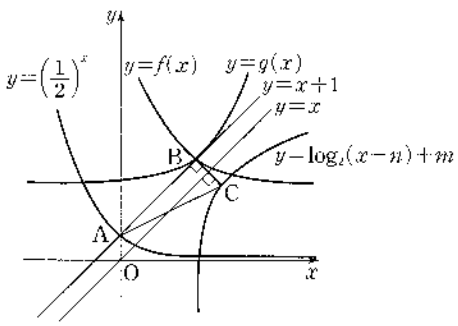
답 ①

30

점 A의 좌표는 $(0, 1)$이므로 점 B의 좌표는 $(m, 1+n)$이다.

점 B는 직선 $y=x+1$ 위의 점이므로 $1+n=m+1$에서 $m=n$이다.

함수 $y=2^x$의 그래프도 y축과 점 A에서 만나므로 $g(x)=2^{x-m}+n$이라 하면 함수 $y=g(x)$의 그래프도 점 $\mathrm{B}(m, 1+n)$을 지난다. 또한 함수 $y=g(x)$의 역함수가 $y=\log_2(x-n)+m$이고 기울기가 -1인 직선이 두 함수 $y=g(x)$, $y=\log_2(x-n)+m$의 그래프와 만나는 점이 각각 B, C이므로 두 점 B, C는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이다.



즉, 두 점 B, C의 좌표는 각각 $(m, m+1)$, $(m+1, m)$이므로

$\overline{\mathrm{BC}}=\sqrt{1^2+(-1)^2}=\sqrt{2}$

두 직선 AB, BC의 기울기의 곱은 -1이므로 삼각형 ABC에서 $\angle\mathrm{B}=90°$이다.

$m>0$이고 삼각형 ABC의 넓이가 6이므로

$\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{AB}}\times\overline{\mathrm{BC}}=\frac{1}{2}\times\sqrt{2}m\times\sqrt{2}=m=6$

따라서 $f(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^{x-6}+6$이므로

$f(2)=\left(\frac{1}{2}\right)^{-4}+6=16+6=22$

답 22

필수 유형 ⑩

함수 $f(x)=2\log_{\frac{1}{2}}(x+k)$는 밑 $\frac{1}{2}$이 1보다 작으므로 $x=0$에서 최댓값을 갖고 $x=12$에서 최솟값을 갖는다.

$f(0)=2\log_{\frac{1}{2}}k=-4$에서 $\log_{\frac{1}{2}}k=-2$이므로 $k=\left(\frac{1}{2}\right)^{-2}=4$

한편, $m=f(12)=2\log_{\frac{1}{2}}(12+4)=-2\log_2 16=-8$

따라서 $k+m=4+(-8)=-4$

답 ④

31

함수 $g(x)$는 밑이 1보다 큰 지수함수이므로 실수 전체의 집합에서 x의 값이 증가하면 y의 값도 증가한다.

$g(f(x))=2^{x^2-2x+3}=2^{(x-1)^2+2}$이고 $(x-1)^2+2\ge2$이므로

$2^{(x-1)^2+2}\ge2^2$

따라서 함수 $y=(g\circ f)(x)$는 $x=1$일 때 최솟값 $2^2=4$를 갖는다.

답 ①

32

$a>1$이므로 두 함수 $y=2^{x+2}$, $y=\log_a(x+2)$는 모두 x의 값이 증가하면 y의 값도 증가한다.

$-1\le x_1<x_2$이면 $2^{x_1+2}<2^{x_2+2}$, $\log_a(x_1+2)<\log_a(x_2+2)$이므로

$f(x_1)<f(x_2)$이다. 즉, 함수 $f(x)$도 x의 값이 증가하면 y의 값도 증가하는 함수이므로 함수 $f(x)$는 $x=-1$에서 최솟값을 갖고, $x=2$에서 최댓값을 갖는다.

$f(-1)=2^1+\log_a 1=2$, $f(2)=2^4+\log_a 4=16+\log_a 4$

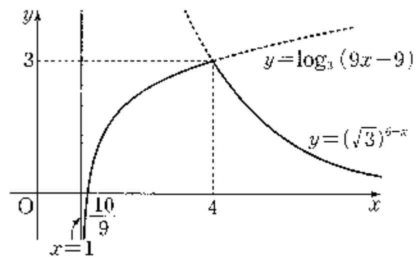
이고 $2+(16+\log_a 4)=19$에서 $\log_a 4=1$

따라서 $a=4$

답 ②

33

함수 $y=f(x)$의 그래프는 그림과 같다.



함수 $f(x)$는 $x=4$일 때 최댓값 3을 가지므로 $t\le x\le t+2$에 $x=4$가 포함되면 최댓값은 3이다. 즉, $t\le4\le t+2$에서 $2\le t\le4$이고 이를 만족시키는 자연수 t의 값은 2, 3, 4로 그 개수는 3이다. 즉, $a=3$

$s\le x\le s+1$에서 최솟값이 1인 경우는 다음과 같이 경우를 나누어 생각할 수 있다.

(i) $s>1$, $s+1<4$일 때, $1<s<3$이고 함수 $f(x)$는 $s\le x\le s+1$에서 x의 값이 증가하면 y의 값도 증가하는 함수이므로 $x=s$일 때 최소이다.

$f(s)=\log_3(9s-9)=1$에서 $9s-9=3$, $s=\frac{4}{3}$

이는 $1<s<3$을 만족시킨다.

(ii) $1<s<4$, $s+1\geq 4$일 때, $3\leq s<4$이고 $f(3)=\log_3 18>\log_3 3=1$

$f(4)=(\sqrt{3})^2=3>1$이므로 $s\leq x\leq s+1$에서 함수 $f(x)$의 최솟값은 1보다 크다.

(iii) $s\geq 4$일 때, 함수 $f(x)$는 $s\leq x\leq s+1$에서 x의 값이 증가하면 y의 값은 감소하는 함수이므로 $x=s+1$일 때 최소이다.

즉, $f(s+1)=(\sqrt{3})^{6-(s+1)}=1$에서 $5-s=0$, $s=5$

이는 $s\geq 4$를 만족시킨다.

(i), (ii), (iii)에 의하여 $b=\frac{4}{3}\times 5=\frac{20}{3}$

따라서 $a+3b=3+3\times\frac{20}{3}=23$

답 23

02 삼각함수

정답 본문 18~25쪽

필수 유형 ❶ ③	01 ②	02 ④	03 11
필수 유형 ❷ ④	04 ⑤	05 ⑤	06 ①
	07 ⑤		
필수 유형 ❸ ③	08 24	09 ⑤	
필수 유형 ❹ ⑤	10 ①	11 ③	12 ④
필수 유형 ❺ ③	13 ④	14 ③	15 64
필수 유형 ❻ ②	16 ①	17 ③	18 ②
	19 185		
필수 유형 ❼ 21	20 ④	21 ②	22 39
필수 유형 ❽ ①	23 9	24 135	

필수 유형 ❶

부채꼴의 반지름의 길이를 r $(r>0)$이라 하면

이 부채꼴의 중심각의 크기는 $\frac{5}{9}\pi$이고 호의 길이는 $\frac{10}{3}\pi$이므로

$r\times\frac{5}{9}\pi=\frac{10}{3}\pi$

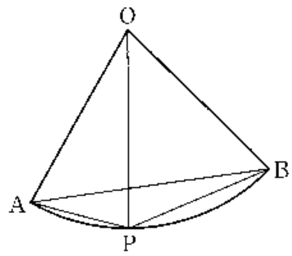
$r=6$

따라서 부채꼴의 넓이는

$\frac{1}{2}\times 6^2\times\frac{5}{9}\pi=10\pi$

답 ③

01



중심각과 원주각의 크기 사이의 관계에 의하여

$\angle\mathrm{AOP}=2\angle\mathrm{ABP}=\frac{\pi}{6}$,

$\angle\mathrm{BOP}=2\angle\mathrm{BAP}=\frac{\pi}{4}$

이므로

$$\angle\mathrm{AOB}=\angle\mathrm{AOP}+\angle\mathrm{BOP}=\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{4}=\frac{5}{12}\pi$$

부채꼴 OAB의 반지름의 길이를 r $(r>0)$이라 하면

부채꼴 OAB의 넓이가 30π이므로

$\frac{1}{2}\times r^2\times\frac{5}{12}\pi=30\pi$

$r^2=144$

$r>0$이므로 $r=12$

따라서 호 AB의 길이는

$12\times\frac{5}{12}\pi=5\pi$

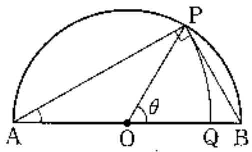
답 ②

02

선분 AB의 중점을 O라 하면

$\overline{OA}=\overline{OB}=3$

$\angle POB=\theta\ (0<\theta<\pi)$라 하면 호 BP의 길이가 π이므로



$\pi=3\times\theta,\ \theta=\frac{\pi}{3}$

삼각형 ABP에서 $\angle APB=\frac{\pi}{2}$, $\angle PAB=\frac{1}{2}\angle POB=\frac{\pi}{6}$이므로

$\overline{AP}=\overline{AB}\times\cos\frac{\pi}{6}=6\times\frac{\sqrt{3}}{2}=3\sqrt{3}$

따라서 부채꼴 APQ의 호 PQ의 길이는

$3\sqrt{3}\times\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}\pi$

답 ④

03

부채꼴 OAB의 중심각의 크기는 $\frac{4}{25}\pi$이고 호의 길이는 $\frac{8}{5}\pi$이므로

$\overline{OA}\times\frac{4}{25}\pi=\frac{8}{5}\pi,\ \overline{OA}=10$

부채꼴 OAB의 넓이는 $\frac{1}{2}\times10^2\times\frac{4}{25}\pi=8\pi$

한편, 선분 OB를 3 : 2로 내분하는 점이 C이므로

$\overline{OC}=\frac{3}{5}\times10=6$

부채꼴 OCD에서 $\angle COD=\theta$라 하면 부채꼴 OCD의 넓이는

$\frac{1}{2}\times6^2\times\theta=18\theta$

부채꼴 OAB의 넓이와 부채꼴 OCD의 넓이가 같으므로

$8\pi=18\theta$에서 $\theta=\frac{4}{9}\pi$

부채꼴 OCD에서 호 CD의 길이는

$6\times\frac{4}{9}\pi=\frac{8}{3}\pi$

따라서 $p=3,\ q=8$이므로

$p+q=3+8=11$

답 11

필수 유형 ❷

$\cos^2\theta=\frac{4}{9}$이고 $\frac{\pi}{2}<\theta<\pi$일 때 $\cos\theta<0$이므로

$\cos\theta=-\frac{2}{3}$

한편, $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$이므로

$\sin^2\theta=1-\cos^2\theta=1-\frac{4}{9}=\frac{5}{9}$

따라서 $\sin^2\theta+\cos\theta=\frac{5}{9}+\left(-\frac{2}{3}\right)=-\frac{1}{9}$

답 ①

04

$\sin\theta=-\frac{\sqrt{7}}{4}$이고 $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$이므로

$\cos^2\theta=1-\sin^2\theta=1-\left(-\frac{\sqrt{7}}{4}\right)^2=\frac{9}{16}$

$\frac{3}{2}\pi<\theta<2\pi$일 때 $\cos\theta>0$이므로 $\cos\theta=\frac{3}{4}$

따라서 $\frac{2\cos\theta}{1+\cos\theta}=\frac{2\times\frac{3}{4}}{1+\frac{3}{4}}=\frac{6}{7}$

답 ⑤

05

$\tan\theta+\frac{1}{\tan\theta}=-4$에서

$\frac{\sin\theta}{\cos\theta}+\frac{\cos\theta}{\sin\theta}=-4,\ \frac{\sin^2\theta+\cos^2\theta}{\sin\theta\cos\theta}=-4$

$\frac{1}{\sin\theta\cos\theta}=-4,\ \sin\theta\cos\theta=-\frac{1}{4}$

$$\begin{aligned}(\sin\theta-\cos\theta)^2&=\sin^2\theta-2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta\\&=(\sin^2\theta+\cos^2\theta)-2\sin\theta\cos\theta\\&=1-2\times\left(-\frac{1}{4}\right)=\frac{3}{2}\end{aligned}$$

한편, $\frac{\pi}{2}<\theta<\pi$에서 $\sin\theta>0,\ \cos\theta<0$이므로

$\sin\theta-\cos\theta>0$

따라서 $\sin\theta-\cos\theta=\sqrt{\frac{3}{2}}=\frac{\sqrt{6}}{2}$

답 ⑤

06

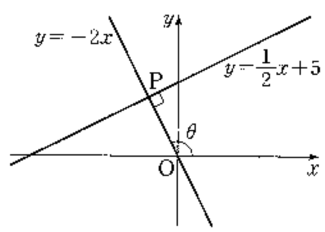
직선 OP의 기울기를 m이라 하면 직선 $y=\frac{1}{2}x+5$와 직선 OP가 서로 수직이므로

$m\times\frac{1}{2}=-1,\ m=-2$

직선 $y=\frac{1}{2}x+5$와 직선 $y=-2x$가 만나는 점의 x좌표는

$\frac{1}{2}x+5=-2x$에서 $x=-2$

이때 $y=-2\times(-2)=4$이므로 점 P의 좌표는 $(-2,\ 4)$이다.



$\overline{OP}=\sqrt{(-2)^2+4^2}=2\sqrt{5}$

$\sin\theta=\frac{4}{2\sqrt{5}}=\frac{2\sqrt{5}}{5},\ \cos\theta=\frac{-2}{2\sqrt{5}}=-\frac{\sqrt{5}}{5}$

따라서 $\sin\theta\times\cos\theta=\frac{2\sqrt{5}}{5}\times\left(-\frac{\sqrt{5}}{5}\right)=-\frac{2}{5}$

답 ①

07

선분 AP를 포함하는 부채꼴 OAP에서 $\angle AOP=\alpha$라 하자.

조건 (가)에서 부채꼴 AOP의 호 AP의 길이가 4π이므로

$6\alpha=4\pi$, $\alpha=\frac{2}{3}\pi$

이때 $\theta=\frac{2}{3}\pi$ 또는 $\theta=\frac{4}{3}\pi$이다.

(i) $\theta=\frac{2}{3}\pi$일 때, θ는 제2사분면의 각이므로 $\cos\theta<0$, $\tan\theta<0$

이때 $\frac{\tan\theta}{\cos\theta}>0$이므로 조건 (나)를 만족시키지 않는다.

(ii) $\theta=\frac{4}{3}\pi$일 때, θ는 제3사분면의 각이므로 $\cos\theta<0$, $\tan\theta>0$

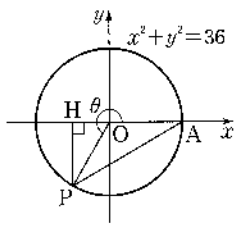
이때 $\frac{\tan\theta}{\cos\theta}<0$이므로 조건 (나)를 만족시킨다.

(i), (ii)에서 $\theta=\frac{4}{3}\pi$

점 P에서 x축에 내린 수선의 발을 H라 하면

$\overline{\text{OH}}=3$, $\overline{\text{PH}}=3\sqrt{3}$

이므로 점 P의 좌표는 $(-3, -3\sqrt{3})$이다.



따라서 $\cos\theta=\frac{-3}{6}=-\frac{1}{2}$,

$\tan\theta=\frac{-3\sqrt{3}}{-3}=\sqrt{3}$이므로

$\cos\theta+\tan^2\theta=-\frac{1}{2}+(\sqrt{3})^2=\frac{5}{2}$

답 ⑤

다른 풀이

선분 AP를 포함하는 부채꼴 OAP에서 $\angle\text{AOP}=\alpha$라 하자.

조건 (가)에서 부채꼴 AOP의 호 AP의 길이가 4π이므로

$6\alpha=4\pi$, $\alpha=\frac{2}{3}\pi$

이때 $\theta=\frac{2}{3}\pi$ 또는 $\theta=\frac{4}{3}\pi$이다.

(i) $\theta=\frac{2}{3}\pi$일 때, θ는 제2사분면의 각이므로 $\cos\theta<0$, $\tan\theta<0$

이때 $\frac{\tan\theta}{\cos\theta}>0$이므로 조건 (나)를 만족시키지 않는다.

(ii) $\theta=\frac{4}{3}\pi$일 때, θ는 제3사분면의 각이므로 $\cos\theta<0$, $\tan\theta>0$

이때 $\frac{\tan\theta}{\cos\theta}<0$이므로 조건 (나)를 만족시킨다.

(i), (ii)에서 $\theta=\frac{4}{3}\pi$

$\cos\theta=\cos\frac{4}{3}\pi=\cos\left(\pi+\frac{\pi}{3}\right)=-\cos\frac{\pi}{3}=-\frac{1}{2}$

$\tan\theta=\tan\frac{4}{3}\pi=\tan\left(\pi+\frac{\pi}{3}\right)=\tan\frac{\pi}{3}=\sqrt{3}$

따라서 $\cos\theta+\tan^2\theta=-\frac{1}{2}+(\sqrt{3})^2=\frac{5}{2}$

필수 유형 3

함수 $y=a\sin b\pi x$의 주기는 $\frac{2\pi}{b\pi}=\frac{2}{b}$

점 A의 x좌표가 점 B의 x좌표보다 작다고 하면

$\text{A}\left(\frac{1}{2b}, a\right)$, $\text{B}\left(\frac{5}{2b}, a\right)$이므로 $\overline{\text{AB}}=\frac{5}{2b}-\frac{1}{2b}=\frac{4}{2b}=\frac{2}{b}$

삼각형 OAB의 넓이가 5이므로 $\frac{1}{2}\times\frac{2}{b}\times a=5$, $\frac{a}{b}=5$

$a=5b$ ······ ㉠

직선 OA의 기울기와 직선 OB의 기울기의 곱이 $\frac{5}{4}$이므로

$\frac{a}{\frac{1}{2b}}\times\frac{a}{\frac{5}{2b}}=2ab\times\frac{2ab}{5}=\frac{4a^2b^2}{5}=\frac{5}{4}$

$a^2b^2=\frac{25}{16}$

$ab>0$이므로 $ab=\frac{5}{4}$ ······ ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면 $5b^2=\frac{5}{4}$, $b^2=\frac{1}{4}$

$b>0$이므로 $b=\frac{1}{2}$

$b=\frac{1}{2}$을 ㉠에 대입하면 $a=\frac{5}{2}$

따라서 $a+b=\frac{5}{2}+\frac{1}{2}=3$

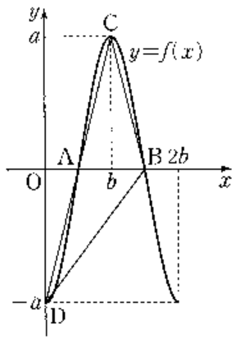
답 ③

08

함수 $f(x)=-a\cos\frac{\pi x}{b}$의 주기는 $\frac{2\pi}{\frac{\pi}{b}}=2b$이므로

$\text{A}\left(\frac{b}{2}, 0\right)$, $\text{B}\left(\frac{3b}{2}, 0\right)$이고,

함수 $y=f(x)$의 그래프는 그림과 같다.



함수 $f(x)$는 $x=b$일 때,

최댓값 $f(b)=a$를 가지므로 $c=b$이고

$\text{C}(b, a)$, $\text{D}(0, -a)$이다.

한편, 직선 AC의 기울기는 $\frac{a}{b-\frac{b}{2}}=\frac{2a}{b}$

이고, 직선 BC의 기울기는 $\frac{a}{b-\frac{3b}{2}}=-\frac{2a}{b}$이다.

조건 (가)에 의하여

$\frac{2a}{b}\times\left(-\frac{2a}{b}\right)=-16$, $\left(\frac{a}{b}\right)^2=4$

$\frac{a}{b}>0$이므로 $\frac{a}{b}=2$

$a=2b$ ······ ㉠

조건 (나)에서

(삼각형 BCD의 넓이)

=(삼각형 ABC의 넓이)+(삼각형 ADB의 넓이)

$=\frac{1}{2}\times b\times a+\frac{1}{2}\times b\times a$

$=ab=72$ ······ ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면 $2b^2=72$, $b^2=36$

$b>0$이므로 $b=6$

$b=6$을 ㉠에 대입하면 $a=12$

한편, $c=b=6$

따라서 $a+b+c=12+6+6=24$

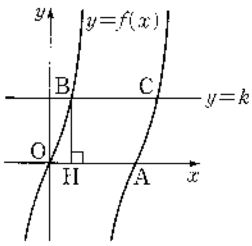
답 24

09

함수 $y=f(x)$의 주기가 2이므로 $\frac{\pi}{b}=2$, 즉 $b=\frac{\pi}{2}$

$\overline{\text{OA}}=2$이므로 점 A의 좌표는 $(2, 0)$이다.

점 B에서 x축에 내린 수선의 발을 H라 하면 $\angle BAO=\frac{\pi}{4}$이므로



$\overline{AH}=\overline{BH}=k$, $\overline{OH}=2-k$

직각삼각형 BOH에서

$\tan\theta=\tan(\angle BOH)=3$이므로

$\frac{\overline{BH}}{\overline{OH}}=\frac{k}{2-k}=3$, $k=\frac{3}{2}$

점 B의 좌표가 $\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$이고, 함수 $y=f(x)$의 그래프가 점 B를 지나므로

$f\left(\frac{1}{2}\right)=a\tan\left(\frac{\pi}{2}\times\frac{1}{2}\right)=a\tan\frac{\pi}{4}=a=\frac{3}{2}$

이때 점 C의 좌표는 $\left(\frac{5}{2}, \frac{3}{2}\right)$이고 $f(x)=\frac{3}{2}\tan\frac{\pi x}{2}$이다.

$f\left(\frac{k}{3}\right)=f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{3}{2}\tan\frac{\pi}{4}=\frac{3}{2}$

$\overline{OC}^2=\left(\frac{5}{2}\right)^2+\left(\frac{3}{2}\right)^2=\frac{17}{2}$

따라서 $f\left(\frac{k}{3}\right)+\overline{OC}^2=\frac{3}{2}+\frac{17}{2}=10$

답 ⑤

필수 유형 ❹

$\cos\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)=-\sin\theta$이므로 $\cos\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)=\frac{\sqrt{5}}{5}$에서 $\sin\theta=-\frac{\sqrt{5}}{5}$

$\tan\theta<0$, $\sin\theta<0$이므로 θ는 제4사분면의 각이고, $\cos\theta>0$이다.

$\cos^2\theta=1-\sin^2\theta=1-\left(-\frac{\sqrt{5}}{5}\right)^2=\frac{4}{5}$에서

$\cos\theta>0$이므로 $\cos\theta=\frac{2\sqrt{5}}{5}$

답 ⑤

10

$\sin\left(-\frac{5}{6}\pi\right)=-\sin\frac{5}{6}\pi=-\sin\left(\pi-\frac{\pi}{6}\right)=-\sin\frac{\pi}{6}=-\frac{1}{2}$

$\cos\frac{8}{3}\pi=\cos\left(2\pi+\frac{2}{3}\pi\right)=\cos\frac{2}{3}\pi=\cos\left(\pi-\frac{\pi}{3}\right)$

$=-\cos\frac{\pi}{3}=-\frac{1}{2}$

따라서 $\sin\left(-\frac{5}{6}\pi\right)+\cos\frac{8}{3}\pi=-\frac{1}{2}+\left(-\frac{1}{2}\right)=-1$

답 ①

11

$\cos\theta=-\frac{1}{3}$이므로 $\sin^2\theta=1-\cos^2\theta=1-\left(-\frac{1}{3}\right)^2=\frac{8}{9}$

$\frac{\pi}{2}<\theta<\pi$일 때, $\sin\theta>0$이므로 $\sin\theta=\frac{2\sqrt{2}}{3}$

$\sin(\pi+\theta)=-\sin\theta=-\frac{2\sqrt{2}}{3}$, $\cos\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)=-\sin\theta=-\frac{2\sqrt{2}}{3}$

$\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\cos\theta=-\frac{1}{3}$, $\cos(\pi-\theta)=-\cos\theta=\frac{1}{3}$

따라서

$\sin(\pi+\theta)\cos\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)+\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)\cos(\pi-\theta)$

$=-\frac{2\sqrt{2}}{3}\times\left(-\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)+\left(-\frac{1}{3}\right)\times\frac{1}{3}=\frac{7}{9}$

답 ③

12

$\sin(2\pi-\theta)=\sin(-\theta)=-\sin\theta$

$\cos(\pi+\theta)=-\cos\theta$

$\cos\left(\frac{3}{2}\pi+\theta\right)=\cos\left\{\pi+\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)\right\}=-\cos\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)=\sin\theta$

이므로 $\sin(2\pi-\theta)+\cos(\pi+\theta)+2\cos\left(\frac{3}{2}\pi+\theta\right)=3\sin\theta$에서

$-\sin\theta-\cos\theta+2\sin\theta=3\sin\theta$

$\cos\theta=-2\sin\theta$ …… ㉠

한편, $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$이므로 $\sin^2\theta+(-2\sin\theta)^2=1$, $\sin^2\theta=\frac{1}{5}$

$\frac{3}{2}\pi<\theta<2\pi$에서 $\sin\theta<0$이므로

$\sin\theta=-\frac{\sqrt{5}}{5}$ …… ㉡

㉡을 ㉠에 대입하면 $\cos\theta=\frac{2\sqrt{5}}{5}$

따라서 $\sin\theta+\cos\theta=-\frac{\sqrt{5}}{5}+\frac{2\sqrt{5}}{5}=\frac{\sqrt{5}}{5}$

답 ④

필수 유형 ❺

함수 $f(x)=a-\sqrt{3}\tan 2x$의 그래프의 주기는 $\frac{\pi}{2}$이다.

함수 $f(x)$가 닫힌구간 $\left[-\frac{\pi}{6}, b\right]$에서 최댓값과 최솟값을 가지므로

$-\frac{\pi}{6}<b<\frac{\pi}{4}$이다.

한편, 함수 $y=f(x)$의 그래프는 구간 $\left[-\frac{\pi}{6}, b\right]$에서 x의 값이 증가할 때, y의 값은 감소하므로 함수 $f(x)$는 $x=-\frac{\pi}{6}$에서 최댓값 7을 갖는다.

즉, $f\left(-\frac{\pi}{6}\right)=a-\sqrt{3}\tan\left(-\frac{\pi}{3}\right)=7$에서

$a+\sqrt{3}\tan\frac{\pi}{3}=7$, $a+3=7$, $a=4$

함수 $f(x)$는 $x=b$에서 최솟값 3을 가지므로

$f(b)=4-\sqrt{3}\tan 2b=3$에서 $\tan 2b=\frac{\sqrt{3}}{3}$

이때 $-\frac{\pi}{3}<2b<\frac{\pi}{2}$이므로 $2b=\frac{\pi}{6}$, $b=\frac{\pi}{12}$

따라서 $a\times b=4\times\frac{\pi}{12}=\frac{\pi}{3}$

답 ③

13

함수 $f(x)$의 최솟값이 -1이고 $a>0$이므로

$-a+b=-1$ …… ㉠

$f\left(\frac{\pi}{3}\right)=a\sin\frac{\pi}{6}+b=\frac{a}{2}+b$이므로

$\frac{a}{2}+b=5$ ⋯⋯ ㉡

㉡−㉠을 하면 $\frac{3}{2}a=6$, $a=4$

$a=4$를 ㉠에 대입하면 $-4+b=-1$, $b=3$

따라서 $a+b=4+3=7$

답 ④

14

$\sin(\pi+x)=-\sin x$, $\sin(\pi-x)=\sin x$,

$\sin\left(\frac{3}{2}\pi+x\right)=\sin\left\{\pi+\left(\frac{\pi}{2}+x\right)\right\}=-\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=-\cos x$

이므로

$f(x)=2\sin(\pi+x)\sin(\pi-x)+\sin\left(\frac{3}{2}\pi+x\right)+3$

$=-2\sin^2 x-\cos x+3=-2(1-\cos^2 x)-\cos x+3$

$=2\cos^2 x-\cos x+1=2\left(\cos x-\frac{1}{4}\right)^2+\frac{7}{8}$

$-1\le\cos x\le 1$이므로 $\cos x=-1$일 때 함수 $f(x)$는 최댓값을 갖고

$\cos x=\frac{1}{4}$일 때, 함수 $f(x)$는 최솟값을 갖는다.

따라서 $M=2\left(-1-\frac{1}{4}\right)^2+\frac{7}{8}=4$, $m=2\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{4}\right)^2+\frac{7}{8}=\frac{7}{8}$이므로

$M+m=4+\frac{7}{8}=\frac{39}{8}$

답 ③

15

함수 $y=f(x)$의 그래프의 점근선은 직선 $x=3$이다.

함수 $g(x)$의 주기는 $\frac{\pi}{\frac{\pi}{a}}=a$이므로 함수 $y=g(x)$의 그래프의 점근선은

직선 $x=na+\frac{a}{2}$ (n은 정수)이다.

조건 (가)에서 $na+\frac{a}{2}=3$이므로 $a=\frac{6}{2n+1}$

a는 자연수이므로 $2n+1$은 6의 양의 약수이어야 한다.

$2n+1=1$ 또는 $2n+1=2$ 또는 $2n+1=3$ 또는 $2n+1=6$

즉, $n=0$ 또는 $n=\frac{1}{2}$ 또는 $n=1$ 또는 $n=\frac{5}{2}$

이때 n은 정수이므로 $n=0$ 또는 $n=1$

(i) $n=0$일 때, $a=6$이므로 $g(x)=\tan\frac{\pi x}{6}$

$g\left(\frac{2}{3}\right)=\tan\frac{\pi}{9}<\tan\frac{\pi}{4}=1$이므로 조건 (나)를 만족시키지 않는다.

(ii) $n=1$일 때, $a=2$이므로 $g(x)=\tan\frac{\pi x}{2}$

$g\left(\frac{2}{3}\right)=\tan\frac{\pi}{3}=\sqrt{3}>1$이므로 조건 (나)를 만족시킨다.

(i), (ii)에서 $g(x)=\tan\frac{\pi x}{2}$

함수 $y=f(x)$의 정의역은 $\{x\mid x>3$인 실수$\}$이고 밑 4가 1보다 크므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 x의 값이 증가하면 y의 값도 증가한다.

$\frac{13}{4}\le x\le 19$에서 $f\left(\frac{13}{4}\right)=\frac{1}{3}\log_4\frac{1}{4}=-\frac{1}{3}$, $f(19)=\frac{1}{3}\log_4 16=\frac{2}{3}$

이므로 $-\frac{1}{3}\le f(x)\le\frac{2}{3}$

또 $-1<x<1$일 때, 함수 $y=g(x)$의 그래프는 x의 값이 증가하면 y의 값도 증가한다.

$g\left(-\frac{1}{3}\right)=\tan\left(-\frac{\pi}{6}\right)=-\tan\frac{\pi}{6}=-\frac{\sqrt{3}}{3}$,

$g\left(\frac{2}{3}\right)=\tan\frac{\pi}{3}=\sqrt{3}$이므로 $-\frac{\sqrt{3}}{3}\le(g\circ f)(x)\le\sqrt{3}$

따라서 $M=\sqrt{3}$, $m=-\frac{\sqrt{3}}{3}$이므로

$12(M-m)^2=12\times\left\{\sqrt{3}-\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)\right\}^2=12\times\left(\frac{4\sqrt{3}}{3}\right)^2=64$

답 64

필수 유형 ❻

$\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=-\sin x$이므로 $4\sin^2 x-4\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right)-3=0$에서

$4\sin^2 x+4\sin x-3=0$

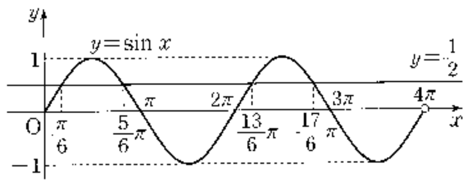
$(2\sin x-1)(2\sin x+3)=0$ ⋯⋯ ㉠

$0\le x<4\pi$일 때, $2\sin x+3>0$이므로 ㉠에서

$2\sin x-1=0$, $\sin x=\frac{1}{2}$

$0\le x<4\pi$일 때, 방정식 $\sin x=\frac{1}{2}$의 해는

$x=\frac{\pi}{6}$ 또는 $x=\frac{5}{6}\pi$ 또는 $x=\frac{13}{6}\pi$ 또는 $x=\frac{17}{6}\pi$



따라서 방정식의 모든 해의 합은

$\frac{\pi}{6}+\frac{5}{6}\pi+\frac{13}{6}\pi+\frac{17}{6}\pi=6\pi$

답 ②

16

부등식 $(2\sin x-1)(\sqrt{2}\cos x-1)>0$에서

$2\sin x-1>0$, $\sqrt{2}\cos x-1>0$ 또는

$2\sin x-1<0$, $\sqrt{2}\cos x-1<0$

(i) $2\sin x-1>0$, $\sqrt{2}\cos x-1>0$일 때

부등식 $2\sin x-1>0$에서 $\sin x>\frac{1}{2}$이므로

$\frac{\pi}{6}<x<\frac{5}{6}\pi$ ⋯⋯ ㉠

부등식 $\sqrt{2}\cos x-1>0$에서 $\cos x>\frac{\sqrt{2}}{2}$이므로

$0\le x<\frac{\pi}{4}$ 또는 $\frac{7}{4}\pi<x<2\pi$ ⋯⋯ ㉡

㉠, ㉡에서 $\frac{\pi}{6}<x<\frac{\pi}{4}$

(ii) $2\sin x-1<0$, $\sqrt{2}\cos x-1<0$일 때

부등식 $2\sin x-1<0$에서 $\sin x<\frac{1}{2}$이므로

$0\le x<\frac{\pi}{6}$ 또는 $\frac{5}{6}\pi<x<2\pi$ $\quad\cdots\cdots$ ㉢

부등식 $\sqrt{2}\cos x-1<0$에서 $\cos x<\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\frac{\pi}{4}<x<\frac{7}{4}\pi$ $\quad\cdots\cdots$ ㉣

㉢, ㉣에서 $\frac{5}{6}\pi<x<\frac{7}{4}\pi$

(i), (ii)에서 $\frac{\pi}{6}<x<\frac{\pi}{4}$ 또는 $\frac{5}{6}\pi<x<\frac{7}{4}\pi$

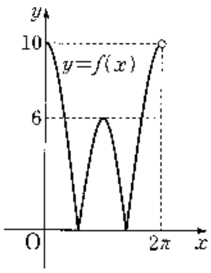
따라서 $\alpha=\frac{\pi}{6}$, $\beta=\frac{\pi}{4}$, $\gamma=\frac{5}{6}\pi$, $\delta=\frac{7}{4}\pi$이므로

$$\sin(\delta-\beta)+\cos(\gamma-\alpha)=\sin\left(\frac{7}{4}\pi-\frac{\pi}{4}\right)+\cos\left(\frac{5}{6}\pi-\frac{\pi}{6}\right)$$
$$=\sin\frac{3}{2}\pi+\cos\frac{2}{3}\pi$$
$$=-1+\left(-\frac{1}{2}\right)=-\frac{3}{2}$$

답 ①

17

$f(x)=|8\cos x+2|$라 하면 $0\le x<2\pi$에서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 그림과 같다.



방정식 $|8\cos x+2|=k$가 서로 다른 세 실근을 가지므로 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=k$가 서로 다른 세 점에서 만나야 한다.

즉, $k=6$

방정식 $|8\cos x+2|=6$에서

$8\cos x+2=6$ 또는 $8\cos x+2=-6$

(i) $8\cos x+2=6$일 때, $\cos x=\frac{1}{2}$이므로 $x=\frac{\pi}{3}$ 또는 $x=\frac{5}{3}\pi$

(ii) $8\cos x+2=-6$일 때, $\cos x=-1$이므로 $x=\pi$

(i), (ii)에서 $\alpha=\frac{\pi}{3}$, $\beta=\pi$, $\gamma=\frac{5}{3}\pi$

따라서 $\frac{k(\gamma-\alpha)}{\beta}=\frac{6\times\left(\frac{5}{3}\pi-\frac{\pi}{3}\right)}{\pi}=8$

답 ③

18

이차방정식 $x^2+(4\sin\theta)x-2+10\cos\theta=0$의 판별식을 D라 하면 이차방정식 $x^2+(4\sin\theta)x-2+10\cos\theta=0$이 실근을 가져야 하므로

$\frac{D}{4}=(2\sin\theta)^2-(-2+10\cos\theta)\ge0$이어야 한다.

즉, $4(1-\cos^2\theta)+2-10\cos\theta\ge0$에서

$2\cos^2\theta+5\cos\theta-3\le0$

$(2\cos\theta-1)(\cos\theta+3)\le0$

$0\le\theta<2\pi$에서 $-1\le\cos\theta\le1$이므로 $\cos\theta+3>0$

즉, $2\cos\theta-1\le0$에서 $\cos\theta\le\frac{1}{2}$이므로 $\frac{\pi}{3}\le\theta\le\frac{5}{3}\pi$

따라서 $\alpha=\frac{\pi}{3}$, $\beta=\frac{5}{3}\pi$이므로

$\beta-\alpha=\frac{5}{3}\pi-\frac{\pi}{3}=\frac{4}{3}\pi$

답 ②

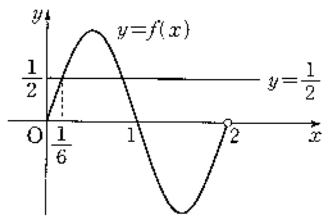
19

함수 $y=\sin(n\pi x)$의 주기는 $\frac{2\pi}{n\pi}=\frac{2}{n}$

(i) $0\le x<2$, 즉 $n=1$일 때, $f(x)=\sin(\pi x)$이다.

방정식 $2f(x)-1=0$에서 $\sin(\pi x)=\frac{1}{2}$

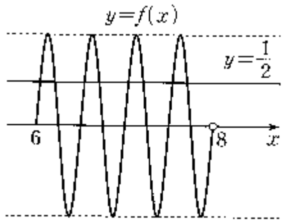
$0\le x<2$에서 방정식 $\sin(\pi x)=\frac{1}{2}$의 실근 중 가장 작은 것이 α이므로 $\alpha=\frac{1}{6}$



(ii) $6\le x<8$, 즉 $n=4$일 때, $f(x)=\sin(4\pi x)$이다.

방정식 $2f(x)-1=0$에서 $\sin(4\pi x)=\frac{1}{2}$

$6\le x<8$에서 방정식 $\sin(4\pi x)=\frac{1}{2}$의 실근 중 가장 큰 것이 β이므로 $\beta=6+\frac{3}{2}+\frac{5}{24}=\frac{185}{24}$



(i), (ii)에서 $\frac{4\beta}{\alpha}=\frac{4\times\frac{185}{24}}{\frac{1}{6}}=185$

답 185

필수 유형 ❼

삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이가 15이므로 사인법칙에 의하여

$\frac{\overline{AC}}{\sin B}=2\times15=30$

따라서 $\overline{AC}=30\sin B=30\times\frac{7}{10}=21$

답 21

20

$\sin^2A=1-\cos^2A=1-\left(\frac{\sqrt{7}}{4}\right)^2=\frac{9}{16}$

이때 $0<A<\pi$이고 $\sin A>0$이므로

$\sin A=\frac{3}{4}$

삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이가 16이므로

사인법칙에 의하여

$\dfrac{\overline{BC}}{\sin A}=2\times16$

따라서 $\overline{BC}=2\times16\times\sin A=2\times16\times\dfrac{3}{4}=24$

답 ④

21

삼각형 ADC에서 사인법칙에 의하여

$\dfrac{\overline{AD}}{\sin(\angle ACD)}=\dfrac{\overline{CD}}{\sin(\angle CAD)}$이므로

$\overline{AD}=\dfrac{\overline{CD}}{\sin(\angle CAD)}\times\sin(\angle ACD)=\dfrac{2}{\sin\frac{\pi}{6}}\times\sin\dfrac{\pi}{4}$

$=\dfrac{2}{\frac{1}{2}}\times\dfrac{\sqrt{2}}{2}=2\sqrt{2}$

삼각형 ABD의 외접원의 반지름의 길이를 R라 하면

사인법칙에 의하여

$\dfrac{\overline{AD}}{\sin(\angle ABD)}=2R$이므로

$R=\dfrac{\overline{AD}}{2\sin(\angle ABD)}=\dfrac{2\sqrt{2}}{2\sin\frac{\pi}{3}}$

$=\dfrac{2\sqrt{2}}{2\times\frac{\sqrt{3}}{2}}=\dfrac{2\sqrt{6}}{3}$

답 ②

삼각형 ACD에서 코사인법칙에 의하여

$\overline{CD}^2=\overline{AD}^2+\overline{AC}^2-2\times\overline{AD}\times\overline{AC}\times\cos\theta$

$=7^2+(3\sqrt{5})^2-2\times7\times3\sqrt{5}\times\cos\theta$

$=94-42\sqrt{5}\cos\theta$

$\angle BAC=\angle CAD$이므로 $\overline{BC}=\overline{CD}$, 즉 $\overline{BC}^2=\overline{CD}^2$이다.

이때 $70-30\sqrt{5}\cos\theta=94-42\sqrt{5}\cos\theta$에서

$\cos\theta=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$

$\overline{BC}^2=70-30\sqrt{5}\cos\theta=70-30\sqrt{5}\times\dfrac{2\sqrt{5}}{5}=10$

$\overline{BC}=\sqrt{10}$

한편, $\sin^2\theta=1-\cos^2\theta=1-\left(\dfrac{2\sqrt{5}}{5}\right)^2=\dfrac{1}{5}$이므로

$\sin\theta=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$

따라서 구하는 원의 반지름의 길이를 R라 하면

삼각형 ABC에서 사인법칙에 의하여

$\dfrac{\overline{BC}}{\sin\theta}=2R$이므로

$\dfrac{\sqrt{10}}{\frac{\sqrt{5}}{5}}=2R$

$5\sqrt{2}=2R$

따라서 $R=\dfrac{5\sqrt{2}}{2}$

답 ①

22

직각삼각형 ABC에서

$\overline{BC}=\sqrt{\overline{AC}^2-\overline{AB}^2}=\sqrt{4^2-3^2}=\sqrt{7}$이므로 $\sin(\angle CAB)=\dfrac{\sqrt{7}}{4}$

점 D는 선분 AB를 2 : 1로 내분하는 점이므로

$\overline{BD}=\dfrac{1}{3}\times\overline{AB}=\dfrac{1}{3}\times3=1$

직각삼각형 DBC에서 $\overline{CD}=\sqrt{\overline{BD}^2+\overline{BC}^2}=\sqrt{1^2+(\sqrt{7})^2}=2\sqrt{2}$

삼각형 ADC의 외접원의 반지름의 길이를 R라 하면 사인법칙에 의하여

$\dfrac{\overline{CD}}{\sin(\angle CAD)}=2R$에서 $\dfrac{2\sqrt{2}}{\frac{\sqrt{7}}{4}}=2R$, $R=\dfrac{4\sqrt{2}}{\sqrt{7}}$

삼각형 ADC의 외접원의 넓이는 $\pi\times\left(\dfrac{4\sqrt{2}}{\sqrt{7}}\right)^2=\dfrac{32}{7}\pi$

따라서 $p=7$, $q=32$이므로

$p+q=7+32=39$

답 39

필수 유형 ❸

$\angle BAC=\angle CAD=\theta\left(0<\theta<\dfrac{\pi}{2}\right)$라 하면

삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의하여

$\overline{BC}^2=\overline{AB}^2+\overline{AC}^2-2\times\overline{AB}\times\overline{AC}\times\cos\theta$

$=5^2+(3\sqrt{5})^2-2\times5\times3\sqrt{5}\times\cos\theta$

$=70-30\sqrt{5}\cos\theta$

23

$\overline{BC}=a\ (a>4\sqrt{2})$라 하면 삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의하여

$\overline{AC}^2=\overline{AB}^2+\overline{BC}^2-2\times\overline{AB}\times\overline{BC}\times\cos(\angle ABC)$

이므로

$(2\sqrt{2})^2=(4\sqrt{2})^2+a^2-2\times4\sqrt{2}\times a\times\dfrac{5\sqrt{2}}{8}$

$a^2-10a+24=0$, $(a-6)(a-4)=0$

$a>4\sqrt{2}$이므로 $a=6$

한편, $\angle BAD=\angle CAD$이므로 $\overline{AB}:\overline{AC}=\overline{BD}:\overline{CD}$

즉, $2:1=\overline{BD}:\overline{CD}$이므로 $\overline{BD}=2\overline{CD}$

$\overline{BC}=\overline{BD}+\overline{CD}=3\overline{CD}=6$에서 $\overline{CD}=2$

이때 $\overline{BD}=4$

직각삼각형 ABE에서 $\angle BAE=\theta\left(0<\theta<\dfrac{\pi}{4}\right)$라 하면

$\overline{AE}=4\sqrt{2}\cos\theta$

직각삼각형 CAF에서

$\angle CAF=\theta$이므로 $\overline{AF}=2\sqrt{2}\cos\theta$

삼각형 ABD에서 코사인법칙에 의하여

$\overline{AD}^2=\overline{AB}^2+\overline{BD}^2-2\times\overline{AB}\times\overline{BD}\times\cos(\angle ABD)$

$=(4\sqrt{2})^2+4^2-2\times4\sqrt{2}\times4\times\dfrac{5\sqrt{2}}{8}=8$

$\overline{AD}=2\sqrt{2}$

삼각형 ABD에서

$\cos\theta=\dfrac{\overline{AB}^2+\overline{AD}^2-\overline{BD}^2}{2\times\overline{AB}\times\overline{AD}}=\dfrac{(4\sqrt{2})^2+(2\sqrt{2})^2-4^2}{2\times4\sqrt{2}\times2\sqrt{2}}=\dfrac{3}{4}$

따라서

$\overline{AF} \times \overline{AE} = 2\sqrt{2}\cos\theta \times 4\sqrt{2}\cos\theta = 16\cos^2\theta$

$= 16 \times \left(\frac{3}{4}\right)^2 = 9$

답 9

24

삼각형 ABC에서 $\angle CAB = \theta \left(\frac{\pi}{2} < \theta < \pi\right)$라 하면

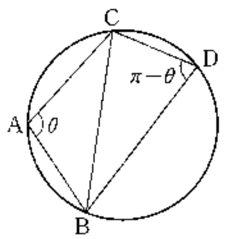
사인법칙에 의하여

$\frac{\overline{BC}}{\sin\theta} = 2 \times \frac{4\sqrt{10}}{5}$, $\frac{2\sqrt{6}}{\sin\theta} = 2 \times \frac{4\sqrt{10}}{5}$, $\sin\theta = \frac{\sqrt{15}}{4}$

이때 $\cos^2\theta = 1 - \sin^2\theta = 1 - \left(\frac{\sqrt{15}}{4}\right)^2 = \frac{1}{16}$

$\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$에서 $\cos\theta < 0$이므로

$\cos\theta = -\frac{1}{4}$



삼각형 BDC에서

$\angle BDC = \pi - \theta$이므로

$\cos(\angle BDC) = \cos(\pi - \theta) = -\cos\theta = \frac{1}{4}$

$\overline{CD} = k\ (k > 0)$이라 하면

$\overline{BD} = 2k$

이므로 코사인법칙에 의하여

$\overline{BC}^2 = \overline{BD}^2 + \overline{CD}^2 - 2 \times \overline{BD} \times \overline{CD} \times \cos(\angle BDC)$

$(2\sqrt{6})^2 = (2k)^2 + k^2 - 2 \times 2k \times k \times \frac{1}{4}$

$24 = 4k^2$, $k^2 = 6$

$k > 0$이므로

$k = \sqrt{6}$

$\overline{CD} = \sqrt{6}$, $\overline{BD} = 2\sqrt{6}$

$\sin(\angle BDC) = \sin(\pi - \theta) = \sin\theta = \frac{\sqrt{15}}{4}$이므로

삼각형 BDC의 넓이 S는

$S = \frac{1}{2} \times \overline{BD} \times \overline{CD} \times \sin(\angle BDC)$

$= \frac{1}{2} \times 2\sqrt{6} \times \sqrt{6} \times \frac{\sqrt{15}}{4} = \frac{3\sqrt{15}}{2}$

따라서 $4S^2 = 4 \times \left(\frac{3\sqrt{15}}{2}\right)^2 = 135$

답 135

03 수열

정답			본문 28~39쪽
필수 유형 ❶ ①	01 ①	02 ②	03 42
필수 유형 ❷ 7	04 ③	05 ①	06 ⑤
	07 8		
필수 유형 ❸ 36	08 ④	09 ①	10 ④
필수 유형 ❹ 64	11 ①	12 ③	13 ④
필수 유형 ❺ ③	14 ③	15 ②	16 ③
필수 유형 ❻ 9	17 ④	18 ③	19 ②
필수 유형 ❼ 22	20 ⑤	21 ①	22 ④
필수 유형 ❽ 91	23 ③	24 29	25 ⑤
	26 ②		
필수 유형 ❾ ④	27 ②	28 ④	29 ①
필수 유형 ❿ ④	30 16	31 ④	32 99
필수 유형 ⓫ ⑤	33 ⑤	34 ④	35 ③
필수 유형 ⓬ ④	36 ②		

필수 유형 ❶

등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d라 하면

$a_{10} - a_7 = (a_1 + 9d) - (a_1 + 6d) = 3d = 6$이므로 $d = 2$

따라서 $a_4 = a_1 + 3d = 4 + 6 = 10$

답 ①

01

등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a라 하면

$a_2 = a + d = 3$ ...... ㉠

$a_7 - a_5 = (a + 6d) - (a + 4d) = 2d$에서

$2d = 3 - d$이므로 $d = 1$ ...... ㉡

㉡을 ㉠에 대입하면 $a = 2$

따라서 $a_4 = a + 3d = 2 + 3 = 5$

답 ①

02

수열 $\{a_n\}$의 첫째항이 45이고 공차가 -7이므로 일반항 a_n은 $a_n = -7n + 52$이다. 또한 수열 $\{b_n\}$은 첫째항과 공차가 같고 모든 항이 자연수이므로 수열 $\{b_n\}$의 공차를 d라 하면 d는 자연수이다.

$b_n = b_1 + (n-1)d$에서 $b_1 = d$이므로 $b_n = dn$이다.

따라서 $c_n = (d - 7)n + 52$

$c_n > 100$을 만족시키는 자연수 n의 최솟값이 10이므로

$c_9 \le 100$, $c_{10} > 100$이다.

$c_9 = 9(d - 7) + 52 = 9d - 11$에서 $9d - 11 \le 100$, $d \le \frac{37}{3}$

$c_{10} = 10(d - 7) + 52 = 10d - 18$에서 $10d - 18 > 100$, $d > \frac{59}{5}$

즉, $\frac{59}{5}<d\le\frac{37}{3}$이고 d는 자연수이므로 $d=12$

따라서 $b_1=12$

답 ②

03

3으로 나눈 나머지가 1인 자연수를 나열하면 1, 4, 7, 10, 13, …이므로 첫째항이 1이고 공차가 3인 등차수열이다.

즉, $a_n=3n-2$

4로 나눈 나머지가 2인 자연수를 나열하면

2, 6, 10, 14, 18, …이므로 첫째항이 2이고 공차가 4인 등차수열이다.

즉, $b_n=4n-2$

$a_k=b_m$에서 $3k-2=4m-2$, $3k=4m$

즉, k는 4의 배수이고 m은 3의 배수이므로

$k=4k'$, $m=3m'$ (단, $k'\le5$, $m'\le6$인 자연수)

이를 대입하면 $3\times4k'=4\times3m'$에서 $k'=m'$이다.

k와 m은 20 이하의 자연수이므로 $k+m$의 최솟값은 $k'=m'=1$, 즉 $k=4$, $m=3$일 때 7이고, $k+m$의 최댓값은 $k'=m'=5$, 즉 $k=20$, $m=15$일 때 35이다.

따라서 $k+m$의 최댓값과 최솟값의 합은

$35+7=42$

답 42

필수 유형 ❷

$S_{k+2}-S_k=a_{k+2}+a_{k+1}=4$이고 등차수열 $\{a_n\}$의 공차가 2이므로

$a_1+2(k+1)+a_1+2k=4$, $2a_1+4k=2$

$a_1=1-2k$ …… ㉠

한편, $S_k=\frac{k\{2a_1+2(k-1)\}}{2}=-16$이고 ㉠을 대입하면

$\frac{k\{2(1-2k)+2(k-1)\}}{2}=-16$

$-k^2=-16$에서 k는 자연수이므로 $k=4$

이것을 ㉠에 대입하면 $a_1=-7$

따라서 $a_{2k}=a_8=a_1+7d=-7+7\times2=7$

답 7

04

첫째항이 3이고 공차가 2인 등차수열 $\{a_n\}$의 일반항은

$a_n=3+2(n-1)=2n+1$이므로

$a_{2n-1}=2(2n-1)+1=4n-1$, $a_{2n}=2\times2n+1=4n+1$이고

$b_n=a_{2n-1}+a_{2n}=(4n-1)+(4n+1)=8n$

따라서 수열 $\{b_n\}$은 첫째항이 $b_1=8$이고 공차가 8인 등차수열이다.

따라서 $S_5=\frac{5\times(2\times8+4\times8)}{2}=120$

답 ③

05

등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공차를 d라 하면 $a_n=a+(n-1)d$

또한 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합이 S_n이므로

$S_{n+1}=S_n+a_{n+1}$

즉, $2S_n+a_{n+1}=3n^2-28n-14$ …… ㉠

한편, $S_n=\frac{n\{2a+(n-1)d\}}{2}$이므로 이것을 ㉠에 대입하면

$2\times\frac{n\{2a+(n-1)d\}}{2}+(a+dn)=3n^2-28n-14$

$n\{2a+(n-1)d\}+(a+dn)=dn^2+2an+a$

$dn^2+2an+a=3n^2-28n-14$ …… ㉡

이 식은 모든 자연수 n에 대하여 성립하므로 ㉡은 n에 대한 항등식이다.

즉, $d=3$, $a=-14$

따라서 수열 $\{a_n\}$의 일반항은 $a_n=3n-17$이므로

$a_6=3\times6-17=1$

답 ①

다른 풀이

$S_{n+1}+S_n=3n^2-28n-14$에

$n=1$을 대입하면 $(a_2+a_1)+a_1=-39$ …… ㉠

$n=2$를 대입하면 $(a_3+a_2+a_1)+(a_2+a_1)=-58$ …… ㉡

등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d라 하면

$a_2=a_1+d$이므로 이것을 ㉠에 대입하면

$3a_1+d=-39$ …… ㉢

$a_3=a_1+2d$, $a_2=a_1+d$를 ㉡에 대입하면

$5a_1+4d=-58$ …… ㉣

㉢, ㉣을 연립하여 풀면 $a_1=-14$, $d=3$

따라서 수열 $\{a_n\}$의 일반항은 $a_n=3n-17$이므로

$a_6=3\times6-17=1$

06

$b_n=\frac{(a_{n+1})^2-(a_n)^2}{3}=\frac{1}{3}(a_{n+1}-a_n)(a_{n+1}+a_n)$

등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a $(a>0)$, 공차를 d $(d>0)$이라 하면

$a_n=a+(n-1)d$에서 $a_{n+1}-a_n=d$이고 $a_{n+1}+a_n=2a+(2n-1)d$

$b_n=\frac{d}{3}(2dn+2a-d)$

즉, $b_1=\frac{d}{3}(2a+d)=4$ …… ㉠

한편, $b_3=\frac{d}{3}(2a+5d)$이고 $S_6=\frac{6(2a+5d)}{2}=3(2a+5d)$이므로

$b_3=\frac{1}{3}S_6$에서 $\frac{d}{3}(2a+5d)=2a+5d$

$a>0$, $d>0$에서 $2a+5d\ne0$이므로 $\frac{d}{3}=1$

$d=3$ …… ㉡

㉡을 ㉠에 대입하면 $2a+3=4$이므로 $a=\frac{1}{2}$

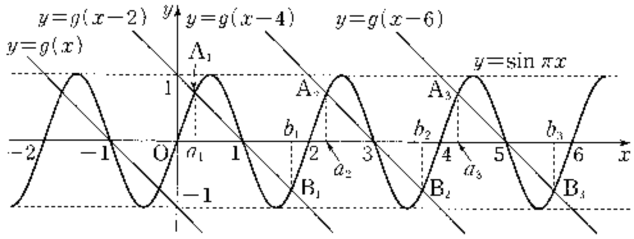
따라서 $a_n=3n-\frac{5}{2}$이므로 $a_4=3\times4-\frac{5}{2}=\frac{19}{2}$

답 ⑤

07

직선 $y=-x$가 원점에 대하여 대칭인 직선이므로 직선 $y=g(x)$는 점 $(-1, 0)$에 대하여 대칭인 직선이다.

따라서 직선 $y=g(x-2n)$은 점 $(2n-1,\ 0)$에 대하여 대칭이고 기울기가 -1인 직선이다.
함수 $y=\sin \pi x$의 그래프는 함수 $y=\sin \pi x$의 그래프가 x축과 만나는 모든 점에 대하여 대칭이고 점 $(2n-1,\ 0)$은 함수 $y=\sin \pi x$의 그래프 위의 점이므로 함수 $y=\sin \pi x$의 그래프는 점 $(2n-1,\ 0)$에 대하여 대칭이다.



따라서 그림과 같이 곡선 $y=\sin \pi x$와 직선 $y=g(x-2n)$이 모두 점 $(2n-1,\ 0)$에 대하여 대칭이므로 두 함수의 그래프의 교점 A_n, B_n도 점 $(2n-1,\ 0)$에 대하여 대칭이다.
즉, $\dfrac{a_n+b_n}{2}=2n-1$에서 $a_n+b_n=4n-2$
따라서 $c_n=4n-2$
그러므로 수열 $\{c_n\}$은 첫째항이 2이고 공차가 4인 등차수열이다.
$S_n=\dfrac{n\{4+4(n-1)\}}{2}=2n^2$이므로 $2n^2>100$에서 $n^2>50$
한편, $7<\sqrt{50}<8$이므로 $n^2>50$을 만족시키는 자연수 n의 최솟값은 8이다.

답 8

필수 유형 ❸

주어진 등비수열의 첫째항을 a, 공비를 r라 하면
모든 항이 양수이므로 $a>0$, $r>0$
$a_n=ar^{n-1}$에서
$\dfrac{a_{16}}{a_{14}}+\dfrac{a_8}{a_7}=\dfrac{ar^{15}}{ar^{13}}+\dfrac{ar^7}{ar^6}=r^2+r=12$
$r^2+r-12=0$, $(r+4)(r-3)=0$
$r>0$이므로 $r=3$
따라서 $\dfrac{a_3}{a_1}+\dfrac{a_6}{a_3}=\dfrac{ar^2}{a}+\dfrac{ar^5}{ar^2}=r^2+r^3=3^2+3^3=36$

답 36

08

등비수열 $\{a_n\}$의 공비를 r라 하면 $\dfrac{a_4}{a_3}=r=\sqrt{6}$이다.
따라서 $a_5=\dfrac{1}{9}\times(\sqrt{6})^4=\dfrac{1}{9}\times 36=4$

답 ①

09

등비수열 $\{a_n\}$의 공비를 r라 하면
$a_3-a_1=4$에서
$a_1(r^2-1)=4$ …… ㉠
$a_7-a_5=36$에서
$a_5(r^2-1)=36$ …… ㉡
㉡÷㉠을 하면
$\dfrac{a_5}{a_1}=9$, $a_5=a_1\times 9$
한편, $a_5=a_1r^4$이므로 $r^4=9$
$r^2=3$이므로 이것을 ㉠에 대입하면 $a_1=2$
따라서 $a_9=a_1\times r^8=a_1\times(r^2)^4=2\times 3^4=162$

답 ①

10

등비수열 $\{a_n\}$의 공비를 $r\ (r>0)$이라 하면
$a_1+a_2=a_1(1+r)$, $a_4+a_5=a_4(1+r)$이므로
$\dfrac{a_1+a_2}{a_4+a_5}=\dfrac{1}{2}$에서 $\dfrac{a_1}{a_4}=\dfrac{1}{2}$
즉, $a_4=2a_1$이므로 $r^3=2$
$a_{10}=a_1\times r^9=a_1\times(r^3)^3=8a_1$이므로
$8a_1\le 40$, $a_1\le 5$
따라서 자연수 a_1의 값은 1, 2, 3, 4, 5이고 그 합은 15이다.

답 ④

필수 유형 ❹

주어진 등비수열의 공비를 r라 하면
$r=1$일 때, $a_n=1$이므로 $\dfrac{S_6}{S_3}=\dfrac{6}{3}=2$, $2a_4-7=-5$가 되어 모순이다.
즉, $r\ne 1$
$\dfrac{S_6}{S_3}=\dfrac{\dfrac{r^6-1}{r-1}}{\dfrac{r^3-1}{r-1}}=\dfrac{r^6-1}{r^3-1}=\dfrac{(r^3+1)(r^3-1)}{r^3-1}=r^3+1$이고
$\dfrac{S_6}{S_3}=2a_4-7$에서 $2a_4-7=2r^3-7$이므로
$r^3+1=2r^3-7$
$r^3=8$, $r=2$
따라서 $a_7=a_1r^6=1\times 2^6=64$

답 64

11

등비수열 $\{a_n\}$의 공비를 $r\ (r>0)$이라 하면
$r=1$이면 $a_n=3$이므로 $S_4=3\times 4=12$, $S_8=3\times 8=24$가 되어 $S_8=10S_4$를 만족시키지 않는다.
$r\ne 1$이므로
$S_8=\dfrac{3(1-r^8)}{1-r}$, $S_4=\dfrac{3(1-r^4)}{1-r}$
$S_8=10S_4$에서
$\dfrac{3(1-r^8)}{1-r}=10\times\dfrac{3(1-r^4)}{1-r}$
$\dfrac{3(1-r^4)(1+r^4)}{1-r}=10\times\dfrac{3(1-r^4)}{1-r}$
$1+r^4=10$, $r^4=9$
$r>0$이므로 $r=\sqrt{3}$
따라서 $a_3=a_1r^2=3\times(\sqrt{3})^2=9$

답 ①

다른 풀이

등비수열 $\{a_n\}$의 공비를 r $(r>0)$이라 하면

$S_8=10S_4$에서 $S_8-S_4=9S_4$이므로

$a_5+a_6+a_7+a_8=9(a_1+a_2+a_3+a_4)$

$a_1r^4+a_1r^5+a_1r^6+a_1r^7=9(a_1+a_1r+a_1r^2+a_1r^3)$

$r^4(a_1+a_1r+a_1r^2+a_1r^3)=9(a_1+a_1r+a_1r^2+a_1r^3)$

$r^4=9$

$r>0$이므로 $r=\sqrt{3}$

따라서 $a_3=a_1r^2=3\times(\sqrt{3})^2=9$

12

등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a $(a>0)$, 공비를 r $(r>0)$이라 하면

$\dfrac{a_1a_4}{a_3}=\dfrac{a\times ar^3}{ar^2}=ar=2$ ...... ㉠

$a_2+a_6=ar+ar^5=ar(1+r^4)=10$ ...... ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면

$1+r^4=5$, $r^4=4$

$r>0$이므로 $r=\sqrt{2}$

㉠에 의하여 $a=\sqrt{2}$

즉, $a_n=(\sqrt{2})^n$이므로

$b_n=\dfrac{a_{2n}}{2a_{n+1}}=\dfrac{(\sqrt{2})^{2n}}{2\times(\sqrt{2})^{n+1}}=\dfrac{(\sqrt{2})^n}{2\sqrt{2}}=(\sqrt{2})^{n-3}$

따라서 수열 $\{b_n\}$은 첫째항이 $\dfrac{1}{2}$이고 공비가 $\sqrt{2}$인 등비수열이므로 첫째항부터 제8항까지의 합은

$\dfrac{\frac{1}{2}\{(\sqrt{2})^8-1\}}{\sqrt{2}-1}=\dfrac{15}{2}\times\dfrac{1}{\sqrt{2}-1}=\dfrac{15}{2}(\sqrt{2}+1)$

답 ⑤

13

등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공비 $\sqrt[5]{3}$을 r라 하자.

수열 $\{a_n\}$의 일반항은 $a_n=ar^{n-1}$이므로

$S_n=(a_1+a_2)+(a_2+a_3)+(a_3+a_4)+\cdots+(a_n+a_{n+1})$

$T_n=(a_1+a_2)+(a_3+a_4)+(a_5+a_6)+\cdots+(a_{2n-1}+a_{2n})$

에서

T_5-S_5

$=(a_1+a_2)+(a_3+a_4)+(a_5+a_6)+(a_7+a_8)+(a_9+a_{10})$
$\quad-\{(a_1+a_2)+(a_2+a_3)+(a_3+a_4)+(a_4+a_5)+(a_5+a_6)\}$

$=(a_7+a_8+a_9+a_{10})-(a_2+a_3+a_4+a_5)$

$=(a_2\times r^5+a_3\times r^5+a_4\times r^5+a_5\times r^5)-(a_2+a_3+a_4+a_5)$

$=(r^5-1)(a_2+a_3+a_4+a_5)$

$r^5=(\sqrt[5]{3})^5=3$이므로

$T_5-S_5=2(a_2+a_3+a_4+a_5)=8$

따라서 $a_2+a_3+a_4+a_5=4$

답 ④

다른 풀이

등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공비 $\sqrt[5]{3}$을 r라 하면

수열 $\{a_n\}$의 일반항은 $a_n=ar^{n-1}$이므로

$b_n=a_n+a_{n+1}=ar^{n-1}+ar^n=a(1+r)r^{n-1}$

$c_n=a_{2n-1}+a_{2n}=ar^{2n-2}+ar^{2n-1}=a(1+r)r^{2n-2}$

$T_5=c_1+c_2+c_3+c_4+c_5=\dfrac{a(1+r)(1-r^{10})}{1-r^2}$

$S_5=b_1+b_2+b_3+b_4+b_5=\dfrac{a(1+r)(1-r^5)}{1-r}$

$T_5-S_5=\dfrac{a(1+r)(1-r^{10})}{1-r^2}-\dfrac{a(1+r)(1-r^5)}{1-r}$

$=\dfrac{a(1+r)(1-r^5)}{1-r}\left(\dfrac{1+r^5}{1+r}-1\right)$

$=\dfrac{a(1+r)(1-r^5)}{1-r}\times\dfrac{1+r^5-1-r}{1+r}$

$=\dfrac{a(1-r^5)(r^5-r)}{1-r}$

$=ar(r^5-1)(r+1)(r^2+1)$

$=(r^5-1)(ar+ar^2+ar^3+ar^4)$

$=(r^5-1)(a_2+a_3+a_4+a_5)=8$

$r^5=(\sqrt[5]{3})^5=3$이므로

$2(a_2+a_3+a_4+a_5)=8$에서

$a_2+a_3+a_4+a_5=4$

필수 유형 ❺

$x^2-nx+4(n-4)=0$에서 $(x-4)(x-n+4)=0$

$x=4$ 또는 $x=n-4$

한편, 세 수 1, α, β가 이 순서대로 등차수열을 이루므로

$2\alpha=\beta+1$ ...... ㉠

(i) $\alpha=4$, $\beta=n-4$일 때

$\alpha<\beta$이므로 $4<n-4$에서 $n>8$

㉠에서 $8=(n-4)+1$이므로 $n=11$

(ii) $\alpha=n-4$, $\beta=4$일 때

$\alpha<\beta$이므로 $n-4<4$에서 $n<8$

㉠에서 $2(n-4)=4+1$이므로 $n=\dfrac{13}{2}$

(i), (ii)에서 구하는 자연수 n의 값은 11이다.

답 ③

14

수열 $\{a_n\}$이 등비수열이므로

$a_2a_4=(a_3)^2$

$a_2a_4=256$에서 $(a_3)^2=256$

$a_3>0$이므로 $a_3=16$

$a_1+a_3=24$에서 $a_1+16=24$

$a_1=8$

$a_1\times a_5=(a_3)^2$에서 $8\times a_5=16^2$

따라서 $a_5=32$

답 ③

15

세 수 a, $a+b$, ab가 이 순서대로 등차수열을 이루므로

$2(a+b)=a+ab$

$a+2b-ab=0$ ...... ㉠

세 수 a^2, ab, $2b$가 이 순서대로 등비수열을 이루므로

$(ab)^2=a^2\times 2b$

$a^2b(b-2)=0$

$a\neq 0$, $b\neq 0$이므로 $b=2$

$b=2$를 ㉠에 대입하면

$a+2\times 2-a\times 2=0$

$a=4$

따라서 $ab=4\times 2=8$

답 ②

16

$\mathrm{P}(n, \sqrt{n})$, $\mathrm{Q}(n, \sqrt{2n})$, $\mathrm{R}(n, \sqrt{mn})$이므로

$\overline{\mathrm{PA}}=\sqrt{n}$, $\overline{\mathrm{QA}}=\sqrt{2n}$, $\overline{\mathrm{RA}}=\sqrt{mn}$

$\overline{\mathrm{PA}}$, $\overline{\mathrm{QA}}$, $\overline{\mathrm{RA}}$가 이 순서대로 등비수열을 이루므로

$\overline{\mathrm{QA}}^2=\overline{\mathrm{PA}}\times\overline{\mathrm{RA}}$

즉, $(\sqrt{2n})^2=\sqrt{n}\times\sqrt{mn}$에서 $n>0$이므로 $2n=n\sqrt{m}$이고,

$\sqrt{m}=2$, $m=4$

또 $\overline{\mathrm{OP}}^2=n^2+n$, $\overline{\mathrm{OQ}}^2+4=n^2+2n+4$, $\overline{\mathrm{OR}}^2+5=n^2+4n+5$

$\overline{\mathrm{OP}}^2$, $\overline{\mathrm{OQ}}^2+4$, $\overline{\mathrm{OR}}^2+5$가 이 순서대로 등차수열을 이루므로

$2(\overline{\mathrm{OQ}}^2+4)=\overline{\mathrm{OP}}^2+(\overline{\mathrm{OR}}^2+5)$

즉, $2(n^2+2n+4)=(n^2+n)+(n^2+4n+5)$에서 $n=3$

따라서 $m+n=4+3=7$

답 ③

필수 유형 ❻

모든 자연수 n에 대하여

$S_{n+3}-S_n=13\times 3^{n-1}$이 성립하고

$S_{n+3}-S_n=a_{n+1}+a_{n+2}+a_{n+3}$이므로 모든 자연수 n에 대하여

$a_{n+1}+a_{n+2}+a_{n+3}=13\times 3^{n-1}$ ...... ㉠

이 성립한다.

㉠에 $n=1$을 대입하면 $a_2+a_3+a_4=13$이므로

등비수열 $\{a_n\}$의 공비를 r라 하면

$a_1r+a_1r^2+a_1r^3=13$

$a_1r(1+r+r^2)=13$ ...... ㉡

또 ㉠에 $n=2$를 대입하면 $a_3+a_4+a_5=13\times 3=39$이므로

$a_1r^2+a_1r^3+a_1r^4=39$

$a_1r^2(1+r+r^2)=39$ ...... ㉢

㉢÷㉡을 하면

$\dfrac{a_1r^2(1+r+r^2)}{a_1r(1+r+r^2)}=\dfrac{39}{13}$에서 $r=3$

$r=3$을 ㉡에 대입하면

$a_1\times 3\times(1+3+9)=13$에서 $a_1=\dfrac{1}{3}$

따라서 $a_4=a_1r^3=\dfrac{1}{3}\times 3^3=9$

답 9

17

$a_4=S_4-S_3=(2\times 4^2+4k)-(2\times 3^2+3k)=14+k$

이때 $a_4=20$이므로

$14+k=20$, $k=6$

따라서 $a_1=S_1=2+6=8$

답 ④

18

등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a $(a>0)$, 공비를 r라 하자.

$S_{10}-S_8=a_{10}+a_9=ar^9+ar^8=ar^8(r+1)$

$S_7-S_5=a_7+a_6=ar^6+ar^5=ar^5(r+1)$

$\dfrac{S_{10}-S_8}{S_7-S_5}=\dfrac{ar^8(r+1)}{ar^5(r+1)}=r^3$이므로

$\dfrac{S_{10}-S_8}{S_7-S_5}=4$에서 $r^3=4$ ...... ㉠

또 $S_2-S_1=a_2=ar$이므로

$(S_2-S_1)^3=108$에서 $(ar)^3=108$

즉, $a^3r^3=108$ ...... ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면

$a^3\times 4=108$, $a^3=27$

$a>0$이므로 $a=3$

따라서 $a_2\times a_8=(a_4)^2=(ar^3)^2=a^2\times(r^3)^2=3^2\times 4^2=144$

답 ③

19

조건 (가)에 의하여

$S_{2n-1}=S_1+(n-1)\times 3$

조건 (나)에 의하여

$S_{2n}=S_2+(n-1)\times 4$

$a_{11}=S_{11}-S_{10}=(S_1+15)-(S_2+16)=S_1-S_2-1$

$a_{12}=S_{12}-S_{11}=(S_2+20)-(S_1+15)=S_2-S_1+5$

이때 $a_{11}=a_{12}$이므로

$S_1-S_2-1=S_2-S_1+5$

$S_2-S_1=-3$

따라서

$a_7=S_7-S_6=(S_1+9)-(S_2+8)$

$=1-(S_2-S_1)$

$=1-(-3)=4$

답 ②

필수 유형 ❼

$\sum_{k=1}^{5}(3a_k+5)=55$에서

$3\sum_{k=1}^{5}a_k+25=55$

$\sum_{k=1}^{5}a_k=10$

$\sum_{k=1}^{5}(a_k+b_k)=32$에서

$\sum_{k=1}^{5}a_k+\sum_{k=1}^{5}b_k=32$

따라서 $\sum_{k=1}^{5}b_k=32-\sum_{k=1}^{5}a_k=32-10=22$

답 22

20

$\sum_{k=1}^{15}(2a_k-b_k)=17$에서

$\sum_{k=1}^{15}(2a_k-b_k)=2\sum_{k=1}^{15}a_k-\sum_{k=1}^{15}b_k=2\times12-\sum_{k=1}^{15}b_k=24-\sum_{k=1}^{15}b_k$

이므로 $24-\sum_{k=1}^{15}b_k=17$

$\sum_{k=1}^{15}b_k=24-17=7$

따라서 $\sum_{k=1}^{15}(b_k+1)=\sum_{k=1}^{15}b_k+\sum_{k=1}^{15}1=7+15=22$

답 ⑤

21

$\sum_{k=1}^{10}\{ka_{k+1}-(k+1)a_k\}=70$에서

$\sum_{k=1}^{10}\{ka_{k+1}-(k+1)a_k\}$

$=(a_2-2a_1)+(2a_3-3a_2)+(3a_4-4a_3)+\cdots+(10a_{11}-11a_{10})$

$=10a_{11}-2(a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{10})$

$=10a_{11}-2\sum_{k=1}^{10}a_k$

이고, $a_{11}=15$이므로

$10\times15-2\sum_{k=1}^{10}a_k=70$, $\sum_{k=1}^{10}a_k=40$

따라서

$\sum_{k=1}^{10}a_k(a_k+6)-\sum_{k=1}^{10}(a_k+2)^2=\sum_{k=1}^{10}\{a_k(a_k+6)-(a_k+2)^2\}$

$=\sum_{k=1}^{10}(2a_k-4)=2\sum_{k=1}^{10}a_k-\sum_{k=1}^{10}4$

$=2\times40-4\times10=40$

답 ①

22

$a_n+b_n=2$ …… ㉠

이므로

$(a_n)^2-(b_n)^2=(a_n+b_n)(a_n-b_n)=2(a_n-b_n)$

$\sum_{k=1}^{10}\{(a_k)^2-(b_k)^2\}=310$에서

$\sum_{k=1}^{10}\{(a_k)^2-(b_k)^2\}=\sum_{k=1}^{10}2(a_k-b_k)=2\sum_{k=1}^{10}(a_k-b_k)$

이므로 $2\sum_{k=1}^{10}(a_k-b_k)=310$

$\sum_{k=1}^{10}(a_k-b_k)=155$ …… ㉡

㉠에서 $b_k=-a_k+2$ …… ㉢

㉢을 ㉡에 대입하면

$\sum_{k=1}^{10}\{a_k-(-a_k+2)\}=\sum_{k=1}^{10}(2a_k-2)=2\sum_{k=1}^{10}a_k-20=155$

이므로 $\sum_{k=1}^{10}a_k=\frac{175}{2}$

따라서

$\sum_{k=1}^{10}(2a_k-4b_k)=\sum_{k=1}^{10}\{2a_k-4(-a_k+2)\}=6\sum_{k=1}^{10}a_k-\sum_{k=1}^{10}8$

$=6\times\frac{175}{2}-80=445$

답 ④

필수 유형 ⑥

$a_n=2n^2-3n+1$이므로

$\sum_{n=1}^{7}(a_n-n^2+n)=\sum_{n=1}^{7}(n^2-2n+1)=\sum_{n=1}^{7}(n-1)^2=\sum_{k=1}^{6}k^2$

$=\frac{6\times7\times13}{6}=91$

답 91

23

$\sum_{k=1}^{10}k(k^2+16)-\sum_{k=1}^{10}k^2(k+2)=\sum_{k=1}^{10}\{k(k^2+16)-k^2(k+2)\}$

$=\sum_{k=1}^{10}(16k-2k^2)$

$=16\times\frac{10\times11}{2}-2\times\frac{10\times11\times21}{6}$

$=880-770=110$

답 ③

24

$\sum_{k=1}^{20}\left(\frac{1}{3}k+a\right)=\frac{1}{3}\sum_{k=1}^{20}k+\sum_{k=1}^{20}a=\frac{1}{3}\times\frac{20\times21}{2}+20a=70+20a$

$\sum_{k=1}^{12}k^2=\frac{12\times13\times25}{6}=650$

$\sum_{k=1}^{20}\left(\frac{1}{3}k+a\right)=\sum_{k=1}^{12}k^2$에서 $70+20a=650$

따라서 $a=29$

답 29

25

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$a_n=\frac{n^2-12n}{n}=n-12$, $b_n=-\frac{8}{n}$

따라서

$\sum_{k=1}^{15}\frac{a_k}{b_k}=\sum_{k=1}^{15}\frac{k-12}{-\frac{8}{k}}=\sum_{k=1}^{15}\left(-\frac{k^2}{8}+\frac{3k}{2}\right)=-\frac{1}{8}\sum_{k=1}^{15}k^2+\frac{3}{2}\sum_{k=1}^{15}k$

$=-\frac{1}{8}\times\frac{15\times16\times31}{6}+\frac{3}{2}\times\frac{15\times16}{2}$

$=-155+180=25$

답 ⑤

26

부등식 $\left(\frac{1}{2}\right)^{x-2n}\ge\left(\frac{1}{2}\right)^{-x-8}$에서 밑 $\frac{1}{2}$이 0보다 크고 1보다 작으므로

$x-2n\le-x-8$

$x\le n-4$

(i) $n\le4$일 때,

부등식 $x\le n-4$를 만족시키는 자연수 x는 존재하지 않으므로

$a_1=a_2=a_3=a_4=0$

(ii) $n\ge5$일 때,

부등식 $x\le n-4$를 만족시키는 자연수 x의 개수는 $n-4$이므로

$a_n=n-4$ $(n\ge5)$

(ⅰ), (ⅱ)에서 $a_n=\begin{cases} 0 & (n\le4) \\ n-4 & (n\ge5) \end{cases}$

따라서 $\sum_{k=1}^{20}a_k=\sum_{k=5}^{20}(k-4)=\sum_{k=1}^{16}k=\frac{16\times17}{2}=136$

답 ③

필수 유형 ❾

등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항과 공차가 같으므로 $a_1=a$라 하면

$a_n=a+(n-1)\times a=an$

$\sum_{k=1}^{15}\frac{1}{\sqrt{a_k}+\sqrt{a_{k+1}}}=2$에서

$$\sum_{k=1}^{15}\frac{1}{\sqrt{a_k}+\sqrt{a_{k+1}}}=\sum_{k=1}^{15}\frac{1}{\sqrt{ak}+\sqrt{a(k+1)}}=\sum_{k=1}^{15}\frac{\sqrt{a(k+1)}-\sqrt{ak}}{a}$$

$$=\frac{1}{a}\sum_{k=1}^{15}\{\sqrt{a(k+1)}-\sqrt{ak}\}$$

$$=\frac{1}{a}\{(\sqrt{2a}-\sqrt{a})+(\sqrt{3a}-\sqrt{2a})+(\sqrt{4a}-\sqrt{3a})+\cdots+(\sqrt{16a}-\sqrt{15a})\}$$

$$=\frac{1}{a}(4\sqrt{a}-\sqrt{a})=\frac{3\sqrt{a}}{a}$$

이므로 $\frac{3}{\sqrt{a}}=2$

$a=\frac{9}{4}$

따라서 $a_4=4a=4\times\frac{9}{4}=9$

답 ④

27

등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d라 하면 $a_4=a_2+8$에서

$a_4-a_2=8$, $2d=8$

즉, $d=4$이므로 $a_{n+1}-a_n=4$

$$\sum_{k=1}^{15}\frac{1}{a_ka_{k+1}}=\frac{1}{4}\sum_{k=1}^{15}\frac{a_{k+1}-a_k}{a_ka_{k+1}}=\frac{1}{4}\sum_{k=1}^{15}\left(\frac{1}{a_k}-\frac{1}{a_{k+1}}\right)$$

$$=\frac{1}{4}\left\{\left(\frac{1}{a_1}-\frac{1}{a_2}\right)+\left(\frac{1}{a_2}-\frac{1}{a_3}\right)+\left(\frac{1}{a_3}-\frac{1}{a_4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{a_{15}}-\frac{1}{a_{16}}\right)\right\}$$

$$=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{a_1}-\frac{1}{a_{16}}\right)=\frac{1}{4}\left(1-\frac{1}{a_{16}}\right) \quad \cdots\cdots ㉠$$

한편, $a_{16}=a_1+15d=1+15\times4=61$ $\cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡에서

$$\sum_{k=1}^{15}\frac{1}{a_ka_{k+1}}=\frac{1}{4}\left(1-\frac{1}{a_{16}}\right)=\frac{1}{4}\left(1-\frac{1}{61}\right)=\frac{15}{61}$$

답 ②

다른 풀이

등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d라 하면 $a_4=a_2+8$에서

$a_4-a_2=8$, $2d=8$

즉, $d=4$

이때 $a_1=1$이므로 $a_n=1+(n-1)\times4=4n-3$

따라서

$$\sum_{k=1}^{15}\frac{1}{a_ka_{k+1}}=\sum_{k=1}^{15}\frac{1}{(4k-3)(4k+1)}=\sum_{k=1}^{15}\frac{1}{4}\left(\frac{1}{4k-3}-\frac{1}{4k+1}\right)$$

$$=\frac{1}{4}\left\{\left(1-\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{9}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{57}-\frac{1}{61}\right)\right\}$$

$$=\frac{1}{4}\left(1-\frac{1}{61}\right)=\frac{15}{61}$$

28

등비수열 $\{a_n\}$의 공비가 2이므로

$a_{n+1}=2a_n$, $S_n=\frac{a_1(2^n-1)}{2-1}=a_1(2^n-1)$

이때 $a_n=\frac{1}{2}a_{n+1}=\frac{1}{2}(S_{n+1}-S_n)$이므로

$$\sum_{k=1}^{10}\frac{a_k}{S_{k+1}S_k}=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{10}\frac{S_{k+1}-S_k}{S_{k+1}S_k}=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{10}\left(\frac{1}{S_k}-\frac{1}{S_{k+1}}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{1}{S_1}-\frac{1}{S_2}\right)+\left(\frac{1}{S_2}-\frac{1}{S_3}\right)+\left(\frac{1}{S_3}-\frac{1}{S_4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{S_{10}}-\frac{1}{S_{11}}\right)\right\}$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{S_1}-\frac{1}{S_{11}}\right)=\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{a_1}-\frac{1}{a_1(2^{11}-1)}\right\}$$

$$=\frac{2^{10}-1}{a_1(2^{11}-1)}$$

즉, $p=\frac{2^{10}-1}{a_1(2^{11}-1)}$에서 $pa_1=\frac{2^{10}-1}{2^{11}-1}$이므로

$1-pa_1=\frac{2^{10}}{2^{11}-1}$, $(2^{11}-1)(1-pa_1)=2^{10}$

따라서

$$\log_2(2^{11}-1)+\log_2(1-pa_1)=\log_2(2^{11}-1)(1-pa_1)$$
$$=\log_2 2^{10}=10$$

답 ④

29

점 A$(0, -1)$에서 함수 $y=\frac{1}{n}x^2$의 그래프에 그은 접선의 기울기를 m $(m>0)$이라 하면 접선의 방정식은 $y=mx-1$이다.

$y=\frac{1}{n}x^2$, $y=mx-1$을 연립하면

$\frac{1}{n}x^2=mx-1$

$\frac{1}{n}x^2-mx+1=0$ $\cdots\cdots$ ㉠

이차방정식 ㉠의 판별식을 D라 하면 $D=0$이어야 하므로

$D=m^2-\frac{4}{n}=0$, $m^2=\frac{4}{n}$

$m>0$이므로 $m=\frac{2}{\sqrt{n}}$

따라서 접선의 방정식은 $y=\frac{2}{\sqrt{n}}x-1$이고

접점의 x좌표 x_n은 ㉠에서

$\frac{1}{n}{x_n}^2-\frac{2}{\sqrt{n}}x_n+1=0$

$\left(\frac{1}{\sqrt{n}}x_n-1\right)^2=0$이므로 $x_n=\sqrt{n}$

이때 $y_n=1$이므로 접점은 P$(\sqrt{n}, 1)$이다.

따라서

$$\sum_{n=1}^{15}\frac{y_n}{x_n+x_{n+1}}$$
$$=\sum_{n=1}^{15}\frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}=\sum_{n=1}^{15}\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$$

$=\sum_{n=1}^{15}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$

$=(\sqrt{2}-\sqrt{1})+(\sqrt{3}-\sqrt{2})+(\sqrt{4}-\sqrt{3})+\cdots+(\sqrt{16}-\sqrt{15})$

$=-1+\sqrt{16}=-1+4=3$

답 ①

필수 유형 ⑩

$a_{n+1}+a_n=(-1)^{n+1}\times n$에서 $a_{n+1}=-a_n+(-1)^{n+1}\times n$

이때 $a_1=12$이므로

$a_2=-a_1+1=-11$, $a_3=-a_2-2=9$

$a_4=-a_3+3=-6$, $a_5=-a_4-4=2$

$a_6=-a_5+5=3$, $a_7=-a_6-6=-9$

$a_8=-a_7+7=16$

따라서 $a_k>a_1$을 만족시키는 자연수 k의 최솟값은 8이다.

답 ④

30

조건 (나)에서 $a_n=-\frac{1}{2}a_{n+1}$, 즉 $a_{n+1}=-2a_n$이므로

수열 $\{a_n\}$은 공비가 -2인 등비수열이다.

조건 (가)에서 $2\times(-2a_1)+4\times 4a_1=3$이므로 $a_1=\frac{1}{4}$

따라서 $a_7=\frac{1}{4}\times(-2)^6=16$

답 16

31

$a_1=2$이므로 $\log_2 2\times\log_2 a_2=1$에서

$\log_2 a_2=1$, 즉 $a_2=2$

$a_2=2$이므로 $\log_2 2\times\log_2 a_3=3$에서

$\log_2 a_3=3$, 즉 $a_3=8$

$a_3=2^3$이므로 $\log_2 2^3\times\log_2 a_4=5$에서

$\log_2 a_4=\frac{5}{3}$, 즉 $a_4=2^{\frac{5}{3}}$

$a_4=2^{\frac{5}{3}}$이므로 $\log_2 2^{\frac{5}{3}}\times\log_2 a_5=7$에서

$\log_2 a_5=\frac{21}{5}$, 즉 $a_5=2^{\frac{21}{5}}$

따라서 $\log_2\frac{a_5}{a_2}=\log_2\frac{2^{\frac{21}{5}}}{2}=\log_2 2^{\frac{16}{5}}=\frac{16}{5}$

답 ④

32

조건 (가)에서 $a_{n+1}=a_n+4$, 즉 $a_{n+1}-a_n=4$이므로 수열 $\{a_n\}$은 공차가 4인 등차수열이다.

조건 (나)에서 $\sum_{k=1}^{10}a_k=a_1+a_2$이므로 $\sum_{k=3}^{10}a_k=\frac{8(a_3+a_{10})}{2}=0$

$a_3+a_{10}=(a_1+8)+(a_1+36)=0$에서 $a_1=-22$

$a_2=-22+4=-18$

따라서 $\frac{a_1\times a_2}{4}=\frac{(-22)\times(-18)}{4}=99$

답 99

필수 유형 ⑪

(i) a_6이 3의 배수인 경우

$a_7=40$이므로 $\frac{a_6}{3}=a_7$에서 $a_6=3a_7=3\times 40=120$

$a_7=40$이 3의 배수가 아니므로 $a_8=a_6+a_7=120+40=160$

$a_8=160$이 3의 배수가 아니므로 $a_9=a_7+a_8=40+160=200$

(ii) $a_6=3k-2$ (k는 자연수)인 경우

$a_5+a_6=a_7$

$a_5=a_7-a_6=40-(3k-2)=42-3k=3(14-k)$

a_5는 자연수이므로 $3(14-k)>0$에서 $k<14$

한편, a_5는 3의 배수이므로 $a_6=\frac{a_5}{3}$

즉, $3k-2=\frac{3(14-k)}{3}$에서

$4k=16$, $k=4$

따라서 $a_6=3\times 4-2=10$이므로 $a_8=a_6+a_7=10+40=50$

$a_8=50$이 3의 배수가 아니므로 $a_9=a_7+a_8=40+50=90$

(iii) $a_6=3k-1$ (k는 자연수)인 경우

$a_5+a_6=a_7$

$a_5=a_7-a_6=40-(3k-1)=41-3k$

a_5는 자연수이므로 $41-3k>0$에서

$k<\frac{41}{3}$ ...... ㉠

한편, a_5는 3의 배수가 아니므로

$a_4+a_5=a_6$에서

$a_4=a_6-a_5=(3k-1)-(41-3k)=6k-42=3(2k-14)$

a_4가 자연수이므로 $3(2k-14)>0$에서

$k>7$ ...... ㉡

㉠, ㉡에서

$7<k<\frac{41}{3}$

한편, a_4는 3의 배수이므로 $a_5=\frac{a_4}{3}$

즉, $41-3k=\frac{3(2k-14)}{3}$에서

$5k=55$

$k=11$

따라서 $a_6=3\times 11-1=32$이므로

$a_8=a_6+a_7=32+40=72$

$a_8=72$가 3의 배수이므로

$a_9=\frac{a_8}{3}=\frac{72}{3}=24$

(i), (ii), (iii)에서 a_9의 최댓값 $M=200$이고 최솟값 $m=24$이다.

따라서 $M+m=200+24=224$

답 ⑤

33

$a_1=1$이므로 $a_2=2a_1=2\times 1=2$

$a_2=2$이므로 $a_3=2a_2=2\times 2=4$

$a_3=4$이므로 $a_4=2a_3=2\times 4=8$

$a_4=8$이므로 $a_5=2a_4=2\times 8=16$

$a_5=16$이므로 $a_6=a_5-10=16-10=6$

$a_6=6$이므로 $a_7=2a_6=2\times 6=12$

$a_7=12$이므로 $a_8=a_7-10=12-10=2$

⋮

이므로

$a_n=a_{n+6}\ (n\geq 2)$

따라서

$\sum_{k=1}^{20} a_k=a_1+3\sum_{k=2}^{7} a_k+a_{20}=1+3(2+4+8+16+6+12)+2=147$

답 ⑤

34

$\sum_{k=1}^{24} a_k=\sum_{k=1}^{12}(a_{2k-1}+a_{2k})=\sum_{k=1}^{12}\left\{\frac{1}{2}(2k-1)+2\right\}=\sum_{k=1}^{12}k+\sum_{k=1}^{12}\frac{3}{2}$

$=\frac{12\times 13}{2}+\frac{3}{2}\times 12=96$ …… ㉠

$\sum_{k=2}^{25} a_k=\sum_{k=1}^{12}(a_{2k}+a_{2k+1})=\sum_{k=1}^{12}\left(\frac{1}{2}\times 2k+2\right)=\sum_{k=1}^{12}k+\sum_{k=1}^{12}2$

$=\frac{12\times 13}{2}+2\times 12=102$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 $\sum_{k=2}^{25} a_k-\sum_{k=1}^{24} a_k=102-96=6$

즉, $a_{25}-a_1=6$

따라서 $a_1=a_{25}-6=20-6=14$

답 ④

35

(i) a_2가 홀수일 때, $a_3=6a_2=4$, $a_2=\frac{2}{3}$

a_2가 자연수가 아니므로 주어진 조건을 만족시키지 않는다.

(ii) a_2가 짝수일 때, $a_3=\frac{a_2}{2}+1=4$, $a_2=6$

① a_1이 홀수일 때, $a_2=6a_1=6$, $a_1=1$

이때 $a_2>a_1$을 만족시킨다.

② a_1이 짝수일 때, $a_2=\frac{a_1}{2}+1=6$, $a_1=10$

이때 $a_2>a_1$을 만족시키지 않는다.

(i), (ii)에서 $a_1=1$, $a_2=6$

한편, a_3이 짝수이므로 $a_4=\frac{a_3}{2}+1=\frac{4}{2}+1=3$

a_4가 홀수이므로 $a_5=6a_4=6\times 3=18$

a_5가 짝수이므로 $a_6=\frac{a_5}{2}+1=\frac{18}{2}+1=10$

a_6이 짝수이므로 $a_7=\frac{a_6}{2}+1=\frac{10}{2}+1=6$

이때

$a_1=1$

$a_2=a_7=a_{12}=a_{17}=\cdots=6$

$a_3=a_8=a_{13}=a_{18}=\cdots=4$

$a_4=a_9=a_{14}=a_{19}=\cdots=3$

$a_5=a_{10}=a_{15}=a_{20}=\cdots=18$

$a_6=a_{11}=a_{16}=a_{21}=\cdots=10$

따라서 $a_k<a_2$를 만족시키는 20 이하의 자연수 k의 값은

1, 3, 4, 8, 9, 13, 14, 18, 19이므로 그 개수는 9이다.

답 ③

필수 유형 ⑫

(i) $n=1$일 때, (좌변)$=3$, (우변)$=3$이므로 ($*$)이 성립한다.

(ii) $n=m$일 때, ($*$)이 성립한다고 가정하면

$\sum_{k=1}^{m} a_k=2^{m(m+1)}-(m+1)\times 2^{-m}$

이다. $n=m+1$일 때,

$\sum_{k=1}^{m+1} a_k=\sum_{k=1}^{m} a_k+a_{m+1}$

$=2^{m(m+1)}-(m+1)\times 2^{-m}$

$+\{2^{2(m+1)}-1\}\times 2^{(m+1)m}+m\times 2^{-(m+1)}$

$=2^{m(m+1)}-(m+1)\times 2^{-m}$

$+(2^{2m+2}-1)\times\boxed{2^{m(m+1)}}+m\times 2^{-m-1}$

$=\boxed{2^{m(m+1)}}\times\boxed{2^{2m+2}}-\frac{m+2}{2}\times 2^{-m}$

$=2^{(m+1)(m+2)}-(m+2)\times 2^{-(m+1)}$

이다. 따라서 $n=m+1$일 때도 ($*$)이 성립한다.

(i), (ii)에 의하여 모든 자연수 n에 대하여

$\sum_{k=1}^{n} a_k=2^{n(n+1)}-(n+1)\times 2^{-n}$이다.

따라서 $f(m)=2^{m(m+1)}$, $g(m)=2^{2m+2}$이므로 $\frac{g(7)}{f(3)}=\frac{2^{16}}{2^{12}}=2^4=16$

답 ④

36

(i) $n=1$일 때,

(좌변)$=4$, (우변)$=4$이므로 ($*$)이 성립한다.

(ii) $n=k$일 때, ($*$)이 성립한다고 가정하면

$\frac{1\times 2^2}{2k^2-1}+\frac{5\times 4^2}{2k^2-1}+\frac{9\times 6^2}{2k^2-1}+\cdots+\frac{(4k-3)\times(2k)^2}{2k^2-1}$

$=2k(k+1)$

이다. 이때

$1\times 2^2+5\times 4^2+9\times 6^2+$

$\cdots+(4k-3)\times(2k)^2+(4k+1)\times(2k+2)^2$

$=\boxed{2k(k+1)(2k^2-1)}+(4k+1)\times(2k+2)^2$

$=2(k+1)(2k^3+8k^2+9k+2)$

$=2(k+1)\times(k+2)\times\{2\times(\boxed{k^2+2k})+1\}$

$=2(k+1)(k+2)\{2(k+1)^2-1\}$

이므로

$\frac{1\times 2^2}{2(k+1)^2-1}+\frac{5\times 4^2}{2(k+1)^2-1}+\frac{9\times 6^2}{2(k+1)^2-1}+$

$\cdots+\frac{(4k+1)\times\{2(k+1)\}^2}{2(k+1)^2-1}$

$=2(k+1)(k+2)$

이다. 따라서 $n=k+1$일 때도 ($*$)이 성립한다.

(i), (ii)에 의하여 모든 자연수 n에 대하여

$\frac{1\times 2^2}{2n^2-1}+\frac{5\times 4^2}{2n^2-1}+\frac{9\times 6^2}{2n^2-1}+\cdots+\frac{(4n-3)\times(2n)^2}{2n^2-1}=2n(n+1)$

이다.

이상에서 $f(k)=2k(k+1)(2k^2-1)$, $g(k)=k^2+2k$이므로

$\frac{f(5)}{g(3)}=\frac{10\times 6\times 49}{15}=196$

답 ②

04 함수의 극한과 연속

정답 본문 42~49쪽

필수 유형 ❶	②	01 ②	02 ②	03 ④
필수 유형 ❷	②	04 ④	05 ③	06 ④
		07 ②		
필수 유형 ❸	30	08 ④	09 ①	10 4
		11 12		
필수 유형 ❹	②	12 ④	13 14	14 ⑤
필수 유형 ❺	②	15 ⑤	16 ②	17 ③
		18 ④	19 18	
필수 유형 ❻	⑤	20 ④	21 ②	22 ③
		23 11	24 ③	
필수 유형 ❼	④	25 ④	26 ④	27 38

필수 유형 ❶

주어진 그래프에서

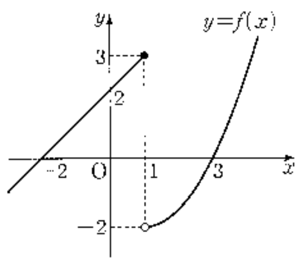
$\lim_{x\to 0-} f(x)=-2$, $\lim_{x\to 1+} f(x)=1$이므로

$\lim_{x\to 0-} f(x)+\lim_{x\to 1+} f(x)=-2+1=-1$

답 ②

01

함수 $y=f(x)$의 그래프는 그림과 같다.



위의 그래프에서

$\lim_{x\to 1-} f(x)=3$, $\lim_{x\to 1+} f(x)=-2$이므로

$\lim_{x\to 1-} f(x)+\lim_{x\to 1+} f(x)=3+(-2)=1$

답 ③

다른 풀이

$\lim_{x\to 1-} f(x)=\lim_{x\to 1-}(x+2)=3$

$\lim_{x\to 1+} f(x)=\lim_{x\to 1+}\left\{\frac{1}{2}(x-1)^2-2\right\}=-2$

따라서 $\lim_{x\to 1-} f(x)+\lim_{x\to 1+} f(x)=3+(-2)=1$

02

함수 $y=f(x)-2$의 그래프는 함수 $y=f(x)$의 그래프를 y축의 방향으로 -2만큼 평행이동한 것과 같으므로

$\lim_{x\to 1+}\{f(x)-2\}=0$

함수 $y=f(x-1)$의 그래프는 함수 $y=f(x)$의 그래프를 x축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것과 같으므로

$\lim_{x\to 2-} f(x-1)=\lim_{x\to 1-} f(x)=-2$

따라서 $\lim_{x\to 1+}\{f(x)-2\}+\lim_{x\to 2-} f(x-1)=0+(-2)=-2$

답 ②

03

$\lim_{x\to 1-} f(x)=0$, $\lim_{x\to 1-} g(x)=1$, $\lim_{x\to -1} g(x)=1$

이므로 $0+1=f(k)+1$에서 $f(k)=0$

따라서 그림에서 $f(1)=0$이므로 $k=1$이다.

답 ④

필수 유형 ❷

$$\lim_{x\to -1}\frac{x^2+9x+8}{x+1}=\lim_{x\to -1}\frac{(x+1)(x+8)}{x+1}=\lim_{x\to -1}(x+8)$$
$$=-1+8=7$$

답 ②

04

$$\lim_{x\to 0}\frac{10x-x^2}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{x(10-x)(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})}{(\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x})(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{x(10-x)(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})}{(1+x)-(1-x)}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{x(10-x)(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})}{2x}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{(10-x)(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})}{2}$$
$$=\frac{10\times(1+1)}{2}=10$$

답 ④

05

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x(2x+3)}{3x^2+2x+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{2+\frac{3}{x}}{3+\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}}=\frac{2+0}{3+0+0}=\frac{2}{3}$$

답 ③

06

$$\lim_{x\to\infty}\{\sqrt{x(x+k)}-x\}$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\{\sqrt{x(x+k)}-x\}\{\sqrt{x(x+k)}+x\}}{\sqrt{x(x+k)}+x}$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{kx}{\sqrt{x^2+kx}+x}=\lim_{x\to\infty}\frac{k}{\sqrt{1+\frac{k}{x}}+1}=\frac{k}{1+1}=\frac{k}{2}=2$$

에서 $k=4$

답 ④

07

$\frac{x^2-2}{6x} \le f(x) \le \frac{x^2+2}{6x}$ 에서 $x>0$이므로

$\frac{x^2-2}{3x^2} \le \frac{2f(x)}{x} \le \frac{x^2+2}{3x^2}$

이때 $\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-2}{3x^2}=\lim_{x\to\infty}\frac{1-\frac{2}{x^2}}{3}=\frac{1}{3}$

$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+2}{3x^2}=\lim_{x\to\infty}\frac{1+\frac{2}{x^2}}{3}=\frac{1}{3}$

따라서 함수의 극한의 대소 관계에 의하여 $\lim_{x\to\infty}\frac{2f(x)}{x}=\frac{1}{3}$

답 ②

필수 유형 ❸

$$\lim_{x\to1}(2x^2+1)f(x)=\lim_{x\to1}\left\{\frac{2x^2+1}{x+1}\times(x+1)f(x)\right\}$$
$$=\lim_{x\to1}\frac{2x^2+1}{x+1}\times\lim_{x\to1}(x+1)f(x)$$
$$=\frac{2+1}{1+1}\times1=\frac{3}{2}$$

에서 $a=\frac{3}{2}$

따라서 $20a=20\times\frac{3}{2}=30$

답 30

다른 풀이

$$a=\lim_{x\to1}(2x^2+1)f(x)=\frac{\lim_{x\to1}(2x^2+1)f(x)}{\lim_{x\to1}(x+1)f(x)}=\lim_{x\to1}\frac{(2x^2+1)f(x)}{(x+1)f(x)}$$
$$=\lim_{x\to1}\frac{2x^2+1}{x+1}=\frac{2+1}{1+1}=\frac{3}{2}$$

따라서 $20a=20\times\frac{3}{2}=30$

08

$\lim_{x\to0}g(x)=\lim_{x\to0}[\{g(x)-2\}+2]$에서

$$\lim_{x\to0}\{g(x)-2\}=\lim_{x\to0}\frac{f(x)\{g(x)-2\}}{f(x)}=\lim_{x\to0}\frac{f(x)g(x)-2f(x)}{f(x)}$$
$$=\frac{\lim_{x\to0}\{f(x)g(x)-2f(x)\}}{\lim_{x\to0}f(x)}=\frac{6}{2}=3$$

따라서

$$\lim_{x\to0}g(x)=\lim_{x\to0}[\{g(x)-2\}+2]=\lim_{x\to0}\{g(x)-2\}+\lim_{x\to0}2$$
$$=3+2=5$$

답 ④

09

$$\lim_{x\to1}\frac{x^3-1}{xf(x)}=\lim_{x\to1}\left\{\frac{x^2-1}{f(x)}\times\frac{x^3-1}{x(x^2-1)}\right\}$$
$$=\lim_{x\to1}\left\{\frac{x^2-1}{f(x)}\times\frac{(x-1)(x^2+x+1)}{x(x-1)(x+1)}\right\}$$
$$=\lim_{x\to1}\left\{\frac{x^2-1}{f(x)}\times\frac{x^2+x+1}{x(x+1)}\right\}$$
$$=\lim_{x\to1}\frac{1}{\frac{f(x)}{x^2-1}}\times\lim_{x\to1}\frac{x^2+x+1}{x(x+1)}=\frac{1}{\frac{3}{2}}\times\frac{3}{2}=1$$

답 ①

10

$f(x)=ax+b$ (a, b는 상수, $a\ne0$)이라 하면

$\lim_{x\to0}f(x)=\lim_{x\to0}(ax+b)=b=2$

$$\lim_{x\to1}\frac{3(x^2-1)}{(x-1)f(x)}=\lim_{x\to1}\frac{3(x-1)(x+1)}{(x-1)(ax+2)}=\lim_{x\to1}\frac{3(x+1)}{ax+2}$$
$$=\frac{3\lim_{x\to1}(x+1)}{\lim_{x\to1}(ax+2)}=\frac{3(1+1)}{a+2}=\frac{6}{a+2}=2$$

에서 $a+2=3$이므로 $a=1$

따라서 $f(x)=x+2$이므로 $f(2)=2+2=4$

답 4

11

$f(x)$가 다항함수이므로

$\lim_{x\to1-}f(x)=\lim_{x\to1+}f(x)=\lim_{x\to1}f(x)$

조건 (가)에서

$\lim_{x\to1-}f(x)+\lim_{x\to1}2f(x)=\lim_{x\to1}f(x)+2\lim_{x\to1}f(x)=3\lim_{x\to1}f(x)=6$

이므로 $\lim_{x\to1}f(x)=2$

조건 (나)에서

$$\lim_{x\to1}\{f(x)g(x)+2xf(x)\}=\lim_{x\to1}f(x)\{g(x)+2x\}$$
$$=\lim_{x\to1}f(x)\times\left\{\lim_{x\to1}g(x)+\lim_{x\to1}2x\right\}$$
$$=2\left\{\lim_{x\to1}g(x)+2\right\}=10$$

이므로 $\lim_{x\to1}g(x)=3$

따라서

$\lim_{x\to1}\{3f(x)+2g(x)\}=3\lim_{x\to1}f(x)+2\lim_{x\to1}g(x)=3\times2+2\times3=12$

답 12

다른 풀이

$f(x)$, $g(x)$가 다항함수이므로 $x=1$에서 연속이다.

$\lim_{x\to1-}f(x)=\lim_{x\to1+}f(x)=\lim_{x\to1}f(x)=f(1)$

$\lim_{x\to1}g(x)=g(1)$

조건 (가)에서 $f(1)+2f(1)=6$이므로 $f(1)=2$

조건 (나)에서 $f(1)g(1)+2f(1)=10$이므로

$2g(1)+4=10$, $g(1)=3$

따라서 $\lim_{x\to1}\{3f(x)+2g(x)\}=3f(1)+2g(1)=3\times2+2\times3=12$

필수 유형 ❹

조건 (가)에서 다항함수 $f(x)$는

$f(x)=2x^2+ax+b$ (a, b는 상수)로 놓을 수 있다.

조건 (나)에서 $x\to0$일 때 극한값이 존재하고 (분모) $\to$ 0이므로

(분자) $\to$ 0이어야 한다.

즉, $\lim_{x\to0}f(x)=\lim_{x\to0}(2x^2+ax+b)=b=0$에서

$f(x)=2x^2+ax$이므로

$\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to0}\frac{x(2x+a)}{x}=\lim_{x\to0}(2x+a)=a=3$

따라서 $f(x)=2x^2+3x$이므로 $f(2)=14$

답 ②

12

$\lim_{x\to2}\frac{\sqrt{x+a}-b}{x^2-4}=\frac{1}{16}$ …… ㉠

에서 $x\to2$일 때 극한값이 존재하고 (분모) → 0이므로 (분자) → 0이어야 한다.

즉, $\lim_{x\to2}(\sqrt{x+a}-b)=0$에서 $\sqrt{2+a}-b=0$이므로

$b=\sqrt{2+a}$ …… ㉡

㉡을 ㉠에 대입하면

$$\lim_{x\to2}\frac{\sqrt{x+a}-\sqrt{2+a}}{x^2-4}=\lim_{x\to2}\frac{(\sqrt{x+a}-\sqrt{2+a})(\sqrt{x+a}+\sqrt{2+a})}{(x^2-4)(\sqrt{x+a}+\sqrt{2+a})}$$
$$=\lim_{x\to2}\frac{x-2}{(x-2)(x+2)(\sqrt{x+a}+\sqrt{2+a})}$$
$$=\lim_{x\to2}\frac{1}{(x+2)(\sqrt{x+a}+\sqrt{2+a})}$$
$$=\frac{1}{(2+2)(\sqrt{2+a}+\sqrt{2+a})}$$
$$=\frac{1}{8\sqrt{2+a}}=\frac{1}{16}$$

에서 $\sqrt{2+a}=2$이므로 $a=2$

이것을 ㉡에 대입하면 $b=2$

따라서 $a+b=2+2=4$

답 ④

13

$\lim_{x\to1}\frac{(x-1)f(x)}{(x+a)(x+b)}=\frac{1}{4}$에서 $x\to1$일 때 0이 아닌 극한값이 존재하고 (분자) → 0이므로 (분모) → 0이어야 한다.

즉, $\lim_{x\to1}\{(x+a)(x+b)\}=(1+a)(1+b)=0$에서

$1+a=0$ 또는 $1+b=0$, 즉 $a=-1$ 또는 $b=-1$

한편, 다항함수 $y=f(x)$의 그래프가 점 $(1, 4)$를 지나므로 $f(1)=4$

$a=-1$일 때,

$\lim_{x\to1}\frac{(x-1)f(x)}{(x-1)(x+b)}=\lim_{x\to1}\frac{f(x)}{x+b}=\frac{f(1)}{1+b}=\frac{4}{1+b}=\frac{1}{4}$에서

$b=15$

같은 방법으로 $b=-1$일 때, $a=15$

따라서 $a+b=-1+15=14$

답 14

참고

$b=-1$일 때,

$\lim_{x\to1}\frac{(x-1)f(x)}{(x+a)(x-1)}=\lim_{x\to1}\frac{f(x)}{x+a}=\frac{f(1)}{1+a}=\frac{4}{1+a}=\frac{1}{4}$에서

$a=15$

14

조건 (가)에서 $f(x)-ax^2$은 일차항의 계수가 4인 일차함수이므로

$f(x)-ax^2=4x+b$ (b는 상수)라 하자.

조건 (나)에서 $x\to-2$일 때, 극한값이 존재하고 (분모) → 0이므로 (분자) → 0이어야 한다. 즉,

$\lim_{x\to-2}f(x)=\lim_{x\to-2}(ax^2+4x+b)=4a-8+b=0$

에서 $b=-4a+8$ …… ㉠

$$\lim_{x\to-2}\frac{f(x)}{x+2}=\lim_{x\to-2}\frac{ax^2+4x-4a+8}{x+2}$$
$$=\lim_{x\to-2}\frac{(x+2)(ax-2a+4)}{x+2}$$
$$=\lim_{x\to-2}(ax-2a+4)=-4a+4=4$$

에서 $a=0$

이것을 ㉠에 대입하면 $b=8$

따라서 $f(x)=4x+8$이므로

$f(1)=4+8=12$

답 ⑤

필수 유형 ❺

두 점 A, B의 좌표를 각각 $A(a, a^2)$, $B(b, b^2)$이라 하면 x에 대한 이차방정식 $x^2-x-t=0$의 두 근이 a, b이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$a+b=1$, $ab=-t$

$\overline{AH}=a-b=\sqrt{(a+b)^2-4ab}=\sqrt{1+4t}$

한편, 점 C의 좌표는 $C(-a, a^2)$이므로

$\overline{CH}=b-(-a)=a+b=1$

따라서

$$\lim_{t\to0+}\frac{\overline{AH}-\overline{CH}}{t}=\lim_{t\to0+}\frac{\sqrt{1+4t}-1}{t}$$
$$=\lim_{t\to0+}\frac{(\sqrt{1+4t}-1)(\sqrt{1+4t}+1)}{t(\sqrt{1+4t}+1)}$$
$$=\lim_{t\to0+}\frac{4t}{t(\sqrt{1+4t}+1)}$$
$$=\lim_{t\to0+}\frac{4}{\sqrt{1+4t}+1}$$
$$=\frac{4}{1+1}=2$$

답 ②

15

사각형 PQCR가 평행사변형이므로

$\overline{DR}=\overline{PR}-\overline{PD}=\overline{QC}-\overline{PD}=1-t$

즉, 직각삼각형 ABR에서

$\overline{AB}=3$, $\overline{AR}=3+(1-t)=4-t$

이므로

$\overline{BR}=\sqrt{3^2+(4-t)^2}=\sqrt{t^2-8t+25}$

따라서

$$\lim_{t\to0+}\frac{\overline{\mathrm{PD}}}{5-\overline{\mathrm{BR}}}=\lim_{t\to0+}\frac{t}{5-\sqrt{t^2-8t+25}}=\lim_{t\to0+}\frac{t(5+\sqrt{t^2-8t+25})}{25-(t^2-8t+25)}$$

$$=\lim_{t\to0+}\frac{t(5+\sqrt{t^2-8t+25})}{t(8-t)}=\lim_{t\to0+}\frac{5+\sqrt{t^2-8t+25}}{8-t}$$

$$=\frac{5+5}{8}=\frac{5}{4}$$

답 ⑤

16

두 점 $\mathrm{P}(t,\ t^2)$, $\mathrm{A}(4,\ 0)$에 대하여 선분 PA의 중점을 M이라 하면

점 M의 좌표는 $\left(\frac{t+4}{2},\ \frac{t^2}{2}\right)$

직선 PA의 기울기는 $\frac{t^2}{t-4}$이므로 이 직선에 수직인 직선의 기울기는 $-\frac{t-4}{t^2}$이다.

즉, 선분 PA의 수직이등분선의 방정식은

$$y-\frac{t^2}{2}=-\frac{t-4}{t^2}\left(x-\frac{t+4}{2}\right)$$

이 직선의 x절편이 $f(t)$이므로

$$0-\frac{t^2}{2}=-\frac{t-4}{t^2}\left\{f(t)-\frac{t+4}{2}\right\}$$

$$f(t)-\frac{t+4}{2}=\frac{t^4}{2(t-4)}$$

$$f(t)=\frac{t^4}{2(t-4)}+\frac{t+4}{2}=\frac{t^4+t^2-16}{2(t-4)}$$

따라서 $\displaystyle\lim_{t\to\infty}\frac{f(t)}{t^3}=\lim_{t\to\infty}\frac{t^4+t^2-16}{2t^3(t-4)}=\lim_{t\to\infty}\frac{1+\frac{1}{t^2}-\frac{16}{t^4}}{2\left(1-\frac{4}{t}\right)}=\frac{1}{2}$

답 ③

17

$4x^2=t\ (x>0)$에서 $x=\frac{\sqrt{t}}{2}$이므로 점 A의 좌표는 $\left(\frac{\sqrt{t}}{2},\ t\right)$이다.

또 $x^2=t\ (x>0)$에서 $x=\sqrt{t}$이므로 점 B의 좌표는 $(\sqrt{t},\ t)$이다.

따라서 $f(t)=\sqrt{\frac{t}{4}+t^2}$, $g(t)=\sqrt{t+t^2}$이므로

$$\lim_{t\to\infty}\{g(t)-f(t)\}=\lim_{t\to\infty}\left(\sqrt{t+t^2}-\sqrt{\frac{t}{4}+t^2}\right)$$

$$=\lim_{t\to\infty}\frac{(t+t^2)-\left(\frac{t}{4}+t^2\right)}{\sqrt{t+t^2}+\sqrt{\frac{t}{4}+t^2}}$$

$$=\lim_{t\to\infty}\frac{\frac{3}{4}t}{\sqrt{t+t^2}+\sqrt{\frac{t}{4}+t^2}}$$

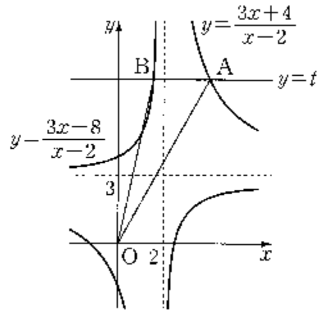
$$=\lim_{t\to\infty}\frac{\frac{3}{4}}{\sqrt{\frac{1}{t}+1}+\sqrt{\frac{1}{4t}+1}}$$

$$=\frac{\frac{3}{4}}{1+1}=\frac{3}{8}$$

답 ③

18

두 함수 $y=\frac{3x+4}{x-2}$, $y=\frac{3x-8}{x-2}$의 그래프는 그림과 같다.



$\frac{3x+4}{x-2}=t$에서 $x=\frac{2t+4}{t-3}$이므로 점 A의 좌표는 $\left(\frac{2t+4}{t-3},\ t\right)$이다.

$\frac{3x-8}{x-2}=t$에서 $x=\frac{2t-8}{t-3}$이므로 점 B의 좌표는 $\left(\frac{2t-8}{t-3},\ t\right)$이다.

즉, $\overline{\mathrm{AB}}=\frac{2t+4}{t-3}-\frac{2t-8}{t-3}=\frac{12}{t-3}$이므로 삼각형 OAB의 넓이 $f(t)$는

$$f(t)=\frac{1}{2}\times t\times\frac{12}{t-3}=\frac{6t}{t-3}$$

따라서

$$\lim_{t\to3+}(t^2-4t+3)f(t)=\lim_{t\to3+}\frac{6t(t^2-4t+3)}{t-3}$$

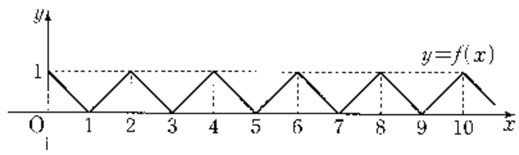
$$=\lim_{t\to3+}\frac{6t(t-1)(t-3)}{t-3}=\lim_{t\to3+}6t(t-1)$$

$$=6\times3\times2=36$$

답 ④

19

조건 (가), (나)에 의하여 함수 $y=f(x)$의 그래프는 그림과 같다.



이때 직선 $y=\frac{x}{t}$는 원점을 지나고 기울기가 $\frac{1}{t}$인 직선이므로

$0<t<2$일 때, $g(t)=1$

자연수 n에 대하여 $t=2n$일 때, $g(t)=2n$

$2n<t<2n+2$일 때, $g(t)=2n+1$

즉, $2<t<4$일 때 $g(t)=3$이므로 $\displaystyle\lim_{t\to4-}g(t)=3$

$8<t<10$일 때 $g(t)=9$이므로 $\displaystyle\lim_{t\to8+}g(t)=9$

따라서 $\displaystyle\lim_{t\to4-}g(t)+g(6)+\lim_{t\to8-}g(t)=3+6+9=18$

답 18

필수 유형 ❻

함수 $|f(x)|$가 실수 전체의 집합에서 연속이므로 $x=-1$과 $x=3$에서도 연속이어야 한다.

(i) 함수 $|f(x)|$가 $x=-1$에서 연속이므로

$\lim_{x\to-1-}|f(x)|=\lim_{x\to-1+}|f(x)|=|f(-1)|$

$\lim_{x\to-1-}|x+a|=\lim_{x\to-1+}|x|=|-1|$

$|-1+a|=|-1|=|-1|$

$|-1+a|=1$

$a>0$이므로

$a=2$

(ii) 함수 $|f(x)|$가 $x=3$에서 연속이므로

$\lim_{x\to3-}|f(x)|=\lim_{x\to3+}|f(x)|=|f(3)|$

$\lim_{x\to3-}|x|=\lim_{x\to3+}|bx-2|=|3b-2|$

$|3|=|3b-2|=|3b-2|$

$|3b-2|=3$

$b>0$이므로

$b=\frac{5}{3}$

따라서 $a+b=2+\frac{5}{3}=\frac{11}{3}$

답 ⑤

20

함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이므로 $x=2$에서도 연속이어야 한다.

즉, $\lim_{x\to2-}f(x)=\lim_{x\to2+}f(x)=f(2)$

$\lim_{x\to2-}(x-a)=\lim_{x\to2-}(ax+3)=2a+3$

$2-a=2a+3$

$3a=-1$

$a=-\frac{1}{3}$

따라서 $f(x)=\begin{cases} x+\frac{1}{3} & (x<2) \\ -\frac{1}{3}x+3 & (x\geq2) \end{cases}$ 이므로

$f(1)+f(3)=\left(1+\frac{1}{3}\right)+(-1+3)=\frac{10}{3}$

답 ④

21

함수 $f(x)$가 $x=1$에서 연속이므로 $\lim_{x\to1}f(x)=f(1)$이어야 한다.

따라서

$a=\lim_{x\to1}f(x)=\lim_{x\to1}\frac{\sqrt{x^2+3}-2}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{x^2-1}{(x-1)(\sqrt{x^2+3}+2)}$

$=\lim_{x\to1}\frac{x+1}{\sqrt{x^2+3}+2}=\frac{2}{2+2}=\frac{1}{2}$

답 ②

22

함수 $g(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이므로 $x=0$과 $x=2$에서도 연속이어야 한다.

(i) 함수 $g(x)$가 $x=0$에서 연속이므로

$\lim_{x\to0-}g(x)=\lim_{x\to0+}g(x)=g(0)$

이때 $\lim_{x\to0+}g(x)=g(0)=b$이므로 $\lim_{x\to0-}g(x)=b$이어야 한다.

즉, $\lim_{x\to0-}\frac{x^2+x+a}{x^2-x}=b$에서 $x\to0-$일 때 (분모) $\to0$이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\to0$이어야 한다.

그러므로 $a=0$이고

$b=\lim_{x\to0-}\frac{x^2+x}{x^2-x}=\lim_{x\to0-}\frac{x(x+1)}{x(x-1)}=\lim_{x\to0-}\frac{x+1}{x-1}=-1$

(ii) 함수 $g(x)$가 $x=2$에서 연속이므로

$\lim_{x\to2-}g(x)=\lim_{x\to2+}g(x)=g(2)$

$\lim_{x\to2-}(x-1)=\lim_{x\to2+}f(x)=f(2)$

즉, $f(2)=1$

한편, 함수 $f(x)$는 이차항의 계수가 1인 이차함수이고, $x\geq2$에서 최솟값이 0이므로

$f(x)=(x-k)^2$ (단, k는 2보다 큰 상수)

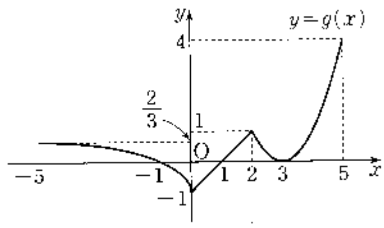
로 놓을 수 있다. 이때 $f(2)=1$이므로

$(2-k)^2=1$

$k>2$이므로 $k=3$

그러므로 $g(x)=\begin{cases} \frac{x+1}{x-1} & (x<0) \\ x-1 & (0\leq x<2) \\ (x-3)^2 & (x\geq2) \end{cases}$

이고 닫힌구간 $[-5, 5]$에서 함수 $y=g(x)$의 그래프는 그림과 같다.



따라서 닫힌구간 $[-5, 5]$에서 함수 $g(x)$의 최댓값은 4, 최솟값은 -1이므로 구하는 합은

$4+(-1)=3$

답 ③

23

함수 $g(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이므로 $x=1$, $x=3$에서도 연속이어야 한다.

즉, $\lim_{x\to1-}g(x)=\lim_{x\to1+}g(x)=g(1)$에서

$\frac{1}{2}=\frac{1}{f(1)}$, $f(1)=2$ …… ㉠

또 $\lim_{x\to3-}g(x)=\lim_{x\to3+}g(x)=g(3)$에서

$\frac{1}{f(3)}=\frac{1}{6}$, $f(3)=6$ …… ㉡

㉠, ㉡에 의하여

$f(x)-2x=a(x-1)(x-3)$ (단, a는 0보다 큰 상수)

로 놓을 수 있다. 즉,

$f(x)=ax^2-2(2a-1)x+3a$

$=a\left(x-\frac{2a-1}{a}\right)^2-\frac{a^2-4a+1}{a}$ …… ㉢

이고 함수 $g(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이려면 $1\le x\le 3$에서 $f(x)\ne 0$이어야 한다.

(i) $\frac{2a-1}{a}\le 1$인 경우

$2a-1\le a$, $a\le 1$

즉, $0<a\le 1$인 경우 $f(1)=2>0$이므로 조건을 만족시킨다.

(ii) $\frac{2a-1}{a}\ge 3$인 경우

$2a-1\ge 3a$

$a\le -1$이므로 조건을 만족시키는 양수 a는 존재하지 않는다.

(iii) $1<\frac{2a-1}{a}<3$, 즉 $a>1$인 경우

㉢에서 $-\frac{a^2-4a+1}{a}>0$이어야 하므로

$a^2-4a+1<0$, $2-\sqrt{3}<a<2+\sqrt{3}$

즉, $1<a<2+\sqrt{3}$

(i), (ii), (iii)에 의하여 조건을 만족시키는 양수 a의 값의 범위는 $0<a<2+\sqrt{3}$이고, $k=f(0)=3a$이므로

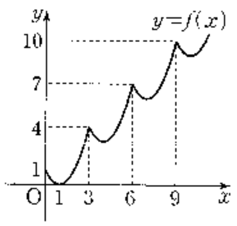
$0<k<6+3\sqrt{3}$

이때 $11<6+3\sqrt{3}<12$이므로 조건을 만족시키는 자연수 k의 최댓값은 11이다.

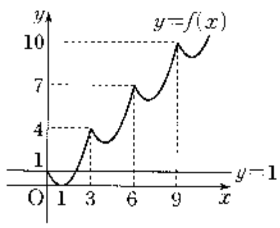
답 11

24

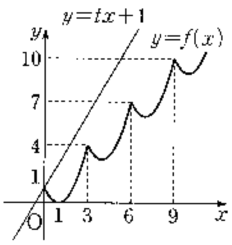
조건 (가), (나)에 의하여 함수 $y=f(x)$의 그래프는 그림과 같다.



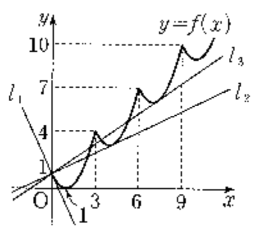
ㄱ. $t=0$일 때, 직선 $y=1$은 그림과 같이 함수 $y=f(x)$의 그래프와 두 점에서 만나므로 $g(0)=2$ (참)



ㄴ. $t>1$일 때, 직선 $y=tx+1$은 그림과 같이 함수 $y=f(x)$의 그래프와 점 $(0,\ 1)$에서만 만난다.
즉, $t>1$일 때, $g(t)=1$이므로 $\lim_{t\to 1+} g(t)=1$ (거짓)



ㄷ. 그림과 같이 점 $(0,\ 1)$에서 곡선 $y=(x-1)^2$에 접하는 직선을 l_1, $3<x<6$인 점에서 곡선 $y=f(x)$에 접하고 점 $(0,\ 1)$을 지나는 직선을 l_2, $6<x<9$인 점에서 곡선 $y=f(x)$에 접하고 점 $(0,\ 1)$을 지나는 직선을 l_3, ⋯이라 하고, 자연수 n에 대하여 직선 l_n의 기울기를 t_n이라 하자.



$(x-1)^2=tx+1$에서 $x^2-(t+2)x=0$이므로

$t=-2$일 때 직선 $y=-2x+1$은 점 $(0,\ 1)$에서 곡선 $y=(x-1)^2$에 접한다.

즉, $t_1=-2$이고 $t\le -2$일 때 $g(t)=1$, $-2<t<t_2$일 때 $g(t)=2$이므로 함수 $g(t)$는 $t=-2$에서 불연속이고 $a_1=-2$이다.

또 $g(t_2)=3$이고 $t_2<t<t_3$일 때 $g(t)=4$이므로 함수 $g(t)$는 $t=t_2$에서 불연속이고 $a_2=t_2$이다.

마찬가지 방법으로 하면 $a_3=t_3$임을 알 수 있다.

즉, 직선 $y=a_3x+1$이 $6<x<9$인 점에서 곡선 $y=(x-7)^2+6$에 접하므로 이차방정식

$(x-7)^2+6=a_3x+1$, 즉 $x^2-(a_3+14)x+54=0$의 판별식을 D라 하면

$D=(a_3+14)^2-4\times 54=0$

$(a_3+14)^2=4\times 9\times 6$

$a_3>0$이므로 $a_3+14=6\sqrt{6}$

그러므로 $a_3=-14+6\sqrt{6}$ (참)

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

답 ③

필수 유형 ⑦

$g(x)=\{f(x)\}^2$이라 하자.

함수 $g(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이려면 $x=a$에서 연속이어야 한다.

즉, $\lim_{x\to a-} g(x)=\lim_{x\to a+} g(x)=g(a)$이어야 한다.

이때

$\lim_{x\to a-} g(x)=\lim_{x\to a-}\{f(x)\}^2=\lim_{x\to a-}(-2x+6)^2=(-2a+6)^2$,

$\lim_{x\to a+} g(x)=\lim_{x\to a+}(2x-a)^2=a^2$,

$g(a)=\{f(a)\}^2=a^2$이므로

$(-2a+6)^2=a^2$에서 $a^2-8a+12=0$

$(a-2)(a-6)=0$

$a=2$ 또는 $a=6$

따라서 조건을 만족시키는 모든 상수 a의 값의 합은

$2+6=8$

답 ④

25

함수 $f(x)$가 $x=1$, $x=3$에서만 불연속이고, 함수 $g(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이므로 함수 $h(x)$가 $x=1$, $x=3$에서 연속이면 닫힌구간 $[0,\ 4]$에서 연속이다.

함수 $h(x)$가 $x=1$에서 연속이어야 하므로

$\lim_{x\to 1-} h(x)=\lim_{x\to 1+} h(x)=h(1)$

$\lim_{x\to 1-} f(x)g(x)=\lim_{x\to 1+} f(x)g(x)=f(1)g(1)$

$1\times g(1)=0\times g(1)=1\times g(1)$

즉, $g(1)=0$ ⋯⋯ ㉠

또 함수 $h(x)$가 $x=3$에서 연속이어야 하므로

$\lim_{x\to 3-} h(x)=\lim_{x\to 3+} h(x)=h(3)$

$\lim_{x \to 3-} f(x)g(x) = \lim_{x \to 3+} f(x)g(x) = f(3)g(3)$

$2 \times g(3) = 0 \times g(3) = 2 \times g(3)$

즉, $g(3) = 0$ ...... ㉡

㉠, ㉡에 의하여

$g(x) = a(x-1)(x-3)$ (단, a는 0이 아닌 상수)

로 놓을 수 있다.

이때 $h(0) - h(4) = -6$이므로 $2 \times g(0) - 1 \times g(4) = -6$

$6a - 3a = -6$

$a = -2$

즉,

$g(x) = -2(x-1)(x-3) = -2x^2 + 8x - 6$

$\quad\;\; = -2(x-2)^2 + 2$

이므로 함수 $g(x)$는 $x=2$에서 최댓값 2를 갖는다.

따라서 $k=2$, $M=2$이므로 $k+M=2+2=4$

답 ④

26

(i) $x<0$일 때

$g(x) = x + 3x + 4 = 4x + 4$이므로 $x \neq -1$일 때

$h(x) = \frac{x^2 - x - 2}{4x+4} = \frac{(x+1)(x-2)}{4(x+1)} = \frac{x-2}{4}$

그러므로 $x<0$에서 함수 $h(x)$가 연속이려면

$h(-1) = \lim_{x \to -1} h(x) = \lim_{x \to -1} \frac{x-2}{4} = -\frac{3}{4}$

이어야 한다.

즉, $a = -\frac{3}{4}$

(ii) $x \geq 0$일 때

$g(x) = x - 3x + 4 = -2x + 4$이므로 $x \neq 2$일 때

$h(x) = \frac{x^2 - x - 2}{-2x+4} = \frac{(x+1)(x-2)}{-2(x-2)} = -\frac{x+1}{2}$

그러므로 $x \geq 0$에서 함수 $h(x)$가 연속이려면

$h(2) = \lim_{x \to 2} h(x) = \lim_{x \to 2} \left(-\frac{x+1}{2}\right) = -\frac{3}{2}$

이어야 한다.

즉, $b = -\frac{3}{2}$

따라서 $a \times b = \left(-\frac{3}{4}\right) \times \left(-\frac{3}{2}\right) = \frac{9}{8}$

답 ④

27

$h(x) = f(x) - g(x)$라 하면 방정식 $f(x) - g(x) = 0$의 실근은 방정식 $h(x) = 0$의 실근과 같다.

$h(x) = x^5 + x^3 + x - k - 1$에서 $h(1) = 2 - k$, $h(2) = 41 - k$이고,

방정식 $h(x) = 0$이 열린구간 $(1, 2)$에서 오직 하나의 실근을 가지려면

$h(1)h(2) < 0$이어야 하므로

$(2-k)(41-k) < 0$

$2 < k < 41$

따라서 조건을 만족시키는 정수 k의 개수는 38이다.

답 38

05 다항함수의 미분법

정답 본문 52~63쪽

필수 유형 ❶ 11	01 ①	02 ③	03 ④	
필수 유형 ❷ ⑤	04 ⑤	05 ①	06 ④	
필수 유형 ❸ ③	07 ④	08 ④	09 ②	
필수 유형 ❹ ③	10 ④	11 ⑤	12 20	
필수 유형 ❺ 6	13 ③	14 51	15 ②	
필수 유형 ❻ 2	16 ③	17 ⑤	18 ①	
필수 유형 ❼ ③	19 ⑤	20 ①	21 ③	
필수 유형 ❽ ⑤	22 ③	23 ③	24 ②	
	25 ②			
필수 유형 ❾ ③	26 ①	27 ②	28 ④	
	29 ⑤	30 ③		
필수 유형 ❿ ⑤	31 ③	32 ④	33 ④	
필수 유형 ⓫ 22	34 ⑤	35 ⑤	36 13	

필수 유형 ❶

함수 $f(x) = x^3 - 6x^2 + 5x$에서 x의 값이 0에서 4까지 변할 때의 평균변화율은

$\frac{f(4) - f(0)}{4 - 0} = \frac{4^3 - 6 \times 4^2 + 5 \times 4}{4} = -3$

$f'(x) = 3x^2 - 12x + 5$에서 $f'(a) = 3a^2 - 12a + 5$

$\frac{f(4) - f(0)}{4 - 0} = f'(a)$에서 $-3 = 3a^2 - 12a + 5$

$3a^2 - 12a + 8 = 0$

$g(a) = 3a^2 - 12a + 8$이라 하면

$g(a) = 3(a-2)^2 - 4$에서 $g(2) = -4 < 0$이고,

$g(0) = 8 > 0$, $g(4) = 8 > 0$

이므로 이차방정식 $g(a) = 0$은 열린구간 $(0, 4)$에서 서로 다른 두 실근을 갖는다.

이때 조건을 만족시키는 모든 실수 a의 값의 곱은 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 $\frac{8}{3}$이므로 $p=3$, $q=8$

따라서 $p+q = 3+8 = 11$

답 11

01

$\lim_{x \to 2} \frac{f(x) - 1}{x - 2} = 5$에서 $x \to 2$일 때 (분모) $\to 0$이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\to 0$이어야 한다.

즉, $\lim_{x \to 2} \{f(x) - 1\} = f(2) - 1 = 0$이므로 $f(2) = 1$

이때 $\lim_{x \to 2} \frac{f(x) - 1}{x - 2} = \lim_{x \to 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = f'(2)$이므로

$f'(2) = 5$

한편, 함수 $f(x)$에서 x의 값이 2에서 4까지 변할 때의 평균변화율은

$\dfrac{f(4)-f(2)}{4-2}=\dfrac{f(4)-1}{2}$이므로

$\dfrac{f(4)-1}{2}=\dfrac{1}{2}f'(2)=\dfrac{5}{2}$

따라서 $f(4)=6$

답 ①

02

$\lim_{h\to0}\dfrac{\{f(3+h)\}^2-\{f(3)\}^2}{2h}$

$=\lim_{h\to0}\dfrac{\{f(3+h)-f(3)\}\{f(3+h)+f(3)\}}{2h}$

$=\lim_{h\to0}\left\{\dfrac{f(3+h)-f(3)}{h}\times\dfrac{f(3+h)+f(3)}{2}\right\}$

$=f'(3)\times\dfrac{f(3)+f(3)}{2}=f'(3)\times f(3)$

이므로

$f'(3)\times f(3)=16$

따라서 $f'(3)=\dfrac{16}{f(3)}=\dfrac{16}{2}=8$

답 ③

03

$\lim_{x\to1}\dfrac{f(x)+3}{x-1}=4$에서 $x\to1$일 때 (분모)$\to0$이고 극한값이 존재하므로 (분자)$\to0$이어야 한다.

즉, $\lim_{x\to1}\{f(x)+3\}=f(1)+3=0$이므로 $f(1)=-3$

이때 $\lim_{x\to1}\dfrac{f(x)+3}{x-1}=\lim_{x\to1}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=f'(1)$이므로 $f'(1)=4$

한편, $\lim_{x\to1}\dfrac{f(x)+g(x)}{x-1}=10$에서 $x\to1$일 때 (분모)$\to0$이고 극한값이 존재하므로 (분자)$\to0$이어야 한다.

즉, $\lim_{x\to1}\{f(x)+g(x)\}=f(1)+g(1)=0$이므로

$g(1)=-f(1)=-(-3)=3$

이때

$\lim_{x\to1}\dfrac{f(x)+g(x)}{x-1}=\lim_{x\to1}\left\{\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}+\dfrac{g(x)-g(1)}{x-1}\right\}$

$=f'(1)+g'(1)=10$

이므로

$g'(1)=10-f'(1)=10-4=6$

따라서 $g(1)+g'(1)=3+6=9$

답 ④

필수 유형 ❷

함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하므로 $x=-2$에서도 미분가능하다.

함수 $f(x)$가 $x=-2$에서 미분가능하면 $x=-2$에서 연속이므로

$\lim_{x\to-2-}f(x)=\lim_{x\to-2+}f(x)=f(-2)$이어야 한다.

이때

$\lim_{x\to-2-}f(x)=\lim_{x\to-2-}(x^2+ax+b)=4-2a+b$

$\lim_{x\to-2+}f(x)=\lim_{x\to-2+}2x=-4$

$f(-2)=4-2a+b$

이므로

$4-2a+b=-4$에서

$2a-b=8$ ...... ㉠

한편, 함수 $f(x)$가 $x=-2$에서 미분가능하므로

$\lim_{x\to-2-}\dfrac{f(x)-f(-2)}{x-(-2)}=\lim_{x\to-2+}\dfrac{f(x)-f(-2)}{x-(-2)}$

이어야 한다.

이때

$\lim_{x\to-2-}\dfrac{f(x)-f(-2)}{x-(-2)}=\lim_{x\to-2-}\dfrac{(x^2+ax+b)-(4-2a+b)}{x+2}$

$=\lim_{x\to-2-}\dfrac{x^2+ax-4+2a}{x+2}$

$=\lim_{x\to-2-}\dfrac{(x+2)(x+a-2)}{x+2}$

$=\lim_{x\to-2-}(x+a-2)=a-4$

$\lim_{x\to-2+}\dfrac{f(x)-f(-2)}{x-(-2)}=\lim_{x\to-2+}\dfrac{2x-(4-2a+b)}{x+2}$

$=\lim_{x\to-2+}\dfrac{2x-(-4)}{x+2}$

$=\lim_{x\to-2+}\dfrac{2(x+2)}{x+2}=\lim_{x\to-2+}2=2$

이므로 $a-4=2$에서 $a=6$

이것을 ㉠에 대입하면

$2\times6-b=8$, $b=4$

따라서 $a+b=6+4=10$

답 ⑤

04

함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하므로 $x=-1$에서도 미분가능하다.

함수 $f(x)$가 $x=-1$에서 미분가능하면 $x=-1$에서 연속이므로

$\lim_{x\to-1-}f(x)=\lim_{x\to-1+}f(x)=f(-1)$

이어야 한다.

이때

$\lim_{x\to-1-}f(x)=\lim_{x\to-1-}(ax^2+x-3)=a-4$

$\lim_{x\to-1+}f(x)=\lim_{x\to-1-}(bx+1)=-b+1$

$f(-1)=-b+1$

이므로 $a-4=-b+1$에서

$a+b=5$ ...... ㉠

한편, 함수 $f(x)$가 $x=-1$에서 미분가능하므로

$\lim_{x\to-1-}\dfrac{f(x)-f(-1)}{x-(-1)}=\lim_{x\to-1+}\dfrac{f(x)-f(-1)}{x-(-1)}$

이어야 한다.

이때

$\lim_{x\to-1-}\dfrac{f(x)-f(-1)}{x-(-1)}=\lim_{x\to-1-}\dfrac{(ax^2+x-3)-(-b+1)}{x+1}$

$=\lim_{x\to-1-}\dfrac{(ax^2+x-3)-(a-4)}{x+1}$

$$= \lim_{x\to -1-} \frac{(x+1)(ax-a+1)}{x+1}$$

$$= \lim_{x\to -1-} (ax-a+1) = -2a+1$$

$$\lim_{x\to -1+} \frac{f(x)-f(-1)}{x-(-1)} = \lim_{x\to -1+} \frac{(bx+1)-(-b+1)}{x+1}$$

$$= \lim_{x\to -1+} \frac{b(x+1)}{x+1}$$

$$= \lim_{x\to -1+} b = b$$

이므로 $-2a+1=b$에서

$2a+b=1$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=-4,\ b=9$

따라서

$$f(x) = \begin{cases} -4x^2+x-3 & (x<-1) \\ 9x+1 & (x \ge -1) \end{cases}$$

이므로

$$f(2)-f(-2) = (18+1)-(-16-2-3)$$
$$= 19-(-21) = 40$$

답 ⑤

05

ㄱ. $\displaystyle \lim_{x\to 0-} \frac{f(x)+1}{x} = \lim_{x\to 0-} \frac{(x^2-1)+1}{x} = \lim_{x\to 0-} \frac{x^2}{x}$

$\displaystyle = \lim_{x\to 0-} x = 0$ (참)

ㄴ. $\displaystyle \lim_{x\to 0-} f(x) = \lim_{x\to 0-} (x^2-1) = -1$

$\displaystyle \lim_{x\to 0+} f(x) = \lim_{x\to 0+} (1-x^3) = 1$

이므로 $\displaystyle \lim_{x\to 0-} f(x) \ne \lim_{x\to 0+} f(x)$

즉, 함수 $f(x)$가 $x=0$에서 연속이 아니므로 $x=0$에서 미분가능하지 않다. (거짓)

ㄷ. $\displaystyle \lim_{x\to 1-} |f(x)| = \lim_{x\to 1-} |1-x^3| = 0$

$\displaystyle \lim_{x\to 1+} |f(x)| = \lim_{x\to 1+} |3-3x| = 0$

$|f(1)|=0$

에서 $\displaystyle \lim_{x\to 1-} |f(x)| = \lim_{x\to 1+} |f(x)| = |f(1)|$이므로 함수 $|f(x)|$는 $x=1$에서 연속이다.

그런데

$$\lim_{x\to 1-} \frac{|f(x)|-|f(1)|}{x-1} = \lim_{x\to 1-} \frac{|1-x^3|-0}{x-1} = \lim_{x\to 1-} \frac{1-x^3}{x-1}$$

$$= \lim_{x\to 1-} \frac{(1-x)(1+x+x^2)}{x-1}$$

$$= \lim_{x\to 1-} (-x^2-x-1) = -3$$

$$\lim_{x\to 1+} \frac{|f(x)|-|f(1)|}{x-1} = \lim_{x\to 1+} \frac{|3-3x|-0}{x-1} = \lim_{x\to 1+} \frac{3(x-1)}{x-1}$$

$$= \lim_{x\to 1-} 3 = 3$$

에서 $\displaystyle \lim_{x\to 1-} \frac{|f(x)|-|f(1)|}{x-1} \ne \lim_{x\to 1+} \frac{|f(x)|-|f(1)|}{x-1}$이므로

함수 $|f(x)|$는 $x=1$에서 미분가능하지 않다. (거짓)

이상에서 옳은 것은 ㄱ이다.

답 ①

06

조건 (나)에 의하여 함수 $y=f(x)$의 그래프는 $0 \le x \le k$에서의 곡선 $y=f(x)$를 x축의 방향으로 k만큼, y축의 방향으로 $f(k)$만큼 평행이동하거나 x축의 방향으로 $-k$만큼, y축의 방향으로 $-f(k)$만큼 평행이동하면서 반복되므로 함수 $f(x)$가 $x=k$에서 미분가능하면 실수 전체의 집합에서 미분가능하다.

(i) $\displaystyle \lim_{x\to k-} f(x) = \lim_{x\to k-} (x^3-6x^2+10x) = k^3-6k^2+10k$

$\displaystyle \lim_{x\to k+} f(x) = \lim_{x\to 0+} f(x+k) = \lim_{x\to 0+} \{f(x)+f(k)\}$

$= f(0)+f(k) = k^3-6k^2+10k$

$f(k) = k^3-6k^2+10k$

에서 $\displaystyle \lim_{x\to k-} f(x) = \lim_{x\to k-} f(x) = f(k)$이므로 함수 $f(x)$는 $x=k$에서 연속이다.

(ii) $\displaystyle \lim_{h\to 0-} \frac{f(k+h)-f(k)}{h}$

$\displaystyle = \lim_{h\to 0-} \frac{(k+h)^3-6(k+h)^2+10(k+h)-k^3+6k^2-10k}{h}$

$\displaystyle = \lim_{h\to 0-} \frac{3k^2h+3kh^2+h^3-12kh-6h^2+10h}{h}$

$\displaystyle = \lim_{h\to 0-} (3k^2+3kh+h^2-12k-6h+10)$

$= 3k^2-12k+10$

$\displaystyle \lim_{h\to 0+} \frac{f(k+h)-f(k)}{h} = \lim_{h\to 0+} \frac{f(k)+f(h)-f(k)}{h}$

$\displaystyle = \lim_{h\to 0+} \frac{f(h)}{h}$

$\displaystyle = \lim_{h\to 0+} \frac{h^3-6h^2+10h}{h}$

$\displaystyle = \lim_{h\to 0+} (h^2-6h+10) = 10$

이므로 함수 $f(x)$가 $x=k$에서 미분가능하려면

$3k^2-12k+10=10$이어야 한다.

즉, $3k(k-4)=0$

따라서 $k>0$이므로 $k=4$

답 ④

필수 유형 ❸

$g(x)=x^2f(x)$에서

$g'(x)=2xf(x)+x^2f'(x)$

따라서

$g'(2) = 2\times 2\times f(2)+2^2\times f'(2)$

$= 4\times 1+4\times 3$

$= 16$

답 ③

07

$f(x)=(x^2+1)(x^2+ax-3)$에서

$f'(x)=2x(x^2+ax-3)+(x^2+1)(2x+a)$이므로

$f'(1)=2(a-2)+2(a+2)=4a$

$f'(2)=4(2a+1)+5(a+4)=13a+24$

이때 $f'(2)=f'(1)+60$이므로

$13a+24=4a+60$, $9a=36$

따라서 $a=4$

답 ④

08

$\lim_{x\to1}\frac{f(x)-2}{x-1}=3$에서 $x\to1$일 때 (분모) $\to 0$이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\to 0$이어야 한다.

즉, $\lim_{x\to1}\{f(x)-2\}=f(1)-2=0$이므로 $f(1)=2$

이때 $\lim_{x\to1}\frac{f(x)-2}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=f'(1)$이므로 $f'(1)=3$

한편, $g(x)=(3x^2+2)f(x)$에서

$g'(x)=6xf(x)+(3x^2+2)f'(x)$이므로

$g(1)=5f(1)=5\times2=10$

$g'(1)=6f(1)+5f'(1)=6\times2+5\times3=27$

따라서 $g(1)+g'(1)=10+27=37$

답 ②

09

$\frac{1}{x}=t$라 하면 $x\to\infty$일 때, $t\to0+$이므로

$$\lim_{x\to\infty}x\left\{f\left(2+\frac{3}{x}\right)-21\right\}=\lim_{t\to0+}\frac{f(2+3t)-21}{t}=f(2) \quad \cdots\cdots ㉠$$

㉠에서 $t\to0+$일 때 (분모) $\to 0$이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\to 0$이어야 한다.

즉, $\lim_{t\to0+}\{f(2+3t)-21\}=f(2)-21=0$이므로 $f(2)=21$

이때 $\lim_{t\to0+}\frac{f(2+3t)-21}{t}=3\lim_{t\to0+}\frac{f(2+3t)-f(2)}{3t}=3f'(2)$

이므로 $3f'(2)=f(2)=21$에서 $f'(2)=7$

한편, $f(x)=2x^3+ax^2-5x+b$에서

$f(2)=16+4a-10+b=21$이므로

$4a+b=15 \quad \cdots\cdots ㉡$

$f'(x)=6x^2+2ax-5$에서

$f'(2)=24+4a-5=7$이므로 $4a=-12$, $a=-3$

$a=-3$을 ㉡에 대입하면

$-12+b=15$, $b=27$

따라서 $a+b=(-3)+27=24$

답 ②

필수 유형 ❹

함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하므로 닫힌구간 $[1, 5]$에서 연속이고 열린구간 $(1, 5)$에서 미분가능하다.

그러므로 평균값 정리에 의하여 $\frac{f(5)-f(1)}{5-1}=f'(c)$인 c가 열린구간 $(1, 5)$에 적어도 하나 존재한다.

조건 (가)에 의하여 $f(1)=3$이므로 $f'(c)=\frac{f(5)-3}{4}$이고, 조건 (나)에 의하여 $1<x<5$인 모든 실수 x에 대하여 $f'(x)\geq5$이므로

$f'(c)=\frac{f(5)-3}{4}\geq5$

따라서 $f(5)\geq23$이므로 구하는 $f(5)$의 최솟값은 23이다.

답 ③

참고

$f(x)=5x-2$이면 $f(5)=23$이고 주어진 조건을 만족시킨다.

10

다항함수 $f(x)$는 실수 전체의 집합에서 미분가능하므로 닫힌구간 $[2, 4]$에서 연속이고 열린구간 $(2, 4)$에서 미분가능하다.

그러므로 평균값 정리에 의하여 $\frac{f(4)-f(2)}{4-2}=f'(c)$인 c가 열린구간 $(2, 4)$에 적어도 하나 존재한다.

조건 (가)에 의하여 $f(4)=10$이므로 $f'(c)=\frac{10-f(2)}{2}$이고, 조건 (나)에 의하여 $2<x<4$인 모든 실수 x에 대하여 $|f'(x)|\leq6$이므로

$|f'(c)|=\left|\frac{10-f(2)}{2}\right|\leq6$

$|10-f(2)|\leq12$, $-12\leq10-f(2)\leq12$, $-2\leq f(2)\leq22$

따라서 $M=22$, $m=-2$이므로

$M-m=22-(-2)=24$

답 ④

참고

$f(x)=-6x+34$이면 $f(2)=22$이면서 조건을 만족시키고, $f(x)=6x-14$이면 $f(2)=-2$이면서 조건을 만족시킨다.

11

$y=x^3-2x-5$에서 $y'=3x^2-2$이므로 곡선 $y=x^3-2x-5$의 접선 중 기울기가 1인 접선의 접점의 x좌표를 t라 하면

$3t^2-2=1$

$t=1$ 또는 $t=-1$

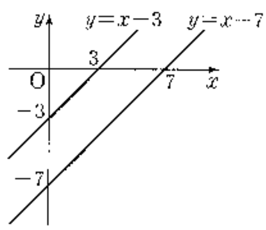
(i) $t=1$일 때, 접점의 좌표가 $(1, -6)$이므로 접선의 방정식은

$y+6=x-1$, 즉 $y=x-7$

(ii) $t=-1$일 때, 접점의 좌표가 $(-1, -4)$이므로 접선의 방정식은

$y+4=x+1$, 즉 $y=x-3$

(i), (ii)에 의하여 두 직선 l_1, l_2와 x축, y축으로 둘러싸인 사각형은 그림과 같다.



따라서 구하는 사각형의 넓이는

$\frac{1}{2}\times7^2-\frac{1}{2}\times3^2=\frac{40}{2}=20$

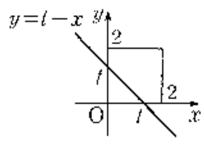
답 ⑤

12

(i) $t\leq0$인 때, $f(t)=0$

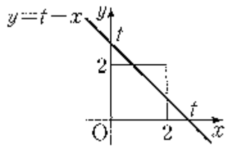
(ii) $0<t\leq2$일 때,

$f(t)=\frac{1}{2}t^2$



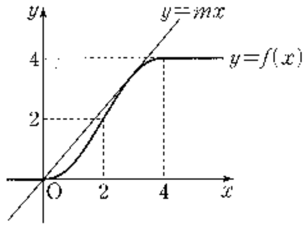
(iii) $2<t<4$일 때,

$f(t)=4-\frac{1}{2}(4-t)^2$



(iv) $t\geq 4$일 때, $f(t)=4$

(i)~(iv)에 의하여 함수 $y=f(x)$의 그래프는 그림과 같다.



그림과 같이 직선 $y=mx$가 $2<x<4$인 점에서 곡선 $y=f(x)$에 접할 때의 기울기 m의 값을 구해 보자.

$2<x<4$일 때, $f(x)=-\frac{1}{2}x^2+4x-4$이므로 접점의 x좌표를 s라 하면

$-\frac{1}{2}s^2+4s-4=ms$ …… ㉠

$f'(x)=-x+4$이므로

$-s+4=m$ …… ㉡

㉡을 ㉠에 대입하면

$-\frac{1}{2}s^2+4s-4=-s^2+4s$, $s^2=8$

$2<s<4$이므로 $s=2\sqrt{2}$이고 $m=4-2\sqrt{2}$

즉, 함수 $|f(x)-mx|$가 $x=0$에서만 미분가능하지 않으려면

$m<0$ 또는 $m\geq 4-2\sqrt{2}$

이어야 하므로 조건을 만족시키는 양수 m의 최솟값은 $4-2\sqrt{2}$이다.

따라서 $a=4$, $b=-2$이므로

$a^2+b^2=4^2+(-2)^2=20$

답 20

필수 유형 ❺

$f(x)=x^3+ax^2-(a^2-8a)x+3$에서

$f'(x)=3x^2+2ax-(a^2-8a)$

함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 증가하려면 모든 실수 x에 대하여 $f'(x)\geq 0$이어야 한다.

즉, 이차방정식 $f'(x)=0$의 판별식을 D라 하면 $D\leq 0$이어야 하므로

$\frac{D}{4}=a^2+3(a^2-8a)\leq 0$

$4a(a-6)\leq 0$

$0\leq a\leq 6$

따라서 구하는 실수 a의 최댓값은 6이다.

답 6

13

함수 $f(x)$가 구간 $(-3, 0)$에서 감소하므로 이 구간에서 $f'(x)\leq 0$이고, 구간 $(0, \infty)$에서 증가하므로 이 구간에서 $f'(x)\geq 0$이다.

그러므로 $f'(0)=0$이어야 한다.

$f(x)=x^3+ax^2+bx+1$에서

$f'(x)=3x^2+2ax+b$이므로 $f'(0)=b=0$

즉, $f'(x)=3x^2+2ax$

이때 구간 $(-3, 0)$에서 $f'(x)\leq 0$이고 $f(x)$는 다항함수이므로

$f'(-3)\leq 0$이어야 한다.

그러므로 $f'(-3)=27-6a\leq 0$에서 $a\geq\frac{9}{2}$

따라서 $f(x)=x^3+ax^2+1$에서

$f(1)=2+a\geq 2+\frac{9}{2}=\frac{13}{2}$

이므로 구하는 $f(1)$의 최솟값은 $\frac{13}{2}$이다.

답 ③

14

닫힌구간 $[n, n+2]$에서 정의된 함수 $f(x)$가 일대일함수가 되려면 이 구간에서 $f(x)$가 증가하거나 감소해야 한다. 즉, 구간 $[n, n+2]$에 속하는 모든 실수 x에 대하여 $f'(x)\geq 0$이거나 $f'(x)\leq 0$이어야 한다.

이때 $f(x)=x^3-9x^2+24x+5$에서

$f'(x)=3x^2-18x+24$

$=3(x^2-6x+8)$

$=3(x-2)(x-4)$

이므로 구간 $(-\infty, 2]$에서 $f'(x)\geq 0$, 구간 $[2, 4]$에서 $f'(x)\leq 0$, 구간 $[4, \infty)$에서 $f'(x)\geq 0$이다.

따라서 조건을 만족시키는 10 이하의 자연수 n의 값은

2, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10

이므로 구하는 합은 51이다.

답 51

15

함수 $f(x)$의 역함수가 존재하려면 $f(x)$의 최고차항의 계수가 양수이므로 $x\neq a$인 모든 실수 x에 대하여 $f'(x)\geq 0$이어야 한다.

이때

$f(x)=\begin{cases} x^3+x^2+x-a+2 & (x\geq a) \\ x^3+x^2-x+a+2 & (x<a) \end{cases}$

에서

$f'(x)=\begin{cases} 3x^2+2x+1 & (x>a) \\ 3x^2+2x-1 & (x<a) \end{cases}$

$x>a$일 때,

$f'(x)=3x^2+2x+1$이고 이차방정식 $3x^2+2x+1=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=1^2-3\times 1=-2<0$

이므로 실수 a의 값에 관계없이 $x>a$인 모든 실수 x에 대하여

$f'(x)>0$이다.

$x<a$일 때,

$f'(x)=3x^2+2x-1=(x+1)(3x-1)$

이므로 $x<a$인 모든 실수 x에 대하여 $f'(x)\geq 0$이려면 $a\leq -1$이어야 한다.

따라서 구하는 실수 a의 최댓값은 -1이다.

답 ②

필수 유형 ❻

$f(x)=x^4+ax^2+b$에서

$f'(x)=4x^3+2ax$

함수 $f(x)$가 $x=1$에서 극소이므로

$f'(1)=0$에서

$4+2a=0$, $a=-2$

이때 $f'(x)=4x^3-4x=4x(x+1)(x-1)$이므로

$f'(x)=0$에서

$x=0$ 또는 $x=-1$ 또는 $x=1$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	극소	↗	극대	↘	극소	↗

즉, 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 극댓값을 갖고 주어진 조건에 의하여 극댓값이 4이므로

$f(0)=b=4$

따라서 $a+b=(-2)+4=2$

답 2

16

삼차함수 $f(x)=x^3+ax^2+bx$가 주어진 조건을 만족시키려면 함수 $f(x)$가 $x=1$에서 극대, $x=5$에서 극소이어야 한다.

즉, $f'(x)=3x^2+2ax+b$에서

$f'(1)=0$이므로

$3+2a+b=0$ $\cdots\cdots$ ㉠

또 $f'(5)=0$에서

$75+10a+b=0$ $\cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

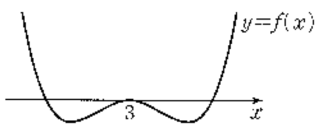
$a=-9$, $b=15$

따라서 $a+b=(-9)+15=6$

답 ③

17

조건 (가), (나)에 의하여 함수 $y=f(x)$의 그래프는 그림과 같다.



조건 (나)에 의하여 방정식 $f(x)=0$의 한 실근을 $3+a$라 하면 다른 한 실근은 $3-a$이므로

$f(x)=(x-3+a)(x-3-a)(x-3)^2$ (단, a는 양의 상수)

로 놓을 수 있다.

즉, $f(x)=\{(x-3)^2-a^2\}(x-3)^2=(x^2-6x+9-a^2)(x^2-6x+9)$

이므로

$$\begin{aligned}f'(x)&=(2x-6)(x^2-6x+9)+(x^2-6x+9-a^2)(2x-6)\\&=2(x-3)\{2(x^2-6x+9)-a^2\}\\&=2(x-3)\{2(x-3)^2-a^2\}\end{aligned}$$

$f'(x)=0$에서 $x=3$ 또는 $x=3\pm\frac{a}{\sqrt{2}}$이므로 함수 $f(x)$는

$x=3\pm\frac{a}{\sqrt{2}}$에서 극솟값을 갖는다.

이때 함수 $f(x)$의 극솟값이 -16이므로

$f(x)=(x-3)^4-a^2(x-3)^2$에서

$f\left(3+\frac{a}{\sqrt{2}}\right)=\left(\frac{a}{\sqrt{2}}\right)^4-a^2\left(\frac{a}{\sqrt{2}}\right)^2=\frac{a^4}{4}-\frac{a^4}{2}=-\frac{a^4}{4}=-16$,

$f\left(3-\frac{a}{\sqrt{2}}\right)=\left(-\frac{a}{\sqrt{2}}\right)^4-a^2\left(-\frac{a}{\sqrt{2}}\right)^2=\frac{a^4}{4}-\frac{a^4}{2}=-\frac{a^4}{4}=-16$

즉, $a^4=64$에서 $a^2=8$이므로

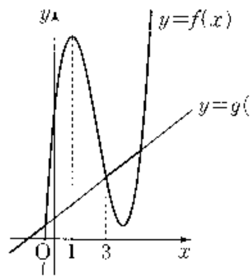
$f(x)=(x-3)^4-8(x-3)^2$

따라서 $f(0)=3^4-8\times3^2=81-72=9$

답 ⑤

18

조건 (가)에 의하여 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프는 서로 다른 세 점에서 만나야 한다. 또 조건 (나)를 만족시키려면 그림과 같이 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 극대이고, 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프는 $x=3$인 점에서 만나야 한다.



$f(x)=2x^3+ax^2+bx+18$에서

$f'(x)=6x^2+2ax+b$이고

$f'(1)=0$이어야 하므로

$6+2a+b=0$ $\cdots\cdots$ ㉠

$f(3)=g(3)$이어야 하므로

$54+9a+3b+18=9$에서

$3a+b=-21$ $\cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=-15$, $b=24$이므로

$f(x)=2x^3-15x^2+24x+18$이고

$f'(x)=6x^2-30x+24=6(x-1)(x-4)$

$f'(x)=0$에서

$x=1$ 또는 $x=4$

따라서 함수 $f(x)$의 극댓값과 극솟값의 합은

$f(1)+f(4)=29+2=31$

답 ①

필수 유형 ❼

$f(x)=x^3-3x^2-9x-12$에서

$f'(x)=3x^2-6x-9=3(x+1)(x-3)$

이므로 $f'(x)=0$에서

$x=-1$ 또는 $x=3$

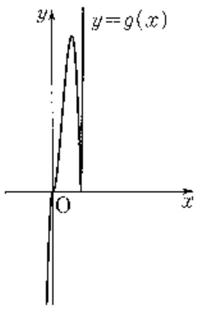
함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

즉, 함수 $f(x)$는 $x=-1$에서 극댓값 $f(-1)=-7$을 갖고, $x=3$에서 극솟값 $f(3)=-39$를 갖는다.
한편, 조건 (가)에서 $xg(x)=|xf(x-p)+qx|$이므로

$$g(x)=\begin{cases} |f(x-p)+q| & (x>0) \\ -|f(x-p)+q| & (x<0) \end{cases}$$

함수 $g(x)$가 $x=0$에서 연속이므로
$|f(-p)+q|=-|f(-p)-q|$,
즉, $f(-p)+q=0$
이때 함수 $y=|f(x-p)+q|$의 그래프는 함수 $y=f(x)$의 그래프를 x축의 방향으로 p만큼, y축의 방향으로 q만큼 평행이동시킨 후 $y<0$인 부분을 x축에 대하여 대칭이동시킨 것인데, 조건 (나)에서 함수 $g(x)$가 $x=a$에서 미분가능하지 않은 실수 a의 개수가 1이어야 하므로 $p=1$, $q=7$이고, 함수 $y=g(x)$의 그래프는 그림과 같다.



따라서 $p+q=1+7=8$

답 ③

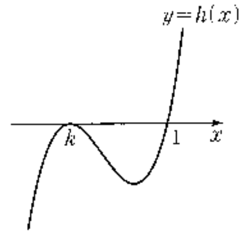
19

ㄱ. 실수 전체의 집합에서 도함수 $f'(x)$가 정의되어 있으므로 함수 $f(x)$는 실수 전체의 집합에서 미분가능하다. (참)
ㄴ. $f'(1)=0$이고 $x=1$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 양에서 음으로 바뀌므로 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 극대이다. (참)
ㄷ. (i) $x\le1$일 때 $f'(x)\ge0$이고 $x=-1$에서만 $f'(x)=0$이므로 함수 $f(x)$는 증가한다.
(ii) $1<x<3$일 때 $f'(x)<0$이므로 함수 $f(x)$는 감소한다.
(iii) $x\ge3$일 때 $f'(x)\ge0$이고 $x=3$에서만 $f'(x)=0$이므로 함수 $f(x)$는 증가한다.
(i), (ii), (iii)에 의하여 $x\ge1$일 때 함수 $f(x)$는 $x=3$에서 극소이면서 최소이므로 $f(3)>0$이면 $x\ge1$일 때 함수 $y=f(x)$의 그래프는 x축과 만나지 않는다.
한편, $x\le-1$인 때 $f'(x)=-x-1$이므로 이 구간에서 함수 $f(x)$는 최고차항의 계수가 음수인 이차함수이다.
즉, $\lim_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$이므로 $f(c)<0$인 c가 구간 $(-\infty, -1)$에 존재한다. 이때 $f(1)>f(3)>0$이므로 사잇값의 정리에 의하여 $f(x)=0$인 x가 구간 $(c, 1)$에 존재한다. 그런데 $x\le1$일 때 함수 $f(x)$는 증가하므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 x축과 오직 한 점에서만 만난다. (참)
이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

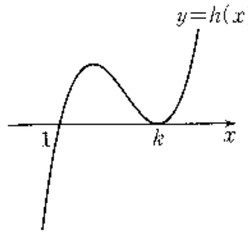
답 ⑤

20

$h(x)=f(x)-g(x)$라 하면 함수 $h(x)$는 최고차항의 계수가 1인 삼차함수이고, 조건 (가)에 의하여 방정식 $h(x)=0$의 서로 다른 실근의 개수는 2이다. 또 조건 (나)에 의하여 $h(1)=0$이므로
$h(x)=(x-1)(x-k)^2$ (단, k는 1이 아닌 상수)
로 놓을 수 있다.
즉, 함수 $y=h(x)$의 그래프는 다음 두 가지 중 하나이다.



[그림 1]



[그림 2]

이때 조건 (다)를 만족시키려면 함수 $y=h(x)$의 그래프는 [그림 1]과 같아야 하며 함수 $h(x)$는 $x=0$에서 극솟값을 가져야 한다.

$$\begin{aligned} h'(x)&=(x-k)^2+2(x-1)(x-k) \\ &=(x-k)(3x-k-2) \end{aligned}$$

이고 $h'(x)=0$에서
$x=k$ 또는 $x=\frac{k+2}{3}$이므로 $\frac{k+2}{3}=0$
$k=-2$
따라서 $h(x)=(x-1)(x+2)^2$이고
$f(x)=h(x)+g(x)=(x-1)(x+2)^2+x+3$
이므로
$f(2)=1\times16+5=21$

답 ①

21

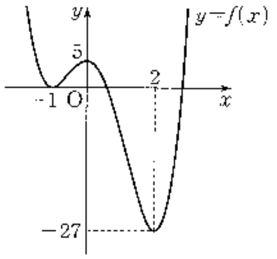
$f(x)=3x^4-4x^3-12x^2+k$에서

$$\begin{aligned} f'(x)&=12x^3-12x^2-24x \\ &=12x(x^2-x-2) \\ &=12x(x+1)(x-2) \end{aligned}$$

이므로 $f'(x)=0$에서
$x=-1$ 또는 $x=0$ 또는 $x=2$ …… ㉠
함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	극소	↗	극대	↘	극소	↗

이때 조건 (가)를 만족시키려면
$f(-1)=0$ 또는 $f(0)=0$ 또는 $f(2)=0$
이어야 한다.
(i) $f(-1)=0$인 경우
$f(-1)=k-5=0$에서 $k=5$이므로
$f(x)=3x^4-4x^3-12x^2+5$이고, 함수 $y=f(x)$의 그래프는 [그림 1]과 같다.



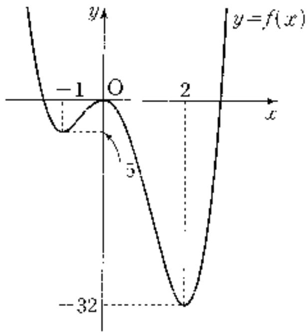
[그림 1]

이 경우 조건 (나)를 만족시킨다.

(ii) $f(0)=0$인 경우

$f(0)=k=0$이므로

$f(x)=3x^4-4x^3-12x^2$이고, 함수 $y=f(x)$의 그래프는 [그림 2]와 같다.



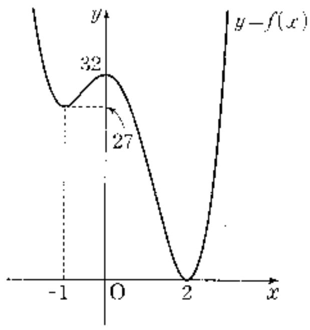
[그림 2]

이 경우 조건 (나)를 만족시킨다.

(iii) $f(2)=0$인 경우

$f(2)=k-32=0$에서 $k=32$이므로

$f(x)=3x^4-4x^3-12x^2+32$이고, 함수 $y=f(x)$의 그래프는 [그림 3]과 같다.



[그림 3]

이 경우 조건 (나)를 만족시키지 않는다.

ㄱ. ㉠에서 방정식 $f'(x)=0$은 서로 다른 세 실근을 갖는다. (참)

ㄴ. (i)에서 $k=5$인 경우 두 조건 (가), (나)를 모두 만족시키지만 함수 $f(x)$의 극댓값은 0이 아니다. (거짓)

ㄷ. (i), (ii), (iii)에서 조건을 만족시키는 모든 k의 값은

$k=5$ 또는 $k=0$

이므로 그 합은 5이다. (참)

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

답 ③

필수 유형 ❸

$f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ (a, b, c는 상수)라 하면

$f'(x)=3x^2+2ax+b$

함수 $g(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하므로 $g(x)$는 $x=0$에서 연속이다.

즉, $\lim_{x\to 0-} g(x)=\lim_{x\to 0+} g(x)=g(0)$이어야 한다.

이때

$\lim_{x\to 0-} g(x)=\lim_{x\to 0-} \frac{1}{2}=\frac{1}{2}$

$\lim_{x\to 0+} g(x)=\lim_{x\to 0+} f(x)=f(0)=c$

$g(0)=f(0)=c$이므로 $c=\frac{1}{2}$

한편, 함수 $g(x)$가 $x=0$에서 미분가능하므로

$\lim_{x\to 0-} \frac{g(x)-g(0)}{x}=\lim_{x\to 0+} \frac{g(x)-g(0)}{x}$이어야 한다.

이때

$\lim_{x\to 0-} \frac{g(x)-g(0)}{x}=\lim_{x\to 0-} \frac{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}}{x}=0$

$\lim_{x\to 0+} \frac{g(x)-g(0)}{x}=\lim_{x\to 0+} \frac{f(x)-f(0)}{x}=f'(0)=b$

이므로 $b=0$

그러므로 $f(x)=x^3+ax^2+\frac{1}{2}$, $f'(x)=3x^2+2ax$

ㄱ. $g(0)+g'(0)=f(0)+f'(0)=\frac{1}{2}+0=\frac{1}{2}$ (참)

ㄴ. $f'(x)=x(3x+2a)=0$에서

$x=0$ 또는 $x=-\frac{2}{3}a$

이때 $-\frac{2}{3}a<0$이면 함수 $g(x)$의 최솟값이 $\frac{1}{2}$이므로 조건을 만족시키지 않는다. 즉, $-\frac{2}{3}a>0$이므로 $a<0$

그러므로 $g(1)=f(1)=1+a+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}+a<\frac{3}{2}$ (참)

ㄷ. $x\geq 0$일 때 함수 $g(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	$\cdots$	$-\frac{2}{3}a$	$\cdots$
$g'(x)$		$-$	0	$+$
$g(x)$	$\frac{1}{2}$	↘	극소	↗

즉, 함수 $g(x)$는 $x=-\frac{2}{3}a$에서 극소이면서 최소이므로

$g\left(-\frac{2}{3}a\right)=f\left(-\frac{2}{3}a\right)=-\frac{8}{27}a^3+\frac{4}{9}a^3+\frac{1}{2}=\frac{4}{27}a^3+\frac{1}{2}=0$

에서

$a^3=-\frac{27}{8}$, $a=-\frac{3}{2}$

따라서 $f(x)=x^3-\frac{3}{2}x^2+\frac{1}{2}$이므로

$g(2)=f(2)=8-\frac{3}{2}\times 4+\frac{1}{2}=\frac{5}{2}$ (참)

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

답 ⑤

22

$f(x)=2x^3-3x^2-12x+a$에서

$f'(x)=6x^2-6x-12=6(x+1)(x-2)$

$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=2$이므로 닫힌구간 $[0, 4]$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	$\cdots$	2	$\cdots$	4
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	a	$\searrow$	$a-20$	$\nearrow$	$a+32$

그러므로 닫힌구간 $[0, 4]$에서 함수 $f(x)$는 $x=2$일 때 최솟값 $a-20$을 갖고, $x=4$일 때 최댓값 $a+32$를 갖는다.

즉, $a-20=-18$이므로 $a=2$

이때 $M=a+32=2+32=34$

따라서 $a+M=2+34=36$

답 ③

23

$y=2x^4-3x^2-2x+4$에서 $y'=8x^3-6x-2$이므로 x좌표가 양수인 점에서 곡선 C에 접하는 접선의 접점의 x좌표를 t, 접선의 기울기를 $f(t)$라 하면

$f(t)=8t^3-6t-2\ (t>0)$

이때 $f'(t)=24t^2-6=0$에서 $t=\frac{1}{2}$이므로 함수 $f(t)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

t	(0)	$\cdots$	$\frac{1}{2}$	$\cdots$
$f'(t)$		$-$	0	$+$
$f(t)$	(-2)	$\searrow$	-4	$\nearrow$

그러므로 함수 $f(t)$는 $t>0$에서 $t=\frac{1}{2}$일 때 최솟값 -4를 갖는다.

즉, 기울기가 최소인 접선의 접점은 점 $\left(\frac{1}{2}, \frac{19}{8}\right)$이고 기울기는 -4이므로 접선의 방정식은

$y-\frac{19}{8}=-4\left(x-\frac{1}{2}\right)$

$y=-4x+\frac{35}{8}$

따라서 구하는 접선의 y절편은 $\frac{35}{8}$이므로

$p+q=8+35=43$

답 ③

24

$g(x)=x^2-6x+10$이라 하자.

$g(t)=g(t+2)$에서

$t^2-6t+10=(t+2)^2-6(t+2)+10$

$4t=8,\ t=2$

(i) $0<t<2$일 때,

$g(t)>g(t+2)$이므로

$f(t)=t\times g(t+2)=t\{(t+2)^2-6(t+2)+10\}=t^3-2t^2+2t$

이때 $f'(t)=3t^2-4t+2$이고 이차방정식 $f'(t)=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=4-6=-2<0$

이므로 $f'(t)>0$이다.

즉, $0<t<2$에서 함수 $f(t)$는 증가한다.

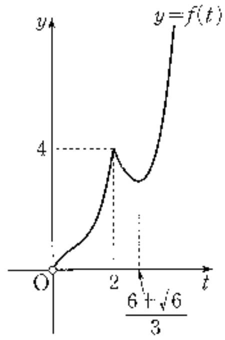
(ii) $t>2$일 때,

$g(t)\le g(t+2)$이므로

$f(t)=t\times g(t)=t^3-6t^2+10t$

이때 $f'(t)=3t^2-12t+10$이고 $f'(t)=0$에서 $t=\frac{6+\sqrt{6}}{3}$이며, $t=\frac{6+\sqrt{6}}{3}$의 좌우에서 $f'(t)$의 부호가 음에서 양으로 바뀌므로 함수 $f(t)$는 $t=\frac{6+\sqrt{6}}{3}$에서 극소이다.

$f(2)=4$이므로 (i), (ii)에 의하여 함수 $y=f(t)$의 그래프는 그림과 같다.



이때 $f(2)=4$이고 $t>2$에서 $f(t)=4$이면

$t^3-6t^2+10t=4$에서

$t^3-6t^2+10t-4=0$

$(t-2)(t^2-4t+2)=0$

$t>2$이므로 $t=2+\sqrt{2}$

그러므로 구간 $(0, a]$에서 함수 $f(t)$의 최댓값이 4가 되도록 하는 양수 a의 값의 범위는

$2\le a\le 2+\sqrt{2}$

따라서 $M=2+\sqrt{2}$, $m=2$이므로

$M+m=4+\sqrt{2}$

답 ②

25

$f(x)=x^3-5x^2+2x+13$에서

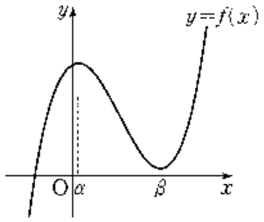
$f'(x)=3x^2-10x+2$이므로

$f'(x)=0$에서 $x=\frac{5\pm\sqrt{19}}{3}$

이때 $\alpha=\frac{5-\sqrt{19}}{3}$, $\beta=\frac{5+\sqrt{19}}{3}$라 하고, 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	α	$\cdots$	β	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	극대	$\searrow$	극소	$\nearrow$

즉, 함수 $y=f(x)$의 그래프는 그림과 같다.



$k<\beta$, $k+2>\beta$일 때, $f(k)=f(k+2)$이면

$k^3-5k^2+2k+13=(k+2)^3-5(k+2)^2+2(k+2)+13$

$6k^2-8k-8=0$

$2(3k+2)(k-2)=0$

$\beta-2<k<\beta$이므로 $k=2$

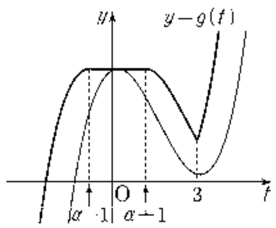
(i) $t+1\le\alpha$, 즉 $t\le\alpha-1$일 때,
  $g(t)=f(t+1)$

(ii) $t-1\le\alpha\le t+1$, 즉 $\alpha-1\le t\le\alpha+1$일 때,
  $g(t)=f(\alpha)$

(iii) $\alpha\le t-1\le 2$, 즉 $\alpha+1\le t\le 3$일 때,
  $g(t)=f(t-1)$

(iv) $t-1\ge 2$, 즉 $t\ge 3$일 때,
  $g(t)=f(t+1)$

(i)~(iv)에 의하여 함수 $y=g(t)$의 그래프는 그림과 같다.



즉, 함수 $g(t)$는 $t=3$에서 미분가능하지 않으므로 $a=3$

$t=2$일 때, $g(t)=f(t-1)$이므로

$g'(a-1)=g'(2)=f'(1)=3-10+2=-5$

$t=4$일 때, $g(t)=f(t+1)$이므로

$g'(a+1)=g'(4)=f'(5)=3\times5^2-10\times5+2=27$

따라서 $g'(a-1)+g'(a+1)=-5+27=22$

답 ②

필수 유형 9

$f(x)=2x^3-3x^2-12x+k$라 하면

$f'(x)=6x^2-6x-12=6(x+1)(x-2)$

이므로 $f'(x)=0$에서

$x=-1$ 또는 $x=2$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

이때 방정식 $f(x)=0$이 서로 다른 세 실근을 가지려면 (극댓값)>0이고 (극솟값)<0이어야 한다.

즉, $f(-1)=7+k>0$에서 $k>-7$이고

$f(2)=k-20<0$에서 $k<20$이므로

$-7<k<20$

따라서 조건을 만족시키는 정수 k는

$-6, -5, -4, \cdots, 17, 18, 19$

이므로 그 개수는 26이다.

답 ③

26

$f(x)=3x^4-8x^3-6x^2+24x$라 하자.

$f'(x)=12x^3-24x^2-12x+24=12(x+1)(x-1)(x-2)$

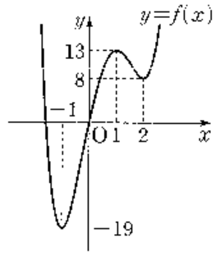
이므로 $f'(x)=0$에서

$x=-1$ 또는 $x=1$ 또는 $x=2$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	-19	↗	13	↘	8	↗

그러므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 그림과 같다.



이때 방정식 $f(x)-k=0$이 서로 다른 세 실근을 가지려면 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=k$가 서로 다른 세 점에서 만나야 한다.

따라서 $k=8$ 또는 $k=13$이므로 조건을 만족시키는 모든 상수 k의 값의 합은

$8+13=21$

답 ②

27

$f(x)=x^3-3x+n-2$라 하자.

$f'(x)=3x^2-3=3(x+1)(x-1)$

이므로 $f'(x)=0$에서

$x=-1$ 또는 $x=1$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	n	↘	$n-4$	↗

(i) $n>0$이므로 $n-4<0$이면 함수 $f(x)$의 극댓값이 양수이고 극솟값이 음수이다. 즉, 함수 $y=f(x)$의 그래프가 x축과 서로 다른 세 점에서 만나므로 방정식 $f(x)=0$의 서로 다른 실근의 개수는 3이다.
  그러므로 $n<4$일 때, $a_n=3$이다.

(ii) $n-4=0$이면 함수 $f(x)$의 극솟값이 0이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프가 x축과 접한다. 즉, 방정식 $f(x)=0$의 서로 다른 실근의 개수는 2이다.
  그러므로 $n=4$일 때, $a_n=2$이다.

(iii) $n-4>0$이면 함수 $f(x)$의 극댓값과 극솟값이 모두 양수이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 x축과 오직 한 점에서만 만난다.

즉, 방정식 $f(x)=0$의 실근의 개수는 1이다.

그러므로 $n>4$일 때, $a_n=1$이다.

(i), (ii), (iii)에 의하여

$$a_n=\begin{cases} 3\ (n<4) \\ 2\ (n=4) \\ 1\ (n>4) \end{cases}$$

이므로

$$\sum_{n=1}^{10} a_n = 3\times3+2+1\times6=17$$

답 ②

28

방정식 $f(x)=g(x)$에서

$2x^3+5x^2-7x=2x^2+5x+a$

$2x^3+3x^2-12x=a$

$h(x)=2x^3+3x^2-12x$라 하면

$h'(x)=6x^2+6x-12=6(x+2)(x-1)$

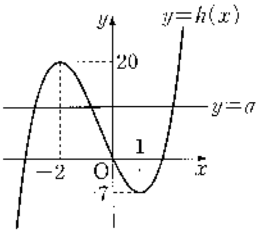
이므로 $h'(x)=0$에서

$x=-2$ 또는 $x=1$

함수 $h(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	1	$\cdots$
$h'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$h(x)$	↗	20	↘	-7	↗

그러므로 함수 $y=h(x)$의 그래프는 그림과 같다.



이때 방정식 $f(x)=g(x)$의 실근은 함수 $y=h(x)$의 그래프와 직선 $y=a$가 만나는 점의 x좌표이므로 주어진 조건을 만족시키려면 함수 $y=h(x)$의 그래프가 직선 $y=a$와 서로 다른 세 점에서 만나야 하고, 세 실근이 모두 양수일 수는 없으므로 그림과 같이 음의 실근 두 개와 양의 실근 한 개를 가져야 한다.

따라서 $0<a<20$이어야 하므로 조건을 만족시키는 모든 정수 a의 개수는 19이다.

답 ④

29

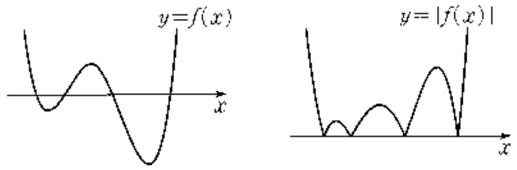
삼차방정식 $f'(x)=0$의 서로 다른 실근의 개수가 2 이하이면 함수 $|f(x)|$가 서로 다른 세 점에서 극소일 수 없으므로 방정식 $f'(x)=0$은 서로 다른 세 실근을 가져야 한다.

이때 함수 $f(x)$의 극솟값 중 양수인 것이 있으면 이 값이 함수 $|f(x)|$의 극솟값이기도 하므로 함수 $|f(x)|$의 극솟값이 모두 0이라는 조건을 만족시키지 않는다.

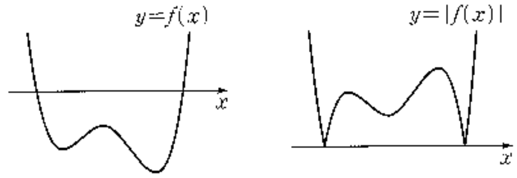
즉, 함수 $f(x)$의 극솟값은 모두 0보다 작거나 같아야 한다.

(i) 함수 $f(x)$의 극솟값이 모두 음수인 경우

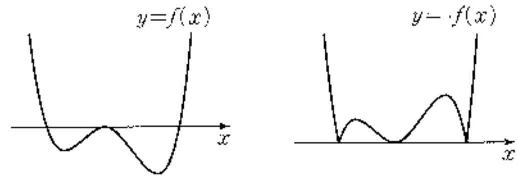
㉠ 함수 $f(x)$의 극댓값이 양수이면 다음 그림과 같이 함수 $|f(x)|$가 극소인 서로 다른 x의 값이 4개이므로 조건을 만족시키지 않는다.



㉡ 함수 $f(x)$의 극댓값이 음수이면 다음 그림과 같이 함수 $|f(x)|$의 0이 아닌 극솟값이 존재하므로 조건을 만족시키지 않는다.

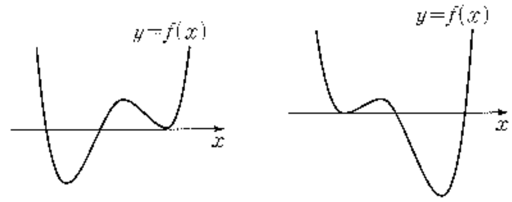


㉢ 함수 $f(x)$의 극댓값이 0이면 다음 그림과 같이 조건을 모두 만족시킨다.

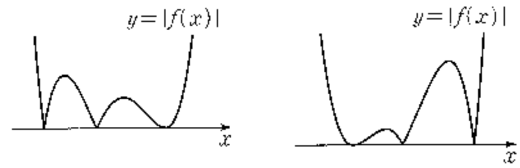


(ii) 함수 $f(x)$의 극솟값이 하나는 0이고 다른 하나는 음수인 경우

함수 $y=f(x)$의 그래프는 다음 두 가지 경우 중 하나이다.

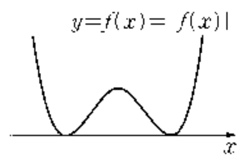


두 경우 모두 함수 $y=|f(x)|$의 그래프가 다음과 같으므로 조건을 모두 만족시킨다.



(iii) 함수 $f(x)$의 극솟값이 모두 0인 경우

함수 $y=|f(x)|$의 그래프는 함수 $y=f(x)$의 그래프와 같다. 즉, 함수 $|f(x)|$가 극소인 서로 다른 x의 값이 2개이므로 조건을 만족시키지 않는다.



ㄱ. 조건을 만족시키는 (i)의 ㉢과 (ii)의 경우 모두 함수 $|f(x)|$가 극대인 서로 다른 x의 값이 2개이다. (참)

ㄴ. 조건을 만족시키는 (i)의 ㉢과 (ii)의 경우 모두 함수 $f(x)$의 극댓값은 0보다 크거나 같다. (참)

ㄷ. 조건을 만족시키는 (i)의 ㉢과 (ii)의 경우 모두 함수 $y=f(x)$의 그래프가 x축과 서로 다른 세 점에서 만나므로 방정식 $f(x)=0$의 서로 다른 실근의 개수는 3이다. (참)

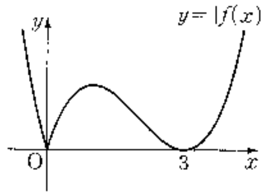
이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

답 ⑤

30

함수 $f(x)$의 최고차항의 계수를 a $(a>0)$이라 하면 조건 (가)에 의하여
$f(x)=ax(x-3)^2$ 또는 $f(x)=ax^2(x-3)$
으로 놓을 수 있다.
이때 조건 (나)를 만족시키려면 함수 $y=|f(x)|$의 그래프와 직선 $y=mx$가 서로 다른 세 점에서 만나도록 하는 실수 m의 값이 $\frac{9}{2}$뿐이어야 한다.

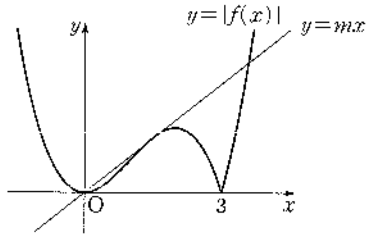
(i) $f(x)=ax(x-3)^2$인 경우
함수 $y=|f(x)|$의 그래프는 [그림 1]과 같다.



[그림 1]

$f(x)=ax(x-3)^2=ax^3-6ax^2+9ax$에서
$f'(x)=3ax^2-12ax+9a$이고 $f'(0)=9a$이므로 함수 $y=|f(x)|$의 그래프와 직선 $y=mx$는 $m=9a$일 때 서로 다른 두 점에서 만나고, $0<m<9a$일 때 서로 다른 세 점에서 만난다.
그러므로 조건 (나)를 만족시키지 않는다.

(ii) $f(x)=ax^2(x-3)$인 경우
함수 $y=|f(x)|$의 그래프는 [그림 2]와 같다.



[그림 2]

[그림 2]와 같이 직선 $y=mx$가 제1사분면에서 함수 $y=-f(x)$의 그래프와 접할 때 m의 값을 m_1이라 하면 함수 $y=|f(x)|$의 그래프와 직선 $y=mx$는 $m=m_1$일 때 서로 다른 세 점에서 만나고, $m>m_1$일 때 서로 다른 두 점에서, $0<m<m_1$일 때 서로 다른 네 점에서, $m\le0$일 때 서로 다른 두 점에서 만나므로 조건 (나)를 만족시킨다. 이때 $m_1=\frac{9}{2}$이어야 한다.

(i), (ii)에 의하여
$f(x)=ax^2(x-3)$ (단, a는 0보다 큰 상수)
로 놓을 수 있고, 직선 $y=\frac{9}{2}x$가 제1사분면에서 곡선 $y=-ax^2(x-3)$에 접해야 한다.
$y=-ax^2(x-3)=-ax^3+3ax^2$에서
$y'=-3ax^2+6ax$이므로 접점의 x좌표를 t $(t>0)$이라 하면
$-at^3+3at^2=\frac{9}{2}t$ …… ㉠
$-3at^2+6at=\frac{9}{2}$ …… ㉡
이어야 한다. $t>0$이므로 ㉠에서
$-at^2+3at=\frac{9}{2}$ …… ㉢
㉡, ㉢에서 $-3at^2+6at=-at^2+3at$
$2at^2-3at=0$, $at(2t-3)=0$
$a\neq0$, $t>0$이므로 $t=\frac{3}{2}$
이것을 ㉢에 대입하면
$-\frac{9}{4}a+\frac{9}{2}a=\frac{9}{2}$
$\frac{9}{4}a=\frac{9}{2}$, $a=2$
그러므로 $f(x)=2x^2(x-3)$이고
$f'(x)=6x^2-12x=6x(x-2)$이므로 $f'(x)=0$에서
$x=0$ 또는 $x=2$
따라서 함수 $|f(x)|$는 $x=2$에서 극대이므로 구하는 극댓값은
$|f(2)|=|2\times4\times(-1)|=8$

답 ③

참고

직선 $y=\frac{9}{2}x$가 제1사분면에서 곡선 $y=-ax^2(x-3)$에 접하도록 하는 실수 a의 값은 다음과 같이 구할 수도 있다.
조건을 만족시키려면 방정식 $\frac{9}{2}x=-ax^2(x-3)$, 즉
$x\left(ax^2-3ax+\frac{9}{2}\right)=0$의 실근이 0과 양수인 중근이어야 하므로
이차방정식 $ax^2-3ax+\frac{9}{2}=0$의 판별식을 D라 하면
$D=9a^2-18a=9a(a-2)=0$이어야 한다.
따라서 $a=2$

필수 유형 ⑩

$h(x)=f(x)-g(x)$라 하면
$h(x)=x^3-x^2-x+6-a$
이때 $h'(x)=3x^2-2x-1=(3x+1)(x-1)$이므로
$h'(x)=0$에서 $x=-\frac{1}{3}$ 또는 $x=1$
함수 $h(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	$-\frac{1}{3}$	$\cdots$	1	$\cdots$
$h'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$h(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

즉, $x\ge0$일 때 함수 $h(x)$의 최솟값은 $h(1)$이다.
이때 $x\ge0$인 모든 실수 x에 대하여 $f(x)\ge g(x)$, 즉 $h(x)\ge0$이려면 $h(1)\ge0$이어야 하므로
$h(1)=5-a\ge0$
따라서 $a\le5$이므로 조건을 만족시키는 실수 a의 최댓값은 5이다.

답 ⑤

31

$f(x)=x^4+2x^3+x^2-12x+a$라 하면
$f'(x)=4x^3+6x^2+2x-12=2(x-1)(2x^2+5x+6)$
모든 실수 x에 대하여 $2x^2+5x+6>0$이므로 $f'(x)=0$에서 $x=1$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	$a-8$	$\nearrow$

즉, 함수 $f(x)$의 최솟값이 $a-8$이므로 주어진 부등식이 모든 실수 x에 대하여 성립하려면 $a-8\ge 0$이어야 한다.

따라서 $a\ge 8$이므로 구하는 실수 a의 최솟값은 8이다.

답 ③

32

$y=2x^3-9x^2+12x+1$에서

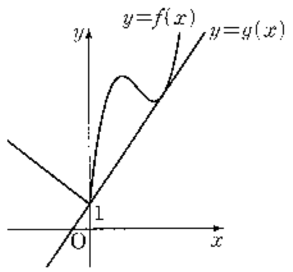
$y'=6x^2-18x+12=6(x-1)(x-2)$

$y'=0$에서 $x=1$ 또는 $x=2$

$x\ge 0$에서 함수 $y=2x^3-9x^2+12x+1$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	$\cdots$	1	$\cdots$	2	$\cdots$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$
y	1	$\nearrow$	6	$\searrow$	5	$\nearrow$

그러므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 그림과 같다.



그림과 같이 직선 $y=g(x)$가 제1사분면에서 곡선 $y=f(x)$에 접할 때의 m의 값을 구해 보자.

접점의 x좌표를 t $(t>0)$이라 하면 $f(t)=g(t)$이므로

$2t^3-9t^2+12t+1=mt+1$ …… ㉠

$f'(t)=m$이므로

$6t^2-18t+12=m$ …… ㉡

㉡을 ㉠에 대입하면

$2t^3-9t^2+12t+1=6t^3-18t^2+12t+1$

$4t^3-9t^2=0$

$t^2(4t-9)=0$

$t>0$이므로 $t=\dfrac{9}{4}$

이때 ㉡에서

$m=6\times\dfrac{81}{16}-18\times\dfrac{9}{4}+12=\dfrac{15}{8}$

따라서 모든 실수 x에 대하여 부등식 $f(x)\ge g(x)$가 성립하도록 하는 실수 m의 최댓값은 $\dfrac{15}{8}$이고, 최솟값은 직선 $y=1-x$의 기울기와 같은 -1이므로 구하는 합은

$\dfrac{15}{8}+(-1)=\dfrac{7}{8}$

답 ④

33

$g(x)=f(x)-f'(x)$에서 $f(0)=g(0)=0$이므로 $f'(0)=0$이다.

그러므로 $f(x)=x^3+ax^2$ (a는 상수)로 놓을 수 있다.

이때

$g(x)=x^3+ax^2-3x^2-2ax$

$\quad\;\;=x^3+(a-3)x^2-2ax$

$\quad\;\;=x\{x^2+(a-3)x-2a\}$

이차방정식 $x^2+(a-3)x-2a=0$의 판별식을 D라 하면

$D=(a-3)^2+8a=a^2+2a+9=(a+1)^2+8>0$

이므로 이차방정식 $x^2+(a-3)x-2a=0$은 서로 다른 두 실근을 갖는다.

이 두 실근을 α, β라 하자.

만약 $\alpha\beta=0$이면 $a=0$이고 이차방정식 $x^2-3x=0$의 두 실근은 0, 3이므로 조건을 만족시키지 않는다. 따라서 $\alpha\beta\ne 0$이고 조건을 만족시키려면 $\alpha+\beta>0$, $\alpha\beta>0$이어야 한다. 즉, $-a+3>0$, $-2a>0$이어야 하므로 $a<0$이다.

이때 함수 $f(x)$의 모든 항의 계수가 정수이므로 $a\le -1$이어야 한다.

따라서 $f(3)=27+9a\le 18$이므로 구하는 $f(3)$의 최댓값은 18이다.

답 ④

필수 유형 ⑪

점 P의 시각 t $(t\ge 0)$에서의 위치 x가

$x=-\dfrac{1}{3}t^3+3t^2+k$

이므로 시각 t $(t\ge 0)$에서의 속도를 v, 가속도를 a라 하면

$v=-t^2+6t$

$a=-2t+6$

점 P의 가속도가 0일 때

$-2t+6=0$에서 $t=3$이고 이때 점 P의 위치가 40이므로

$-\dfrac{1}{3}\times 3^3+3\times 3^2+k=40$

따라서 $k=40+9-27=22$

답 22

34

두 점 P, Q의 시각 t $(t\ge 0)$에서의 속도를 각각 v_1, v_2, 가속도를 각각 a_1, a_2라 하면

$v_1=6t^2-6t-4$, $v_2=2t+4$

$a_1=12t-6$, $a_2=2$

$v_1=v_2$에서

$6t^2-6t-4=2t+4$

$6t^2-8t-8=0$

$2(3t+2)(t-2)=0$

$t\ge 0$이므로 $t=2$

$t=2$일 때,

$a_1=12\times 2-6=18$, $a_2=2$

이므로 구하는 두 점 P, Q의 가속도의 합은

$18+2=20$

답 ⑤

35

점 P의 시각 t $(t\geq 0)$에서의 속도를 v, 가속도를 a라 하면

$v=t^3-12t+9$

$a=3t^2-12$

ㄱ. $v=(t-3)(t^2+3t-3)=0$에서 $t\geq 0$이므로

$t=3$ 또는 $t=\dfrac{-3+\sqrt{21}}{2}$ …… ㉠

이고 이 값의 좌우에서 v의 부호가 바뀌므로 점 P는 운동 방향을 두 번 바꾼다. (참)

ㄴ. $a=3t^2-12=3(t+2)(t-2)$이므로 $a=0$일 때 $t=2$

$1\leq t\leq 3$에서 함수 v의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

t	1	$\cdots$	2	$\cdots$	3
a		$-$	0	$+$	
v	-2	$\searrow$	-7	$\nearrow$	0

그러므로 점 P의 속력 $|v|$는 $t=2$에서 최댓값 7을 갖는다. (참)

ㄷ. ㉠에서 $\dfrac{-3+\sqrt{21}}{2}<3$이므로 점 P는 $t=3$에서 마지막으로 운동 방향을 바꾼다. 이때 가속도는

$a=3\times 3^2-12=15$ (참)

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

답 ⑤

36

점 P의 시각 t $(t\geq 0)$에서의 속도를 v라 하면

$v=3t^2-2at+b=3\left(t-\dfrac{a}{3}\right)^2+b-\dfrac{a^2}{3}$

이때 조건 (가)에 의하여 점 P가 운동 방향을 바꾸지 않으므로 0 이상의 모든 실수 t에 대하여 $v\geq 0$이어야 한다. 이때 $a>0$이므로

$b-\dfrac{a^2}{3}\geq 0$, 즉 $b\geq\dfrac{a^2}{3}$

한편, $t\geq 0$일 때 $v\geq 0$이므로 점 P의 속력은

$|v|=v=3\left(t-\dfrac{a}{3}\right)^2+b-\dfrac{a^2}{3}$

이다. 조건 (나)에 의하여 $|v|$이 $t=\dfrac{2}{3}$일 때 최소이므로

$\dfrac{a}{3}=\dfrac{2}{3}$, 즉 $a=2$

그러므로 $b\geq\dfrac{a^2}{3}=\dfrac{4}{3}$

따라서 $x=t^3-2t^2+bt$ $\left(b\geq\dfrac{4}{3}\right)$이고 점 P의 시각 $t=3$에서의 위치는

$27-2\times 9+3b=3b+9\geq 3\times\dfrac{4}{3}+9=13$

이므로 구하는 최솟값은 13이다.

답 13

06 다항함수의 적분법

정답				본문 66~75쪽
필수 유형 ❶	4	01 ③	02 ③	03 ②
		04 ②	05 ②	
필수 유형 ❷	①	06 ①	07 ①	08 ⑤
		09 ②	10 80	11 ③
필수 유형 ❸	14	12 ③	13 ①	14 32
필수 유형 ❹	①	15 ⑤	16 14	17 ①
		18 27	19 ③	20 ②
필수 유형 ❺	5	21 ④	22 ③	23 ④
필수 유형 ❻	36	24 8	25 ②	26 ③
		27 ③	28 ④	29 40
필수 유형 ❼	②	30 ④	31 12	
필수 유형 ❽	③	32 ②	33 ⑤	34 63

필수 유형 ❶

$f(x)=\int(3x^2+2x)\,dx=x^3+x^2+C$ (C는 적분상수)

이고, $f(0)=C=2$

따라서 $f(x)=x^3+x^2+2$이므로

$f(1)=1+1+2=4$

답 4

01

$f(x)=\int(4x+3)\,dx=2x^2+3x+C$ (C는 적분상수)

$f(1)=2+3+C=0$에서 $C=-5$

따라서 $f(x)=2x^2+3x-5$이므로

$f(2)=8+6-5=9$

답 ③

02

$f(x)=\int(5x-k)\,dx-\int(x+k)\,dx$

$=\int\{(5x-k)-(x+k)\}\,dx$

$=\int(4x-2k)\,dx=2x^2-2kx+C$ (C는 적분상수)

에서 $f'(x)=4x-2k$

$f'(1)=2$에서 $4-2k=2$이므로 $k=1$

$f(1)=0$에서 $2-2k+C=0$이므로 $C=0$

따라서 $f(x)=2x^2-2x$이므로

$f(2)=8-4=4$

답 ③

03

$G(x)=x^2f(x)-2x^6+3x^5$ $\cdots\cdots$ ㉠

이때 $2xf(x)$의 한 부정적분이 $G(x)$이므로

$G'(x)=2xf(x)$

㉠의 양변을 x에 대하여 미분하면

$2xf(x)=2xf(x)+x^2f'(x)-12x^5+15x^4$

$x^2f'(x)=12x^5-15x^4$

$f(x)$는 다항함수이므로 $f'(x)=12x^3-15x^2$

$f(x)=\int(12x^3-15x^2)dx$

$\quad =3x^4-5x^3+C$ (C는 적분상수)

㉠에서 $G(1)=f(1)+1$이고, $G(1)=4$이므로

$4=f(1)+1$, $f(1)=3$

$f(1)=3-5+C=3$에서 $C=5$

따라서 $f(x)=3x^4-5x^3+5$이므로

$f(2)=48-40+5=13$

답 ②

04

조건 (가)에서 $f'(x)=kx(x-2)$이므로

$f(x)=\int f'(x)\,dx=\int kx(x-2)\,dx=\int(kx^2-2kx)\,dx$

$\quad =\frac{1}{3}kx^3-kx^2+C$ (C는 적분상수)

이고, $f(0)=2$이므로 $C=2$

함수 $f(x)$는 $x=0$, $x=2$에서 극값을 갖고, 조건 (나)에서

$f(0)+f(2)=0$이므로

$2+\left(\frac{8}{3}k-4k+2\right)=0$

$-\frac{4}{3}k+4=0$에서 $k=3$

따라서 $f(x)=x^3-3x^2+2$이므로

$f(-1)=-2$

답 ③

05

$f(x)=\int(3x^2+ax)\,dx=x^3+\frac{a}{2}x^2+C$ (C는 적분상수)

$\lim_{x\to1}\frac{f(x)}{x^2-1}=\frac{1}{2}$에서 $x\to1$일 때, 극한값이 존재하고 (분모) $\to0$이므로 (분자) $\to0$이어야 한다.

즉, $\lim_{x\to1}f(x)=f(1)=0$이므로

$1+\frac{a}{2}+C=0$ $\cdots\cdots$ ㉠

$\lim_{x\to1}\frac{f(x)}{x^2-1}=\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{(x-1)(x+1)}=\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}\times\lim_{x\to1}\frac{1}{x+1}$

$\quad =\frac{1}{2}f'(1)=\frac{1}{2}$

에서 $f'(1)=1$

$f'(x)=3x^2+ax$에서 $f'(1)=3+a=1$이므로 $a=-2$

$a=-2$를 ㉠에 대입하면 $C=0$

따라서 $f(x)=x^3-x^2$이므로 $f(2)=8-4=4$

답 ②

필수 유형 ❷

$\int_0^2(3x^2+6x)\,dx=\left[x^3+3x^2\right]_0^2=(2^3+3\times2^2)-0=20$

답 ①

06

$\int_0^3(x^2+x|1-x|)dx$

$=\int_0^1(x^2+x|1-x|)dx+\int_1^3(x^2+x|1-x|)dx$

$=\int_0^1\{x^2+x(1-x)\}\,dx+\int_1^3\{x^2-x(1-x)\}\,dx$

$=\int_0^1x\,dx+\int_1^3(2x^2-x)\,dx=\left[\frac{1}{2}x^2\right]_0^1+\left[\frac{2}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2\right]_1^3$

$=\frac{1}{2}+\frac{40}{3}=\frac{83}{6}$

답 ①

07

$\int_0^1\left(\frac{2}{3}x^2+\frac{1}{9}x+\frac{k}{6}\right)dx=-\frac{1}{18}$의 양변에 18을 곱하면

$18\int_0^1\left(\frac{2}{3}x^2+\frac{1}{9}x+\frac{k}{6}\right)dx=-1$이므로

$18\int_0^1\left(\frac{2}{3}x^2+\frac{1}{9}x+\frac{k}{6}\right)dx=\int_0^1 18\left(\frac{2}{3}x^2+\frac{1}{9}x+\frac{k}{6}\right)dx$

$\quad =\int_0^1(12x^2+2x+3k)\,dx$

$\quad =\left[4x^3+x^2+3kx\right]_0^1=5+3k=-1$

따라서 $k=-2$

답 ①

08

$\int_0^1\{f(x)+x^2\}\,dx=\int_0^1\{(2x^2+6ax+10)+x^2\}\,dx$

$\quad =\int_0^1(3x^2+6ax+10)dx$

$\quad =\left[x^3+3ax^2+10x\right]_0^1=3a+11$

$f(1)=6a+12$

따라서 $3a+11=6a+12$이므로 $a=-\frac{1}{3}$

답 ⑤

09

$\int_0^a(3x^2+x+5)\,dx=\int_0^a(x+9)\,dx$에서

$\int_0^a(3x^2+x+5)\,dx-\int_0^a(x+9)\,dx=0$

$$\int_0^a \{(3x^2+x+5)-(x+9)\}\,dx=0$$

$$\int_0^a (3x^2-4)\,dx=0$$

$$\Big[x^3-4x\Big]_0^a=a^3-4a=0,\ a(a-2)(a+2)=0$$

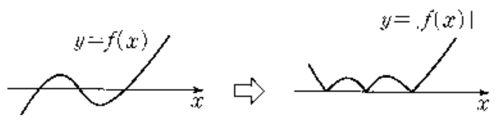
따라서 $a>0$이므로 $a=2$

답 ②

10

실수 a의 값에 따라 삼차함수 $y=f(x)$의 그래프는 그림과 같다.

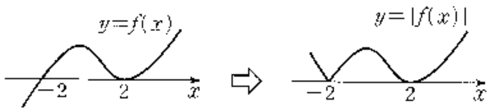
(i) $a\neq-2$이고 $a\neq2$일 때



$f(x)=(x-2)(x+2)(x+a)$이므로

함수 $y=|f(x)|$는 세 개의 x의 값에서 미분가능하지 않으므로 조건을 만족시키지 않는다.

(ii) $a=-2$일 때

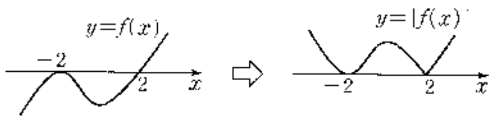


$f(x)=(x-2)^2(x+2)$이므로

함수 $y=|f(x)|$는 $x=-2$에서만 미분가능하지 않다.

즉, 음수인 한 개의 x의 값에서만 미분가능하지 않으므로 조건을 만족시키지 않는다.

(iii) $a=2$일 때



$f(x)=(x-2)(x+2)^2$이므로

함수 $y=|f(x)|$는 $x=2$에서만 미분가능하지 않다.

즉, 양수인 한 개의 x의 값에서만 미분가능하지 않으므로 조건을 만족시킨다.

따라서 $a=2$이고, $f(x)=(x-2)(x+2)^2$이므로

$$\int_0^{2a} f'(x)\,dx=\int_0^4 f'(x)\,dx=\Big[(x-2)(x+2)^2\Big]_0^4$$
$$=72-(-8)=80$$

답 80

11

조건 (가)에서 $x\to1$일 때, 극한값이 존재하고 (분모) $\to$ 0이므로 (분자) $\to$ 0이어야 한다. 즉,

$\lim\limits_{x\to1} f(x)=f(1)=0$

조건 (나)에서 $f(a)-f(0)=f(a)-f(1)=0$이므로

$f(a)=f(0)=f(1)=0$

즉, $f(x)=x(x-1)(x-a)$이므로

$$\lim_{x\to1}\frac{f(x)}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{x(x-1)(x-a)}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to1}x(x-a)=1-a=-3$$

에서 $a=4$

따라서 $f(x)=x(x-1)(x-4)=x^3-5x^2+4x$이므로

$$\int_0^1 f(x)\,dx=\int_0^1 (x^3-5x^2+4x)\,dx=\Big[\frac{1}{4}x^4-\frac{5}{3}x^3+2x^2\Big]_0^1$$
$$=\frac{1}{4}-\frac{5}{3}+2=\frac{7}{12}$$

답 ③

필수 유형 ❸

$$\int_{-a}^a 3x(x+1)^2\,dx=\int_{-a}^a (3x^3+6x^2+3x)\,dx$$
$$=\int_{-a}^a 6x^2\,dx+\int_{-a}^a (3x^3+3x)\,dx$$
$$=2\int_0^a 6x^2\,dx+0=2\Big[2x^3\Big]_0^a$$
$$=2\times2a^3=56$$

따라서 $a^3=14$

답 14

12

$$\int_{-1}^1 (4x^3+ax^2+ax)\,dx=\int_{-1}^1 ax^2\,dx+\int_{-1}^1 (4x^3+ax)\,dx$$
$$=2\int_0^1 ax^2\,dx+0=2\Big[\frac{a}{3}x^3\Big]_0^1=2\times\frac{a}{3}=2$$

따라서 $a=3$

답 ③

13

$$\int_{-1}^1 f(x)\,dx=2\int_0^1 ax^2\,dx=2\Big[\frac{a}{3}x^3\Big]_0^1=\frac{2}{3}a$$

$$\int_{-1}^1 xf(x)\,dx=2\int_0^1 (x^4+bx^2)\,dx=2\Big[\frac{1}{5}x^5+\frac{b}{3}x^3\Big]_0^1=\frac{2}{5}+\frac{2}{3}b$$

이므로 조건 (가)에서

$$4\int_{-1}^1 f(x)\,dx+5\int_{-1}^1 xf(x)\,dx=4\times\frac{2}{3}a+5\times\Big(\frac{2}{5}+\frac{2}{3}b\Big)=0$$

$4a+5b+3=0$ …… ㉠

$f'(x)=3x^2+2ax+b$이므로 조건 (나)에서

$f'(1)=3+2a+b=0$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-2$, $b=1$

따라서 $f(x)=x^3-2x^2+x$이므로

$f(3)=27-18+3=12$

답 ①

14

$f'(x)=4x^3+ax^2+bx+c$ (a, b, c는 상수)라 하면

조건 (가)에서 $\displaystyle\int_{-a}^a f'(x)\,dx=2\int_0^a (ax^2+c)\,dx=0$

즉, $a=0$, $c=0$이므로 $f'(x)=4x^3+bx$

조건 (나)에서 $f(1)=0$, $f'(1)=0$이므로

$f'(1)=4+b=0$에서 $b=-4$

즉, $f'(x)=4x^3-4x$

$f(x)=x^4-2x^2+d$ (d는 상수)라 하면

$f(1)=1-2+d=0$에서 $d=1$

즉, $f(x)=x^4-2x^2+1$이므로

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx=2\int_0^1 (x^4-2x^2+1)\,dx=2\left[\frac{1}{5}x^5-\frac{2}{3}x^3+x\right]_0^1$$

$$=2\left(\frac{1}{5}-\frac{2}{3}+1\right)=\frac{16}{15}$$

따라서 $30\times\int_{-1}^{1} f(x)\,dx=30\times\frac{16}{15}=32$

답 32

필수 유형 ❹

$f(x)=4x^3+x\int_0^1 f(t)\,dt$에서

$\int_0^1 f(t)\,dt=k$ (k는 상수) ······ ㉠

라 하면

$f(x)=4x^3+kx$

㉠에서

$$\int_0^1 f(t)\,dt=\int_0^1 (4t^3+kt)dt=\left[t^4+\frac{k}{2}t^2\right]_0^1=1+\frac{k}{2}=k$$

이므로 $k=2$

따라서 $f(x)=4x^3+2x$이므로

$f(1)=4+2=6$

답 ①

15

$f(x)=4x^2-6x+\int_0^1 tf(t)\,dt$에서

$\int_0^1 tf(t)\,dt=k$ (k는 상수) ······ ㉠

라 하면

$f(x)=4x^2-6x+k$

㉠에서

$$\int_0^1 tf(t)\,dt=\int_0^1 t(4t^2-6t+k)\,dt=\int_0^1 (4t^3-6t^2+kt)\,dt$$

$$=\left[t^4-2t^3+\frac{k}{2}t^2\right]_0^1=-1+\frac{k}{2}=k$$

이므로 $k=-2$

따라서 $f(x)=4x^2-6x-2$이므로

$f(-1)=8$

답 ⑤

16

$f(x)=ax^2+\int_1^x (t-1)(t-5)\,dt$ ······ ㉠

㉠의 양변에 $x=1$을 대입하면

$f(1)=a+\int_1^1 (t-1)(t-5)\,dt=a+0=3$

에서 $a=3$

㉠의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f'(x)=2ax+(x-1)(x-5)$이므로

$f'(3)=6a+2\times(-2)=6\times3-4=14$

답 14

17

$f(x)=\int_0^x x(2t+a)\,dt=x\int_0^x (2t+a)\,dt$

의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f'(x)=\int_0^x (2t+a)\,dt+x(2x+a)$

따라서

$$f'(1)=\int_0^1 (2t+a)\,dt+(2+a)=\left[t^2+at\right]_0^1+(2+a)$$

$$=(1+a)+(2+a)=2a+3=5$$

이므로 $a=1$

답 ①

18

$\lim_{x\to1}\frac{f(x)-3}{x^2-1}=b$에서 $x\to1$일 때, 극한값이 존재하고 (분모) $\to0$이므로 (분자) $\to0$이어야 한다.

즉, $\lim_{x\to1}\{f(x)-3\}=f(1)-3=0$에서 $f(1)=3$

함수 $f(x)=\int_0^x (3t^2+a)\,dt$의 양변에 $x=1$을 대입하면

$f(1)=\int_0^1 (3t^2+a)\,dt=\left[t^3+at\right]_0^1=1+a=3$

에서 $a=2$

$$\lim_{x\to1}\frac{f(x)-3}{x^2-1}=\lim_{x\to1}\left\{\frac{1}{x+1}\times\frac{f(x)-f(1)}{x-1}\right\}$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{1}{x+1}\times\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\frac{1}{2}f'(1)$$

함수 $f(x)=\int_0^x (3t^2+2)\,dt$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f'(x)=3x^2+2$이므로

$\frac{1}{2}f'(1)=\frac{1}{2}\times(3+2)=\frac{5}{2}$

따라서 $b=\frac{5}{2}$이므로

$a+10b=2+10\times\frac{5}{2}=27$

답 27

참고

$f(x)=\int_0^x (3t^2+2)\,dt=\left[t^3+2t\right]_0^x=x^3+2x$이므로

$$\lim_{x\to1}\frac{f(x)-3}{x^2-1}=\lim_{x\to1}\frac{x^3+2x-3}{x^2-1}$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)(x^2+x+3)}{(x-1)(x+1)}$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{x^2+x+3}{x+1}=\frac{5}{2}$$

따라서 $b=\frac{5}{2}$

19

$$\int_1^x f(t)\,dt=(x+1)f(x)+x^3-3x \quad \cdots\cdots ㉠$$

㉠의 양변에 $x=1$을 대입하면

$$\int_1^1 f(t)\,dt=2f(1)-2$$

$0=2f(1)-2$이므로

$f(1)=1 \quad \cdots\cdots ㉡$

한편, ㉠의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x)=f(x)+(x+1)f'(x)+3x^2-3$

$(x+1)f'(x)=-3x^2+3=-3(x-1)(x+1)$

이 등식은 모든 실수 x에 대하여 성립하므로

$f'(x)=-3x+3$

$$f(x)=\int f'(x)\,dx=\int(-3x+3)\,dx$$

$$=-\frac{3}{2}x^2+3x+C \text{ (}C\text{는 적분상수)}$$

㉡에서 $f(1)=1$이므로

$-\frac{3}{2}+3+C=1$, $C=-\frac{1}{2}$

따라서 $f(x)=-\frac{3}{2}x^2+3x-\frac{1}{2}$이므로

$f(2)=-6+6-\frac{1}{2}=-\frac{1}{2}$

답 ③

20

조건 (가)에서 주어진 등식의 양변에 $x=1$을 대입하면

$0=1+a+b+1$

$a+b=-2 \quad \cdots\cdots ㉠$

조건 (가)에서 주어진 등식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f'(x)=3x^2+2ax+b$

조건 (나)에서 $f'(3)=0$이므로

$f'(3)=27+6a+b=0$

$6a+b=-27 \quad \cdots\cdots ㉡$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=-5$, $b=3$

즉, $f'(x)=3x^2-10x+3$이므로

$$\int_1^3 f'(x)\,dx=\int_1^3(3x^2-10x+3)\,dx$$

$$=\Big[x^3-5x^2+3x\Big]_1^3$$

$$=(27-45+9)-(1-5+3)=-8$$

답 ②

필수 유형 5

$g(x)=\int_0^x f(t)\,dt$에서

$$g'(x)=\frac{d}{dx}\left[\int_0^x f(t)\,dt\right]=f(x)$$

$$=-x^2-4x+a$$

$$=-(x+2)^2+a+4$$

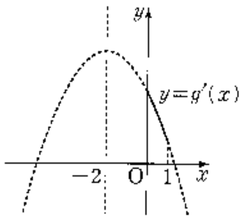
함수 $g(x)$가 닫힌구간 $[0, 1]$에서 증가하려면 닫힌구간 $[0, 1]$에서

$g'(x)\geq 0$이어야 한다.

즉, $g'(1)=a-5\geq 0$이어야 하므로

$a\geq 5$

따라서 a의 최솟값은 5이다.



답 5

21

$$f(x)=\int_0^x(3t^2-4)\,dt=\Big[t^3-4t\Big]_0^x$$

$$=x^3-4x=x(x+2)(x-2)$$

이때 $g'(x)=0$이면 $f(x)=0$이므로 $x=-2$ 또는 $x=0$ 또는 $x=2$이고, 함수 $g(x)$는 사차함수이므로 $x=0$에서 극댓값을 갖는다.

$$g(x)=\int(x^3-4x)\,dx=\frac{1}{4}x^4-2x^2+C \text{ (}C\text{는 적분상수)}$$

에서 $g(2)=0$이므로 $C=4$

따라서 함수 $g(x)$의 극댓값은 $g(0)=4$

답 ④

22

$f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ (a, b, c는 상수)라 하면

$f'(x)=3x^2+2ax+b$

주어진 조건에서 함수 $g(x)$가 $x=0$에서 극솟값 3을 가지므로

$$g(0)=\int_0^0 f'(t)\,dt+(0+1)f(0)+1=f(0)+1=3$$

즉, $f(0)=2$이므로 $c=2$

$g'(x)=f'(x)+f(x)+(x+1)f'(x)$에서

$g'(0)=f'(0)+f(0)+(0+1)f'(0)=2f'(0)+2=0$

이므로 $f'(0)=-1$

즉, $b=-1$

주어진 조건에서 $g(1)=8$이고 $f(x)=x^3+ax^2-x+2$이므로

$$g(1)=\int_0^1 f'(t)\,dt+(1+1)f(1)+1$$

$$=\Big[f(t)\Big]_0^1+2f(1)+1$$

$$=f(1)-f(0)+2f(1)+1$$

$$=3f(1)-1$$

$$=3(1+a-1+2)-1$$

$$=3a+5=8$$

에서 $a=1$

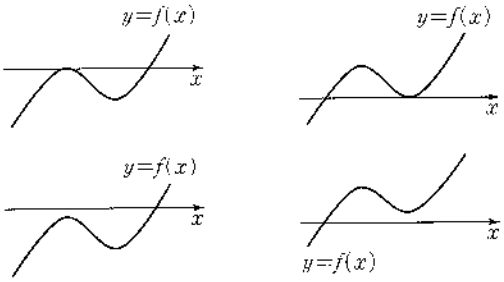
따라서 $f(x)=x^3+x^2-x+2$이므로

$f(-1)=-1+1+1+2=3$

답 ③

23

함수 $h(k)$의 최댓값이 2가 되려면 사차함수 $g(x)$가 극솟값을 갖는 x의 값이 오직 하나이어야 하므로 $g(x)$의 도함수인 삼차함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형은 다음과 같아야 한다.



즉, 방정식 $f(x)=0$의 서로 다른 실근의 개수가 1 또는 2이어야 한다.

$f(x)=x^3-3x^2+a$에서

$f'(x)=3x^2-6x=3x(x-2)$

$f(0)f(2)\ge 0$이어야 하므로

$a(a-4)\ge 0$

$a\le 0$ 또는 $a\ge 4$에서 양수 a의 최솟값은 4이다.

답 ④

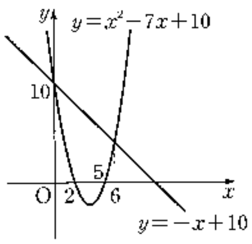
필수 유형 ❻

곡선 $y=x^2-7x+10$과 직선 $y=-x+10$의 교점의 x좌표는

$x^2-7x+10=-x+10$에서 $x^2-6x=0$, $x(x-6)=0$

$x=0$ 또는 $x=6$

따라서 곡선 $y=x^2-7x+10$과 직선 $y=-x+10$은 그림과 같으므로 구하는 넓이를 S라 하면



$$S=\int_0^6 |(-x+10)-(x^2-7x+10)|\,dx$$

$$=\int_0^6 (-x^2+6x)\,dx=\left[-\frac{1}{3}x^3+3x^2\right]_0^6$$

$$=-72+108=36$$

답 36

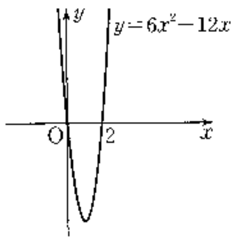
24

곡선 $y=6x^2-12x$와 x축의 교점의 x좌표는

$6x^2-12x=0$에서 $6x(x-2)=0$

$x=0$ 또는 $x=2$

따라서 구하는 넓이를 S라 하면



$$S=\int_0^2 |6x^2-12x|\,dx$$

$$=\int_0^2 (-6x^2+12x)\,dx$$

$$=\left[-2x^3+6x^2\right]_0^2$$

$$=8$$

답 8

25

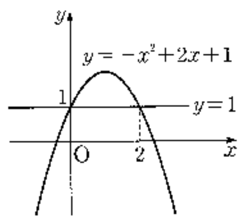
곡선 $y=-x^2+2x+1$과 직선 $y=1$의 교점의 x좌표는

$-x^2+2x+1=1$에서 $x^2-2x=0$

$x(x-2)=0$

$x=0$ 또는 $x=2$

곡선 $y=-x^2+2x+1$과 직선 $y=1$은 그림과 같다.



따라서 구하는 넓이는

$$\int_0^2 \{(-x^2+2x+1)-1\}\,dx=\int_0^2 (-x^2+2x)\,dx$$

$$=\left[-\frac{1}{3}x^3+x^2\right]_0^2$$

$$=-\frac{8}{3}+4=\frac{4}{3}$$

답 ②

26

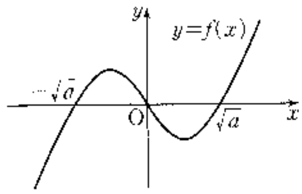
함수 $f(x)=x^3-ax$의 그래프와 x축의 교점의 x좌표는

$x^3-ax=0$에서 a가 양수이므로

$x(x+\sqrt{a})(x-\sqrt{a})=0$

$x=0$ 또는 $x=-\sqrt{a}$ 또는 $x=\sqrt{a}$

함수 $f(x)=x^3-ax$의 그래프는 그림과 같다.



따라서 모든 실수 x에 대하여 $f(-x)=-f(x)$이므로

구하는 넓이는

$$\int_{-\sqrt{a}}^{\sqrt{a}} |x^3-ax|\,dx=2\int_{-\sqrt{a}}^{0} (x^3-ax)\,dx=2\left[\frac{1}{4}x^4-\frac{a}{2}x^2\right]_{-\sqrt{a}}^{0}$$

$$=2\left(-\frac{1}{4}a^2+\frac{1}{2}a^2\right)=\frac{1}{2}a^2=18$$

$a^2=36$

$a>0$이므로 $a=6$

따라서 $f(x)=x^3-6x$이므로 $f(-1)=5$

답 ③

27

$f(x)=x^3-2x^2+k$에서 $f'(x)=3x^2-4x$이므로

$f'(x)=0$에서 $x(3x-4)=0$

$x=0$ 또는 $x=\frac{4}{3}$

즉, $x=0$에서 극댓값을 가지므로 곡선 $y=x^3-2x^2+k$ 위의 점 $(0, k)$에서의 접선의 방정식은 $y=k$이다.

곡선 $y=x^3-2x^2+k$와 직선 $y=k$의 교점의 x좌표는

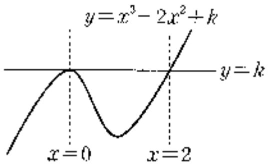
$x^3-2x^2+k=k$에서 $x^3-2x^2=0$이므로

$x^2(x-2)=0$

$x=0$ 또는 $x=2$

따라서 곡선 $y=x^3-2x^2+k$와 직선 $y=k$로 둘러싸인 부분의 넓이를 S라 하면

$$S=\int_0^2 |k-(x^3-2x^2+k)|\,dx$$
$$=\int_0^2 (-x^3+2x^2)\,dx$$
$$=\left[-\frac{1}{4}x^4+\frac{2}{3}x^3\right]_0^2$$
$$=\frac{4}{3}$$



답 ③

28

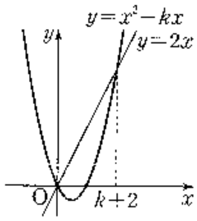
곡선 $y=x^2-kx$와 직선 $y=2x$의 교점의 x좌표는

$x^2-kx=2x$에서 $x^2-(k+2)x=0$

$x\{x-(k+2)\}=0$

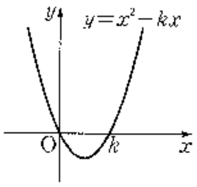
$x=0$ 또는 $x=k+2$

따라서 곡선 $y=x^2-kx$와 직선 $y=2x$로 둘러싸인 부분의 넓이 S_1은



$$S_1=\int_0^{k+2}\{2x-(x^2-kx)\}\,dx$$
$$=\int_0^{k+2}\{-x^2+(k+2)x\}\,dx$$
$$=\left[-\frac{1}{3}x^3+\frac{k+2}{2}x^2\right]_0^{k+2}=\frac{(k+2)^3}{6}$$

곡선 $y=x^2-kx$와 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이 S_2는



$$S_2=\int_0^k(-x^2+kx)\,dx$$
$$=\left[-\frac{1}{3}x^3+\frac{k}{2}x^2\right]_0^k=\frac{k^3}{6}$$

$S_1=8S_2$이므로 $(k+2)^3=(2k)^3$에서 $k+2=2k$

따라서 $k=2$

답 ④

29

조건 (나)에서 $x \to 0$일 때 극한값이 존재하고 (분모) $\to 0$이므로 (분자) $\to 0$이어야 한다.

즉, $\lim\limits_{x\to 0}\{f(x)-1\}=0$에서 $f(0)=1$

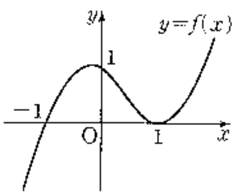
이때 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-1}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=f'(0)=-1$이므로 $a=-1$

즉, $f'(x)=3x^2-2x-1$에서

$f(x)=x^3-x^2-x+C$ (C는 적분상수)이고, $f(0)=1$이므로 $C=1$

따라서 $f(x)=x^3-x^2-x+1=(x+1)(x-1)^2$이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이 S는

$$S=\int_{-1}^{1}(x^3-x^2-x+1)\,dx$$
$$=\int_{-1}^{1}(-x^2+1)\,dx+\int_{-1}^{1}(x^3-x)\,dx$$
$$=2\int_0^1(-x^2+1)\,dx+0$$
$$=2\left[-\frac{1}{3}x^3+x\right]_0^1=\frac{4}{3}$$



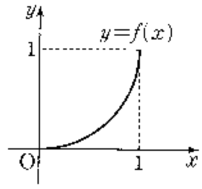
따라서 $30S=30\times\frac{4}{3}=40$

답 40

필수 유형 ❼

주어진 조건에서 $f(0)=0$, $f(1)=1$, $\int_0^1 f(x)\,dx=\frac{1}{6}$

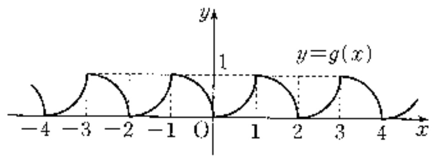
이므로 $0\le x\le 1$일 때, 함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형이 그림과 같다고 하자.



또한 조건 (가)에서

$-1<x<0$일 때, 함수 $y=g(x)$의 그래프는 $0<x<1$일 때의 함수 $y=f(x)$의 그래프를 x축에 대하여 대칭이동한 후 x축의 방향으로 -1만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것과 같다.

이때 조건 (나)에서 함수 $g(x)$는 주기가 2인 주기함수이므로 함수 $y=g(x)$의 그래프의 개형은 그림과 같이 나타낼 수 있다.



한편, $\int_0^1 g(x)\,dx=\int_0^1 f(x)\,dx=\frac{1}{6}$이고

$$\int_{-1}^0 g(x)\,dx=1-\int_0^1 f(x)\,dx=1-\frac{1}{6}=\frac{5}{6}$$

$$\int_{-1}^1 g(x)\,dx=\int_{-1}^0 g(x)\,dx+\int_0^1 f(x)\,dx=\frac{5}{6}+\frac{1}{6}=1$$

이때 함수 $g(x)$의 주기는 2이므로

$$\int_{-3}^2 g(x)\,dx=\int_{-3}^{-1} g(x)\,dx+\int_{-1}^1 g(x)\,dx+\int_1^2 g(x)\,dx$$
$$=\int_{-1}^1 g(x)\,dx+\int_{-1}^1 g(x)\,dx+\int_{-1}^0 g(x)\,dx$$
$$=1+1+\frac{5}{6}=\frac{17}{6}$$

답 ②

30

조건 (가)에서 함수 $f(x)$가 $x=0$에서 연속이므로

$\lim\limits_{x\to 0-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0+} f(x)=f(0)$

에서 $b=3$

조건 (나)에서 $x=0$일 때, $f(-3)=f(3)$이고

$f(-3)=\lim\limits_{x\to -3+} f(x)=0$이므로

$0=9+3a+b$

$b=3$이므로 $a=-4$

따라서 $f(x)=\begin{cases} x+3 & (-3<x<0) \\ x^2-4x+3 & (0\le x\le 3)\end{cases}$이고

$f(x-3)=f(x+3)$에서 $f(x)=f(x+6)$

즉, $f(x)$는 주기가 6인 주기함수이므로

$$\int_{-33}^{-29} f(x)\,dx=\int_{-3}^1 f(x)\,dx$$

$$\int_{57}^{60} f(x)\,dx=\int_{-3}^0 f(x)\,dx$$

따라서

$$\int_{32}^{-29} f(x)\,dx-\int_{57}^{60} f(x)\,dx=\int_{-3}^{1} f(x)\,dx-\int_{-3}^{0} f(x)\,dx$$
$$=\int_{0}^{1} f(x)\,dx=\int_{0}^{1}(x^2-4x+3)\,dx$$
$$=\left[\frac{1}{3}x^3-2x^2+3x\right]_0^1$$
$$=\frac{1}{3}-2+3=\frac{4}{3}$$

답 ④

31

함수 $f(x)=-x^3+ax^2-3ax+10$의 도함수는

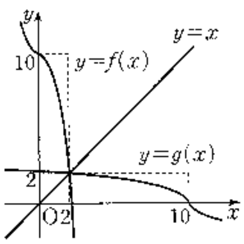
$f'(x)=-3x^2+2ax-3a$

이때 삼차함수 $f(x)=-x^3+ax^2-3ax+10$의 역함수가 존재하려면 극값을 갖지 않아야 한다. 즉, 이차방정식 $f'(x)=0$이 서로 다른 두 실근을 갖지 않아야 하므로 이차방정식 $f'(x)=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=a^2-9a=a(a-9)\le 0$

$0\le a\le 9$

따라서 a의 최솟값은 0이므로 $f(x)=-x^3+10$이고, 그 역함수인 $y=g(x)$의 그래프는 그림과 같다.



따라서

$$\int_2^{10} g(x)\,dx=\int_0^2 f(x)\,dx-2\times 2=\int_0^2(-x^3+10)\,dx-4$$
$$=\left[-\frac{1}{4}x^4+10x\right]_0^2-4=16-4=12$$

답 12

필수 유형 ❸

$t\ge 3$일 때, $v(t)=2t-6\ge 0$이므로

$$\int_3^k |v(t)|\,dt=\int_3^k(2t-6)\,dt=\left[t^2-6t\right]_3^k=(k^2-6k)-(9-18)$$
$$=k^2-6k+9=25$$

$k^2-6k-16=0$, $(k+2)(k-8)=0$

따라서 $k>3$이므로 $k=8$

답 ③

32

시각 $t=0$에서의 위치를 a라 하면 시각 $t=4$에서의 위치는

$$a+\int_0^4 v(t)\,dt=a+\int_0^4(-2t+10)\,dt=a+\left[-t^2+10t\right]_0^4$$
$$=a+(-16+40)=a+24$$

이때 시각 $t=4$에서의 위치가 30이므로

$a+24=30$, $a=6$

따라서 시각 $t=1$에서의 위치는

$$6+\int_0^1 v(t)\,dt=6+\int_0^1(-2t+10)\,dt=6+\left[-t^2+10t\right]_0^1$$
$$=6+(-1+10)=15$$

답 ②

다른 풀이

점 P의 시각 $t=1$에서의 위치를 a라 하면 시각 $t=4$에서의 위치는

$$a+\int_1^4 v(t)\,dt=a+\int_1^4(-2t+10)\,dt=a+\left[-t^2+10t\right]_1^4=a+15$$

이므로 $a+15=30$에서 $a=15$

따라서 점 P의 시각 $t=1$에서의 위치는 15이다.

33

시각 $t=1$에서의 점 P의 위치가 -5이므로

$$0+\int_0^1 v(t)\,dt=\int_0^1(3t^2-4t+k)dt=\left[t^3-2t^2+kt\right]_0^1$$
$$=k-1=-5$$

에서 $k=-4$

즉, $v(t)=3t^2-4t-4$

점 P가 움직이는 방향이 바뀔 때 속도 $v(t)=0$이므로

$3t^2-4t-4=0$에서 $(3t+2)(t-2)=0$

$t>0$이므로 $t=2$

$0<t<2$일 때 $v(t)<0$이고 $t>2$일 때 $v(t)>0$이므로

시각 $t=2$일 때 점 P가 움직이는 방향을 바꾼다.

따라서 시각 $t=0$에서 시각 $t=2$까지 점 P가 움직인 거리는

$$\int_0^2 |v(t)|\,dt=\int_0^2 |3t^2-4t-4|\,dt=\int_0^2(-3t^2+4t+4)\,dt$$
$$=\left[-t^3+2t^2+4t\right]_0^2=8$$

답 ⑤

34

두 점 P, Q가 동시에 원점을 출발한 후 다시 만나는 위치 x가 $x=k$일 때의 시각을 $t=a$ $(a>0)$이라 하면

$$0+\int_0^a v_1\,dt=0+\int_0^a v_2\,dt$$
$$\int_0^a(3t^2+t)\,dt=\int_0^a(2t^2+3t)\,dt$$
$$\left[t^3+\frac{1}{2}t^2\right]_0^a=\left[\frac{2}{3}t^3+\frac{3}{2}t^2\right]_0^a$$
$$a^3+\frac{1}{2}a^2=\frac{2}{3}a^3+\frac{3}{2}a^2$$
$$\frac{1}{3}a^3-a^2=\frac{1}{3}a^2(a-3)=0$$

$a>0$이므로 $a=3$

따라서 시각 $t=3$에서의 점 P의 위치(또는 점 Q의 위치) $x=k$에서

$k=3^3+\frac{1}{2}\times 3^2=\frac{63}{2}$이므로

$2k=2\times\frac{63}{2}=63$

답 63

07 이차곡선

정답 본문 78~87쪽

필수 유형 ❶	90	01 ③	02 ①	03 ③
		04 ②		
필수 유형 ❷	11	05 ③	06 ⑤	07 ②
		08 35		
필수 유형 ❸	②	09 ②	10 ④	11 ④
		12 15	13 ②	14 ③
필수 유형 ❹	②	15 ②	16 54	17 ③
		18 ①		
필수 유형 ❺	⑤	19 ⑤	20 992	21 ③
		22 ③		
필수 유형 ❻	①	23 ②	24 ④	25 ②
		26 ⑤	27 269	28 ②

필수 유형 ❶

두 점 A, B의 x좌표를 각각 a, b라 하자.

포물선 $y^2=4x$의 초점 F의 좌표는 $(1, 0)$이고 삼각형 AFB의 무게중심의 x좌표가 6이므로

$\frac{a+b+1}{3}=6$에서

$a+b=17$

$b=17-a$ $\cdots\cdots$ ㉠

한편, 포물선 위의 점에서 초점까지의 거리는 포물선의 준선까지의 거리와 같고, 포물선 $y^2=4x$의 준선의 방정식은 $x=-1$이므로

$\overline{AF}=a+1$, $\overline{BF}=b+1$에서

$$\begin{aligned}\overline{AF}\times\overline{BF}&=(a+1)(b+1)\\&=ab+a+b+1\\&=a(17-a)+17+1 \text{ (㉠에 의해)}\\&=-a^2+17a+18\\&=-\left(a-\frac{17}{2}\right)^2+\left(\frac{17}{2}\right)^2+18\end{aligned}$$

㉠에서 b는 1보다 큰 자연수이므로

$b=17-a>1$, $a<16$

a도 1보다 큰 자연수이므로

$1<a<16$

따라서 $\overline{AF}\times\overline{BF}$의 최댓값은 $a=8$ 또는 $a=9$일 때

$-\frac{1}{4}+\frac{289}{4}+18=90$

답 90

01

초점의 좌표가 $(2, -2)$, 준선의 방정식이 $x=-1$이므로

$\frac{2+(-1)}{2}=\frac{1}{2}$에서 꼭짓점의 좌표는 $\left(\frac{1}{2}, -2\right)$이다.

한편, 초점과 꼭짓점 사이의 거리가 $2-\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$이므로 주어진 포물선은 $y^2=4\times\frac{3}{2}\times x=6x$의 그래프를 x축의 방향으로 $\frac{1}{2}$만큼, y축의 방향으로 -2만큼 평행이동한 것이다. 즉,

$(y+2)^2=6\left(x-\frac{1}{2}\right)$

따라서 $a=2$, $b=6$, $c=-\frac{1}{2}$이므로

$a+b+c=2+6+\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{15}{2}$

답 ③

다른 풀이

포물선의 정의에 의하여

$\sqrt{(x-2)^2+\{y-(-2)\}^2}=|x-(-1)|$

양변을 제곱하면

$(x-2)^2+(y+2)^2=(x+1)^2$

$(y+2)^2=x^2+2x+1-x^2+4x-4$

$(y+2)^2=6x-3$

$(y+2)^2=6\left(x-\frac{1}{2}\right)$

따라서 $a=2$, $b=6$, $c=-\frac{1}{2}$이므로

$a+b+c=2+6+\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{15}{2}$

02

포물선 $y^2=8x$의 초점의 좌표는 $F(2, 0)$이고, 준선의 방정식은 $x=-2$이다.

직선 $y=n$이 포물선 $y^2=8x$와 만나는 점의 좌표가 $P_n\left(\frac{n^2}{8}, n\right)$

포물선의 정의에 의하여

$\overline{P_nF}=\overline{P_nQ_n}+2$이므로

$$\begin{aligned}a_n&=\overline{P_nF}+\overline{P_nQ_n}\\&=2\overline{P_nQ_n}+2\\&=2\times\frac{n^2}{8}+2\\&=\frac{n^2}{4}+2\end{aligned}$$

이므로

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{10}a_n&=\sum_{n=1}^{10}\left(\frac{n^2}{4}+2\right)\\&=\frac{1}{4}\times\frac{10\times11\times21}{6}+2\times10\\&=\frac{465}{4}\end{aligned}$$

답 ①

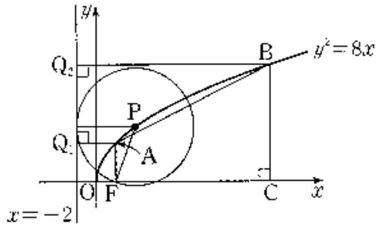
03

포물선의 정의에 의하여 점 Q는 점 P에서 포물선 $y^2=8x$의 준선 $x=-2$에 내린 수선의 발이다.

두 점 A, B에서 준선에 내린 수선의 발을 각각 $\mathrm{Q_1}$, $\mathrm{Q_2}$라 하면 점 P가 점 A(2, 4)에서 점 B까지 포물선을 따라 움직일 때, 점 Q가 나타내는 도형은 선분 $\mathrm{Q_1Q_2}$이다.

$\mathrm{Q_1}(-2, 4)$이고, 점 P가 점 A에서 점 B까지 포물선을 따라 움직일 때, 점 Q가 나타내는 도형의 길이가 8이므로 $4+8=12$에서

$\mathrm{Q_2}(-2, 12)$이다.



점 B의 y좌표가 12이고, 점 B가 포물선 $y^2=8x$ 위의 점이므로

$12^2=8x$에서 $x=18$

즉, B(18, 12)

초점의 좌표가 F(2, 0)이므로 사각형 AFCB는 사다리꼴이다.

따라서 사각형 AFCB의 넓이는

$\frac{1}{2}\times(4+12)\times(18-2)=128$

답 ③

04

포물선의 초점과 꼭짓점 사이의 거리는 꼭짓점과 준선 사이의 거리와 같으므로

포물선 C_1의 준선의 방정식은 $x=-3$이고,

포물선 C_2의 준선의 방정식은 $x=-6-9$, 즉 $x=-15$이다.

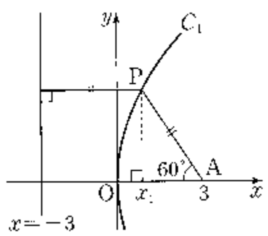
포물선 C_1의 방정식은 $y^2=4\times3\times x$에서

$y^2=12x$

포물선 C_2의 방정식은

$y^2=4\times9\times(x+6)$에서

$y^2=36(x+6)$



점 P의 좌표를 (x_1, y_1)이라 하면 포물선의 정의에 의하여

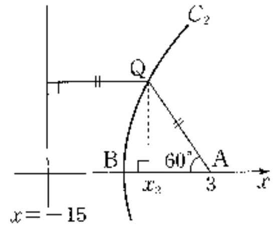
$\cos 60°=\frac{3-x_1}{x_1-(-3)}=\frac{1}{2}$

$x_1=1$

${y_1}^2=12x_1$에서 ${y_1}^2=12$

$y_1>0$이므로 $y_1=2\sqrt{3}$

즉, $\mathrm{P}(1, 2\sqrt{3})$



점 Q의 좌표를 (x_2, y_2)라 하면 포물선의 정의에 의하여

$\cos 60°=\frac{3-x_2}{x_2-(-15)}=\frac{1}{2}$

$x_2=-3$

${y_2}^2=36(x_2+6)$에서

${y_2}^2=36\times(-3+6)=108$

$y_2>0$이므로 $y_2=6\sqrt{3}$

즉, $\mathrm{Q}(-3, 6\sqrt{3})$

$(6\sqrt{3})^2=12x$에서 $x=9$이므로

$\mathrm{R}(9, 6\sqrt{3})$

따라서 삼각형 PQR의 넓이는

$\frac{1}{2}\times\{9-(-3)\}\times(6\sqrt{3}-2\sqrt{3})$

$=\frac{1}{2}\times12\times4\sqrt{3}$

$=24\sqrt{3}$

답 ②

필수 유형 ❷

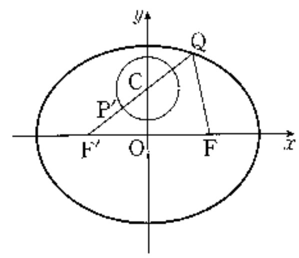
타원의 정의에 의하여

$\overline{\mathrm{F'Q}}+\overline{\mathrm{FQ}}=\overline{\mathrm{F'P}}+\overline{\mathrm{PQ}}+\overline{\mathrm{FQ}}=2\times7=14$

이므로 $\overline{\mathrm{PQ}}+\overline{\mathrm{FQ}}=14-\overline{\mathrm{F'P}}$

이때 $\overline{\mathrm{PQ}}+\overline{\mathrm{FQ}}$의 값이 최대가 되기 위해서는 $\overline{\mathrm{F'P}}$의 값이 최소가 되어야 한다.

원 $x^2+(y-3)^2=4$의 중심을 C라 하면 선분 F'P의 길이가 최소가 되려면 그림과 같이 점 P의 위치는 원과 선분 F'C가 만나는 점 P'이어야 한다.



즉, $\overline{\mathrm{F'P}}+\overline{\mathrm{PC}}\ge\overline{\mathrm{F'C}}$

$\mathrm{F'}(-c, 0)$ $(c>0)$이라 하면

$c^2=49-33=16$에서 $c=4$이므로 $\mathrm{F'}(-4, 0)$

$\mathrm{C}(0, 3)$, $\overline{\mathrm{P'C}}=2$이므로

$\overline{\mathrm{F'P}}\ge\overline{\mathrm{F'C}}-\overline{\mathrm{P'C}}=\sqrt{4^2+3^2}-2=3$

따라서 $\overline{\mathrm{PQ}}+\overline{\mathrm{FQ}}=14-\overline{\mathrm{F'P}}\le14-3=11$이므로

$\overline{\mathrm{PQ}}+\overline{\mathrm{FQ}}$의 최댓값은 11이다.

답 11

05

$F(c, 0)$, $F'(-c, 0)$ $(c>0)$이라 하면

$c^2=25-16=9$이므로

타원 $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$의 두 초점은 $F(3, 0)$, $F'(-3, 0)$이고 타원의 정의에 의하여

$\overline{PF}+\overline{PF'}=2\times5=10$ $\cdots\cdots$ ㉠

또 $x^2+y^2-6x=0$에서 $(x-3)^2+y^2=3^2$이므로

원 $x^2+y^2-6x=0$은 중심이 점 F이고, 반지름의 길이가 3이다.

즉, $\overline{PF}=3$

㉠에서 $\overline{PF'}=10-\overline{PF}=10-3=7$

따라서 $\overline{PF}\times\overline{PF'}=3\times7=21$

답 ③

06

$F(c, 0)$, $F'(-c, 0)$ $(c>0)$이라 하면

$c^2=9-5=4$이므로

타원 $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{5}=1$의 두 초점은 $F(2, 0)$, $F'(-2, 0)$이다.

점 F′은 원의 중심이고, 두 점 A, F는 원 위의 점이므로

$\overline{FF'}=\overline{AF'}=4$

이고, 타원의 정의에 의하여

$\overline{AF}+\overline{AF'}=2\times3=6$

이므로

$\overline{AF}=2$

삼각형 FAF′은 이등변삼각형이므로 점 F′에서 변 AF에 내린 수선의 발을 H라 하면

$\overline{AH}=1$

피타고라스 정리에 의하여

$\overline{F'H}=\sqrt{4^2-1^2}=\sqrt{15}$

따라서 $\sin(\angle FAF')=\frac{\overline{F'H}}{\overline{AF'}}=\frac{\sqrt{15}}{4}$

답 ⑤

07

$F(c, 0)$, $F'(-c, 0)$ $(c>0)$이라 하면

$c^2=16-7=9$이므로

타원 $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{7}=1$의 두 초점은 $F(3, 0)$, $F'(-3, 0)$이다.

점 A의 좌표는 $(1, 0)$이므로

$\overline{AF'}:\overline{AF}=4:2=2:1$

직선 PA는 $\angle FPF'$을 이등분하므로

$\overline{PF'}:\overline{PF}=2:1$

$\overline{PF}=k$라 하면 $\overline{PF'}=2k$이므로

$\overline{PF}+\overline{PF'}=3k$

타원의 정의에서 $\overline{PF}+\overline{PF'}=2\times4=8$이므로

$3k=8$에서 $k=\frac{8}{3}$

따라서 $\overline{PF}=\frac{8}{3}$, $\overline{PF'}=\frac{16}{3}$이므로

$\overline{PF'}-\overline{PF}=\frac{16}{3}-\frac{8}{3}=\frac{8}{3}$

답 ②

08

점 P는 반지름의 길이가 1인 원 위의 점이므로 $\overline{PF}=1$

또한 점 P는 타원 위의 점이므로 타원의 정의에 의하여

$\overline{PF}+\overline{PF'}=2\times2=4$

그러므로

$\overline{PF'}=4-1=3$

한편, 점 Q는 반지름의 길이가 $\frac{1}{2}$인 원 위의 점이므로

$\overline{QF'}=\frac{1}{2}$

$\overline{PQ}$가 최대 또는 최소가 되는 경우는 점 Q가 직선 PF′과 점 F′을 중심으로 하는 원이 만나는 점일 때이다.

$\overline{PF'}-\overline{QF'}\le\overline{PQ}\le\overline{PF'}+\overline{QF'}$에서

$3-\frac{1}{2}\le\overline{PQ}\le3+\frac{1}{2}$

$\frac{5}{2}\le\overline{PQ}\le\frac{7}{2}$

따라서 $\overline{PQ}$의 최댓값은 $\frac{7}{2}$, 최솟값은 $\frac{5}{2}$이므로

$4Mm=4\times\frac{7}{2}\times\frac{5}{2}=35$

답 35

필수 유형 ❸

쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$의 주축의 길이가 6이므로

$2a=6$

$a=3$ $\cdots\cdots$ ㉠

쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$의 점근선의 방정식은

$y=\frac{b}{a}x$, $y=-\frac{b}{a}x$

이때 $a>0$, $b>0$이므로

$\frac{b}{a}=2$

$b=2a$ $\cdots\cdots$ ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면

$b=2\times3=6$

쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$의 두 초점을

$F(c, 0)$, $F'(-c, 0)$ $(c>0)$

이라 하면

$c^2=a^2+b^2=3^2+6^2=45$

$c=\sqrt{45}=3\sqrt{5}$

따라서 두 초점 사이의 거리는

$\overline{FF'}=2c=6\sqrt{5}$

답 ②

09

쌍곡선의 방정식을 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1\ (a>0,\ b>0)$이라 하면 점 A가 쌍곡선 위의 점이므로

$|\overline{\mathrm{AF}}-\overline{\mathrm{AF'}}|=2a$

$|\sqrt{(2-2)^2+(3-0)^2}-\sqrt{\{2-(-2)\}^2+(3-0)^2}|$

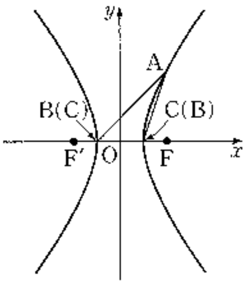
$=|3-5|=2$

에서 $2a=2$이므로 주축의 길이가 2이다.

즉, $\overline{\mathrm{BC}}=2$

따라서 삼각형 ABC의 넓이는

$\frac{1}{2}\times2\times3=3$



답 ②

10

삼각형 PF′F는 직각삼각형이고,

$\cos(\angle \mathrm{PF'F})=\frac{4}{5}$, $\overline{\mathrm{FF'}}=2\sqrt{5}$에서

$\overline{\mathrm{PF'}}=\overline{\mathrm{FF'}}\cos(\angle \mathrm{PF'F})$

$=2\sqrt{5}\times\frac{4}{5}=\frac{8\sqrt{5}}{5}$

피타고라스 정리에 의하여

$\overline{\mathrm{PF}}=\sqrt{(2\sqrt{5})^2-\left(\frac{8\sqrt{5}}{5}\right)^2}=\frac{6\sqrt{5}}{5}$

$\overline{\mathrm{PF'}}-\overline{\mathrm{PF}}=\frac{8\sqrt{5}}{5}-\frac{6\sqrt{5}}{5}=\frac{2\sqrt{5}}{5}$

쌍곡선의 정의에 의하여 $\overline{\mathrm{PF'}}-\overline{\mathrm{PF}}=2a$이므로

$2a=\frac{2\sqrt{5}}{5}$에서

$a=\frac{\sqrt{5}}{5}$ ⋯⋯ ㉠

$\mathrm{F}(\sqrt{5},\ 0)$, $\mathrm{F'}(-\sqrt{5},\ 0)$이므로 $a^2+b^2=(\sqrt{5})^2$에서

$\left(\frac{\sqrt{5}}{5}\right)^2+b^2=5$

$b^2=\frac{24}{5}$ ⋯⋯ ㉡

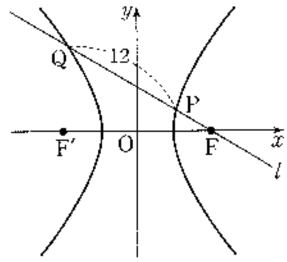
이 쌍곡선의 점근선의 방정식은 $y=\frac{b}{a}x$, $y=-\frac{b}{a}x$이므로

㉠, ㉡에서

$m^2=\frac{b^2}{a^2}=24$

답 ④

11



쌍곡선의 정의에 의하여 쌍곡선 $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{25}=1$ 위의 점에서 두 초점 사이의 거리의 차는 $2\times4=8$이므로

$\overline{\mathrm{PF'}}-\overline{\mathrm{PF}}=8$

$\overline{\mathrm{QF}}-\overline{\mathrm{QF'}}=8$

두 식을 변끼리 더하면

$(\overline{\mathrm{PF'}}-\overline{\mathrm{PF}})+(\overline{\mathrm{QF}}-\overline{\mathrm{QF'}})$

$=(\overline{\mathrm{PF'}}-\overline{\mathrm{QF'}})+(\overline{\mathrm{QF}}-\overline{\mathrm{PF}})$

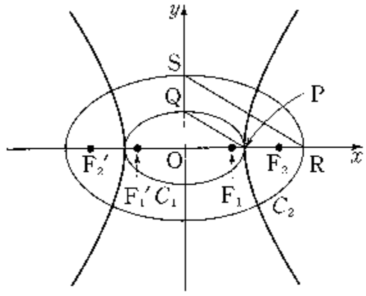
$=16$

이때 $\overline{\mathrm{QF}}-\overline{\mathrm{PF}}=\overline{\mathrm{PQ}}=12$이므로

$\overline{\mathrm{PF'}}-\overline{\mathrm{QF'}}=16-12=4$

답 ④

12



타원 C_1: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{9}=1$에서

$\mathrm{P}(a,\ 0)$, $\mathrm{Q}(0,\ 3)$

타원 C_2: $\frac{x^2}{4a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$에서

$\mathrm{R}(2a,\ 0)$, $\mathrm{S}(0,\ b)$

선분 PQ와 선분 RS는 서로 평행하므로

$\frac{3}{a}=\frac{b}{2a}$

에서 $b=6$

타원 $\frac{x^2}{4a^2}+\frac{y^2}{6^2}=1$과 쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{6^2}=1$의 초점이 일치하므로

$4a^2-6^2=a^2+6^2$

$3a^2=2\times6^2$, $a^2=24$

$\mathrm{F_1}(c_1,\ 0)\ (c_1>0)$이라 하면

$c_1^2=24-9=15$에서

$c_1=\sqrt{15}$

또 $F_2(c_2, 0)(c_2>0)$이라 하면

$c_2{}^2=a^2+6^2=24+36=60$에서

$c_2=\sqrt{60}=2\sqrt{15}$

따라서 $\overline{F_1F_2}=c_2-c_1=2\sqrt{15}-\sqrt{15}=\sqrt{15}$이므로

$k^2=(\sqrt{15})^2=15$

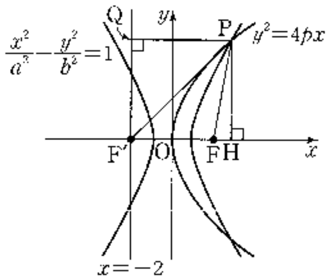
답 15

13

점 F(2, 0)이 포물선의 초점인 동시에 쌍곡선의 한 초점이므로

$p=2$, $a^2+b^2=2^2=4$

포물선의 준선의 방정식은 $x=-2$이다.



그림과 같이 점 P에서 x축에 내린 수선의 발을 H, 포물선의 준선 $x=-2$에 내린 수선의 발을 Q라 하면 $\overline{PF}=\overline{PQ}$이므로 직각삼각형 PFH에서

$\overline{FH}=\overline{F'H}-\overline{F'F}=\overline{PQ}-\overline{F'F}=5-4=1$

$\overline{PH}=\sqrt{5^2-1^2}=2\sqrt{6}$

이므로 점 P의 좌표는

$P(3, 2\sqrt{6})$

직각삼각형 PF′H에서

$\overline{PF'}=\sqrt{\{3-(-2)\}^2+(2\sqrt{6})^2}$

$=\sqrt{49}=7$

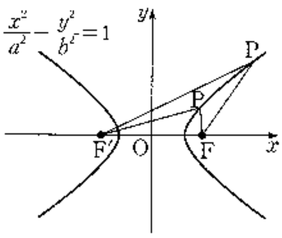
$\overline{PF'}-\overline{PF}=7-5=2=2a$에서

$a=1$이므로 $b^2=3$

따라서 $a^2-b^2+p^2=1-3+2^2=2$

답 ②

14



$F(c, 0)$, $F'(-c, 0)$ $(c>0)$이라 하면

$\overline{F'F}=2c$

조건 (나)에서 점근선의 방정식 중 기울기가 양수인 경우가 $y=\frac{4}{3}x$이므로

$\frac{b}{a}=\frac{4}{3}$

$a=3k$, $b=4k$ (k는 양의 상수)라 하면 $c^2=a^2+b^2$에서 $c^2=25k^2$

$c=5k$

조건 (가)에서 삼각형 PF′F는 이등변삼각형이고 점 P는 제1사분면에 있는 점이므로 $\overline{PF'}>\overline{PF}$이다.

그러므로 이등변삼각형이 되는 경우는 $\overline{PF'}=\overline{F'F}$ 또는 $\overline{PF}=\overline{FF'}$인 경우이다.

(i) $\overline{PF'}=\overline{FF'}=2c$인 경우

쌍곡선의 정의에 의하여 $\overline{PF'}-\overline{PF}=2a$이므로

$\overline{PF}=2c-2a$

삼각형 PF′F의 둘레의 길이는

$2c+2c+(2c-2a)=6c-2a$

즉, $6c-2a=12$

$6\times5k-2\times3k=12$

에서 $k=\frac{1}{2}$

$a=\frac{3}{2}$

이므로 주축의 길이는

$2a=2\times\frac{3}{2}=3$

(ii) $\overline{PF}=\overline{FF'}=2c$인 경우

쌍곡선의 정의에 의하여 $\overline{PF'}-\overline{PF}=2a$이므로

$\overline{PF'}=2c+2a$

삼각형 PF′F의 둘레의 길이는

$2c+2c+(2c+2a)=6c+2a$

즉, $6c+2a=12$

$6\times5k+2\times3k=12$

에서 $k=\frac{1}{3}$

$a=1$

이므로 주축의 길이는

$2a=2\times1=2$

(i), (ii)에 의하여 모든 주축의 길이의 합은

$3+2=5$

답 ③

필수 유형 ❹

포물선 $y^2=4x$ 위의 점 P의 좌표를 (x_1, y_1)이라 하면

$y_1{}^2=4x_1$ …… ㉠

점 $P(x_1, y_1)$에서의 접선의 방정식은

$y_1y=2(x+x_1)$

이 접선이 점 $(-2, 0)$을 지나므로

$0=2(-2+x_1)$에서 $x_1=2$

㉠에서 $y_1{}^2=4\times2=8$이고 $y_1>0$이므로

$y_1=2\sqrt{2}$

그러므로 점 P의 좌표는 $(2, 2\sqrt{2})$이다.

점 P에서 x축에 내린 수선의 발을 H라 하면 H(2, 0)이고

점 F는 포물선의 초점이므로 F(1, 0)이다.

직각삼각형 PFH에서 $\overline{FH}=2-1=1$, $\overline{PH}=2\sqrt{2}$이므로

$\overline{PF}=\sqrt{1^2+(2\sqrt{2})^2}=3$

따라서 $\cos(\angle\mathrm{PFH})=\dfrac{\overline{\mathrm{FH}}}{\overline{\mathrm{PF}}}=\dfrac{1}{3}$이므로

$$\begin{aligned}\cos(\angle\mathrm{PFO})&=\cos(\pi-\angle\mathrm{PFH})\\&=-\cos(\angle\mathrm{PFH})\\&=-\frac{1}{3}\end{aligned}$$

답 ②

15

$y^2=16x=4\times4\times x$이므로 기울기가 2인 접선의 방정식은

$y=2x+\dfrac{4}{2}=2x+2$

$x=0$일 때 $y=2$이고,

$y=0$일 때 $0=2x+2$에서 $x=-1$이다.

따라서 구하는 삼각형의 넓이는

$\dfrac{1}{2}\times1\times2=1$

답 ②

16

점 $\mathrm{A}(2,\ a)$가 포물선 $y^2=4px$ 위의 점이므로

$a^2=8p$

초점의 좌표는 $\mathrm{F}(p,\ 0)$

점 $\mathrm{A}(2,\ a)$에서의 접선의 방정식은

$ay=2p(x+2)$

$y=0$일 때 $x=-2$이므로

$\mathrm{B}(-2,\ 0)$

$\overline{\mathrm{AB}}=\overline{\mathrm{BF}}$에서 $\overline{\mathrm{AB}}^2=\overline{\mathrm{BF}}^2$이므로

$\{2-(-2)\}^2+(a-0)^2=\{p-(-2)\}^2$

$16+a^2=(p+2)^2$

$16+8p=p^2+4p+4$

$p^2-4p-12=0$

$(p+2)(p-6)=0$

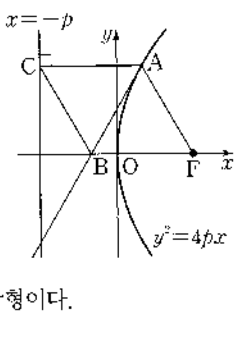
$p>0$이므로 $p=6$

$a^2=8p=48$

따라서 $a^2+p=48+6=54$

답 54

참고



삼각형 ABF는 정삼각형이다.

17

$x^2=py$를 $y^2=8px$에 대입하면

$\left(\dfrac{1}{p}x^2\right)^2=8px,\ x(x^3-8p^3)=0$

$x=0$ 또는 $x=2p$

$x=2p$일 때, $y^2=16p^2$이므로 점 P의 좌표는

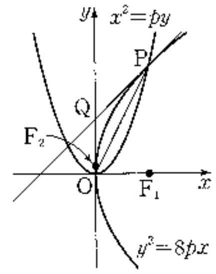
$\mathrm{P}(2p,\ 4p)$

포물선 $y^2=8px$ 위의 점 P에서의 접선의 방정식은

$4py=4p(x+2p)$

$y=x+2p$

이므로 $\mathrm{Q}(0,\ 2p)$



삼각형 OPQ의 넓이는

$\dfrac{1}{2}\times2p\times2p=2p^2=24$

이므로 $p^2=12$

두 포물선 $y^2=8px,\ x^2=py$의 초점의 좌표는 각각

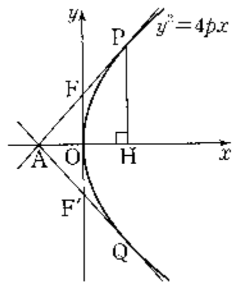
$\mathrm{F_1}(2p,\ 0),\ \mathrm{F_2}\left(0,\ \dfrac{1}{4}p\right)$

따라서 삼각형 $\mathrm{OF_1F_2}$의 넓이는

$\dfrac{1}{2}\times2p\times\dfrac{1}{4}p=\dfrac{1}{4}p^2=\dfrac{1}{4}\times12=3$

답 ③

18



점 P의 좌표를 $(x_1,\ y_1)$이라 하면 포물선 $y^2=4px$ 위의 점 P에서의 접선의 방정식은 $y_1y=2p(x+x_1)$이므로 x축과 만나는 점의 좌표는 $(-x_1,\ 0)$이다.

즉, $\mathrm{A}(-x_1,\ 0)$이므로 $k=x_1$

점 P에서 x축에 내린 수선의 발을 H라 하면 $\mathrm{H}(k,\ 0)$

$\cos(\angle\mathrm{FAO})=\dfrac{2}{3}$이고, $\overline{\mathrm{AH}}=2k$이므로

$\overline{\mathrm{AP}}=3k$

삼각형 AOF와 삼각형 AHP는 서로 닮은 삼각형이고, 닮음비가 1 : 2 이므로

$\overline{\mathrm{AF}}=\overline{\mathrm{PF}}=\frac{3k}{2}$

직각삼각형 PAH에서

$\overline{\mathrm{PH}}=\sqrt{(3k)^2-(2k)^2}=\sqrt{5}k$

이므로

$\overline{\mathrm{FO}}=\frac{\sqrt{5}k}{2}$

즉, $\mathrm{F}\left(0, \frac{\sqrt{5}k}{2}\right)$, $\mathrm{P}(k, \sqrt{5}k)$이고 $\mathrm{F'}\left(0, -\frac{\sqrt{5}k}{2}\right)$이므로

$\overline{\mathrm{PF'}}=\sqrt{k^2+\left(\frac{3\sqrt{5}k}{2}\right)^2}=\frac{7k}{2}$

쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{16}=-1$에서 쌍곡선의 정의에 의하여

$\overline{\mathrm{PF'}}-\overline{\mathrm{PF}}=\frac{7k}{2}-\frac{3k}{2}=2k=8$

$k=4$

$\mathrm{P}(4, 4\sqrt{5})$가 포물선 $y^2=4px$ 위의 점이므로

$(4\sqrt{5})^2=4p\times4$

$p=5$

쌍곡선의 초점이 $\mathrm{F}(0, 2\sqrt{5})$, $\mathrm{F'}(0, -2\sqrt{5})$이므로

$(2\sqrt{5})^2=a^2+16$

$a^2=20-16=4$

$a=2$

따라서 $k+p+a=4+5+2=11$

답 ①

필수 유형 ❺

타원 $\frac{x^2}{3}+y^2=1$에 접하고 기울기가 1인 직선의 방정식은

$y=x\pm\sqrt{3\times1+1}$

즉, $y=x\pm2$

직선 $y=x+2$와 타원 $\frac{x^2}{3}+y^2=1$이 접하는 점이 B이고 직선 $y=x-2$와 타원 $\frac{x^2}{3}+y^2=1$이 접하는 점이 D일 때, 사각형 ABCD의 넓이는 최대이다.

직선 $y=x+2$ 위의 점 $(0, 2)$와 직선 $y=x-1$, 즉 $x-y-1=0$ 사이의 거리를 d_1이라 하면

$d_1=\frac{|0-2-1|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\frac{3\sqrt{2}}{2}$

직선 $y=x-2$ 위의 점 $(0, -2)$와 직선 $y=x-1$, 즉 $x-y-1=0$ 사이의 거리를 d_2라 하면

$d_2=\frac{|0-(-2)-1|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$

한편, 타원 $\frac{x^2}{3}+y^2=1$과 직선 $y=x-1$이 만나는 두 점 A, C의 좌표는

$\frac{x^2}{3}+(x-1)^2=1$에서

$2x(2x-3)=0$

$x=0$ 또는 $x=\frac{3}{2}$

$x=0$일 때, $y=-1$

$x=\frac{3}{2}$일 때, $y=\frac{3}{2}-1=\frac{1}{2}$

이므로

$\mathrm{A}\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right)$, $\mathrm{C}(0, -1)$

그러므로

$\overline{\mathrm{AC}}=\sqrt{\left(0-\frac{3}{2}\right)^2+\left(-1-\frac{1}{2}\right)^2}=\frac{3\sqrt{2}}{2}$

따라서 구하는 사각형 ABCD의 넓이의 최댓값은

$\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{AC}}\times d_1+\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{AC}}\times d_2$

$=\frac{1}{2}\times\frac{3\sqrt{2}}{2}\times\frac{3\sqrt{2}}{2}+\frac{1}{2}\times\frac{3\sqrt{2}}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}$

$=3$

답 ⑤

19

점 $\mathrm{P}(4, 2)$가 타원 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 위의 점이므로

$\frac{16}{a^2}+\frac{4}{b^2}=1$ …… ㉠

타원 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 위의 점 $\mathrm{P}(4, 2)$에서의 접선의 방정식은

$\frac{4x}{a^2}+\frac{2y}{b^2}=1$

점 $\mathrm{P}(4, 2)$에서의 접선의 기울기가 $-\frac{1}{2}$이므로

$-\frac{4b^2}{2a^2}=-\frac{1}{2}$에서 $a^2=4b^2$ …… ㉡

㉡을 ㉠에 대입하면

$\frac{16}{4b^2}+\frac{4}{b^2}=1$

$\frac{8}{b^2}=1$, $b^2=8$

㉡에서 $a^2=32$

따라서 $a^2+b^2=32+8=40$

답 ⑤

20

초점 F의 x좌표를 c $(c>0)$이라 하면 $c^2=10-1=9$에서 $c=3$

$\mathrm{F}(3, 0)$

$\frac{x^2}{10}+y^2=1$에 $x=0$을 대입하면 $y^2=1$이므로

$\mathrm{A}(0, 1)$

직선 FA의 기울기는

$\frac{0-1}{3-0}=-\frac{1}{3}$

이므로 이 직선에 수직이려면 기울기가 3이어야 한다.

타원 $\frac{x^2}{10}+y^2=1$에 접하는 기울기가 3인 접선의 방정식은

$y=3x\pm\sqrt{10\times3^2+1}=3x\pm\sqrt{91}$

접점의 x좌표가 양수이므로 점 P에서의 접선의 방정식은

$y=3x-\sqrt{91}$ …… ㉠

점 P에서의 접선의 방정식은

$\frac{sx}{10}+ty=1$

$y=-\frac{s}{10t}x+\frac{1}{t}$ …… ㉡

㉠, ㉡에서

$3=-\frac{s}{10t}$, $-\sqrt{91}=\frac{1}{t}$

이므로

$s=\frac{30\sqrt{91}}{91}$, $t=-\frac{\sqrt{91}}{91}$

따라서 $s^2+t^2=\frac{900}{91}+\frac{1}{91}=\frac{901}{91}$에서

$p=91$, $q=901$이므로

$p+q=91+901=992$

답 992

21

$\frac{x^2}{9}+y^2=1$, $x^2=24y$에서 두 식을 연립하여 풀면

$\frac{24y}{9}+y^2=1$

$3y^2+8y-3=0$

$(3y-1)(y+3)=0$

점 P는 제1사분면에 있는 점이므로

$y>0$에서 $y=\frac{1}{3}$

$x^2=24\times\frac{1}{3}=8$이고 $x>0$이므로

$x=2\sqrt{2}$

에서 $\mathrm{P}\left(2\sqrt{2},\ \frac{1}{3}\right)$

타원 $\frac{x^2}{9}+y^2=1$ 위의 점 P에서의 접선의 방정식은

$\frac{2\sqrt{2}x}{9}+\frac{1}{3}y=1$

이므로 Q(0, 3)

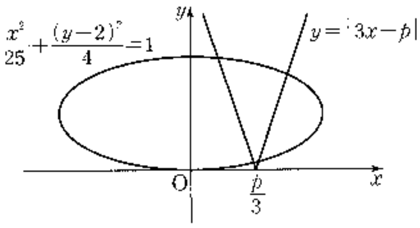
따라서 삼각형 OPQ의 넓이는

$\frac{1}{2}\times3\times2\sqrt{2}=3\sqrt{2}$

답 ③

22

타원 $\frac{x^2}{25}+\frac{(y-2)^2}{4}=1$은 타원 $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{4}=1$을 y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이고, 함수 $y=|3x-p|$의 그래프는 함수 $y=|3x|$의 그래프를 x축의 방향으로 $\frac{p}{3}$만큼 평행이동한 것이다.



p의 값의 범위에 따라 교점의 개수를 구하면

(i) $p=0$인 경우

타원 $\frac{x^2}{25}+\frac{(y-2)^2}{4}=1$과 함수 $y=|3x|$의 그래프는 서로 다른 세 점에서 만난다.

(ii) $p>0$인 경우

타원 $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{4}=1$에 접하는 기울기가 3인 접선의 방정식은

$y=3x\pm\sqrt{25\times9+4}=3x\pm\sqrt{229}$

이므로 타원 $\frac{x^2}{25}+\frac{(y-2)^2}{4}=1$에 접하는 기울기가 3인 접선의 방정식은

$y-2=3x\pm\sqrt{229}$

$y=3x\pm\sqrt{229}+2$

이 중에서 y절편이 음수인 경우는

$y=3x-\sqrt{229}+2$

즉, 직선 $y=3x-p$가 타원에 접하는 경우 $p=\sqrt{229}-2$이므로

타원 $\frac{x^2}{25}+\frac{(y-2)^2}{4}=1$과 함수 $y=|3x-p|$의 그래프가 서로 다른 네 점에서 만나도록 하는 모든 양수 p의 값의 범위는

$0<p<\sqrt{229}-2$

(iii) $p<0$인 경우

그래프의 대칭성에 의하여 직선 $y=-3x+p$가 타원에 접하는 경우 $p=-\sqrt{229}+2$이므로 타원 $\frac{x^2}{25}+\frac{(y-2)^2}{4}=1$과 함수 $y=|3x-p|$의 그래프가 서로 다른 네 점에서 만나도록 하는 모든 음수 p의 값의 범위는

$-\sqrt{229}+2<p<0$

(i), (ii), (iii)에 의하여

$-\sqrt{229}+2<p<0$ 또는 $0<p<\sqrt{229}-2$

이때 $15<\sqrt{229}<16$이므로

$-14<-\sqrt{229}+2<-13$이고 $13<\sqrt{229}-2<14$

따라서 조건을 만족시키는 모든 정수 p는

$-13,\ -12,\ -11,\ \cdots,\ -1,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ 11,\ 12,\ 13$

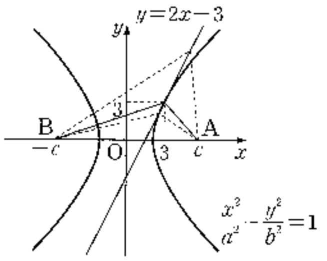
으로 그 개수는 26이다.

답 ③

필수 유형 ❻

두 양수 a, b에 대하여 두 점 A, B를 초점으로 하는 쌍곡선의 방정식을 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$이라 하자.

이 쌍곡선이 점 (3, 3)을 지나고 점 (3, 3)에서 직선 $y=2x-3$에 접하면 $\overline{\mathrm{PB}}-\overline{\mathrm{PA}}$의 값은 점 P의 좌표가 (3, 3)일 때 최대이다.



쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ 위의 점 (3, 3)에서의 접선의 방정식은

$\frac{3x}{a^2}-\frac{3y}{b^2}=1$, 즉 $y=\frac{b^2}{a^2}x-\frac{b^2}{3}$

이 직선이 $y=2x-3$이므로

$\frac{b^2}{a^2}=2$, $-\frac{b^2}{3}=-3$에서 $a^2=\frac{9}{2}$, $b^2=9$

두 점 A, B가 쌍곡선의 초점이므로

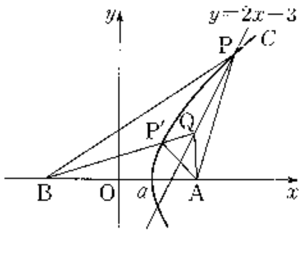
$c^2=a^2+b^2=\frac{9}{2}+9=\frac{27}{2}$

따라서 $c=\frac{3\sqrt{6}}{2}$

답 ①

참고

$\overline{PB}-\overline{PA}$의 값이 최대가 되도록 하는 점 P에 대하여 주축의 길이가 $\overline{PB}-\overline{PA}$인 쌍곡선 C: $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$이 직선 $y=2x-3$과 점 P에서 접하지 않을 때 직선 $y=2x-3$ 위의 점 중 점 P가 아닌 한 점 Q와 쌍곡선 C 위의 한 점 P′에 대하여 $\overline{QA}<\overline{P'Q}+\overline{P'A}$이므로



$\overline{PB}-\overline{PA}=\overline{P'B}-\overline{P'A}$

$<\overline{P'B}+\overline{P'Q}-\overline{QA}$

$=\overline{QB}-\overline{QA}$

즉, $\overline{PB}-\overline{PA}$의 값이 최대라는 조건에 모순이다.

23

접점의 좌표를 (x_1, y_1)이라 하면 이 점은 쌍곡선 $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{4}=1$ 위의 점이므로

$x_1^2-y_1^2=4$ …… ㉠

쌍곡선 위의 점 (x_1, y_1)에서의 접선의 방정식은

$\frac{x_1x}{4}-\frac{y_1y}{4}=1$, $x_1x-y_1y=4$

이 접선이 점 (0, −2)를 지나므로

$2y_1=4$, 즉 $y_1=2$

$y_1=2$를 ㉠에 대입하면

$x_1=\pm2\sqrt{2}$

따라서 구하는 접선의 방정식은

$-2\sqrt{2}x-2y=4$ 또는 $2\sqrt{2}x-2y=4$

즉, $y=-\sqrt{2}x-2$ 또는 $y=\sqrt{2}x-2$이므로

$m=-\sqrt{2}$ 또는 $m=\sqrt{2}$

따라서 $m^2=2$

답 ②

24

쌍곡선 $x^2-\frac{y^2}{2}=1$ 위의 점 $P(\sqrt{2}, \sqrt{2})$에서의 접선의 방정식은

$\sqrt{2}x-\frac{\sqrt{2}}{2}y=1$에서

$y=2x-\sqrt{2}$

이 접선이 쌍곡선 $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{4}=-1$과 만나는 두 점의 x좌표를 α, β라 하면

$\frac{x^2}{4}-\frac{(2x-\sqrt{2})^2}{4}=-1$에서

$x^2-(2x-\sqrt{2})^2=-4$

$3x^2-4\sqrt{2}x-2=0$

이 이차방정식의 두 근이 α, β이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=\frac{4\sqrt{2}}{3}$, $\alpha\beta=-\frac{2}{3}$

한편, 직선 $y=2x-\sqrt{2}$의 기울기가 2이므로

$\overline{AB}=\sqrt{5}\,|\alpha-\beta|$

$=\sqrt{5}\sqrt{(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta}$

$=\sqrt{5}\sqrt{\left(\frac{4\sqrt{2}}{3}\right)^2-4\times\left(-\frac{2}{3}\right)}$

$=\sqrt{5}\times\frac{2\sqrt{14}}{3}=\frac{2\sqrt{70}}{3}$

답 ④

25

$c^2=2+7=9$에서 주어진 초점의 좌표는 F(3, 0)이다.

점 P의 좌표를 (x_1, y_1) $(x_1>0, y_1>0)$이라 하면 점 P는 쌍곡선 $\frac{x^2}{2}-\frac{y^2}{7}=1$ 위의 점이므로

$\frac{x_1^2}{2}-\frac{y_1^2}{7}=1$ …… ㉠

점 $P(x_1, y_1)$에서의 접선의 방정식은

$\frac{x_1x}{2}-\frac{y_1y}{7}=1$

$y=0$일 때 $x=\frac{2}{x_1}$이므로

$Q\left(\frac{2}{x_1}, 0\right)$ …… ㉡

$\overline{PF}=\overline{PQ}$에서 삼각형 PQF는 이등변삼각형이므로 점 P에서 선분 FQ에 내린 수선의 발은 선분 FQ의 중점이다.

$2x_1=\frac{2}{x_1}+3$

$2x_1^2-3x_1-2=0$, $(2x_1+1)(x_1-2)=0$

$x_1>0$이므로 $x_1=2$

㉠에서 $2-\frac{y_1^2}{7}=1$, $y_1^2=7$

$y_1=\sqrt{7}$이므로 $P(2, \sqrt{7})$

㉡에서 Q(1, 0)

따라서 삼각형 PQF의 넓이는

$\frac{1}{2}\times(3-1)\times\sqrt{7}=\sqrt{7}$

답 ②

26

점 A의 좌표를 $(s, t)(s>0, t>0)$이라 하자.

쌍곡선 $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{12}=1$ 위의 점 A에서의 접선의 방정식은

$\frac{sx}{4}-\frac{ty}{12}=1$

즉, $3sx-ty=12$ …… ㉠

쌍곡선의 점근선의 방정식은

$y=\sqrt{3}x$, $y=-\sqrt{3}x$

$y=\sqrt{3}x$를 ㉠에 대입하면

$3sx-\sqrt{3}tx=12$

에서 $x=\frac{12}{3s-\sqrt{3}t}$

이므로 점 B의 좌표는 $\left(\frac{12}{3s-\sqrt{3}t}, \frac{12\sqrt{3}}{3s-\sqrt{3}t}\right)$이다.

$y=-\sqrt{3}x$를 ㉠에 대입하면

$3sx+\sqrt{3}tx=12$에서 $x=\frac{12}{3s+\sqrt{3}t}$

이므로 점 C의 좌표는 $\left(\frac{12}{3s+\sqrt{3}t}, -\frac{12\sqrt{3}}{3s+\sqrt{3}t}\right)$이다.

점 A는 쌍곡선 $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{12}=1$ 위의 점이므로

$\frac{s^2}{4}-\frac{t^2}{12}=1$

$3s^2-t^2=12$ …… ㉡

점근선이 x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기가 각각 $60°$, $120°$이므로

$\overline{OB}=2\times\frac{12}{3s-\sqrt{3}t}$

$\overline{OC}=2\times\frac{12}{3s+\sqrt{3}t}$

$\overline{OB}=2\overline{OC}$에서

$\frac{24}{3s-\sqrt{3}t}=2\times\frac{24}{3s+\sqrt{3}t}$

$6s-2\sqrt{3}t=3s+\sqrt{3}t$

$3s=3\sqrt{3}t$

$s=\sqrt{3}t$ …… ㉢

㉢을 ㉡에 대입하면 $s=\frac{3\sqrt{2}}{2}$, $t=\frac{\sqrt{6}}{2}$

㉠에서 $D\left(0, -\frac{12}{t}\right)$이므로

$D(0, -4\sqrt{6})$

따라서 선분 OD의 길이는 $4\sqrt{6}$이다.

답 ⑤

다른 풀이

쌍곡선 $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{12}=1$의 점근선의 방정식은

$y=\sqrt{3}x$, $y=-\sqrt{3}x$

이므로 점근선이 x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기는 각각 $60°$, $120°$이다.

$\overline{OB}=2\overline{OC}$에서 $\overline{OB}=2k$, $\overline{OC}=k$ $(k>0)$이라 하면

$B(k, \sqrt{3}k)$, $C\left(\frac{1}{2}k, -\frac{\sqrt{3}}{2}k\right)$

그러므로 접선의 기울기는

$$\frac{\sqrt{3}k-\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}k\right)}{k-\frac{1}{2}k}=3\sqrt{3}$$

쌍곡선 $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{12}=1$에 대하여 기울기가 $3\sqrt{3}$이고 y절편이 음수인 접선의 방정식은

$y=3\sqrt{3}x-\sqrt{4\times(3\sqrt{3})^2-12}$

$=3\sqrt{3}x-\sqrt{96}$

$=3\sqrt{3}x-4\sqrt{6}$

이므로 $D(0, -4\sqrt{6})$

따라서 선분 OD의 길이는 $4\sqrt{6}$이다.

27

$\overline{FF'}=12$, $\overline{PF}=5$이므로 직각삼각형 PF'F에서

$\overline{PF'}=\sqrt{12^2+5^2}=13$

$\overline{PF'}+\overline{PF}=13+5=18$이므로 타원의 정의에 의하여

타원의 방정식은

$\frac{x^2}{9^2}+\frac{y^2}{9^2-6^2}=1$

$\frac{x^2}{9^2}+\frac{y^2}{45}=1$

$\overline{PF'}-\overline{PF}=13-5=8$이므로 쌍곡선의 정의에 의하여 쌍곡선의 방정식은

$\frac{x^2}{4^2}-\frac{y^2}{6^2-4^2}=1$

$\frac{x^2}{4^2}-\frac{y^2}{20}=1$

직선 l의 방정식은

$\frac{6x}{9^2}+\frac{5y}{45}=1$

$y=-\frac{2}{3}x+9$

이므로 직선 l에 수직인 직선의 기울기는 $\frac{3}{2}$이다.

쌍곡선 $\frac{x^2}{4^2}-\frac{y^2}{20}=1$에 접하고 기울기가 $\frac{3}{2}$인 직선의 방정식은

$y=\frac{3}{2}x\pm\sqrt{4^2\times\left(\frac{3}{2}\right)^2-20}$

$=\frac{3}{2}x\pm\sqrt{16}$

$=\frac{3}{2}x\pm4$

그러므로 두 직선 m_1, m_2의 방정식은

$y=\frac{3}{2}x+4$, $y=\frac{3}{2}x-4$

두 직선 사이의 거리는 직선 $y=\frac{3}{2}x-4$ 위의 점 $(0, -4)$와 직선 $3x-2y+8=0$ 사이의 거리와 같으므로

$k=\frac{|3\times0-2\times(-4)+8|}{\sqrt{3^2+(-2)^2}}=\frac{16}{\sqrt{13}}$

$k^2=\frac{256}{13}$

따라서 $p=13$, $q=256$이므로

$p+q=13+256=269$

답 269

28

쌍곡선 C: $x^2-y^2=1$의 점근선의 방정식은 $y=x$, $y=-x$이므로 기울기가 양수인 직선 l은 $y=x$이다.

점 P_n의 x좌표를 a_n이라 하면 $\mathrm{P}_n(a_n, a_n)$

$n\ge 2$일 때 직선 l과 직선 $\mathrm{P}_n\mathrm{Q}_{n-1}$은 서로 수직이므로 직선 $\mathrm{P}_n\mathrm{Q}_{n-1}$의 방정식은

$y-a_n=-(x-a_n)$

$y=-x+2a_n$

직선 $y=-x+2a_n$과 쌍곡선 C의 교점 Q_{n-1}의 좌표를 구하면

$x^2-(-x+2a_n)^2=1$

$4a_nx=4{a_n}^2+1$

$x=\dfrac{4{a_n}^2+1}{4a_n}$

$y=-\dfrac{4{a_n}^2+1}{4a_n}+2a_n=\dfrac{4{a_n}^2-1}{4a_n}$

에서

$\mathrm{Q}_{n-1}\left(\dfrac{4{a_n}^2+1}{4a_n}, \dfrac{4{a_n}^2-1}{4a_n}\right)$

쌍곡선 C 위의 점 Q_{n-1}에서의 접선의 방정식은

$\dfrac{4{a_n}^2+1}{4a_n}x-\dfrac{4{a_n}^2-1}{4a_n}y=1$

이 접선과 직선 l의 교점 P_{n-1}의 좌표를 구하면

$\dfrac{4{a_n}^2+1}{4a_n}x-\dfrac{4{a_n}^2-1}{4a_n}x=1$

$\dfrac{2}{4a_n}x=1$

$x=2a_n$

에서 $\mathrm{P}_{n-1}(2a_n, 2a_n)$

$a_{n-1}=2a_n$에서

$a_n=\dfrac{1}{2}a_{n-1}\ (n\ge 2)$

$a_1=3$이므로

$a_n=3\times\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}$

이때 직선 $\mathrm{P}_7\mathrm{Q}_6$의 기울기는 -1이고 두 점 P_7, Q_6의 x좌표는 각각 a_7, $\dfrac{4{a_7}^2+1}{4a_7}$이므로 선분 $\mathrm{P}_7\mathrm{Q}_6$이 빗변인 직각이등변삼각형에서

$\overline{\mathrm{P}_7\mathrm{Q}_6}=\sqrt{2}\left(\dfrac{4{a_7}^2+1}{4a_7}-a_7\right)=\dfrac{\sqrt{2}}{4a_7}$

$a_7=3\times\left(\dfrac{1}{2}\right)^{7-1}=3\times\left(\dfrac{1}{2}\right)^6$에서

$\overline{\mathrm{P}_7\mathrm{Q}_6}=\dfrac{16\sqrt{2}}{3}$

답 ②

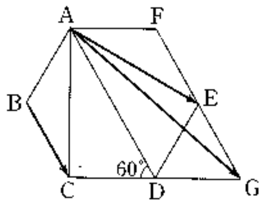
08 평면벡터

정답 본문 90~99쪽

필수 유형 ❶ ②	01 ④	02 ③	03 ④
	04 ①	05 ⑤	
필수 유형 ❷ 8	06 ②	07 ③	08 ③
	09 253		
필수 유형 ❸ ⑤	10 ①	11 ③	12 ⑤
필수 유형 ❹ ②	13 ②	14 ④	15 ②
필수 유형 ❺ ⑤	16 ④	17 ③	18 7
필수 유형 ❻ ④	19 ④	20 ⑤	21 ④
	22 ①	23 ②	
필수 유형 ❼ 17	24 ③	25 16	26 ②
필수 유형 ❽ ②	27 ②	28 ①	29 ③

필수 유형 ❶

직선 EF와 직선 CD가 만나는 점을 G라 하자.



삼각형 DGE는 정삼각형이므로

$\overrightarrow{\mathrm{BC}}=\overrightarrow{\mathrm{EG}}$

이때 $\overrightarrow{\mathrm{AE}}+\overrightarrow{\mathrm{BC}}=\overrightarrow{\mathrm{AE}}+\overrightarrow{\mathrm{EG}}=\overrightarrow{\mathrm{AG}}$

직각삼각형 ACD에서 $\overline{\mathrm{AD}}=2$, $\angle\mathrm{ADC}=60°$이므로

$\overline{\mathrm{AC}}=\overline{\mathrm{AD}}\times\sin 60°=2\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}$

$\overline{\mathrm{DG}}=1$이고, 삼각형 ACG는 직각삼각형이므로 피타고라스 정리에 의하여

$\overline{\mathrm{AG}}^2=\overline{\mathrm{AC}}^2+\overline{\mathrm{CG}}^2=\overline{\mathrm{AC}}^2+(\overline{\mathrm{CD}}+\overline{\mathrm{DG}})^2$

$=(\sqrt{3})^2+(1+1)^2=7$

즉, $\overline{\mathrm{AG}}=\sqrt{7}$

따라서 $|\overrightarrow{\mathrm{AE}}+\overrightarrow{\mathrm{BC}}|=|\overrightarrow{\mathrm{AG}}|=\overline{\mathrm{AG}}=\sqrt{7}$

답 ②

01

두 벡터 $2\vec{a}+\vec{b}$, $k\vec{a}+3\vec{b}$가 서로 평행하므로

$k\vec{a}+3\vec{b}=m(2\vec{a}+\vec{b})\ (m\ne 0)$

을 만족시키는 실수 m이 존재한다.

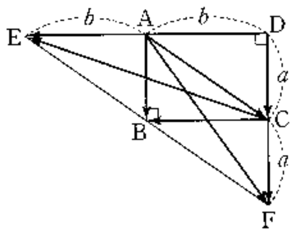
$k\vec{a}+3\vec{b}=2m\vec{a}+m\vec{b}$

$k=2m$, $3=m$

따라서 $k=6$

답 ④

02



그림과 같이 $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{CF}$인 점 D, F와 $\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{AE}$인 점 E를 그리면

$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AF}$, $\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{CE}$

이므로

$|\overrightarrow{AF}|=\sqrt{14}$

$|\overrightarrow{CE}|=2\sqrt{6}$

$\angle EDF=\angle ABC=90°$이므로

$|\overrightarrow{DC}|=a$, $|\overrightarrow{AD}|=b$라 하면

$|\overrightarrow{AF}|^2=(2a)^2+b^2=14$ …… ㉠

$|\overrightarrow{CE}|^2=a^2+(2b)^2=24$ …… ㉡

㉠, ㉡에서

$5(a^2+b^2)=38$

$a^2+b^2=\frac{38}{5}$

따라서 $|\overrightarrow{AC}|^2=a^2+b^2=\frac{38}{5}$

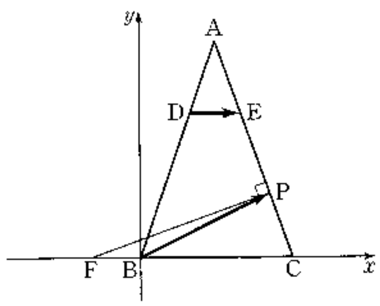
답 ③

03

$\overrightarrow{DE}=\overrightarrow{FB}$가 되도록 점 F를 정하면

$\overrightarrow{DE}+\overrightarrow{BP}=\overrightarrow{FB}+\overrightarrow{BP}=\overrightarrow{FP}$

삼각형 ABC의 변 BC가 x축 위에, 점 B가 원점, 점 C의 좌표가 (2, 0)이 되도록 좌표평면에 놓으면 $|\overrightarrow{DE}+\overrightarrow{BP}|$의 최솟값은 점 F와 직선 AC 사이의 거리와 같다.



점 A의 좌표가 $(1, \sqrt{3^2-1^2})$

즉, $(1, 2\sqrt{2})$이므로

직선 AC의 방정식은

$y=\frac{2\sqrt{2}-0}{1-2}(x-2)=-2\sqrt{2}(x-2)$

즉, $2\sqrt{2}x+y-4\sqrt{2}=0$

두 삼각형 ADE, ABC는 닮음비가 1 : 3인 닮은 도형이고

$\overline{BC}=2$이므로 $\overline{DE}=\frac{2}{3}$

점 F의 좌표가 $\left(-\frac{2}{3}, 0\right)$

따라서 $|\overrightarrow{DE}+\overrightarrow{BP}|$의 최솟값은

$$\frac{\left|2\sqrt{2}\times\left(-\frac{2}{3}\right)+0-4\sqrt{2}\right|}{\sqrt{(2\sqrt{2})^2+1^2}}=\frac{\frac{16\sqrt{2}}{3}}{3}=\frac{16\sqrt{2}}{9}$$

답 ④

04

$\overrightarrow{PA}+2\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{PD}$에서

$\overrightarrow{PA}+2\overrightarrow{PB}+(\overrightarrow{PC}-\overrightarrow{PA})=\overrightarrow{PD}$

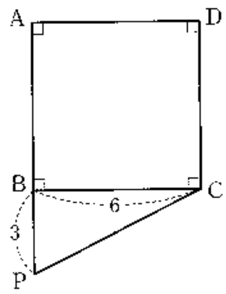
$2\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}=\overrightarrow{PD}$

$2\overrightarrow{PB}=\overrightarrow{PD}-\overrightarrow{PC}$

$2\overrightarrow{PB}=\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{PB}=\frac{1}{2}\overrightarrow{CD}$

$\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{CD}$이므로 $\overrightarrow{PB}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BA}$

즉, 세 점 A, B, P는 한 직선 위에 있고, $|\overrightarrow{PB}|=\frac{1}{2}|\overrightarrow{BA}|=3$에서 점 P는 선분 AB를 3 : 1로 외분하는 점이다.



직각삼각형 BPC에서 피타고라스 정리에 의하여

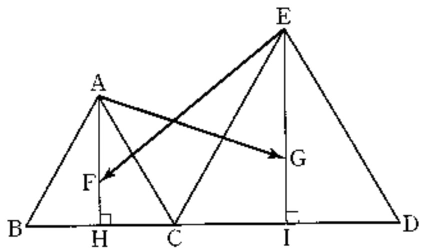
$\overline{PC}^2=\overline{BP}^2+\overline{BC}^2=3^2+6^2=45$

따라서 $|\overrightarrow{PC}|=3\sqrt{5}$

답 ①

05

두 점 A, E에서 선분 BD에 내린 수선의 발을 각각 H, I라 하면



$\overrightarrow{AG}+\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{AF}+\overrightarrow{FG}-\overrightarrow{FE}$

$=\overrightarrow{AF}+\overrightarrow{EG}$

$=\frac{2}{3}\overrightarrow{AH}+\frac{2}{3}\overrightarrow{EI}$

두 정삼각형 ABC, ECD의 닮음비는 2 : 3이므로

$\overrightarrow{EI}=\frac{3}{2}\overrightarrow{AH}$

$\overrightarrow{AH}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})$이므로

$$\overrightarrow{AG}+\overrightarrow{EF}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AH}+\frac{2}{3}\times\left(\frac{3}{2}\overrightarrow{AH}\right)$$
$$=\frac{5}{3}\overrightarrow{AH}=\frac{5}{6}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})$$

두 벡터 $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$가 서로 평행하지 않으므로 $m=\frac{5}{6}$, $n=\frac{5}{6}$

따라서 $m+n=\frac{5}{6}+\frac{5}{6}=\frac{10}{6}=\frac{5}{3}$

답 ⑤

필수 유형 ❷

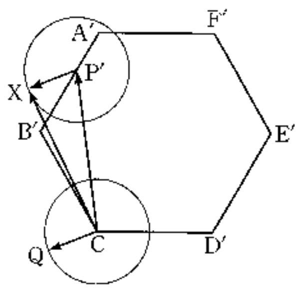
조건 (가)에서

$\overrightarrow{CX}=\frac{1}{2}\overrightarrow{CP}+\overrightarrow{CQ}$이므로

$\frac{1}{2}\overrightarrow{CP}=\overrightarrow{CP'}$이라 하면

$\overrightarrow{CX}=\overrightarrow{CP'}+\overrightarrow{CQ}$

선분 CA, CB, CD, CE, CF의 중점을 각각 A′, B′, D′, E′, F′이라 하면 점 X는 정육각형 A′B′CD′E′F′ 위의 점을 중심으로 하고 반지름의 길이가 1인 원 위를 움직인다.



조건 (나)에서

$\overrightarrow{XA}+\overrightarrow{XC}+2\overrightarrow{XD}=k\overrightarrow{CD}$이므로

$(\overrightarrow{CA}-\overrightarrow{CX})-\overrightarrow{CX}+2(\overrightarrow{CD}-\overrightarrow{CX})=k\overrightarrow{CD}$

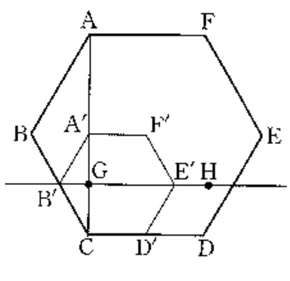
$\overrightarrow{CX}=\frac{1}{4}\overrightarrow{CA}+\frac{2-k}{4}\overrightarrow{CD}$

$\frac{1}{4}\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{CG}$라 하면 점 X는 점 G를 지나고 직선 CD에 평행한 직선 위를 움직인다.

직선 GE′ 위의 점 H가

$\overline{E'H}=1$, $\overline{GH}>\overline{GE'}$

을 만족시키도록 점 H를 잡는다.



X가 점 G일 때, $|\overrightarrow{CX}|$의 값은 최소이다.

$\overrightarrow{CX}=\overrightarrow{CG}+\frac{2-k}{4}\overrightarrow{CD}$에서

$\frac{2-k}{4}=0$, $k=2$

즉, $\alpha=2$

점 X가 점 H일 때, $|\overrightarrow{CX}|$의 값은 최대이다.

$|\overrightarrow{GH}|=4$에서

$\left|\frac{2-k}{4}\overrightarrow{CD}\right|=4$

$\frac{2-k}{4}>0$이므로 $\frac{2-k}{4}|\overrightarrow{CD}|=4$

$\frac{2-k}{4}\times4=4$

$k=-2$

즉, $\beta=-2$

따라서 $\alpha^2+\beta^2=2^2+(-2)^2=8$

답 8

06

$$\overrightarrow{AQ}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$$
$$=\frac{3}{12}\overrightarrow{AB}+\frac{4}{12}\overrightarrow{AC}$$
$$=\frac{7}{12}\times\frac{3\overrightarrow{AB}+4\overrightarrow{AC}}{7}$$

선분 BC를 4 : 3으로 내분하는 점을 R라 하면

$\overrightarrow{AR}=\frac{3\overrightarrow{AB}+4\overrightarrow{AC}}{7}$에서

$\overrightarrow{AQ}=\frac{7}{12}\overrightarrow{AR}$

즉, 점 R는 두 직선 AQ, BC의 교점이므로 두 점 P, R는 일치한다.

$\overrightarrow{AQ}=\frac{7}{12}\overrightarrow{AP}$

따라서 $|\overrightarrow{AQ}|=\frac{7}{12}|\overrightarrow{AP}|=\frac{7}{12}\times24=14$

답 ②

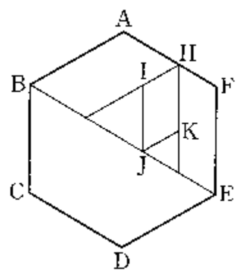
07

$\overrightarrow{AP}=s\overrightarrow{AB}$ $(0\le s\le1)$, $\overrightarrow{FQ}=t\overrightarrow{FE}$ $(0\le t\le1)$이므로

$$\overrightarrow{AR}=\frac{2\overrightarrow{AQ}+\overrightarrow{AP}}{2+1}$$
$$=\frac{2}{3}(\overrightarrow{AF}+\overrightarrow{FQ})+\frac{1}{3}\overrightarrow{AP}$$
$$=\frac{2}{3}\overrightarrow{AF}+\frac{2t}{3}\overrightarrow{FE}+\frac{s}{3}\overrightarrow{AB}$$
$$=\frac{2}{3}\overrightarrow{AF}+\frac{s}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{2t}{3}\overrightarrow{FE}$$

이때 세 점 H, I, K에 대하여

$\frac{2}{3}\overrightarrow{AF}=\overrightarrow{AH}$, $\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{HI}$, $\frac{2}{3}\overrightarrow{FE}=\overrightarrow{HK}$라 하면



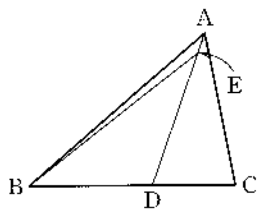
$\overrightarrow{AR}=\overrightarrow{AH}+s\overrightarrow{HI}+t\overrightarrow{HK}$ $(0\le s\le1,\ 0\le t\le1)$이므로 점 R가 나타내는 도형은 두 선분 HI, HK를 두 변으로 하는 평행사변형과 그 내부이다.

$|\overrightarrow{\mathrm{HI}}|=1$, $|\overrightarrow{\mathrm{HK}}|=2$이고 두 벡터 $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$, $\overrightarrow{\mathrm{HI}}$가 서로 평행하고, 두 벡터 $\overrightarrow{\mathrm{FE}}$, $\overrightarrow{\mathrm{HK}}$가 서로 평행하므로 $\angle\mathrm{KHI}=60°$이다.
따라서 구하는 영역의 넓이는
$1\times2\times\sin 60°=\sqrt{3}$

답 ③

08

직선 AD가 각 A의 이등분선이므로
$\overline{\mathrm{AB}}:\overline{\mathrm{AC}}=\overline{\mathrm{BD}}:\overline{\mathrm{DC}}=6:4=3:2$
그러므로 $\overrightarrow{\mathrm{AD}}=\dfrac{3\overrightarrow{\mathrm{AC}}+2\overrightarrow{\mathrm{AB}}}{3+2}=\dfrac{3\overrightarrow{\mathrm{AC}}+2\overrightarrow{\mathrm{AB}}}{5}$
한편, 삼각형 ABD와 삼각형 ADC의 넓이의 비가 3 : 2이므로 삼각형 ABD의 넓이는
$8\times\dfrac{3}{5}=\dfrac{24}{5}$
이때 점 E가 선분 AD 위의 점이므로 상수 $k\ (0\le k\le1)$에 대하여
$\overrightarrow{\mathrm{AE}}=k\overrightarrow{\mathrm{AD}}$이고, 삼각형 ABE의 넓이가 $\dfrac{3}{5}$이므로
$\dfrac{24}{5}\times\dfrac{|\overrightarrow{\mathrm{AE}}|}{|\overrightarrow{\mathrm{AD}}|}=\dfrac{24}{5}k=\dfrac{3}{5}$
에서 $k=\dfrac{1}{8}$



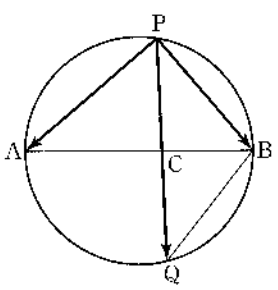
$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{AE}}&=\frac{1}{8}\overrightarrow{\mathrm{AD}}\\&=\frac{1}{8}\times\frac{3\overrightarrow{\mathrm{AC}}+2\overrightarrow{\mathrm{AB}}}{5}\\&=\frac{1}{20}\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\frac{3}{40}\overrightarrow{\mathrm{AC}}\end{aligned}$$

이때 두 벡터 $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$, $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$는 서로 평행하지 않으므로 $p=\dfrac{1}{20}$, $q=\dfrac{3}{40}$
따라서 $p-q=\dfrac{1}{20}-\dfrac{3}{40}=-\dfrac{1}{40}$

답 ③

09

$25\overrightarrow{\mathrm{PQ}}=18\overrightarrow{\mathrm{PA}}+27\overrightarrow{\mathrm{PB}}$
$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}=\dfrac{9}{5}\times\dfrac{2\overrightarrow{\mathrm{PA}}+3\overrightarrow{\mathrm{PB}}}{5}$
에서 선분 AB를 3 : 2로 내분하는 점을 C라 하면
$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}=\dfrac{9}{5}\overrightarrow{\mathrm{PC}}$
이므로 세 점 P, Q, C는 한 직선 위에 있고,
$|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}|=\dfrac{9}{5}|\overrightarrow{\mathrm{PC}}|$이다.
즉, $\overline{\mathrm{CQ}}=\overline{\mathrm{PQ}}-\overline{\mathrm{PC}}=\dfrac{4}{5}\overline{\mathrm{PC}}$ …… ㉠



원주각의 성질에 의하여
$\angle\mathrm{BAP}=\angle\mathrm{BQP}$, $\angle\mathrm{APQ}=\angle\mathrm{ABQ}$
이므로 두 삼각형 CAP, CQB는 서로 닮은 도형이다.
$\overline{\mathrm{AB}}=5$에서 $\overline{\mathrm{CA}}=3$, $\overline{\mathrm{CB}}=2$
$\overline{\mathrm{CA}}:\overline{\mathrm{CQ}}=\overline{\mathrm{CP}}:\overline{\mathrm{CB}}$
$3:\overline{\mathrm{CQ}}=\overline{\mathrm{CP}}:2$
이므로 $\overline{\mathrm{CQ}}\times\overline{\mathrm{CP}}=6$ …… ㉡
㉠, ㉡에서
$\overline{\mathrm{PC}}^2=6\times\dfrac{5}{4}=\dfrac{15}{2}$
$\overline{\mathrm{PC}}>0$이므로 $\overline{\mathrm{PC}}=\dfrac{\sqrt{30}}{2}$
$|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}|=\dfrac{9}{5}|\overrightarrow{\mathrm{PC}}|=\dfrac{9}{5}\times\dfrac{\sqrt{30}}{2}=\dfrac{9\sqrt{30}}{10}$
$|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}|^2=\dfrac{243}{10}$
따라서 $p=10$, $q=243$이므로
$p+q=10+243=253$

답 253

필수 유형 ❸

두 벡터 $\vec{a}$와 $\vec{v}+\vec{b}$가 서로 평행하므로
$\vec{v}+\vec{b}=k\vec{a}$ (k는 0이 아닌 실수)
로 놓을 수 있다. 이때

$$\begin{aligned}\vec{v}&=k\vec{a}-\vec{b}\\&=k(3,\ 1)-(4,\ -2)\\&=(3k-4,\ k+2)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}|\vec{v}|^2&=(3k-4)^2+(k+2)^2\\&=10k^2-20k+20\\&=10(k-1)^2+10\end{aligned}$$

따라서 $|\vec{v}|^2$의 최솟값은 $k=1$일 때 10이다.

답 ⑤

10

원점 O에 대하여

$$\begin{aligned}&\overrightarrow{\mathrm{AC}}+\overrightarrow{\mathrm{PA}}+2\overrightarrow{\mathrm{PB}}\\&=(\overrightarrow{\mathrm{OC}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}})+(\overrightarrow{\mathrm{OA}}-\overrightarrow{\mathrm{OP}})+2(\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\overrightarrow{\mathrm{OP}})\\&=2\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}}-3\overrightarrow{\mathrm{OP}}\\&=\vec{0}\end{aligned}$$

이므로

$$\begin{aligned}3\overrightarrow{\mathrm{OP}}&=2\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}}\\&=2(1,\ -1)+(2,\ 0)\\&=(4,\ -2)\end{aligned}$$

따라서 $\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\left(\dfrac{4}{3},\ -\dfrac{2}{3}\right)$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{AP}}&=\overrightarrow{\mathrm{OP}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}\\&=\left(\frac{4}{3},\ -\frac{2}{3}\right)-(3,\ 2)\\&=\left(-\frac{5}{3},\ -\frac{8}{3}\right)\end{aligned}$$

이므로 벡터 $\overrightarrow{\mathrm{AP}}$의 모든 성분의 합은

$-\frac{5}{3}+\left(-\frac{8}{3}\right)=-\frac{13}{3}$

답 ①

11

$\overrightarrow{BP}=3\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{BA}$

$\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OB}=3\overrightarrow{OA}-(\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB})$

$\overrightarrow{OP}=2\overrightarrow{OA}+2\overrightarrow{OB}$

$\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OA}+2\overrightarrow{OB}$

$\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{OA}+2\overrightarrow{OB}$

$=(3, 2)+2(-1, 1)$

$=(1, 4)$

따라서 $|\overrightarrow{AP}|=\sqrt{1^2+4^2}=\sqrt{17}$

답 ③

12

$\overrightarrow{QP}=3(\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OQ})$에서

$\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OQ}=3\overrightarrow{OA}-3\overrightarrow{OQ}$

$3\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OP}+2\overrightarrow{OQ}$

$\overrightarrow{OA}=\frac{\overrightarrow{OP}+2\overrightarrow{OQ}}{3}$

에서 점 A는 선분 PQ를 2 : 1로 내분하는 점이다.

$|\overrightarrow{AP}|=6$에서 $|\overrightarrow{AQ}|=3$, $|\overrightarrow{PQ}|=9$

$|\overrightarrow{OA}|=\sqrt{1^2+2^2}=\sqrt{5}$

세 점 A, P, Q가 한 직선 위의 점이고 $\overline{OA}$가 일정하므로 삼각형 OPQ의 넓이가 최대가 되는 경우는 벡터 $\overrightarrow{OA}$와 벡터 $\overrightarrow{PQ}$가 서로 수직이 되는 경우이다.

따라서 구하는 넓이의 최댓값은

$\frac{1}{2}\times|\overrightarrow{PQ}|\times|\overrightarrow{OA}|=\frac{1}{2}\times9\times\sqrt{5}=\frac{9\sqrt{5}}{2}$

답 ⑤

필수 유형 ❹

두 벡터 $6\vec{a}+\vec{b}$와 $\vec{a}-\vec{b}$가 서로 수직이므로

$(6\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}-\vec{b})=0$

$6|\vec{a}|^2-5\vec{a}\cdot\vec{b}-|\vec{b}|^2=0$

즉, $6\times1-5\vec{a}\cdot\vec{b}-9=0$에서

$5\vec{a}\cdot\vec{b}=-3$

따라서 $\vec{a}\cdot\vec{b}=-\frac{3}{5}$

답 ②

13

$|\vec{a}-3\vec{b}|^2=|\vec{a}|^2+9|\vec{b}|^2-6\vec{a}\cdot\vec{b}$

이고

$|\vec{a}|=\sqrt{14}$, $|\vec{b}|=2$, $|\vec{a}-3\vec{b}|=2\sqrt{5}$

이므로

$(2\sqrt{5})^2=(\sqrt{14})^2+9\times2^2-6\vec{a}\cdot\vec{b}$

$\vec{a}\cdot\vec{b}=5$

$|2\vec{a}+\vec{b}|^2=4|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2+4\vec{a}\cdot\vec{b}$

$=4\times(\sqrt{14})^2+2^2+4\times5$

$=80$

이므로

$|2\vec{a}+\vec{b}|=\sqrt{80}=4\sqrt{5}$

답 ③

14

$|\vec{a}|=2$, $|\vec{a}-2\vec{b}|=2\sqrt{3}$에서

$|\vec{a}-2\vec{b}|^2=|\vec{a}|^2+4|\vec{b}|^2-4\vec{a}\cdot\vec{b}$

$12=4+4|\vec{b}|^2-4\vec{a}\cdot\vec{b}$

$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{b}|^2-2$ ...... ㉠

두 벡터 $2\vec{a}+\vec{b}$, $\vec{a}-3\vec{b}$가 서로 수직이므로

$(2\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}-3\vec{b})=0$

$2|\vec{a}|^2-3|\vec{b}|^2-5\vec{a}\cdot\vec{b}=0$

㉠에 의하여

$8-3|\vec{b}|^2-5(|\vec{b}|^2-2)=0$

$8|\vec{b}|^2=18$, $|\vec{b}|^2=\frac{9}{4}$

따라서 벡터 $\vec{b}$의 크기는

$|\vec{b}|=\sqrt{\frac{9}{4}}=\frac{3}{2}$

답 ④

15

조건 (가)에서 $2\vec{a}+3\vec{b}=\vec{c}$, 즉

$|2\vec{a}+3\vec{b}|=|\vec{c}|$

이때 $|\vec{b}|=0$이면 $\vec{c}=2\vec{a}$

$|\vec{c}|=2|\vec{a}|=4$가 되어 $|\vec{c}|=6$이라는 조건에 모순이다.

따라서 $|\vec{b}|\neq0$

조건 (나)에서 $|\vec{a}-2\vec{b}|=|\vec{a}|+2|\vec{b}|$이므로

$|\vec{a}-2\vec{b}|^2=(|\vec{a}|+2|\vec{b}|)^2$

$|\vec{a}|^2+4|\vec{b}|^2-4\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|^2+4|\vec{b}|^2+4|\vec{a}||\vec{b}|$

$\vec{a}\cdot\vec{b}=-|\vec{a}||\vec{b}|$ ...... ㉠

이때 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$가 이루는 각의 크기를 θ $(0°\leq\theta\leq180°)$라 하면

$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$

㉠에서 $\cos\theta=-1$이므로 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$의 방향은 서로 반대이다.

$\vec{b}=-k\vec{a}$ $(k>0)$으로 놓으면

$|\vec{c}|=|2\vec{a}+3\vec{b}|=|2-3k||\vec{a}|$

$=2|2-3k|$

$2|2-3k|=6$에서

$2-3k=3$ 또는 $2-3k=-3$

$k=-\frac{1}{3}$ 또는 $k=\frac{5}{3}$

$k>0$이므로 $k=\frac{5}{3}$, $\vec{b}=-\frac{5}{3}\vec{a}$, $\vec{c}=-3\vec{a}$

따라서

$|\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}|=\left|\vec{a}-\frac{5}{3}\vec{a}-3\vec{a}\right|=\frac{11}{3}|\vec{a}|=\frac{22}{3}$

답 ②

필수 유형 ❺

$\overrightarrow{OA}=(4,\ 2)$,

$\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB}=(2,\ 0)-(0,\ 2)=(2,\ -2)$

이므로

$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{BC}=(4,\ 2)\cdot(2,\ -2)$

$=4\times2+2\times(-2)$

$=4$

답 ⑤

16

$\vec{a}\cdot\vec{b}=(k,\ -1)\cdot(3,\ k^2-1)$

$=3k-(k^2-1)>-3$

에서

$k^2-3k-4<0$, $(k+1)(k-4)<0$

$-1<k<4$

따라서 부등식을 만족시키는 정수 k는

$0,\ 1,\ 2,\ 3$

으로 그 개수는 4이다.

답 ④

17

조건 (가)에서 두 벡터

$\vec{a}=(p,\ q)$, $\vec{b}=(-2,\ 5)$

가 서로 수직이므로

$\vec{a}\cdot\vec{b}=0$

이 성립한다.

$-2p+5q=0$에서 $q=\frac{2}{5}p$ …… ㉠

조건 (나)에서 두 벡터

$\vec{a}+2\vec{b}=(p-4,\ q+10)$, $\vec{a}-\vec{b}=(p+2,\ q-5)$

가 서로 수직이므로

$(\vec{a}+2\vec{b})\cdot(\vec{a}-\vec{b})=0$

이 성립한다. 따라서

$(p-4)(p+2)+(q+10)(q-5)=0$

㉠에서

$(p-4)(p+2)+\left(\frac{2}{5}p+10\right)\left(\frac{2}{5}p-5\right)=0$

$\frac{29}{25}p^2=58$

$p^2=50$

이때 $p>0$이므로 $p=5\sqrt{2}$, $q=2\sqrt{2}$

따라서 $p+q=7\sqrt{2}$

답 ③

다른 풀이

조건 (가)에서 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$가 서로 수직이므로

$\vec{a}\cdot\vec{b}=0$이 성립한다.

$-2p+5q=0$에서 $q=\frac{2}{5}p$ …… ㉠

조건 (나)에서 두 벡터 $\vec{a}+2\vec{b}$, $\vec{a}-\vec{b}$가 서로 수직이므로

$(\vec{a}+2\vec{b})\cdot(\vec{a}-\vec{b})=0$

$|\vec{a}|^2+\vec{a}\cdot\vec{b}-2|\vec{b}|^2=0$

$|\vec{a}|^2=2|\vec{b}|^2$

$p^2+q^2=2(4+25)$

㉠에서 $\frac{29}{25}p^2=2\times29$

$p^2=50$

이때 $p>0$이므로 $p=5\sqrt{2}$, $q=2\sqrt{2}$

따라서 $p+q=7\sqrt{2}$

18

$\vec{a}=\overrightarrow{OA}=(2,\ -1)$

$\vec{b}=\overrightarrow{OB}-2\overrightarrow{OA}=(1-4,\ k+2)=(-3,\ k+2)$

에서

$\vec{a}+\vec{b}=(-1,\ k+1)$

조건 (가)에서 $|\vec{a}+\vec{b}|=\sqrt{17}$이므로

$\sqrt{(-1)^2+(k+1)^2}=\sqrt{17}$

$(k+1)^2=16$에서

$k=-5$ 또는 $k=3$

$2\vec{a}+\vec{b}=(1,\ k)$이므로 조건 (나)에서

$\vec{a}\cdot(2\vec{a}+\vec{b})=(2,\ -1)\cdot(1,\ k)$

$=2-k<0$

즉, $k>2$이므로 $k=3$

$\overrightarrow{OA}=(2,\ -1)$, $\overrightarrow{OB}=(1,\ 3)$이므로

두 벡터 $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$가 이루는 각의 크기를 $\theta\ (0°\le\theta\le180°)$라 하면

$\cos\theta=\frac{\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}}{|\overrightarrow{OA}||\overrightarrow{OB}|}=\frac{2-3}{\sqrt{5}\times\sqrt{10}}=-\frac{\sqrt{2}}{10}$

$\sin\theta=\sqrt{1-\cos^2\theta}$

$=\sqrt{1-\left(-\frac{\sqrt{2}}{10}\right)^2}=\frac{7}{5\sqrt{2}}=\frac{7\sqrt{2}}{10}$

따라서 두 선분 OA, OB를 이웃한 두 변으로 하는 평행사변형의 넓이는

$|\overrightarrow{OA}|\times|\overrightarrow{OB}|\times\sin\theta=\sqrt{5}\times\sqrt{10}\times\frac{7\sqrt{2}}{10}=7$

답 7

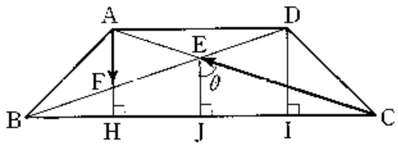
필수 유형 ❻

직각삼각형 ABH에서

$\overline{AB}=\sqrt{2}$, $\angle ABC=45°$

이므로

$\overline{AH}=\overline{BH}=1$



점 D에서 선분 BC에 내린 수선의 발을 I라 하면

$\overline{BI}=3$, $\overline{DI}=1$이고

△BID∽△BHF이므로

$\overline{\mathrm{BI}} : \overline{\mathrm{DI}} = \overline{\mathrm{BH}} : \overline{\mathrm{FH}}$

즉, $3 : 1 = 1 : \overline{\mathrm{FH}}$

$\overline{\mathrm{FH}} = \frac{1}{3}$

$\overline{\mathrm{AF}} = \overline{\mathrm{AH}} - \overline{\mathrm{FH}} = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$

한편, 점 E에서 선분 BC에 내린 수선의 발을 J라 하면

$\overline{\mathrm{BJ}} = \overline{\mathrm{CJ}} = 2$, $\overline{\mathrm{BH}} = \overline{\mathrm{HJ}} = 1$

이므로

$\overline{\mathrm{EJ}} = 2\overline{\mathrm{FH}} = \frac{2}{3}$

직각삼각형 EJC에서 ∠CEJ$=\theta$라 하면

$\cos\theta = \frac{|\overrightarrow{\mathrm{EJ}}|}{|\overrightarrow{\mathrm{CE}}|}$

이고, $\overrightarrow{\mathrm{AF}} = \overrightarrow{\mathrm{EJ}}$이므로

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{AF}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{CE}} &= \overrightarrow{\mathrm{EJ}} \cdot (-\overrightarrow{\mathrm{EC}}) \\ &= -\overrightarrow{\mathrm{EJ}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{EC}} \\ &= -|\overrightarrow{\mathrm{EJ}}|^2 \\ &= -\left(\frac{2}{3}\right)^2 \\ &= -\frac{4}{9}\end{aligned}$$

답 ④

19

$\overrightarrow{\mathrm{OA}} = \vec{a}$, $\overrightarrow{\mathrm{OB}} = \vec{b}$라 하자.

점 C는 선분 OA를 2 : 1로 내분하는 점이므로

$\overrightarrow{\mathrm{OC}} = \frac{2}{3}\vec{a}$

점 D는 선분 BC를 1 : k로 내분하는 점이므로

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OD}} &= \frac{1}{k+1}\overrightarrow{\mathrm{OC}} + \frac{k}{k+1}\overrightarrow{\mathrm{OB}} \\ &= \frac{1}{k+1}\left(\frac{2}{3}\vec{a} + k\vec{b}\right)\end{aligned}$$

$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \overrightarrow{\mathrm{OB}} - \overrightarrow{\mathrm{OA}} = \vec{b} - \vec{a}$이므로

$\overrightarrow{\mathrm{OD}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AB}}$

$= \frac{1}{k+1}\left(\frac{2}{3}\vec{a} + k\vec{b}\right) \cdot (\vec{b} - \vec{a})$

$= \frac{1}{k+1}\left\{\left(\frac{2}{3} - k\right)(\vec{a} \cdot \vec{b}) - \frac{2}{3}|\vec{a}|^2 + k|\vec{b}|^2\right\}$

$|\vec{a}| = |\vec{b}| = 3$, $\vec{a} \cdot \vec{b} = 3^2 \times \cos 60° = \frac{9}{2}$이므로

$\overrightarrow{\mathrm{OD}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AB}}$

$= \frac{1}{k+1}\left(\frac{2-3k}{3} \times \frac{9}{2} - 6 + 9k\right)$

$= \frac{3(2-3k) - 12 + 18k}{2(k+1)}$

$= \frac{9k-6}{2(k+1)}$

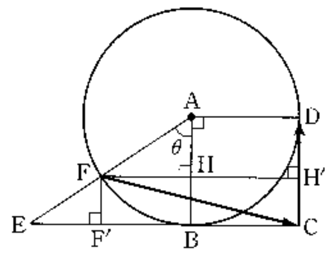
$\overrightarrow{\mathrm{OD}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AB}} = 3$에서

$\frac{9k-6}{2(k+1)} = 3$, $3k - 2 = 2(k+1)$

따라서 $k = 4$

답 ④

20



점 F에서 선분 EC에 내린 수선의 발을 F′이라 하고, 점 F에서 선분 AB와 선분 DC에 내린 수선의 발을 각각 H, H′이라 하자.

∠EAB$=\theta$ $(0° \le \theta \le 90°)$로 놓으면

∠EAD$= 90° + \theta$이므로

$$\begin{aligned}\cos(\angle \mathrm{EAD}) &= \cos(90° + \theta) \\ &= -\sin\theta = -\frac{4}{5}\end{aligned}$$

에서

$\sin\theta = \frac{4}{5}$, $\cos\theta = \frac{3}{5}$, $\tan\theta = \frac{4}{3}$

이므로

$\overline{\mathrm{EB}} = 2\tan\theta = \frac{8}{3}$

$\overline{\mathrm{FH}} = \overline{\mathrm{F'B}} = 2\sin\theta = \frac{8}{5}$

$\overline{\mathrm{HB}} = \overline{\mathrm{H'C}} = 2 - 2\cos\theta = \frac{4}{5}$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{FC}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{ED}} &= \overrightarrow{\mathrm{FC}} \cdot (\overrightarrow{\mathrm{EC}} + \overrightarrow{\mathrm{CD}}) \\ &= \overrightarrow{\mathrm{FC}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{EC}} + \overrightarrow{\mathrm{FC}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{CD}}\end{aligned}$$

이때

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{FC}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{EC}} &= \overline{\mathrm{F'C}} \times \overline{\mathrm{EC}} \\ &= \left(\frac{8}{5} + 2\right) \times \left(\frac{8}{3} + 2\right) = \frac{18}{5} \times \frac{14}{3} = \frac{84}{5}\end{aligned}$$

$\overrightarrow{\mathrm{FC}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{CD}} = -\overline{\mathrm{H'C}} \times \overline{\mathrm{CD}} = -\frac{4}{5} \times 2 = -\frac{8}{5}$

따라서 $\overrightarrow{\mathrm{FC}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{ED}} = \frac{84}{5} - \frac{8}{5} = \frac{76}{5}$

답 ⑤

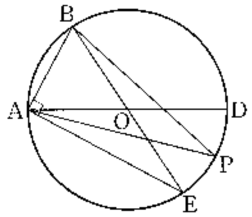
21

조건 (가)에서 ∠BAP$=\theta$라 하면

$\overrightarrow{\mathrm{AB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AP}} = |\overrightarrow{\mathrm{AB}}||\overrightarrow{\mathrm{AP}}|\cos\theta \ge 0$

즉, $0° \le \theta \le 90°$

조건 (나)에서 두 직선 OA, BP의 교점이 원의 둘레 또는 내부에 있으므로 직선 OA가 원과 만나는 점 중 A가 아닌 점을 D라 하고, 직선 BO가 원과 만나는 점 중 B가 아닌 점을 E라 하면 점 P는 점 A를 포함하지 않는 호 DE 위의 점이다.



선분 AB의 길이가 4이면 삼각형 BAO는 한 변의 길이가 4인 정삼각형이므로

$\angle DOE=\angle AOB=60°$

따라서 점 P가 나타내는 도형은 중심각의 크기가 60°인 부채꼴의 호와 같으므로 그 길이는

$4\times\frac{\pi}{3}=\frac{4}{3}\pi$

답 ④

22

$\overrightarrow{PA}-2\overrightarrow{PB}+3\overrightarrow{PC}=5\overrightarrow{AC}$에서

$\overrightarrow{PA}-2\overrightarrow{PB}+3\overrightarrow{PC}=5(\overrightarrow{PC}-\overrightarrow{PA})$

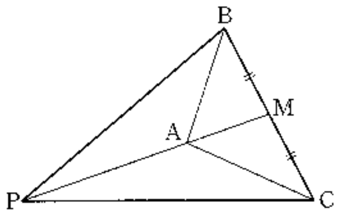
$6\overrightarrow{PA}-2\overrightarrow{PB}-2\overrightarrow{PC}=\vec{0}$

$3\overrightarrow{PA}=\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}$

선분 BC의 중점을 M이라 하면

$3\overrightarrow{PA}=2\overrightarrow{PM}$ ⋯⋯ ㉠

이므로 점 P는 선분 AM을 2 : 3으로 외분하는 점이다.



$\overrightarrow{MB}=-\overrightarrow{MC}$이므로

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$

$=(\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{MB})\cdot(\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{MC})$

$=|\overrightarrow{AM}|^2+(\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC})\cdot\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{MB}\cdot\overrightarrow{MC}$

$=|\overrightarrow{AM}|^2-|\overrightarrow{MB}|^2$

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=-2$에서

$|\overrightarrow{AM}|^2=|\overrightarrow{MB}|^2-2$ ⋯⋯ ㉡

㉠에서 $|\overrightarrow{PM}|=3|\overrightarrow{AM}|$이므로 ㉡에 의하여

$\overrightarrow{PB}\cdot\overrightarrow{PC}$

$=(\overrightarrow{PM}+\overrightarrow{MB})\cdot(\overrightarrow{PM}+\overrightarrow{MC})$

$=|\overrightarrow{PM}|^2+(\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC})\cdot\overrightarrow{PM}+\overrightarrow{MB}\cdot\overrightarrow{MC}$

$=|\overrightarrow{PM}|^2-|\overrightarrow{MB}|^2$

$=9|\overrightarrow{AM}|^2-|\overrightarrow{MB}|^2$

$=8|\overrightarrow{MB}|^2-18$

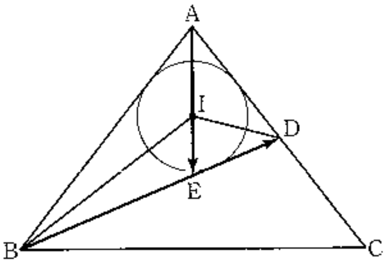
$\overrightarrow{PB}\cdot\overrightarrow{PC}=6$에서 $8|\overrightarrow{MB}|^2-18=6$

$|\overrightarrow{MB}|^2=3$에서 $|\overrightarrow{MB}|=\sqrt{3}$이므로

$|\overrightarrow{BC}|=2|\overrightarrow{MB}|=2\sqrt{3}$

답 ①

23



직선 AI가 선분 BD와 만나는 점을 E라 하자.

선분 AE는 ∠BAD를 이등분하므로

$\overline{BE}:\overline{ED}=\overline{AB}:\overline{AD}=2:1$

따라서

$\overrightarrow{AE}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AD}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$

$\quad=\frac{1}{3}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})$

$\overrightarrow{AI}=\frac{1}{5}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})$에서 $\overrightarrow{AI}=\frac{3}{5}\overrightarrow{AE}$이므로

점 I는 선분 AE를 3 : 2로 내분하는 점이다.

삼각형 ABD에 내접하는 원의 반지름의 길이를 r라 하면

(삼각형 IBD의 넓이)$=\frac{2}{5}\times$(삼각형 ABD의 넓이)

이므로

$\frac{1}{2}\times\overline{BD}\times r=\frac{2}{5}\times\frac{1}{2}\times(6+3+\overline{BD})\times r$

$\overline{BD}=\frac{2}{5}(9+\overline{BD})$

$\overline{BD}=6$

이등변삼각형 ABD에서 선분 AD의 중점을 M이라 하면

$\overline{AM}=\frac{3}{2}$, $\overline{AM}\perp\overline{BM}$이므로 $\angle BAD=\theta$로 놓으면

$\cos\theta=\frac{\overline{AM}}{\overline{AB}}=\frac{\frac{3}{2}}{6}=\frac{1}{4}$

$\overrightarrow{AB}=\vec{a}$, $\overrightarrow{AC}=\vec{b}$로 놓으면 $|\vec{a}|=|\vec{b}|=6$이고

$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta=6^2\times\frac{1}{4}=9$

따라서

$\overrightarrow{AI}\cdot\overrightarrow{BD}=\frac{1}{5}(\vec{a}+\vec{b})\cdot\left(\frac{1}{2}\vec{b}-\vec{a}\right)$

$\quad=-\frac{1}{5}|\vec{a}|^2+\frac{1}{10}|\vec{b}|^2-\frac{1}{10}\vec{a}\cdot\vec{b}$

$\quad=-\frac{1}{5}\times6^2+\frac{1}{10}\times6^2-\frac{1}{10}\times9$

$\quad=-\frac{9}{2}$

답 ②

필수 유형 ❼

원 O의 중심을 O라 하자.

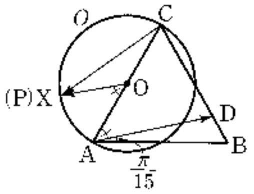
$\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{CX}=\overrightarrow{AD}\cdot(\overrightarrow{OX}-\overrightarrow{OC})=\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{OX}-\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{OC}$에서 네 점 A, C, D, O는 모두 고정된 점이므로 $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{OC}$의 값은 상수이다.

따라서 $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{CX}$의 값이 최소이려면 $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{OX}$의 값이 최소이어야 한다.

두 벡터 $\overrightarrow{AD}$와 $\overrightarrow{OX}$가 이루는 각의 크기를 θ라 하면

$\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{OX}=|\overrightarrow{AD}||\overrightarrow{OX}|\cos\theta$

이때 $|\overrightarrow{AD}|$, $|\overrightarrow{OX}|$의 값은 상수이므로 그림과 같이 두 벡터 $\overrightarrow{AD}$와 $\overrightarrow{OX}$가 서로 반대 방향일 때, $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{OX}$의 값이 최소가 된다.



이때

$\angle AOP=\angle CAD=\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{15}=\frac{4}{15}\pi$

이므로 $\angle ACP=\frac{1}{2}\angle AOP=\frac{2}{15}\pi$

따라서 $p=15$, $q=2$이므로

$p+q=15+2=17$

답 17

24

점 P에서 직선 OQ 위에 내린 수선의 발을 H라 하고,

$\angle POQ=\theta\ (0^\circ\le\theta\le180^\circ)$라 하면

$$\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ}=|\overrightarrow{OP}||\overrightarrow{OQ}|\cos\theta=\begin{cases}\overline{OH}\times\overline{OQ} & (0^\circ\le\theta\le90^\circ)\\ -\overline{OH}\times\overline{OQ} & (90^\circ<\theta\le180^\circ)\end{cases}$$

이때 $\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ}$의 값은

점 P가 점 B와 일치하고, 점 Q가 점 C와 일치할 때 최대이고

점 P가 직선 OD와 호 AB가 만나는 점이고 점 Q가 점 D와 일치할 때 최소이다.

따라서

$\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ}\le(0,\ 1)\cdot(2,\ 1)=1$

$\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ}\ge-1\times\sqrt{5}=-\sqrt{5}$

이므로 $\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ}$의 최댓값과 최솟값의 합은

$1-\sqrt{5}$

답 ③

25

$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OP}=|\overrightarrow{OA}||\overrightarrow{OP}|\cos(\angle POA)$

$=4\cos(\angle POA)$

조건 (가)에서 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OP}\le-2$이므로

$\cos(\angle POA)\le-\frac{1}{2}$

$\frac{2}{3}\pi\le\angle POA\le\pi$ …… ㉠

조건 (가)에서 $\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OP}\ge0$이므로 두 점 $P_1(-1,\ \sqrt{3})$, $P_2(-2,\ 0)$에 대하여 점 P는 중심각의 크기가 $\frac{\pi}{3}$인 부채꼴 OP_1P_2의 호 P_1P_2 위의 점이다.

$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OQ}=|\overrightarrow{OA}||\overrightarrow{OQ}|\cos(\angle QOA)$

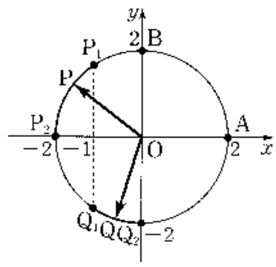
$=4\cos(\angle QOA)$

조건 (나)에서 $-2\le\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OQ}\le0$이므로

$-\frac{1}{2}\le\cos(\angle QOA)\le0$

$\frac{\pi}{2}\le\angle QOA\le\frac{2}{3}\pi$ …… ㉡

조건 (나)에서 $\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OQ}\le0$이므로 두 점 $Q_1(-1,\ -\sqrt{3})$, $Q_2(0,\ -2)$에 대하여 점 Q는 중심각의 크기가 $\frac{\pi}{6}$인 부채꼴 OQ_1Q_2의 호 Q_1Q_2 위의 점이다.



㉠, ㉡에서 $\frac{\pi}{3}\le\angle POQ\le\frac{5}{6}\pi$이고

$\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ}=|\overrightarrow{OP}||\overrightarrow{OQ}|\cos(\angle POQ)$

$=4\cos(\angle POQ)$

이므로

$4\cos\frac{5}{6}\pi\le\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ}\le4\cos\frac{\pi}{3}$

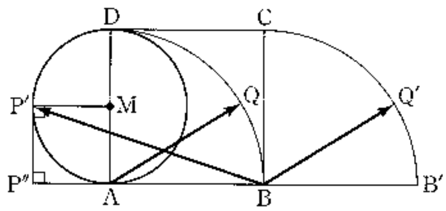
$-2\sqrt{3}\le\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ}\le2$

따라서 $M=2$, $m=-2\sqrt{3}$이므로

$M^2+m^2=4+12=16$

답 16

26



선분 AD의 중점을 M이라 하자.

$\overrightarrow{PB}\cdot\overrightarrow{AQ}=-\overrightarrow{BP}\cdot\overrightarrow{AQ}$

$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{BB'}$, $\overrightarrow{AQ}=\overrightarrow{BQ'}$을 만족시키는 두 점 B′, Q′을 그림과 같이 잡으면

$\overrightarrow{BP}\cdot\overrightarrow{AQ}=\overrightarrow{BP}\cdot\overrightarrow{BQ'}$

이 성립한다.

$\overrightarrow{BP}\cdot\overrightarrow{BQ'}$의 값은 두 점 P, Q′이 각각 D, C와 일치할 때 최대이므로

$\overrightarrow{BP}\cdot\overrightarrow{BQ'}\le\overrightarrow{BD}\cdot\overrightarrow{BC}=|\overrightarrow{BC}|^2=4$

점 M을 지나고 직선 AD와 수직인 직선이 원과 만나는 두 점 중 B와의 거리가 먼 점을 P′이라 하고, 점 P′에서 직선 AB′에 내린 수선의 발을 P″이라 하자.

$\overrightarrow{BP}\cdot\overrightarrow{BQ'}$의 값은 두 점 P, Q′이 각각 P′, B′과 일치할 때 최소이므로

$\overrightarrow{BP}\cdot\overrightarrow{BQ'}\ge-\overline{BP''}\times\overline{BB'}=-3\times2=-6$

$-6\le\overrightarrow{BP}\cdot\overrightarrow{BQ'}\le 4$에서

$-6\le-\overrightarrow{PB}\cdot\overrightarrow{AQ}\le 4$

즉, $-4\le\overrightarrow{PB}\cdot\overrightarrow{AQ}\le 6$

이므로 $\overrightarrow{PB}\cdot\overrightarrow{AQ}$의 최댓값과 최솟값의 합은

$6+(-4)=2$

답 ②

필수 유형 ❸

$\vec{p}=(x, y)$, $\vec{q}=(x', y')$이라 하고

$A(2, 4)$, $B(2, 8)$, $C(1, 0)$, $P(x, y)$, $Q(x', y')$이라 하자.

$(\vec{p}-\vec{a})\cdot(\vec{p}-\vec{b})=0$

이므로

$\overline{AP}\perp\overline{PB}$

이다. 그러므로 점 P는 선분 AB를 지름으로 하는 원 위를 움직인다.

즉, 점 P는 선분 AB의 중점인 점 $M(2, 6)$을 중심으로 하고 반지름의 길이가 2인 원 위에 있다.

한편,

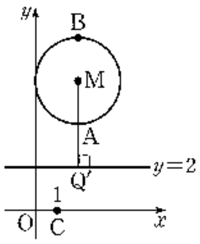
$\vec{q}=\frac{1}{2}\vec{a}+t\vec{c}$

$=\frac{1}{2}(2, 4)+t(1, 0)$

$=(1+t, 2)$

이므로 점 Q는 직선 $y=2$ 위에 있다.

이때 $|\vec{p}-\vec{q}|$의 값은 두 점 P, Q 사이의 거리와 같고 다음 그림과 같이 점 M에서 직선 $y=2$에 내린 수선의 발을 Q'이라 하면 점 P가 점 A에 있고, 점 Q가 점 Q'에 있을 때 두 점 P, Q 사이의 거리가 최소가 된다.



이때 $A(2, 4)$, $Q'(2, 2)$이므로

$|\vec{p}-\vec{q}|=\overline{PQ}\ge\overline{AQ'}=2$

따라서 구하는 최솟값은 2이다.

답 ②

27

$\frac{2x+1}{2}=\frac{4-y}{3}$에서 $\frac{x+\frac{1}{2}}{1}=\frac{y-4}{-3}$

두 직선 $\frac{x}{2}=y+1$, $\frac{x+\frac{1}{2}}{1}=\frac{y-4}{-3}$의 방향벡터를 각각 $\vec{u_1}$, $\vec{u_2}$라 하면

$\vec{u_1}=(2, 1)$, $\vec{u_2}=(1, -3)$

으로 놓을 수 있다.

두 직선이 이루는 예각의 크기가 θ이므로

$$\cos\theta=\frac{|\vec{u_1}\cdot\vec{u_2}|}{|\vec{u_1}|\times|\vec{u_2}|}$$

$$=\frac{|2\times1+1\times(-3)|}{\sqrt{2^2+1^2}\times\sqrt{1^2+(-3)^2}}$$

$$=\frac{1}{5\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{10}$$

답 ③

28

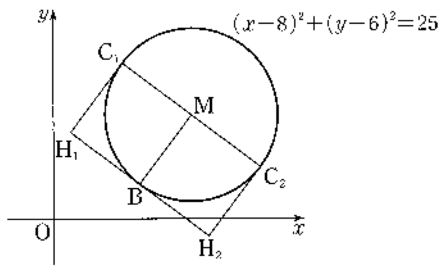
선분 OA의 중점을 M이라 하면 점 M의 좌표는 $(8, 6)$이다.

$\frac{\overrightarrow{PO}+\overrightarrow{PA}}{2}=\overrightarrow{PM}$이므로 $|\overrightarrow{PO}+\overrightarrow{PA}|^2=100$에서

$|2\overrightarrow{PM}|^2=4|\overrightarrow{PM}|^2=100$, $|\overrightarrow{PM}|=5$

즉, 점 P는 중심이 $M(8, 6)$이고 반지름의 길이가 5인 원 위의 점이다.

점 P가 나타내는 도형 위의 두 점 $B(5, 2)$, $C(a, b)$에서의 접선이 서로 수직이므로 그 교점을 H라 하면 사각형 BMCH는 한 변의 길이가 5인 정사각형이다.



위 그림에서 조건을 만족시키는 점 C는 C_1, C_2로 2가지이다.

점 $B(5, 2)$는 점 $M(8, 6)$을 x축의 방향으로 -3만큼, y축의 방향으로 -4만큼 평행이동한 점이고 두 직선 BM, C_1M은 서로 수직이므로 점 C_1은 점 $M(8, 6)$을 x축의 방향으로 -4만큼, y축의 방향으로 3만큼 평행이동한 점이고, 그 좌표는 $(4, 9)$이다.

마찬가지 방법으로 점 C_2의 좌표는 $(12, 3)$이다.

이때 $b-a=5$ 또는 $b-a=-9$이므로

$p=-9$, $q=5$

따라서 $p+q=-4$

답 ①

29

$\vec{p}=(p_1, p_2)$, $\vec{q}=(q_1, q_2)$로 놓자.

$\vec{p}\cdot(\vec{a}+\vec{b})=\vec{p}\cdot\vec{c}$에서

$\vec{p}\cdot(\vec{a}+\vec{b}-\vec{c})=0$ ...... ㉠

$\vec{a}+\vec{b}-\vec{c}=(1+0+3, 0-2-1)=(4, -3)$

이므로 ㉠에서

$(p_1, p_2)\cdot(4, -3)=0$

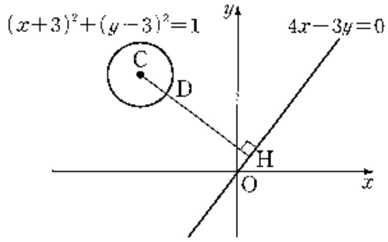
$4p_1-3p_2=0$ ...... ㉡

$\vec{q}+\vec{b}-\vec{c}=(q_1+3, q_2-3)$

$|\vec{q}+\vec{b}-\vec{c}|=|\vec{a}|$에서

$(q_1+3)^2+(q_2-3)^2=1$ ...... ㉢

좌표평면의 두 점 $P(p_1, p_2)$, $Q(q_1, q_2)$에 대하여 ㉡, ㉢에서 점 P는 직선 $4x-3y=0$ 위의 점이고, 점 Q는 원 $(x+3)^2+(y-3)^2=1$ 위의 점임을 알 수 있다.



위 그림과 같이 원 $(x+3)^2+(y-3)^2=1$의 중심 $\mathrm{C}(-3,\ 3)$에서 직선 $4x-3y=0$에 내린 수선의 발을 H라 하고 선분 CH가 원과 만나는 점을 D라 하자.

$\overline{\mathrm{CH}}=\dfrac{|4\times(-3)-3\times 3|}{\sqrt{4^2+(-3)^2}}=\dfrac{21}{5}$

따라서

$$\begin{aligned}|\vec{p}-\vec{q}|&=|\overrightarrow{\mathrm{OP}}-\overrightarrow{\mathrm{OQ}}|=|\overrightarrow{\mathrm{QP}}|\\&\geq\overline{\mathrm{DH}}\\&=\overline{\mathrm{CH}}-1\\&=\frac{21}{5}-1=\frac{16}{5}\end{aligned}$$

이므로 $|\vec{p}-\vec{q}|$의 최솟값은 $\dfrac{16}{5}$이다.

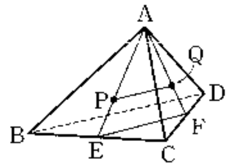
답 ③

09 공간도형과 공간좌표

정답 본문 102~111쪽

필수 유형 ❶ ③	01 ⑤	02 ④	
필수 유형 ❷ ①	03 ⑤	04 ③	
필수 유형 ❸ ③	05 ③	06 ③	07 ②
	08 ④		
필수 유형 ❹ ①	09 ⑤	10 ①	11 80
필수 유형 ❺ 162	12 ②	13 ①	14 ②
필수 유형 ❻ ⑤	15 ④	16 ②	17 ①
필수 유형 ❼ ④	18 ⑤	19 ④	
필수 유형 ❽ ②	20 ②	21 ③	22 60
	23 7		

필수 유형 ❶



ㄱ. 직선 CD와 직선 BQ는 만나지도 않고 평행하지도 않으므로 꼬인 위치에 있다.

ㄴ. 직선 AD와 직선 BC는 만나지도 않고 평행하지도 않으므로 꼬인 위치에 있다.

ㄷ. 그림에서 선분 BC, 선분 CD의 중점을 각각 E, F라 하면 두 점 P, Q는 각각 선분 AE, 선분 AF를 $2:1$로 내분하는 점이므로 삼각형 AEF에서 $\overline{\mathrm{PQ}}/\!/\overline{\mathrm{EF}}$, 삼각형 BCD에서 $\overline{\mathrm{EF}}/\!/\overline{\mathrm{BD}}$이다.
즉, $\overline{\mathrm{PQ}}/\!/\overline{\mathrm{BD}}$이므로 직선 PQ와 직선 BD는 꼬인 위치에 있지 않다.

이상에서 두 직선이 꼬인 위치에 있는 것은 ㄱ, ㄴ이다.

답 ③

01

정오각뿔의 6개의 꼭짓점은 어느 세 점도 한 직선 위에 있지 않으므로 서로 다른 두 개의 꼭짓점을 지나는 직선의 개수는 ${}_6\mathrm{C}_2=15$이다.

따라서 $a=15$ …… ㉠

정오각뿔의 6개의 꼭짓점 중 서로 다른 세 개 이상의 꼭짓점을 포함하는 평면 중 점 A를 포함하고 밑면인 정오각형 BCDEF의 5개의 꼭짓점 중 서로 다른 두 점을 지나는 평면의 개수는 ${}_5\mathrm{C}_2=10$이고, 점 A를 포함하지 않는 평면은 평면 BCDEF뿐이다.

따라서 $b=10+1=11$ …… ㉡

㉠, ㉡에서

$a+b=15+11=26$

답 ⑤

02

ㄱ. 오각기둥의 한 면을 포함하는 7개의 평면 중 사각형 BGHC의 한 변을 포함하는 평면의 개수는 5이다. (참)

ㄴ. 5개의 점 F, G, H, I, J 중 서로 다른 두 점을 지나는 직선의 개수는

$_5C_2=10$

세 점 A, D, E 중 한 점과 5개의 점 F, G, H, I, J 중 한 점을 지나는 직선의 개수는

$3\times5=15$

이때 직선 BC와 평행한 직선은 GH, FI로 2개이므로 오각기둥의 서로 다른 두 꼭짓점을 지나는 직선 중 직선 BC와 꼬인 위치에 있는 직선의 개수는

$10+15-2=23$ (거짓)

ㄷ. 오각기둥의 15개의 모서리 중 점 C 또는 점 F를 포함하는 것은 BC, CD, CH, AF, FG, FJ로 6개이다.

따라서 직선 CF와 오각기둥의 한 모서리를 포함하는 평면은 BFC, CFD, AFHC, CFG, CFJ로 모두 5개이다. (참)

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

답 ③

참고

ㄴ. 오각기둥의 서로 다른 두 꼭짓점을 지나는 직선의 개수는 $_{10}C_2=45$

(i) 직선 BC와 평행한 직선은 AD, FI, GH로 3개이다.

(ii) 직선 BC와 점 B에서 만나는 직선은

AB, BD, BE, BF, BG, BH, BI, BJ로 8개이다.

직선 BC와 점 C에서 만나는 직선은

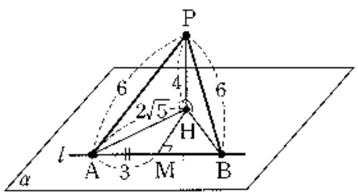
AC, CD, CE, CF, CG, CH, CI, CJ로 8개이다.

직선 BC와 두 점 B, C가 아닌 점에서 만나는 직선은 AE, ED로 2개이다.

따라서 직선 BC를 제외한 44개의 직선 중 직선 BC와 꼬인 위치에 있는 직선의 개수는

$44-(3+2\times8+2)=23$

필수 유형 ❷



$\overline{PH}\perp\alpha$이므로 직선 PH는 평면 α 위의 모든 직선과 수직이다.

즉, $\overline{PH}\perp\overline{AH}$, $\overline{PH}\perp\overline{BH}$이므로 삼각형 PHA와 삼각형 PHB는 모두 직각삼각형이다.

그러므로 $\overline{AH}=\sqrt{6^2-4^2}=2\sqrt{5}$, $\overline{BH}=\sqrt{6^2-4^2}=2\sqrt{5}$

이때 삼각형 HAB는 이등변삼각형이므로 선분 AB의 중점을 M이라 하면 $\overline{AB}\perp\overline{HM}$이고, 점 H와 직선 l 사이의 거리는 선분 HM의 길이와 같다.

삼각형 HAM은 직각삼각형이므로

$\overline{HM}=\sqrt{\overline{AH}^2-\overline{AM}^2}=\sqrt{(2\sqrt{5})^2-3^2}=\sqrt{11}$

따라서 점 H와 직선 l 사이의 거리는 $\sqrt{11}$이다.

답 ①

다른 풀이

선분 AB의 중점을 M이라 하면

$\overline{PH}\perp\alpha$, $\overline{PM}\perp l$이므로

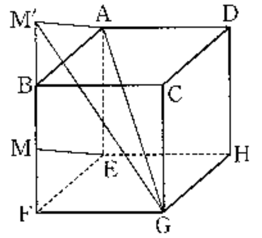
삼수선의 정리에 의하여 $\overline{HM}\perp l$이다.

따라서 $\overline{PM}=\frac{\sqrt{3}}{2}\times6=3\sqrt{3}$이므로

$\overline{HM}=\sqrt{(3\sqrt{3})^2-4^2}=\sqrt{11}$

03

정육면체 ABCD−EFGH의 한 모서리의 길이를 2라 하자.



$\overline{ME}\,/\!/\,\overline{M'A}$를 만족시키는 직선 BF 위의 점 M'에 대하여

$\overline{M'A}=\overline{ME}=\sqrt{1^2+2^2}=\sqrt{5}$

$\overline{AG}=2\sqrt{3}$, $\overline{M'G}=\sqrt{3^2+2^2}=\sqrt{13}$

두 직선 AG, ME가 이루는 예각의 크기가 θ이므로

$\angle M'AG=\theta$

따라서 삼각형 M'GA에서 코사인법칙에 의하여

$$\cos\theta=\frac{(\sqrt{5})^2+(2\sqrt{3})^2-(\sqrt{13})^2}{2\times\sqrt{5}\times2\sqrt{3}}$$

$$=\frac{5+12-13}{4\sqrt{15}}=\frac{\sqrt{15}}{15}$$

답 ⑤

04

정사면체 ABCD의 한 모서리의 길이를 3이라 하자.

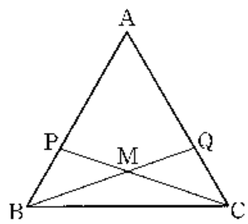
삼각형 PBC에서 코사인법칙에 의하여

$\overline{PC}^2=1^2+3^2-2\times1\times3\times\cos60°=7$

에서 $\overline{PC}=\sqrt{7}$이다.

마찬가지 방법으로 $\overline{BQ}=\overline{QD}=\overline{CR}=\sqrt{7}$임을 알 수 있다.

두 직선 PC, BQ의 교점을 M이라 하자.



정삼각형 ABC에서 두 삼각형 PBC, QCB는 서로 합동이므로

$\overline{PM}=x\ (0<x<\sqrt{7})$로 놓으면

$\overline{BM}=\overline{MC}=\sqrt{7}-x$

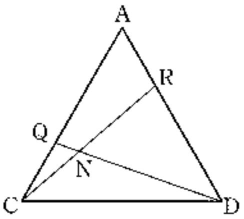
두 삼각형 PBM, PBC에서 코사인법칙에 의하여

$\cos(\angle BPM)=\dfrac{1^2+x^2-(\sqrt{7}-x)^2}{2\times1\times x}=\dfrac{1^2+(\sqrt{7})^2-3^2}{2\times1\times\sqrt{7}}$

$\dfrac{2\sqrt{7}x-6}{2x}=-\dfrac{1}{2\sqrt{7}}$, $x=\dfrac{12\sqrt{7}}{30}=\dfrac{2\sqrt{7}}{5}$

즉, $\overline{MC}=\sqrt{7}-\dfrac{2\sqrt{7}}{5}=\dfrac{3\sqrt{7}}{5}$

또 두 직선 QD, CR의 교점을 N이라 하자.



정삼각형 ACD에서 두 삼각형 ACR, CDQ는 서로 합동이므로 두 삼각형 QCD, QNC에서

$\angle AQD=\angle QCD+\angle QDC=\angle QCN+\angle QNC$

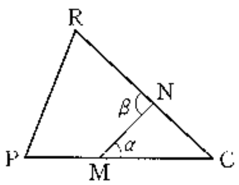
이때 $\angle QCD=60°$, $\angle QDC=\angle QCN$이므로

$\angle QNC=60°$

따라서 두 삼각형 QNC, QCD는 서로 닮음이므로

$\overline{QC}:\overline{QD}=\overline{CN}:\overline{DC}$, $1:\sqrt{7}=\overline{CN}:3$

$\overline{CN}=\dfrac{3}{\sqrt{7}}=\dfrac{3\sqrt{7}}{7}$



두 평면 PCR, BQD의 교선 l은 직선 MN이므로

직선 MN과 직선 PC가 이루는 예각의 크기는 $\angle NMC$와 같고, 직선 MN과 직선 CR가 이루는 예각의 크기는 $\angle RNM$과 같다.

즉, $\alpha=\angle NMC$, $\beta=180°-\angle MNC$

삼각형 NMC에서 사인법칙에 의하여

$$\frac{\sin(\angle MNC)}{\sin(\angle NMC)}=\frac{\overline{MC}}{\overline{NC}}=\frac{\frac{3\sqrt{7}}{5}}{\frac{3\sqrt{7}}{7}}=\frac{7}{5}$$

따라서

$$\frac{\sin\beta}{\sin\alpha}=\frac{\sin(180°-\angle MNC)}{\sin(\angle NMC)}=\frac{\sin(\angle MNC)}{\sin(\angle NMC)}$$

$$=\frac{7}{5}$$

답 ③

참고

삼각형 APR에서

$\overline{PR}^2=2^2+1^2-2\times2\times1\times\cos60°=3$

$\overline{PR}>0$이므로 $\overline{PR}=\sqrt{3}$

삼각형 PCR에서

$\cos(\angle PCR)=\dfrac{7+7-3}{2\times\sqrt{7}\times\sqrt{7}}=\dfrac{11}{14}$

$\overline{MC}=7k$, $\overline{NC}=5k$ (k는 양의 상수)로 놓으면

$\overline{MN}^2=(7k)^2+(5k)^2-2\times7k\times5k\times\dfrac{11}{14}=19k^2$

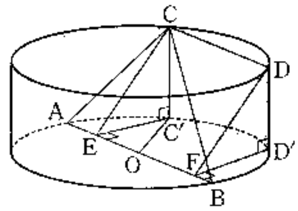
$\overline{MN}>0$이므로 $\overline{MN}=\sqrt{19}k$

$\cos(\angle MNC)=\dfrac{(5k)^2+(\sqrt{19}k)^2-(7k)^2}{2\times5k\times\sqrt{19}k}<0$

이므로 $\angle MNC>90°$

필수 유형 ❸

두 점 C, D에서 두 점 A, B를 포함하는 밑면에 내린 수선의 발을 각각 C′, D′이라 하고, 두 점 C′, D′에서 선분 AB에 내린 수선의 발을 각각 E, F라 하자.



$\overline{CC'}\perp$(평면 ABD′C′), $\overline{C'E}\perp\overline{AB}$

이므로 삼수선의 정리에 의하여

$\overline{CE}\perp\overline{AB}$

조건 (가)에서 삼각형 ABC의 넓이가 16이므로

$\dfrac{1}{2}\times\overline{AB}\times\overline{CE}=16$

$\dfrac{1}{2}\times8\times\overline{CE}=16$

$\overline{CE}=4$

직각삼각형 CC′E에서

$\overline{CC'}=3$이므로

$\overline{C'E}=\sqrt{\overline{CE}^2-\overline{CC'}^2}=\sqrt{4^2-3^2}=\sqrt{7}$

선분 AB의 중점을 O라 하면 직각삼각형 OC′E에서

$\overline{OE}=\sqrt{\overline{OC'}^2-\overline{C'E}^2}=\sqrt{4^2-(\sqrt{7})^2}=3$

마찬가지 방법으로

$\overline{OF}=3$

조건 (나)에서 두 직선 AB, CD가 서로 평행하므로

$\overline{CD}=\overline{EF}=\overline{OE}+\overline{OF}=3+3=6$

답 ③

05

조건 (가)에 의하여 점 P에서 직선 BC에 내린 수선의 발을 H라 하면

$\overline{PA}\perp\alpha$, $\overline{PH}\perp\overline{BC}$

이므로 삼수선의 정리에 의하여

$\overline{AH}\perp\overline{BC}$

조건 (나), (다)에서 $\overline{BC}=10$이고, 삼각형 ABC의 넓이가 20이므로

$\dfrac{1}{2}\times\overline{BC}\times\overline{AH}=\dfrac{1}{2}\times10\times\overline{AH}=20$

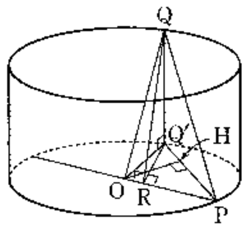
$\overline{AH}=4$

따라서 점 P와 직선 BC 사이의 거리는 선분 PH의 길이와 같으므로

$\overline{PH}=\sqrt{\overline{PA}^2+\overline{AH}^2}=\sqrt{6^2+4^2}=2\sqrt{13}$

답 ③

06



중심이 O인 밑면을 α라 하고, 점 Q에서 평면 α에 내린 수선의 발을 Q′, 점 Q에서 직선 OP에 내린 수선의 발을 R라 하자.

$\overline{QQ'}\perp\alpha$, $\overline{QR}\perp\overline{OP}$

이므로 삼수선의 정리에 의하여

$\overline{Q'R}\perp\overline{OP}$

$\overline{PQ}=5$, $\overline{QQ'}=3$이므로

$\overline{Q'P}=\sqrt{5^2-3^2}=4$

삼각형 OPQ′에서 $\overline{OP}=\overline{OQ'}=3$이므로 점 O에서 선분 PQ′에 내린 수선의 발을 H라 하면

$\overline{OH}=\sqrt{3^2-2^2}=\sqrt{5}$

두 직각삼각형 PHO, PRQ′은 서로 닮음이므로

$\overline{Q'R}=\overline{OH}\times\dfrac{\overline{PQ'}}{\overline{OP}}=\sqrt{5}\times\dfrac{4}{3}=\dfrac{4\sqrt{5}}{3}$

$\overline{QR}=\sqrt{\overline{QQ'}^2+\overline{Q'R}^2}=\sqrt{3^2+\left(\dfrac{4\sqrt{5}}{3}\right)^2}=\dfrac{\sqrt{161}}{3}$

따라서 점 Q와 직선 OP 사이의 거리는 $\dfrac{\sqrt{161}}{3}$이다.

답 ③

다른 풀이

점 Q에서 중심이 O인 밑면에 내린 수선의 발을 Q′이라 하고 $\angle POQ=\theta$라 하자.

직각삼각형 QOQ′에서 $\overline{QQ'}=3$, $\overline{OQ'}=3$이므로

$\overline{OQ}=3\sqrt{2}$

삼각형 OPQ에서 코사인법칙에 의하여

$\cos\theta=\dfrac{3^2+(3\sqrt{2})^2-5^2}{2\times3\times3\sqrt{2}}=\dfrac{1}{9\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{18}$

$\sin\theta=\sqrt{1-\left(\dfrac{\sqrt{2}}{18}\right)^2}=\dfrac{\sqrt{322}}{18}$

따라서 삼각형 OPQ의 넓이는

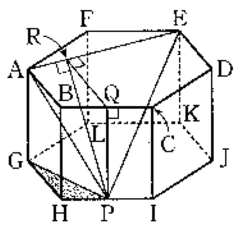
$\dfrac{1}{2}\times\overline{OP}\times\overline{OQ}\times\sin\theta=\dfrac{1}{2}\times3\times3\sqrt{2}\times\dfrac{\sqrt{322}}{18}=\dfrac{\sqrt{161}}{2}$

점 Q에서 직선 OP에 내린 수선의 발을 R라 하면

$\dfrac{1}{2}\times\overline{QR}\times\overline{OP}=\dfrac{\sqrt{161}}{2}$에서 $\overline{QR}=\dfrac{\sqrt{161}}{3}$

따라서 점 Q와 직선 OP 사이의 거리는 $\dfrac{\sqrt{161}}{3}$이다.

07



점 P에서 선분 BC에 내린 수선의 발을 Q라 하고, 점 Q에서 선분 AE에 내린 수선의 발을 R라 하자.

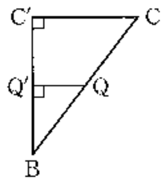
$\overline{PQ}\perp$(평면 ABCDEF), $\overline{QR}\perp\overline{AE}$이므로 삼수선의 정리에 의하여

$\overline{PR}\perp\overline{AE}$

$\overline{AE}=2\times2\cos30°=2\sqrt{3}$이고, 삼각형 APE의 넓이가 $\dfrac{\sqrt{123}}{2}$이므로

$\dfrac{1}{2}\times\overline{AE}\times\overline{PR}=\dfrac{\sqrt{123}}{2}$, $\overline{PR}=\dfrac{\sqrt{41}}{2}$

$\overline{QR}=\sqrt{\overline{PR}^2-\overline{PQ}^2}=\sqrt{\left(\dfrac{\sqrt{41}}{2}\right)^2-2^2}=\dfrac{5}{2}$



점 B에서 두 직선 CF, QR에 내린 수선의 발을 각각 C′, Q′이라 하면

$\angle C'CB=60°$, $\overline{BC}=2$이므로

$\overline{CC'}=1$, $\overline{QQ'}=\overline{QR}-\overline{Q'R}=\dfrac{5}{2}-2=\dfrac{1}{2}$

이때 점 Q가 선분 BC의 중점이므로 점 P는 선분 HI의 중점이다.

따라서 삼각형 PGH의 넓이는

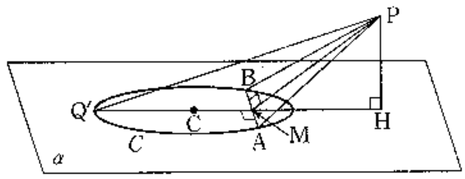
$\dfrac{1}{2}\times\overline{GH}\times\overline{HP}\times\sin120°$

$=\dfrac{1}{2}\times2\times1\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

답 ②

08

선분 AB의 중점을 M이라 하자.



조건 (가)에 의하여 삼각형 PAB는 정삼각형이므로

$\overline{AB}\perp\overline{PM}$

따라서 삼수선의 정리에 의하여

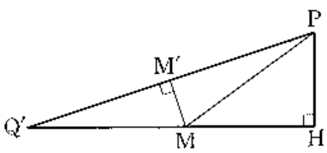
$\overline{AB}\perp\overline{MH}$

조건 (가)에서 $\overline{AB}=6\sqrt{3}$이고 $\overline{CM}\perp\overline{AB}$이므로

$\overline{CM}=\sqrt{6^2-(3\sqrt{3})^2}=3$

$\overline{PM}=6\sqrt{3}\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=9$

조건 (나), (다)에 의하여 직선 MH가 원 C와 만나는 두 점 중 점 H와의 거리가 먼 점을 Q′이라 하면 점 Q가 Q′일 때, 선분 PQ의 길이가 최대이다.



그림과 같이 삼각형 MPQ′은

$\overline{MP}=\overline{Q'M}=9$, $\overline{PQ'}=12\sqrt{2}$

인 이등변삼각형이므로 점 M에서 선분 PQ′에 내린 수선의 발을 M′이라 하면

$\overline{MM'}=\sqrt{9^2-(6\sqrt{2})^2}=3$

두 직각삼각형 PQ′H, MQ′M′은 서로 닮음이므로

$\overline{PH}=\overline{MM'}\times\dfrac{\overline{PQ'}}{\overline{Q'M}}=3\times\dfrac{12\sqrt{2}}{9}=4\sqrt{2}$

$\overline{MH}=\sqrt{\overline{MP}^2-\overline{PH}^2}=\sqrt{9^2-(4\sqrt{2})^2}=7$

$\overline{AH}=\sqrt{\overline{AM}^2+\overline{MH}^2}=\sqrt{(3\sqrt{3})^2+7^2}=2\sqrt{19}$

따라서 $\angle PAH=\theta$이므로

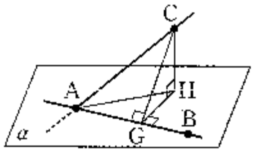
$\tan\theta=\dfrac{\overline{PH}}{\overline{AH}}=\dfrac{4\sqrt{2}}{2\sqrt{19}}=\dfrac{2\sqrt{38}}{19}$

답 ④

필수 유형 ❹

다음 그림과 같이 점 C에서 직선 AB에 내린 수선의 발을 G, 평면 α에 내린 수선의 발을 H라 하면 삼수선의 정리에 의하여

$\overline{HG}\perp\overline{AB}$



직각삼각형 AGC에서 $\angle CAG=\theta_1$이고, $\sin\theta_1=\dfrac{4}{5}$이므로 양수 k에 대하여 $\overline{AC}=5k$라 하면

$\overline{CG}=4k$이고, $\cos\theta_1=\dfrac{3}{5}$

또 직각삼각형 AHC에서

$\angle CAH=\dfrac{\pi}{2}-\theta_1$이므로

$\overline{CH}=\overline{AC}\times\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-\theta_1\right)$

$=5k\times\cos\theta_1$

$=5k\times\dfrac{3}{5}=3k$

이때 직각삼각형 CGH에서

$\overline{GH}=\sqrt{\overline{CG}^2-\overline{CH}^2}$

$=\sqrt{(4k)^2-(3k)^2}$

$=\sqrt{7}k$

이고, $\angle CGH=\theta_2$이므로

$\cos\theta_2=\dfrac{\overline{GH}}{\overline{CG}}=\dfrac{\sqrt{7}k}{4k}=\dfrac{\sqrt{7}}{4}$

답 ①

09

점 C에서 두 평면의 교선 l에 내린 수선의 발을 H'이라 하면 점 H'은 선분 AB의 중점이다.

$\overline{CH}\perp\beta$, $\overline{CH'}\perp\overline{AB}$

이므로 삼수선의 정리에 의하여

$\overline{AB}\perp\overline{H'H}$

$\overline{CH'}=3\sqrt{3}$, $\overline{CH}=2\sqrt{3}$이므로 직각삼각형 CHH'에서

$\overline{HH'}=\sqrt{\overline{CH'}^2-\overline{CH}^2}=\sqrt{(3\sqrt{3})^2-(2\sqrt{3})^2}=\sqrt{15}$

두 평면 α, β가 이루는 예각의 크기는 $\angle CH'H$와 같으므로

$\cos\theta=\dfrac{\overline{HH'}}{\overline{CH'}}=\dfrac{\sqrt{15}}{3\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{5}}{3}$

답 ⑤

10

점 M에서 선분 DG에 내린 수선의 발을 I라 하고

점 M에서 평면 DHGC에 내린 수선의 발을 J라 하자.

삼수선의 정리에 의하여

$\overline{IJ}\perp\overline{DG}$

점 J는 선분 CG의 중점이므로 직각이등변삼각형 DGC에서

$\overline{IJ}=\overline{CD}\times\dfrac{\overline{JG}}{\overline{DG}}=4\times\dfrac{2}{4\sqrt{2}}=\sqrt{2}$

직각삼각형 MIJ에서

$\overline{MI}=\sqrt{\overline{MJ}^2+\overline{IJ}^2}=\sqrt{4^2+(\sqrt{2})^2}=3\sqrt{2}$

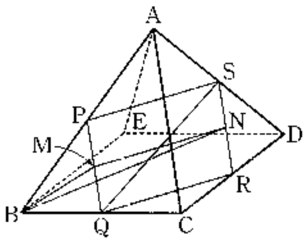
평면 DMN은 평면 DMG와 일치하고, 직선 DG는 두 평면 DMG, DHGC의 교선이므로 두 평면 DMN, DHGC가 이루는 이면각의 크기는 두 직선 MI, IJ가 이루는 각의 크기와 같다.

따라서 직각삼각형 MIJ에서

$\cos\theta=\dfrac{\overline{IJ}}{\overline{MI}}=\dfrac{\sqrt{2}}{3\sqrt{2}}=\dfrac{1}{3}$

답 ①

11



$\overline{PB}=\overline{BQ}=2$이고 $\angle PBQ=60^\circ$이므로 삼각형 PBQ는 한 변의 길이가 2인 정삼각형이다.

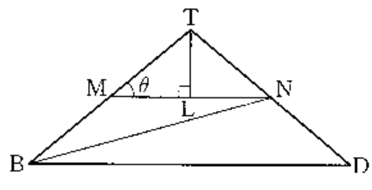
선분 PQ의 중점을 M이라 하면 점 B에서 선분 PQ에 내린 수선의 발은 점 M이다.

이때 $\overline{PQ}$∥(평면 AEC), $\overline{PS}\perp$(평면 AEC)이므로

$\overline{PQ}\perp\overline{PS}$

따라서 사각형 PQRS는 직사각형이고, 선분 SR의 중점을 N이라 하면 $\overline{NM}\perp\overline{PQ}$가 성립한다.

선분 AC의 중점을 T라 하면 두 점 M, N은 각각 선분 BT, TD의 중점이므로 평면 PQRS와 평면 ABC가 이루는 예각의 크기는 두 직선 BT, MN이 이루는 예각의 크기와 같다.



점 T에서 선분 MN에 내린 수선의 발을 L이라 하면

$\overline{BT}=\overline{DT}=2\sqrt{3}$, $\overline{BD}=4\sqrt{2}$이므로

$$\cos\theta=\cos(\angle\mathrm{TML})=\frac{\overline{\mathrm{ML}}}{\overline{\mathrm{TM}}}=\frac{\frac{1}{4}\overline{\mathrm{BD}}}{\frac{1}{2}\overline{\mathrm{BT}}}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{6}}{3}$$

따라서 $120\cos^2\theta=120\times\left(\frac{\sqrt{6}}{3}\right)^2=80$

답 80

필수 유형 ❺

$\cos(\angle\mathrm{ABC})=\frac{\sqrt{3}}{3}$ 이므로

$\sin(\angle\mathrm{ABC})=\sqrt{1-\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2}=\sqrt{\frac{2}{3}}=\frac{\sqrt{6}}{3}$

이때 삼각형 ABC에서 $\overline{\mathrm{AB}}=9$, $\overline{\mathrm{BC}}=12$이므로 그 넓이를 S라 하면

$$S=\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{BC}}\times\overline{\mathrm{AB}}\times\sin(\angle\mathrm{ABC})$$
$$=\frac{1}{2}\times12\times9\times\frac{\sqrt{6}}{3}$$
$$=18\sqrt{6}$$

한편, $\overline{\mathrm{AP}}\perp$(평면 BCD)이고 $\overline{\mathrm{AQ}}\perp\overline{\mathrm{BC}}$이므로 삼수선의 정리에 의하여

$\overline{\mathrm{PQ}}\perp\overline{\mathrm{BC}}$ ⋯⋯ ㉠

㉠에 의하여 두 평면 ABC, BCD가 이루는 예각의 크기를 θ라 하면 $\theta=\angle\mathrm{AQP}$이고, 삼각형 BCP는 삼각형 ABC의 평면 BCD 위로의 정사영이므로 삼각형 BCP의 넓이 k는

$k=S\times\cos\theta=18\sqrt{6}\times\frac{\sqrt{3}}{6}=9\sqrt{2}$

따라서 $k^2=(9\sqrt{2})^2=162$

답 162

12

원 C 위의 한 점 A에 대하여

$\overline{\mathrm{AO}}=6$이고,

조건 (가)에서 $\overline{\mathrm{OO'}}=3\sqrt{2}$이므로

$\overline{\mathrm{AO'}}=\sqrt{\overline{\mathrm{AO}}^2-\overline{\mathrm{OO'}}^2}=\sqrt{6^2-(3\sqrt{2})^2}=3\sqrt{2}$

즉, 원 C의 반지름의 길이가 $3\sqrt{2}$이므로 그 넓이는 18π이다.

조건 (나)에서 원 C의 평면 α 위로의 정사영의 넓이가 6π이므로

$\cos\theta=\frac{6\pi}{18\pi}=\frac{1}{3}$

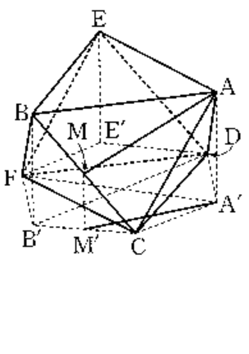
답 ②

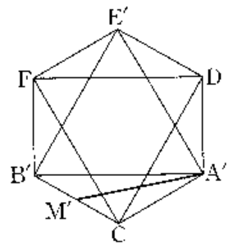
13

정팔면체 ABCDEF에서 사각형 ABFD는 한 변의 길이가 4인 정사각형이므로 $\overline{\mathrm{AB}}/\!/\overline{\mathrm{FD}}$

마찬가지 방법으로 $\overline{\mathrm{BE}}/\!/\overline{\mathrm{CD}}$, $\overline{\mathrm{AE}}/\!/\overline{\mathrm{CF}}$

따라서 두 평면 ABE, CDF는 서로 평행하다.





세 점 A, B, E의 평면 CDF 위로의 정사영을 각각 A′, B′, E′이라 하면 삼각형 A′B′E′은 한 변의 길이가 4인 정삼각형이고

$\angle\mathrm{DA'E'}=30°$이므로

$\overline{\mathrm{A'D}}=\frac{2}{\cos30°}=\frac{4\sqrt{3}}{3}$

따라서 육각형 A′DE′FB′C는 한 변의 길이가 $\frac{4\sqrt{3}}{3}$인 정육각형이다.

선분 BC의 중점 M의 평면 CDF 위로의 정사영을 M′이라 하면 점 M′은 선분 B′C의 중점이다.

삼각형 M′CA′에서 $\angle\mathrm{M'CA'}=120°$이므로 코사인법칙에 의하여

$$\overline{\mathrm{A'M'}}^2=\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)^2+\left(\frac{4\sqrt{3}}{3}\right)^2-2\times\frac{2\sqrt{3}}{3}\times\frac{4\sqrt{3}}{3}\times\cos120°$$
$$=\frac{4}{3}+\frac{16}{3}-\frac{16}{3}\times\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{28}{3}$$

따라서 선분 AM의 평면 CDF 위로의 정사영인 선분 A′M′의 길이는

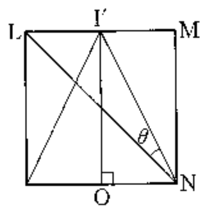
$\sqrt{\frac{28}{3}}=\frac{2\sqrt{21}}{3}$

답 ①

14

세 선분 AD, BC, FG의 중점을 각각 L, M, N이라 하자.

두 선분 FG, JK가 서로 일치하도록 삼각형 IJK를 평행이동시켰을 때, 점 I가 평행이동한 점을 I′이라 하고 점 I′에서 평면 EFGH에 내린 수선의 발을 O라 하자.



평면 AFD는 점 G를 지나므로 두 평면 AFD, IJK가 이루는 예각의 크기는 두 평면 AFGD, I′FG가 이루는 예각의 크기와 같다.

직사각형 AFGD에서 $\overline{\mathrm{AF}}=2\sqrt{2}$이므로

$\overline{\mathrm{LN}}=2\sqrt{2}$

직각삼각형 I′ON에서

$\overline{\mathrm{I'N}}=\sqrt{\overline{\mathrm{I'O}}^2+\overline{\mathrm{ON}}^2}=\sqrt{2^2+1^2}=\sqrt{5}$

두 평면 AFD, IJK가 이루는 예각의 크기를 θ라 하면

삼각형 I′LN에서 $\angle\mathrm{LNI'}=\theta$이므로 코사인법칙에 의하여

$$\cos\theta=\frac{(2\sqrt{2})^2+(\sqrt{5})^2-1^2}{2\times2\sqrt{2}\times\sqrt{5}}=\frac{12}{4\sqrt{10}}=\frac{3\sqrt{10}}{10}$$

삼각형 AFD의 넓이는

$\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{AD}}\times\overline{\mathrm{AF}}=\frac{1}{2}\times2\times2\sqrt{2}=2\sqrt{2}$

따라서 삼각형 AFD의 평면 IJK 위로의 정사영의 넓이는

$2\sqrt{2}\times\cos\theta=2\sqrt{2}\times\frac{3\sqrt{10}}{10}=\frac{6\sqrt{5}}{5}$

답 ②

필수 유형 ⑥

좌표공간의 점 A(2, 2, −1)을 x축에 대하여 대칭이동한 점 B의 좌표는

B(2, −2, 1)

따라서 점 C(−2, 1, 1)에 대하여 선분 BC의 길이는

$\overline{BC}=\sqrt{(-2-2)^2+(1+2)^2+(1-1)^2}$

$=\sqrt{16+9}=\sqrt{25}=5$

답 ⑤

15

$\overline{OA}=\overline{BP}$에서 $\overline{OA}^2=\overline{BP}^2$이므로

$2^2+0^2+3^2=a^2+(b+2)^2+(-3)^2$

$a^2+(b+2)^2=4$ …… ㉠

$\overline{AP}=\overline{BP}$에서 $\overline{AP}^2=\overline{BP}^2$이므로

$(a-2)^2+b^2+(-3)^2=a^2+(b+2)^2+(-3)^2$

$-4a+13=4b+13$

$b=-a$ …… ㉡

㉠, ㉡에서

$a^2+(-a+2)^2=4$

$2a^2-4a=0$, $2a(a-2)=0$

$a\neq0$, $b\neq0$이므로 $a=2$, $b=-2$

따라서 $ab=-4$

답 ④

16

점 B의 좌표가 (1, 2, −3)이므로 점 C의 좌표는 (1, 0, −3)이다.

이때 세 점 A(1, 2, 3), B(1, 2, −3), C(1, 0, −3)의 x좌표가 1로 같으므로 평면 ABC는 yz평면과 평행하다.

따라서 원점 O에서 평면 ABC에 내린 수선의 길이는 1이고, 삼각형 ABC의 넓이가

$\frac{1}{2}\times6\times2=6$

이므로 사면체 OABC의 부피는

$\frac{1}{3}\times6\times1=2$

답 ②

17

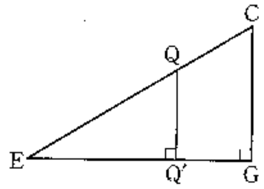
점 H를 원점으로 하고, 세 직선 HE, HG, HD를 각각 x축, y축, z축으로 하여 정육면체 ABCD−EFGH를 좌표공간에 놓으면 네 점 A, F, C, E의 좌표는 각각

(6, 0, 6), (6, 6, 0), (0, 6, 6), (6, 0, 0)

선분 AF 위를 움직이는 점 P의 좌표는

$(6, t, 6-t)$ (t는 $0\le t\le6$인 실수)

로 놓을 수 있고, 선분 CE 위를 움직이는 점 Q에서 xy평면에 내린 수선의 발을 Q′이라 하자.



이때 점 Q의 z좌표를 s라 하면 점 Q′은 선분 EG를 $s:(6-s)$로 내분하므로 점 Q는 선분 EC를 $s:(6-s)$로 내분한다. 그러므로 점 Q의 좌표는

$(6-s, s, s)$ (s는 $0\le s\le6$인 실수)

로 놓을 수 있다.

$\overline{PQ}^2=(6-s-6)^2+(s-t)^2+(s-6+t)^2$

$=s^2+s^2+t^2-2ts+s^2+t^2+36-12t-12s+2ts$

$=2t^2+3s^2-12t-12s+36$

$=2(t-3)^2+3(s-2)^2+6$

따라서 $t=3$, $s=2$일 때, $\overline{PQ}^2$의 값이 최소이므로

선분 PQ의 길이의 최솟값은 $\sqrt{6}$이다.

답 ①

다른 풀이

점 C에서 직선 AF에 내린 수선의 발을 M이라 하고, 점 M에서 선분 CE에 내린 수선의 발을 N이라 하자.

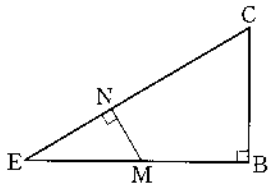
$\overline{CB}\perp$(평면 AEFB), $\overline{CM}\perp\overline{AF}$

이므로 삼수선의 정리에 의하여 $\overline{BM}\perp\overline{AF}$이다.

따라서 점 M은 정사각형 AEFB의 두 대각선 AF, EB의 교점이다.

선분 AF 위의 점 P와 선분 CE 위의 점 Q에 대하여

$\overline{PQ}\ge\overline{QM}\ge\overline{MN}$



두 직각삼각형 EMN, ECB는 서로 닮음이므로

$\overline{MN}=\overline{CB}\times\frac{\overline{EM}}{\overline{CE}}=6\times\frac{3\sqrt{2}}{6\sqrt{3}}=\sqrt{6}$

따라서 선분 PQ의 길이의 최솟값은 $\sqrt{6}$이다.

필수 유형 ⑦

두 점 A(a, 1, −1), B(−5, b, 3)의 중점의 좌표가 (8, 3, 1)이므로

$\frac{a+(-5)}{2}=8$, $\frac{1+b}{2}=3$

따라서 $a=21$, $b=5$이므로

$a+b=21+5=26$

답 ④

18

삼각형 ABC의 무게중심 G의 좌표는

$\left(\frac{1+0+2}{3}, \frac{-2+2+0}{3}, \frac{3+1+2}{3}\right)$, 즉 $(1, 0, 2)$

두 점 A, G의 yz평면 위로의 정사영의 좌표는 각각

$(0, -2, 3)$, $(0, 0, 2)$

따라서 선분 AG의 yz평면 위로의 정사영의 길이는

$\sqrt{(0+2)^2+(2-3)^2}=\sqrt{5}$

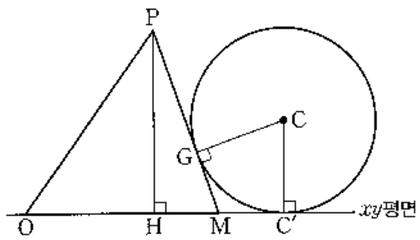
답 ⑤

19

점 P에서 xy평면에 내린 수선의 발을 H, 구 S의 중심을 C, 점 C에서 xy평면에 내린 수선의 발을 C′이라 하자.

선분 AB의 중점을 M이라 하면 삼각형 OAB는 한 변의 길이가 2인 정삼각형이고 점 H는 삼각형 OAB의 무게중심이므로

$\overline{\mathrm{OM}}=\sqrt{3}$, $\overline{\mathrm{HM}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$



구 S가 xy평면과 접하고 삼각형 PAB의 무게중심인 G에서 평면 PAB와 접하므로

$\overline{\mathrm{GM}}=\frac{1}{3}\overline{\mathrm{PM}}$

원 밖에서 원에 그은 두 접선의 길이는 서로 같으므로 위 그림에서

$\overline{\mathrm{GM}}=\overline{\mathrm{MC'}}$

$\overline{\mathrm{MC'}}=x\ (x>0)$으로 놓으면

$\overline{\mathrm{OC}}=\sqrt{6}$, $\overline{\mathrm{CC'}}=\frac{\sqrt{6}}{3}$이고, $\overline{\mathrm{OC}}^2=\overline{\mathrm{OC'}}^2+\overline{\mathrm{CC'}}^2$이므로

$(\sqrt{6})^2=(\sqrt{3}+x)^2+\left(\frac{\sqrt{6}}{3}\right)^2$, $\sqrt{3}+x=\sqrt{6-\frac{2}{3}}=\sqrt{\frac{16}{3}}=\frac{4\sqrt{3}}{3}$

$x=\frac{\sqrt{3}}{3}$

$\overline{\mathrm{PM}}=3\overline{\mathrm{GM}}=\sqrt{3}$이므로

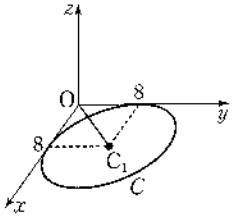
$\overline{\mathrm{PH}}=\sqrt{\overline{\mathrm{PM}}^2-\overline{\mathrm{HM}}^2}=\sqrt{(\sqrt{3})^2-\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2}=\frac{2\sqrt{6}}{3}$

따라서 점 P의 z좌표는 $\frac{2\sqrt{6}}{3}$이다.

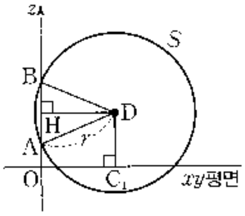
답 ④

필수 유형 ❻

구 S가 xy평면과 만나서 생기는 원을 C라 하면 원 C의 넓이가 64π이므로 원 C의 반지름의 길이는 8이다. 이때 구 S가 x축, y축에 각각 접하므로 [그림 1]과 같이 원 C의 중심을 C_1이라 하면 점 C_1의 좌표는 $C_1(8, 8, 0)$이고 원점 O에 대하여 $\overline{\mathrm{OC_1}}=8\sqrt{2}$이다.



[그림 1]



[그림 2]

한편, [그림 2]와 같이 구 S가 z축과 만나는 두 점을 각각 A, B라 하면

$\overline{\mathrm{AB}}=8$

구 S의 중심을 D, 점 D에서 z축에 내린 수선의 발을 H라 하면 점 H는 선분 AB의 중점이다.

또 점 D에서 xy평면에 내린 수선의 발이 원 C의 중심 C_1이므로 사각형 $\mathrm{DHOC_1}$은 직사각형이다.

이때 직각삼각형 DHA에서

$\overline{\mathrm{DH}}=\overline{\mathrm{OC_1}}=8\sqrt{2}$, $\overline{\mathrm{AH}}=\frac{1}{2}\overline{\mathrm{AB}}=\frac{1}{2}\times 8=4$

따라서 구 S의 반지름의 길이를 r라 하면

$$r=\sqrt{\overline{\mathrm{DH}}^2+\overline{\mathrm{AH}}^2}$$
$$=\sqrt{128+16}$$
$$=\sqrt{144}$$
$$=12$$

답 ②

20

$x^2+y^2+z^2-2x+4y-6z+k=0$에서

$(x-1)^2+(y+2)^2+(z-3)^2=14-k$ ······ ㉠

구 ㉠의 중심을 C라 하면 그 좌표는 $(1, -2, 3)$이다.

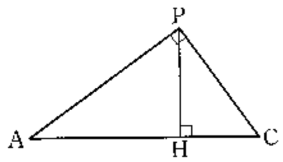
점 A를 지나는 직선이 구와 점 P에서 접하고,

$\overline{\mathrm{AC}}=\sqrt{1^2+(-4)^2+2^2}=\sqrt{21}$

$\overline{\mathrm{PC}}=\sqrt{14-k}$

이므로

$\overline{\mathrm{AP}}^2=\overline{\mathrm{AC}}^2-\overline{\mathrm{PC}}^2=21-(14-k)=k+7$



이때 점 P에서 직선 AC에 내린 수선의 발을 H라 하면 두 직각삼각형 AHP, APC는 서로 닮음이므로

$\overline{\mathrm{PH}}=\overline{\mathrm{PC}}\times\frac{\overline{\mathrm{AP}}}{\overline{\mathrm{AC}}}=\sqrt{14-k}\times\frac{\sqrt{k+7}}{\sqrt{21}}$ ······ ㉡

즉, 선분 PH의 길이가 일정하므로 점 P가 나타내는 도형은 중심이 H이고 반지름의 길이가 $\overline{\mathrm{PH}}$인 원이다.

문제의 조건에서 점 P가 나타내는 도형의 길이가 $\frac{6\sqrt{14}}{7}\pi$이므로

$\overline{\mathrm{PH}}=\frac{3\sqrt{14}}{7}$이다.

㉡에서 $\frac{\sqrt{(14-k)(k+7)}}{\sqrt{21}}=\frac{3\sqrt{14}}{7}$

$(14-k)(k+7)=54$

$k^2-7k-44=0$

$(k-11)(k+4)=0$
$0<k<14$이므로 $k=11$

답 ②

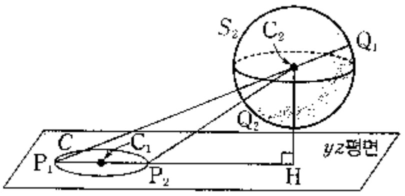
21

$x^2+y^2+z^2-2\sqrt{3}x-4y-6z+7=0$에서
$(x-\sqrt{3})^2+(y-2)^2+(z-3)^2=9$
점 C의 좌표는 $(\sqrt{3},\ 2,\ 3)$이므로
$\overline{OC}=\sqrt{(\sqrt{3})^2+2^2+3^2}=4$
구 S 위의 점 P에 대하여 삼각형 OPC의 넓이는 $\overline{OC}\perp\overline{CP}$일 때 최대이다.
따라서 그 최댓값은 $\frac{1}{2}\times 4\times 3=6$
점 $C(\sqrt{3},\ 2,\ 3)$의 xy평면 위로의 정사영을 C′이라 하면
$\overline{OC'}=\sqrt{(\sqrt{3})^2+2^2}=\sqrt{7}$
이고, 직선 OC와 xy평면이 이루는 예각의 크기를 θ라 하면
$\cos\theta=\frac{\overline{OC'}}{\overline{OC}}=\frac{\sqrt{7}}{4}$
직선 CP가 xy평면과 평행할 때 삼각형 OPC의 xy평면 위로의 정사영의 넓이가 최대이다.
따라서 삼각형 OPC의 xy평면 위로의 정사영의 넓이의 최댓값은
$6\cos\theta=6\times\frac{\sqrt{7}}{4}=\frac{3\sqrt{7}}{2}$

답 ③

22

두 구 S_1, S_2의 중심을 각각 C_1, C_2라 하고, 구 S_1이 yz평면과 만나서 생기는 도형을 C라 하자.
점 $C_1(0,\ 3,\ 3)$이 yz평면 위의 점이므로 도형 C는 중심이 C_1이고 반지름의 길이가 1인 원이다.
점 $C_2(2,\ -1,\ 0)$에서 yz평면에 내린 수선의 발을 H라 하면 그 좌표는 $(0,\ -1,\ 0)$이다.
직선 HC_1이 원 C와 만나는 두 점 중 점 H와의 거리가 먼 점을 P_1, 가까운 점을 P_2라 하자.
직선 P_1C_2가 구 S_2와 만나는 두 점 중 점 P_1과의 거리가 먼 점을 Q_1이라 하고,
직선 P_2C_2가 구 S_2와 만나는 두 점 중 점 P_2와의 거리가 가까운 점을 Q_2라 하자.

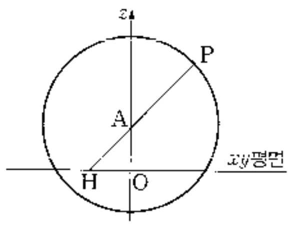


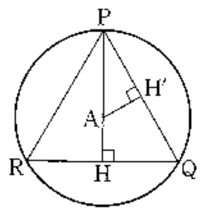
$\overline{C_1H}=\sqrt{(-1-3)^2+(0-3)^2}=5$, $\overline{C_2H}=2$
위 그림에서 $\overline{P_2Q_2}\le\overline{PQ}\le\overline{P_1Q_1}$이므로
$M=\overline{P_1Q_1}=\overline{P_1C_2}+\overline{C_2Q_1}$
$\quad=\sqrt{(5+1)^2+2^2}+1=2\sqrt{10}+1$
$m=\overline{P_2Q_2}=\overline{P_2C_2}-\overline{C_2Q_2}$
$\quad=\sqrt{(5-1)^2+2^2}-1=2\sqrt{5}-1$
따라서
$(M-1)^2+(m+1)^2=(2\sqrt{10})^2+(2\sqrt{5})^2$
$\qquad=40+20=60$

답 60

23

구 S의 방정식은 $x^2+y^2+(z-2)^2=4^2$이고 이 식에 $z=0$을 대입하면
$x^2+y^2=12$
즉, 구 S가 xy평면과 만나서 생기는 도형 C는 중심이 원점 O이고 반지름의 길이가 $2\sqrt{3}$인 xy평면 위의 원이다.
구 S 위의 점 P에서 선분 QR에 내린 수선의 발을 H라 하면 조건 (가)에서 삼각형 PQR가 $\overline{PQ}=\overline{PR}$인 이등변삼각형이므로 점 H는 선분 RQ의 중점이다.





이때 점 A에서 선분 PQ에 내린 수선의 발을 H′이라 하면
$\overline{PH'}=\frac{1}{2}\overline{PQ}=\frac{5\sqrt{2}}{2}$이므로
$\cos(\angle APH')=\frac{\overline{PH'}}{\overline{AP}}=\frac{\frac{5\sqrt{2}}{2}}{4}=\frac{5\sqrt{2}}{8}$
따라서
$\overline{PH}=\overline{PQ}\times\cos(\angle APH')=5\sqrt{2}\times\frac{5\sqrt{2}}{8}=\frac{25}{4}$
$\overline{AH}=\overline{PH}-\overline{AP}=\frac{25}{4}-4=\frac{9}{4}$
평면 PQR와 xy평면이 이루는 예각의 크기를 θ라 하면
$\sin\theta=\frac{\overline{AO}}{\overline{AH}}=\frac{2}{\frac{9}{4}}=\frac{8}{9}$
이므로 $\cos\theta=\sqrt{1-\left(\frac{8}{9}\right)^2}=\frac{\sqrt{17}}{9}$
원 C의 넓이가 $(2\sqrt{3})^2\pi=12\pi$이므로 원 C의 평면 PQR 위로의 정사영의 넓이는
$12\pi\times\frac{\sqrt{17}}{9}=\frac{4\sqrt{17}}{3}\pi$
따라서 $p=3$, $q=4$이므로
$p+q=7$

답 7

실전 모의고사 1회

본문 114~125쪽

01 ①	**02** ②	**03** ④	**04** ⑤	**05** ③
06 ④	**07** ④	**08** ①	**09** ④	**10** ①
11 ②	**12** ⑤	**13** ⑤	**14** ⑤	**15** ①
16 97	**17** 16	**18** 20	**19** 3	**20** 15
21 39	**22** 320	**23** ①	**24** ④	**25** ③
26 ②	**27** ④	**28** ②	**29** 24	**30** 256

01

$2^{\log_2 5}=5$, $(\sqrt{5})^{-2}=\frac{1}{(\sqrt{5})^2}=\frac{1}{5}$이므로

$2^{\log_2 5}\times(\sqrt{5})^{-2}=5\times\frac{1}{5}=1$

답 ①

02

$f(x)=2x^3+4x^2-5x+1$에서

$f'(x)=6x^2+8x-5$

따라서 $f'(1)=6+8-5=9$

답 ②

03

등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d라 하면

$a_5-a_2=3d=12$에서 $d=4$

따라서 $a_4=a_1+3d=3+3\times4=15$

답 ④

다른 풀이

$a_5-a_2=a_4-a_1=12$이고

$a_1=3$이므로 $a_4=15$

04

$\lim_{x\to0-}f(x)=3$

$\lim_{x\to2+}\{xf(x)\}=\lim_{x\to2+}x\times\lim_{x\to2+}f(x)=2\times2=4$

따라서 $\lim_{x\to0-}f(x)+\lim_{x\to2+}\{xf(x)\}=3+4=7$

답 ⑤

05

$\lim_{x\to1}\frac{f(x)}{x-1}=3$에서 $x\to1$일 때 (분모) $\to0$이고 극한값이 존재하므로

(분자) $\to0$이어야 한다.

즉, $\lim_{x\to1}f(x)=0$에서 $f(1)=0$

또한 다항함수 $f(x)$는 $x=1$에서 미분가능하므로

$\lim_{x\to1}\frac{f(x)}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=f'(1)=3$

한편, $g(x)=xf(x)+2$에서 $g'(x)=f(x)+xf'(x)$이므로

$g'(1)=f(1)+1\times f'(1)=0+1\times3=3$

답 ③

06

$\tan\theta-\frac{4}{1+\tan\theta}=2$에서

$\tan\theta(1+\tan\theta)-4=2(1+\tan\theta)$

$\tan^2\theta-\tan\theta-6=0$, $(\tan\theta+2)(\tan\theta-3)=0$

$\pi<\theta<\frac{3}{2}\pi$에서 $\tan\theta>0$이므로

$\tan\theta=3$

즉, $\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=3$에서

$\sin\theta=3\cos\theta$ …… ㉠

이때 $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$이므로

$9\cos^2\theta+\cos^2\theta=1$, $\cos^2\theta=\frac{1}{10}$

$\pi<\theta<\frac{3}{2}\pi$에서 $\cos\theta<0$이므로

$\cos\theta=-\frac{1}{\sqrt{10}}$

$\cos\theta=-\frac{1}{\sqrt{10}}$을 ㉠에 대입하면

$\sin\theta=-\frac{3}{\sqrt{10}}$

따라서 $\sin\theta+\cos\theta=-\frac{3}{\sqrt{10}}+\left(-\frac{1}{\sqrt{10}}\right)=-\frac{2\sqrt{10}}{5}$

답 ④

07

$t^3-12t^2+36t=t^2-6t$에서

$t^3-13t^2+42t=0$, $t(t-6)(t-7)=0$

$t=0$ 또는 $t=6$ 또는 $t=7$

두 점 P, Q가 출발한 후 처음으로 속도가 같아지는 시각은 $t=6$이다.

즉, $a=6$이고 $\frac{a}{2}=3$

따라서 시각 $t=3$에서 $t=6$까지 점 Q가 움직인 거리는

$$\int_3^6|t^2-6t|\,dt=\int_3^6(6t-t^2)\,dt=\left[3t^2-\frac{1}{3}t^3\right]_3^6$$

$$=(108-72)-(27-9)=18$$

답 ④

08

$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)-x^3}{3x^2}=-1$에서

$f(x)-x^3=-3x^2+ax+b$ (a, b는 상수)

로 놓을 수 있다.

즉, $f(x)=x^3-3x^2+ax+b$

$\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{9x}=-1$에서 $x\to0$일 때 (분모) $\to0$이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\to0$이어야 한다.

즉, $\lim_{x\to0}f(x)=0$에서 $f(0)=b=0$

이때 $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{9x}=\lim_{x\to 0}\frac{x^3-3x^2+ax}{9x}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2-3x+a}{9}=\frac{a}{9}$이므로

$\frac{a}{9}=-1$에서 $a=-9$

$f(x)=x^3-3x^2-9x$에서

$f'(x)=3x^2-6x-9=3(x+1)(x-3)$

$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=3$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

따라서 함수 $f(x)$의 극댓값은

$f(-1)=-1-3+9=5$

답 ①

09

$\sum_{k=1}^{n}S_k=T_n=2n^3+4n^2+2n$이라 하면

$T_n-T_{n-1}=S_n\ (n\geq 2)$에서

$S_n=(2n^3+4n^2+2n)-\{2(n-1)^3+4(n-1)^2+2(n-1)\}$

$=6n^2+2n\ (n\geq 2)$

한편, $\sum_{k=1}^{n}a_k=S_n$이므로

$a_3=S_3-S_2=(6\times 3^2+2\times 3)-(6\times 2^2+2\times 2)$

$=60-28=32$

답 ④

10

삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이가 $\sqrt{7}$이므로 사인법칙에 의하여

$\frac{\overline{BC}}{\sin\frac{2}{3}\pi}=2\sqrt{7}$이므로

$\overline{BC}=2\sqrt{7}\times\sin\frac{2}{3}\pi=2\sqrt{7}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{21}$

삼각형 ABD의 외접원의 반지름의 길이가 $\sqrt{7}$이므로 사인법칙에 의하여

$\frac{\overline{AB}}{\sin(\angle BDA)}=2\sqrt{7}$

$\overline{AB}=2\sqrt{7}\sin(\angle BDA)=2\sqrt{7}\times\frac{\sqrt{21}}{7}=2\sqrt{3}$

삼각형 ABC에서 $\overline{AC}=x\ (x>0)$이라 하면 코사인법칙에 의하여

$\overline{BC}^2=\overline{AB}^2+\overline{AC}^2-2\times\overline{AB}\times\overline{AC}\times\cos\frac{2}{3}\pi$

$(\sqrt{21})^2=(2\sqrt{3})^2+x^2-2\times 2\sqrt{3}\times x\times\left(-\frac{1}{2}\right)$

$x^2+2\sqrt{3}x-9=0,\ (x+3\sqrt{3})(x-\sqrt{3})=0$

$x>0$이므로 $x=\sqrt{3}$

직선 AD가 $\angle$BAC를 이등분하므로 $\overline{AB}:\overline{AC}=\overline{BE}:\overline{CE}$

즉, $2\sqrt{3}:\sqrt{3}=\overline{BE}:\overline{CE}$에서 $\overline{BE}=2\overline{CE}$

따라서 $\overline{BE}=\frac{2}{3}\overline{BC}=\frac{2\sqrt{21}}{3}$, $\overline{CE}=\frac{1}{3}\overline{BC}=\frac{\sqrt{21}}{3}$이므로

$\overline{BE}^2+\overline{CE}^2=\left(\frac{2\sqrt{21}}{3}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{21}}{3}\right)^2=\frac{35}{3}$

답 ①

11

$f(x)=3x^2+ax-(2x-1)\int_0^1 f(t)\,dt$이고

$f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{7}{4}$이므로 $f\left(\frac{1}{2}\right)=3\times\frac{1}{4}+a\times\frac{1}{2}=\frac{7}{4}$에서 $a=2$

$\int_0^1 f(t)\,dt=k$ (k는 상수)라 하면 $f(x)=3x^2+2x-(2x-1)k$

$f(x)=3x^2+2(1-k)x+k$이고

$\int_0^1\{3x^2+2(1-k)x+k\}\,dx=k$

이때

$\int_0^1\{3x^2+2(1-k)x+k\}\,dx=\left[x^3+(1-k)x^2+kx\right]_0^1$

$=1+(1-k)+k=2$

이므로 $k=2$

따라서 $f(x)=3x^2-2x+2$이므로

$f(2)=3\times 4-2\times 2+2=10$

답 ③

12

함수 $f(x)=a\cos\frac{\pi x}{b}$의 주기는 $\frac{2\pi}{\frac{\pi}{b}}=2b$이고, 최댓값은 a, 최솟값은 $-a$이다.

$f(x)=-a$에서

$a\cos\frac{\pi x}{b}=-a,\ \cos\frac{\pi x}{b}=-1$

$\frac{\pi x}{b}=\pi,\ x=b$

즉, 점 A의 좌표는 $(b, -a)$이다.

$f(x)=\frac{a}{2}$에서

$a\cos\frac{\pi x}{b}=\frac{a}{2},\ \cos\frac{\pi x}{b}=\frac{1}{2}$

$\frac{\pi x}{b}=\frac{\pi}{3}$ 또는 $\frac{\pi x}{b}=\frac{5\pi}{3}$

$x=\frac{b}{3}$ 또는 $x=\frac{5b}{3}$

$\overline{OB}<\overline{OC}$이므로 두 점 B, C의 좌표는 $B\left(\frac{b}{3}, \frac{a}{2}\right)$, $C\left(\frac{5b}{3}, \frac{a}{2}\right)$이다.

함수 $y=f(x)$의 그래프가 직선 $x=b$에 대하여 대칭이므로

$\overline{AB}=\overline{AC}$

이때 $\overline{AB}=\overline{BC}$이므로 삼각형 ABC는 정삼각형이다.

점 A에서 선분 BC에 내린 수선의 발을 H라 하면 직각삼각형 ABH에서

$\overline{BH}=\frac{1}{2}\left(\frac{5b}{3}-\frac{b}{3}\right)=\frac{2}{3}b$, $\overline{AH}=\frac{a}{2}-(-a)=\frac{3}{2}a$이므로

$\tan\frac{\pi}{3}=\frac{\overline{AH}}{\overline{BH}}=\frac{\frac{3}{2}a}{\frac{2}{3}b}=\sqrt{3},\ a=\frac{4\sqrt{3}}{9}b$

따라서 직선 OA의 기울기는 $-\frac{a}{b}$이고, 직선 OB의 기울기는 $\frac{3a}{2b}$이므로 직선 OA의 기울기와 직선 OB의 기울기의 곱은

$-\frac{a}{b}\times\frac{3a}{2b}=-\frac{3a^2}{2b^2}=-\frac{3}{2b^2}\times\left(\frac{4\sqrt{3}}{9}b\right)^2=-\frac{8}{9}$

답 ⑤

13

수열 $\{a_n\}$이 $a_1=2$, $a_n a_{n+1}=(-1)^n$을 만족시키므로 각 항을 차례로 구하면

$a_1a_2=-1$에서 $a_2=-\frac{1}{2}$

$a_2a_3=1$에서 $a_3=-2$

$a_3a_4=-1$에서 $a_4=\frac{1}{2}$

$a_4a_5=1$에서 $a_5=2$

$\vdots$

$a_1=2$이므로 $b_1=1-2$

$a_2=-\frac{1}{2}$이므로 $b_2=2-\left(-\frac{1}{2}\right)=2+\frac{1}{2}$

$a_3=-2$이므로 $b_3=3-(-2)=3+2$

$a_4=\frac{1}{2}$이므로 $b_4=4-\frac{1}{2}$

$a_5=2$이므로 $b_5=5-2$

$\vdots$

따라서

$$b_n=\begin{cases} n-2 & (n=4m-3) \\ n+\frac{1}{2} & (n=4m-2) \\ n+2 & (n=4m-1) \\ n-\frac{1}{2} & (n=4m) \end{cases} \text{ (단, } m\text{은 자연수)}$$

자연수 k에 대하여 b_{2k}는 수열 $\{b_n\}$의 짝수번째 항을 의미하므로

$$b_{2k}=\begin{cases} 2k+\frac{1}{2} & (2k=4m-2) \\ 2k-\frac{1}{2} & (2k=4m) \end{cases} \text{ (단, } m\text{은 자연수)}$$

$b_{2k}+b_{2k+2}=\left(2k+\frac{1}{2}\right)+\left(2k+2-\frac{1}{2}\right)=4k+2$

또는 $b_{2k}+b_{2k+2}=\left(2k-\frac{1}{2}\right)+\left(2k+2+\frac{1}{2}\right)=4k+2$

따라서 $\sum_{k=1}^{10}(b_{2k}+b_{2k+2})=\sum_{k=1}^{10}(4k+2)=4\times\frac{10\times 11}{2}+2\times 10=240$

답 ⑤

다른 풀이

조건 (가)에 의하여 $a_2=-\frac{1}{2}$이고

자연수 n에 대하여

$a_{2n}a_{2n+1}=(-1)^{2n}=1$, $a_{2n+1}a_{2n+2}=(-1)^{2n+1}=-1$이므로

$a_{2n+2}=\frac{-1}{a_{2n+1}}=-a_{2n}$을 만족시킨다.

따라서 $a_{2n}=\frac{(-1)^n}{2}$

조건 (나)에 의하여 $a_{2n}+b_{2n}=2n$에서

$b_{2n}=2n-a_{2n}=2n-\frac{(-1)^n}{2}$이므로

$$\sum_{k=1}^{10}(b_{2k}+b_{2k+2})=\sum_{k=1}^{10}\left\{2k-\frac{(-1)^k}{2}+2k+2-\frac{(-1)^{k+1}}{2}\right\}$$
$$=\sum_{k=1}^{10}(4k+2)$$
$$=240$$

14

ㄱ. $f(x)+xf'(x)=-4x^3+6x$에서 $\{xf(x)\}'=-4x^3+6x$이므로

$xf(x)=\int(-4x^3+6x)\,dx$

$=-x^4+3x^2+C$ (단, C는 적분상수) …… ㉠

㉠의 양변에 $x=0$을 대입하면

$0\times f(0)=C$, 즉 $C=0$

$C=0$을 ㉠에 대입하면

$xf(x)=-x^4+3x^2$

$f(x)$가 다항함수이므로 $f(x)=-x^3+3x$

따라서 $f(-1)=-2$ (참)

ㄴ. $f'(x)=-3x^2+3=-3(x+1)(x-1)$

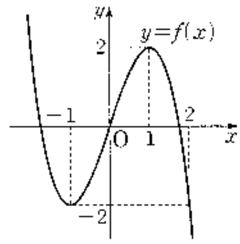
$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=1$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\searrow$	극소	$\nearrow$	극대	$\searrow$

함수 $f(x)$는 $x=-1$에서 극소이고, $x=1$에서 극대이다.

$f(-1)=-2$, $f(1)=2$이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 그림과 같다.



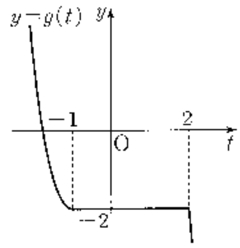
$f(x)=-2$에서

$-x^3+3x=-2$

$(x+1)^2(x-2)=0$

$x=-1$ 또는 $x=2$

함수 $g(t)=\begin{cases} f(t) & (t\le -1 \text{ 또는 } t\ge 2) \\ f(-1) & (-1<t<2) \end{cases}$이므로 함수 $y=g(t)$의 그래프는 그림과 같다.



따라서 함수 $g(t)$는 $t=2$에서만 미분가능하지 않다. (참)

ㄷ. $|f(t)-g(t)|=\begin{cases} 0 & (t\le -1 \text{ 또는 } t\ge 2) \\ f(t)+2 & (-1<t<2) \end{cases}$

따라서 $|f(t)-g(t)|$는 $t=1$일 때 최댓값 $f(1)+2=2+2=4$를 갖는다. (참)

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

답 ⑤

15

첫째항이 2이고 공차가 3인 등차수열 $\{a_n\}$의 일반항은 $a_n=3n-1$이므로 집합 A의 원소는 3으로 나눈 나머지가 2인 자연수로만 이루어져 있다.

한편, 수열 $\{b_n\}$의 일반항은 $b_n=2n-1$이므로 수열 $\{b_n\}$의 각 항 중에서 3으로 나눈 나머지가 2가 아닌 수가 집합 $B-A$의 원소가 된다.

(i) $n=3k-2$ (k는 자연수)일 때

$b_{3k-2}=2(3k-2)-1$에서

$2(3k-2)-1=6k-5=3(2k-1)-2$이므로

$n=3k-2$일 때 b_n은 3으로 나눈 나머지가 1인 자연수이다.

따라서 b_{3k-2}는 집합 $B-A$의 원소이다.

(ii) $n=3k-1$ (k는 자연수)일 때

$b_{3k-1}=2(3k-1)-1$에서

$2(3k-1)-1=6k-3=3(2k-1)$이므로

$n=3k-1$일 때 b_n은 3의 배수이다.

따라서 b_{3k-1}은 집합 $B-A$의 원소이다.

(iii) $n=3k$ (k는 자연수)일 때

$b_{3k}=2\times3k-1$에서

$2\times3k-1=3\times2k-1$이므로

$n=3k$일 때 b_n은 3으로 나눈 나머지가 2인 자연수이다.

따라서 b_{3k}는 집합 $B-A$의 원소가 아니다.

(i), (ii), (iii)에서 $B-A=\{b_1, b_2, b_4, b_5, b_7, b_8, \cdots\}$

이때 $d_n=b_{3n-2}+b_{3n-1}$이라 하면 $d_1=b_1+b_2=4$이고

$$\begin{aligned}d_{n+1}-d_n&=(b_{3n+1}+b_{3n+2})-(b_{3n-2}+b_{3n-1})\\&=\{2(3n+1)-1+2(3n+2)-1\}\\&\quad-\{2(3n-2)-1+2(3n-1)-1\}\\&=(12n+4)-(12n-8)=12\end{aligned}$$

이므로 수열 $\{d_n\}$은 첫째항이 4이고 공차가 12인 등차수열이다.

이때 수열 $\{d_n\}$의 첫째항부터 제k항까지의 합을 S_k라 하면

$S_k=\frac{k\{2\times4+12(k-1)\}}{2}>140$에서

$k(12k-4)>280$, $3k^2-k-70>0$, $(3k+14)(k-5)>0$

$k>0$에서 $k>5$이므로 부등식을 만족시키는 자연수 k의 최솟값은 6이다.

이때 $S_6=(b_1+b_2)+(b_4+b_5)+\cdots+(b_{16}+b_{17})=\sum_{k=1}^{12}c_k=204$

한편, $b_{17}=2\times17-1=33$에서 $S_6-b_{17}=171$이다. 집합 $B-A$에 속하는 모든 원소를 작은 것부터 크기순으로 나열할 때, 첫번째 원소부터 n번째 원소까지의 합이 처음으로 140보다 큰 경우는

$b_1+b_2+b_4+b_5+\cdots+b_{16}=\sum_{k=1}^{11}c_k$인 경우이므로 자연수 n의 최솟값은 11이다.

답 ①

다른 풀이

조건을 만족시키는 집합 $B-A$의 원소는 $b_1, b_2, b_4, b_5, b_7, b_8, \cdots$이다.

수열 $\{b_n\}$의 첫째항부터 제$3n$항까지의 합에서 수열 $\{b_{3n}\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 뺀 것을 S_n이라 하자.

수열 $\{b_{3n}\}$은 첫째항이 $b_3=5$이고 공차가 6인 등차수열이므로

$$\begin{aligned}S_n&=\sum_{k=1}^{3n}b_k-\sum_{k=1}^{n}b_{3k}\\&=\frac{3n\{2+2(3n-1)\}}{2}-\frac{n\{10+6(n-1)\}}{2}=\frac{18n^2}{2}-\frac{6n^2+4n}{2}\\&=6n^2-2n=2n(3n-1)\end{aligned}$$

$2n(3n-1)>140$에서 $3n^2-n-70>0$이고

$(3n+14)(n-5)>0$에서 n은 자연수이므로 $n>5$이고, 자연수 n의 최솟값은 6이다.

이때 $S_6=b_1+b_2+b_4+b_5+\cdots+b_{16}+b_{17}=\sum_{k=1}^{12}c_k=204$이고

$b_{17}=2\times17-1=33$이므로

$b_1+b_2+b_4+b_5+\cdots+b_{16}=\sum_{k=1}^{11}c_k=171>140$이 성립한다.

따라서 집합 $B-A$에 속하는 모든 원소를 작은 것부터 크기순으로 나열할 때, 첫번째 원소부터 n번째 원소까지의 합이 처음으로 140보다 큰 경우는 $b_1+b_2+b_4+b_5+\cdots+b_{16}=\sum_{k=1}^{11}c_k$인 경우이므로 자연수 n의 최솟값은 11이다.

16

$\sum_{k=1}^{10}(k+2a_k)=\sum_{k=1}^{10}k+2\sum_{k=1}^{10}a_k=\frac{10\times11}{2}+2\times21=97$

답 97

17

$f(x)=\int(3x^2+2x+a)\,dx=x^3+x^2+ax+C$ (C는 적분상수)이고,

함수 $f(x)$는 삼차함수이므로 $x=0$에서 연속이고 미분가능하다.

$\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x}=2$에서 $x\to0$일 때 (분모)$\to0$이고 극한값이 존재하므로 (분자)$\to0$이어야 한다.

$\lim_{x\to0}f(x)=f(0)=0$

즉, $C=0$이고 $f(x)=x^3+x^2+ax$

또한 $\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=f'(0)=2$이므로

$f'(x)=3x^2+2x+a$에서 $a=2$

따라서 $f(x)=x^3+x^2+2x$이므로 $f(2)=8+4+4=16$

답 16

18

조건 (가)에서 $\log_8 a+\log_8 b=\log_2 12-\log_2 3$이므로

$\log_8 ab=\log_2 4$, $\log_8 ab=2$

$ab=64$ …… ㉠

조건 (나)에서 $\log_3 16\times\log_2 9=\frac{4\log 2}{\log 3}\times\frac{2\log 3}{\log 2}=8$이므로

$\log_2 a\times\log_2 b=8$ …… ㉡

㉠에서 $b=\frac{64}{a}$이므로 이를 ㉡에 대입하면

$\log_2 a\times\log_2\frac{64}{a}=8$, $\log_2 a\times(6-\log_2 a)=8$

$(\log_2 a)^2-6\log_2 a+8=0$, $(\log_2 a-2)(\log_2 a-4)=0$

$\log_2 a=2$ 또는 $\log_2 a=4$

$a=4$ 또는 $a=16$

$a=4$일 때 $b=16$이고, $a=16$일 때 $b=4$이다.

따라서 $a+b=4+16=20$

답 20

19

$f'(x)=x^2-2ax+1$에서 함수 $f(x)$가 극값이 존재하지 않으려면 이차방정식 $f'(x)=0$이 중근 또는 허근을 가져야 한다.

즉, 이차방정식 $x^2-2ax+1=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(-a)^2-1\le0$, $a^2\le1$, $-1\le a\le1$

따라서 정수 a의 값은 $-1, 0, 1$이고, 그 개수는 3이다.

답 3

20

조건 (가)에서 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=2x$가 만나는 두 점의 x좌표를 각각 α, β $(\alpha<\beta)$라 하자.

또 함수 $|f(x)-2x|$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하므로

$f(x)-2x=(x-\alpha)^2(x-\beta)^2$, 즉 $f(x)=(x-\alpha)^2(x-\beta)^2+2x$

로 놓을 수 있다.

조건 (나)에서

$$\lim_{x\to0}\frac{(x-\alpha)^2(x-\beta)^2}{x^2}=16 \quad \cdots\cdots ㉠$$

$x\to0$일 때 (분모) $\to0$이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\to0$이어야 한다.

즉, $\lim_{x\to0}(x-\alpha)^2(x-\beta)^2=\alpha^2\beta^2=0$에서 $\alpha=0$ 또는 $\beta=0$

(i) $\alpha=0$일 때, ㉠에서

$$\lim_{x\to0}\frac{x^2(x-\beta)^2}{x^2}=\lim_{x\to0}(x-\beta)^2=\beta^2=16$$

$\beta>0$이므로 $\beta=4$이고 $f(x)=x^2(x-4)^2+2x$

이때 $f(1)=11<15$이므로 조건 (다)를 만족시키지 못한다.

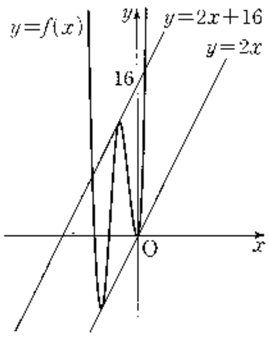
(ii) $\beta=0$일 때, ㉠에서

$$\lim_{x\to0}\frac{(x-\alpha)^2x^2}{x^2}=\lim_{x\to0}(x-\alpha)^2=\alpha^2=16$$

$\alpha<0$이므로 $\alpha=-4$이고 $f(x)=x^2(x+4)^2+2x$

이때 $f(1)=27>15$이므로 조건 (다)를 만족시킨다.

(i), (ii)에서



$f(x)=x^2(x+4)^2+2x$

$\quad=x^4+8x^3+16x^2+2x$

$f'(x)=4x^3+24x^2+32x+2$

$f'(x)=2$에서

$4x^3+24x^2+32x+2=2$

$4x(x+4)(x+2)=0$

$x=-4$ 또는 $x=-2$ 또는 $x=0$

$f(-2)=12$이므로 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(-2, 12)$에서의 접선의 방정식은

$y-12=2(x+2)$, 즉 $y=2x+16$

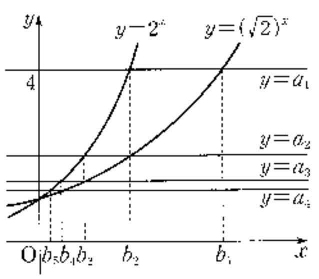
곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=2x+k$가 서로 다른 네 점에서 만나도록 하는 k의 값의 범위는

$0<k<16$

따라서 정수 k는 1, 2, 3, $\cdots$, 15이고, 그 개수는 15이다.

답 15

21



위의 그림에서 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$의 각 항을 구하면 다음과 같다.

(i) 직선 $y=a_1=4$가 곡선 $y=(\sqrt{2})^x$과 만나는 점의 x좌표가 b_1이므로 $4=(\sqrt{2})^x$에서 $x=b_1=4$이고 곡선 $y=2^x$과 만나는 점의 x좌표가 b_2이므로 $4=2^x$에서 $x=b_2=2$

직선 $y=a_2$가 곡선 $y=(\sqrt{2})^x$과 만나는 점의 x좌표가 b_2이므로 $b_2=2$에서 $a_2=(\sqrt{2})^2=2$

따라서 $\frac{a_1}{b_1}=\frac{4}{4}=1$, $\frac{a_2}{b_2}=\frac{2}{2}=1$

(ii) 직선 $y=a_2=2$가 곡선 $y=2^x$과 만나는 점의 x좌표가 b_3이므로 $2=2^x$에서 $x=b_3=1$

$a_3=(\sqrt{2})^1=\sqrt{2}$

따라서 $\frac{a_3}{b_3}=\frac{\sqrt{2}}{1}=\sqrt{2}=2^{\frac{1}{2}}$

(iii) 직선 $y=a_3=\sqrt{2}$가 곡선 $y=2^x$과 만나는 점의 x좌표가 b_4이므로

$\sqrt{2}=2^x$에서 $x=b_4=\frac{1}{2}=2^{-1}$

$a_4=(\sqrt{2})^{\frac{1}{2}}=2^{\frac{1}{4}}$

따라서 $\frac{a_4}{b_4}=\frac{2^{\frac{1}{4}}}{2^{-1}}=2^{\frac{5}{4}}$

(iv) 직선 $y=a_4=2^{\frac{1}{4}}$이 곡선 $y=2^x$과 만나는 점의 x좌표가 b_5이므로

$2^{\frac{1}{4}}=2^x$에서 $x=b_5=\frac{1}{4}=2^{-2}$

$a_5=(\sqrt{2})^{\frac{1}{4}}=2^{\frac{1}{8}}$

따라서 $\frac{a_5}{b_5}=\frac{2^{\frac{1}{8}}}{2^{-2}}=2^{\frac{17}{8}}$

(i)~(iv)에서

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{5}\log_2\frac{a_n}{b_n}&=\log_2\frac{a_1}{b_1}+\log_2\frac{a_2}{b_2}+\log_2\frac{a_3}{b_3}+\log_2\frac{a_4}{b_4}+\log_2\frac{a_5}{b_5}\\&=\log_2\left(\frac{a_1}{b_1}\times\frac{a_2}{b_2}\times\frac{a_3}{b_3}\times\frac{a_4}{b_4}\times\frac{a_5}{b_5}\right)\\&=\log_2\left(1\times1\times2^{\frac{1}{2}}\times2^{\frac{5}{4}}\times2^{\frac{17}{8}}\right)\\&=\log_2 2^{\frac{1}{2}+\frac{5}{4}+\frac{17}{8}}=\frac{31}{8}\end{aligned}$$

따라서 $p=8$, $q=31$이므로 $p+q=8+31=39$

답 39

다른 풀이

$a_n=(\sqrt{2})^{b_n}=2^{b_{n+1}}$에서 $2^{\frac{1}{2}b_n}=2^{b_{n+1}}$이므로

$b_{n+1}=\frac{1}{2}b_n$이고

$a_1=(\sqrt{2})^{b_1}=4$에서 $b_1=4$

따라서 수열 $\{b_n\}$은 첫째항이 4이고 공비가 $\frac{1}{2}$인 등비수열이다.

즉, $b_n=4\times\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}=2^{3-n}$

한편, $2^{b_{n+1}}=a_n$에서 $b_{n+1}=2^{2-n}$이므로 $a_n=2^{2^{2-n}}$

따라서 $\log_2\frac{a_n}{b_n}=\log_2\frac{2^{2^{2-n}}}{2^{3-n}}=2^{2-n}+(n-3)$

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{5}(2^{2-n}+n-3)&=\frac{2\times\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^5\right\}}{1-\frac{1}{2}}+\frac{5\times6}{2}-3\times5\\&=4-4\times\left(\frac{1}{2}\right)^5+15-15\\&=4-\frac{1}{8}=\frac{31}{8}\end{aligned}$$

즉, $p=8$, $q=31$이므로 $p+q=8+31=39$

22

방정식 $f(x)=0$의 두 실근을 α, β $(\alpha<\beta)$라 하면

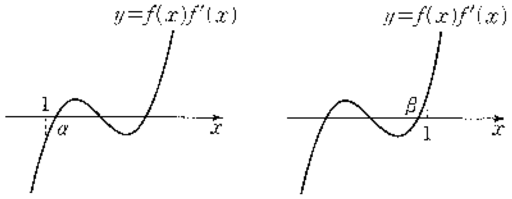
$f(x)=(x-\alpha)(x-\beta)$, $f'(x)=2x-\alpha-\beta$이므로

$f(x)f'(x)=2(x-\alpha)(x-\beta)\left(x-\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$

이때 $\alpha<\frac{\alpha+\beta}{2}<\beta$이다.

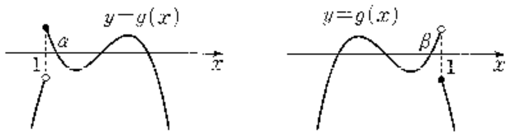
(ⅰ) $\alpha>1$ 또는 $\beta<1$일 때

함수 $y=f(x)f'(x)$의 그래프의 개형은 그림과 같다.



[$\alpha>1$일 때] [$\beta<1$일 때]

함수 $y=g(x)$의 그래프의 개형은 그림과 같다.

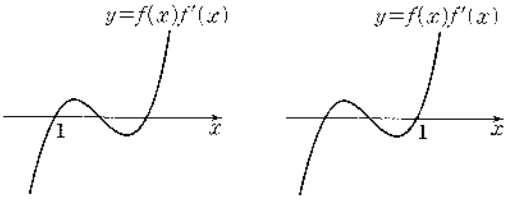


[$\alpha>1$일 때] [$\beta<1$일 때]

이때 함수 $g(x)$는 $x=1$에서 불연속이므로 조건 (나)를 만족시키지 못한다.

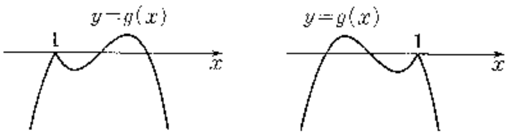
(ⅱ) $\alpha=1$ 또는 $\beta=1$일 때

함수 $y=f(x)f'(x)$의 그래프의 개형은 그림과 같다.



[$\alpha=1$일 때] [$\beta=1$일 때]

함수 $y=g(x)$의 그래프의 개형은 그림과 같다.

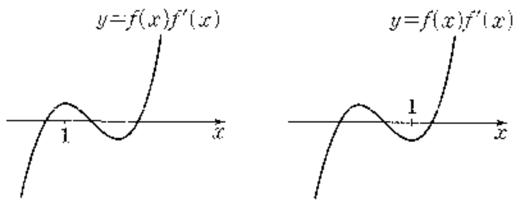


[$\alpha=1$일 때] [$\beta=1$일 때]

함수 $g(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이므로 조건 (나)를 만족시키지만 $h(k)=2$이고 $\lim_{t\to k-}h(t)>\lim_{t\to k+}h(t)$를 만족시키는 실수 k가 존재하지 않으므로 조건 (다)를 만족시키지 못한다.

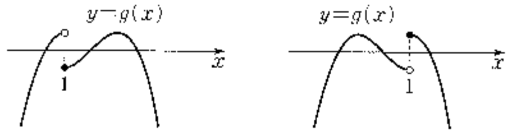
(ⅲ) $\alpha<1<\frac{\alpha+\beta}{2}$ 또는 $\frac{\alpha+\beta}{2}<1<\beta$일 때

함수 $y=f(x)f'(x)$의 그래프의 개형은 그림과 같다.



$\left[\alpha<1<\frac{\alpha+\beta}{2}\text{일 때}\right]$ $\left[\frac{\alpha+\beta}{2}<1<\beta\text{일 때}\right]$

함수 $y=g(x)$의 그래프의 개형은 그림과 같다.

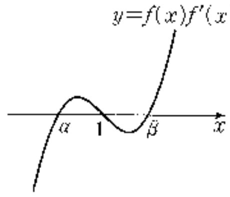


$\left[\alpha<1<\frac{\alpha+\beta}{2}\text{일 때}\right]$ $\left[\frac{\alpha+\beta}{2}<1<\beta\text{일 때}\right]$

이때 함수 $g(x)$는 $x=1$에서 불연속이므로 조건 (나)를 만족시키지 못한다.

(ⅳ) $\frac{\alpha+\beta}{2}=1$일 때

함수 $y=f(x)f'(x)$의 그래프의 개형은 그림과 같다.

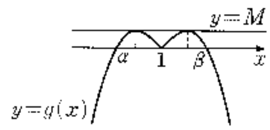


$i(x)=f(x+1)f'(x+1)$이라 하면

$i(x)=2x(x-\alpha+1)(x+\alpha-1)$이므로 $i(-x)=-i(x)$이다.

즉, 함수 $y=i(x)$의 그래프는 원점에 대하여 대칭이므로 $i(x)$의 극댓값을 M이라 하면 $i(x)$의 극솟값은 $-M$이다.

따라서 함수 $y=f(x)f'(x)$의 그래프는 점 $(1, 0)$에 대하여 대칭이고, 극댓값은 M, 극솟값은 $-M$이므로 함수 $y=g(x)$의 그래프의 개형은 그림과 같다.



함수 $g(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이므로 조건 (나)를 만족시킨다.

또 $h(k)=2$이고 $\lim_{t\to k-}h(t)>\lim_{t\to k+}h(t)$를 만족시키는 실수 $k=M$이 존재하므로 조건 (다)를 만족시킨다.

(ⅰ)~(ⅳ)에서 $\frac{\alpha+\beta}{2}=1$이므로 $f(x)=x^2-2x+a$ (a는 상수)로 놓을 수 있다.

$f'(x)=2(x-1)$이므로

$x<1$일 때 $g(x)=2(x-1)(x^2-2x+a)$

$g(-1)=2\times(-2)\times(3+a)=20$에서 $a=-8$이므로

$g(x)=2(x-1)(x^2-2x-8)$

$\quad=2(x+2)(x-1)(x-4)$

한편, $x\geq1$일 때 $g(x)=-2(x+2)(x-1)(x-4)$이므로

$$g(x)=\begin{cases}2(x+2)(x-1)(x-4) & (x<1)\\ -2(x+2)(x-1)(x-4) & (x\geq1)\end{cases}$$

따라서

$g(0)=2\times2\times(-1)\times(-4)=16$,

$g(3)=-2\times5\times2\times(-1)=20$

이므로

$g(0)\times g(3)=16\times20$

$\quad=320$

답 320

23

선분 AB를 2 : 1로 내분하는 점을 P라 하면

점 P의 z좌표는

$\frac{2\times a+1\times 4}{2+1}=\frac{2a+4}{3}$

점 P가 xy평면 위의 점이므로

$\frac{2a+4}{3}=0$, $a=-2$

따라서 $\overline{AB}=\sqrt{(1+1)^2+(-1-2)^2+(-2-4)^2}=7$

답 ①

24

쌍곡선 $\frac{x^2}{10}-\frac{y^2}{26}=1$의 두 꼭짓점의 좌표는

$(-\sqrt{10},\ 0)$, $(\sqrt{10},\ 0)$

즉, 타원의 두 초점이 x축 위의 점이므로 $a^2>12$이고

$a^2-12=10$에서 $a^2=22$

$a>0$이므로 $a=\sqrt{22}$

답 ④

25

구 $S : (x-1)^2+(y+2)^2+(z-4)^2=25$의 중심은 $(1,\ -2,\ 4)$이고

반지름의 길이는 5이므로 점 A의 좌표는 $(1,\ -2,\ 9)$이다.

점 A에서 xy평면에 내린 수선의 발을 A′이라 하면

$\mathrm{A'}(1,\ -2,\ 0)$이고 $\overline{\mathrm{AA'}}=9$이다.

구 S와 xy평면이 만나서 생기는 도형 O는 $z=0$이므로

$(x-1)^2+(y+2)^2+(0-4)^2=25$에서

$(x-1)^2+(y+2)^2=9$

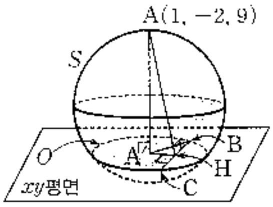
이다. 즉, 도형 O는 xy평면 위의 중심이 $\mathrm{A'}(1,\ -2,\ 0)$이고 반지름의 길이가 3인 원이다.

$\overline{\mathrm{AA'}}\perp(xy$평면$)$, $\overline{\mathrm{AH}}\perp\overline{\mathrm{BC}}$이므로 삼수선의 정리에 의하여

$\overline{\mathrm{A'H}}\perp\overline{\mathrm{BC}}$

이때 $\overline{\mathrm{A'H}}=\sqrt{\overline{\mathrm{A'B}}^2-\overline{\mathrm{BH}}^2}=\sqrt{3^2-2^2}=\sqrt{5}$

따라서 $\overline{\mathrm{AH}}=\sqrt{\overline{\mathrm{AA'}}^2+\overline{\mathrm{A'H}}^2}=\sqrt{9^2+(\sqrt{5})^2}=\sqrt{86}$



답 ③

26

포물선 $y^2=6x$ 위의 점 $\mathrm{P}(3,\ 3\sqrt{2})$에서의 접선의 방정식은

$3\sqrt{2}y=3(x+3)$에서 $y=\frac{1}{\sqrt{2}}(x+3)$

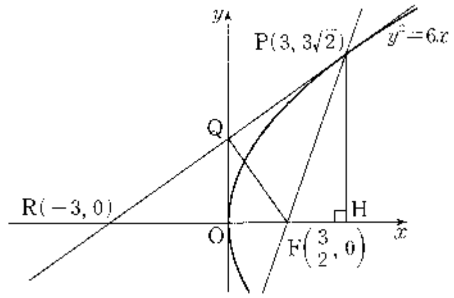
이 접선이 x축과 만나는 점을 R라 하면 $\mathrm{R}(-3,\ 0)$이다.

포물선 $y^2=6x$의 초점의 좌표는 $\mathrm{F}\left(\frac{3}{2},\ 0\right)$이므로

$\overline{\mathrm{RF}}=\frac{3}{2}-(-3)=\frac{9}{2}$

포물선의 정의에 의하여 $\overline{\mathrm{PF}}=3+\frac{3}{2}=\frac{9}{2}$이므로

$\overline{\mathrm{PF}}=\overline{\mathrm{RF}}=\frac{9}{2}$



따라서 삼각형 PRF는 이등변삼각형이고 점 Q는 선분 PR의 중점이므로 삼각형 PQF의 넓이는 삼각형 PRF의 넓이의 $\frac{1}{2}$이다.

점 P에서 x축에 내린 수선의 발을 H라 하면 삼각형 PRF의 넓이는

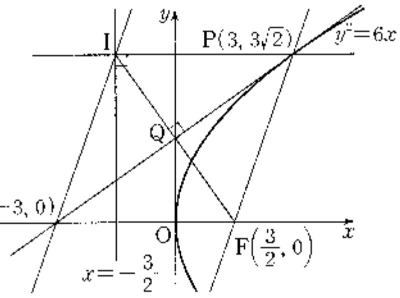
$\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{RF}}\times\overline{\mathrm{PH}}=\frac{1}{2}\times\frac{9}{2}\times3\sqrt{2}=\frac{27\sqrt{2}}{4}$

이므로 삼각형 PQF의 넓이는

$\frac{1}{2}\times\frac{27\sqrt{2}}{4}=\frac{27\sqrt{2}}{8}$

답 ②

다른 풀이



포물선 $y^2=6x$ 위의 점 $\mathrm{P}(3,\ 3\sqrt{2})$에서의 접선의 방정식은

$3\sqrt{2}y=3(x+3)$에서 $y=\frac{1}{\sqrt{2}}(x+3)$이므로 접선이 x축과 만나는 점을 R라 하면 $\mathrm{R}(-3,\ 0)$이다.

점 P에서 준선에 내린 수선의 발을 I라 하면 두 점 P, I를 지나는 직선은 x축과 평행하고 $\overline{\mathrm{PI}}=\overline{\mathrm{RF}}=\frac{9}{2}$이다.

또한 포물선의 정의에 의하여 $\overline{\mathrm{PI}}=\overline{\mathrm{PF}}$이므로 사각형 PIRF는 마름모이고 마름모의 두 대각선은 서로 다른 것을 수직이등분하므로

$\overline{\mathrm{PQ}}\perp\overline{\mathrm{FQ}}$

따라서 구하는 삼각형의 넓이는 $\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{PQ}}\times\overline{\mathrm{QF}}$이다.

점 Q의 좌표가 $\left(0,\ \frac{3\sqrt{2}}{2}\right)$이므로

$\overline{\mathrm{PQ}}=\sqrt{(3-0)^2+\left(3\sqrt{2}-\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)^2}=\frac{3\sqrt{6}}{2}$이고

$\overline{\mathrm{QF}}=\sqrt{\left(\frac{3}{2}-0\right)^2+\left(0-\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)^2}=\frac{3\sqrt{3}}{2}$

따라서 삼각형 PQF의 넓이는

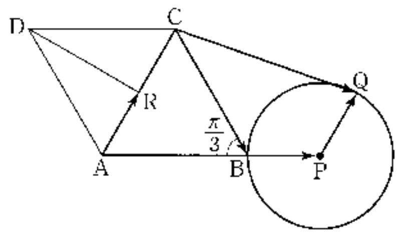
$\frac{1}{2}\times\frac{3\sqrt{6}}{2}\times\frac{3\sqrt{3}}{2}=\frac{27\sqrt{2}}{8}$

27

조건 (가)에서 $\overrightarrow{AB}=2\overrightarrow{BP}$이므로 점 P는 선분 AB를 3 : 1로 외분하는 점이다.

$|\overrightarrow{PQ}|=1$이므로 점 Q는 점 P를 중심으로 하고 반지름의 길이가 1인 원 위의 점이다.

조건 (나)에서 $\overrightarrow{DC}=2\overrightarrow{DR}+\overrightarrow{AD}$, 즉 $\overrightarrow{DR}=\dfrac{\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{DC}}{2}$이므로 점 R는 선분 AC의 중점이다.



한편,

$\overrightarrow{AR}\cdot\overrightarrow{CQ}=\overrightarrow{AR}\cdot(\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BP}+\overrightarrow{PQ})$

$\qquad\qquad=\overrightarrow{AR}\cdot\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{AR}\cdot\overrightarrow{BP}+\overrightarrow{AR}\cdot\overrightarrow{PQ}$

이때 삼각형 ABC가 정삼각형이므로

$\overrightarrow{AR}\cdot\overrightarrow{CB}=|\overrightarrow{AR}||\overrightarrow{CB}|\cos\frac{2}{3}\pi=1\times2\times\left(-\frac{1}{2}\right)=-1$

$\overrightarrow{AR}\cdot\overrightarrow{BP}=|\overrightarrow{AR}||\overrightarrow{BP}|\cos\frac{\pi}{3}=1\times1\times\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$

두 벡터 $\overrightarrow{AR}$, $\overrightarrow{PQ}$가 같은 방향일 때 $\overrightarrow{AR}\cdot\overrightarrow{PQ}$의 값이 최대이므로

$\overrightarrow{AR}\cdot\overrightarrow{PQ}\le|\overrightarrow{AR}||\overrightarrow{PQ}|=1$

따라서

$\overrightarrow{AR}\cdot\overrightarrow{CQ}\le-1+\frac{1}{2}+1=\frac{1}{2}$

이므로 $\overrightarrow{AR}\cdot\overrightarrow{CQ}$의 최댓값은 $\frac{1}{2}$이다.

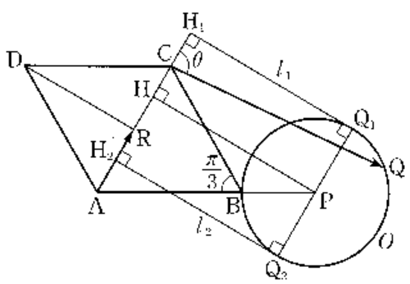
답 ④

다른 풀이

조건 (가)에서 $\overrightarrow{AB}=2\overrightarrow{BP}$이므로 점 P는 선분 AB를 3 : 1로 외분하는 점이다.

$|\overrightarrow{PQ}|=1$이므로 점 Q는 점 P를 중심으로 하고 반지름의 길이가 1인 원 위의 점이다. 이 원을 O라 하자.

조건 (나)에서 $\overrightarrow{DC}=2\overrightarrow{DR}+\overrightarrow{AD}$, 즉 $\overrightarrow{DR}=\dfrac{\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{DC}}{2}$이므로 점 R는 선분 AC의 중점이다.



두 벡터 $\overrightarrow{AR}$, $\overrightarrow{CQ}$가 이루는 각의 크기를 $\theta\ (0\le\theta\le\pi)$라 하면

$\overrightarrow{AR}\cdot\overrightarrow{CQ}=|\overrightarrow{AR}||\overrightarrow{CQ}|\cos\theta=|\overrightarrow{CQ}|\cos\theta$

직선 AC에 수직이고 원 O에 접하는 두 직선을 각각 l_1, l_2라 하고, 두 직선 l_1, l_2와 원 O의 교점을 각각 Q_1, Q_2 ($\overline{CQ_1}<\overline{CQ_2}$), 두 점 Q_1, Q_2에서 직선 AC에 내린 수선의 발을 각각 H_1, H_2라 하면

$-|\overrightarrow{CH_2}|\le\overrightarrow{AR}\cdot\overrightarrow{CQ}\le|\overrightarrow{CH_1}|$ …… ㉠

점 P에서 직선 AC에 내린 수선의 발을 H라 하면

직각삼각형 APH에서 $\angle HAP=\frac{\pi}{3}$이므로

$\overline{AH}=\overline{AP}\times\cos\frac{\pi}{3}=3\times\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$

따라서

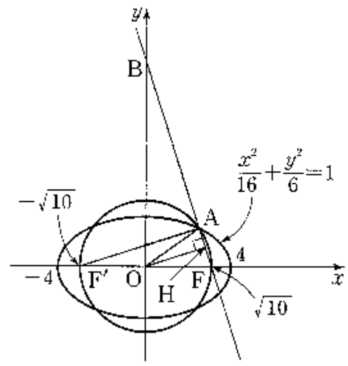
$\overline{CH_1}=\overline{AH_1}-\overline{AC}=(\overline{AH}+\overline{HH_1})-\overline{AC}$

$\qquad=\left(\frac{3}{2}+1\right)-2=\frac{1}{2}$

이므로 ㉠에서 $\overrightarrow{AR}\cdot\overrightarrow{CQ}$의 최댓값은 $\frac{1}{2}$이다.

28

타원 $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{6}=1$의 장축의 길이는 8이고, 초점의 좌표는 $F(\sqrt{10},\ 0)$, $F'(-\sqrt{10},\ 0)$이다.



타원의 정의에 의하여

$\overline{AF}+\overline{AF'}=8$ …… ㉠

점 A가 선분 F′F를 지름으로 하는 원 위의 점이므로

삼각형 AF′F는 $\angle FAF'=\frac{\pi}{2}$인 직각삼각형이다.

따라서 피타고라스 정리에 의하여

$\overline{AF}^2+\overline{AF'}^2=40$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 $\overline{AF}^2+(8-\overline{AF})^2=40$

$2\overline{AF}^2-16\overline{AF}+24=0$, $\overline{AF}^2-8\overline{AF}+12=0$

$(\overline{AF}-2)(\overline{AF}-6)=0$

삼각형 AF′F에서 $\overline{AF'}>\overline{AF}$이므로 $\overline{AF}=2$

㉠에서 $\overline{AF'}=6$

두 삼각형 AF′F, OBF에서 $\angle BFO=\angle AFF'$이고

$\angle BOF=\angle F'AF=\frac{\pi}{2}$이므로 두 삼각형 AF′F와 OBF는 서로 닮은 도형이다.

$\overline{F'F}:\overline{BF}=\overline{AF}:\overline{OF}$

$2\sqrt{10}:\overline{BF}=2:\sqrt{10}$, $\overline{BF}=10$

$\overline{AB}=\overline{BF}-\overline{AF}=10-2=8$

한편, 삼각형 OAF는 $\overline{OA}=\overline{OF}=\sqrt{10}$인 이등변삼각형이므로 점 O에서 선분 AF에 내린 수선의 발을 H라 하면 점 H는 선분 AF의 중점이다.

점 O는 선분 FF′의 중점이므로 삼각형 AF′F에서

$\overline{OH}=\frac{1}{2}\overline{AF'}=\frac{1}{2}\times6=3$

따라서 삼각형 OAB의 넓이는

$\frac{1}{2}\times\overline{AB}\times\overline{OH}=\frac{1}{2}\times 8\times 3=12$

답 ②

29

삼각형 PND에서

$\overline{DP}=3$, $\overline{DN}=2$, $\angle PDN=\frac{\pi}{3}$

이므로 코사인법칙에 의하여

$\overline{NP}^2=\overline{DP}^2+\overline{DN}^2-2\times\overline{DP}\times\overline{DN}\times\cos\frac{\pi}{3}$

$=3^2+2^2-2\times3\times2\times\frac{1}{2}=7$

$\overline{NP}>0$이므로 $\overline{NP}=\sqrt{7}$

$\overline{MN}=\frac{1}{2}\times\overline{BC}=\frac{1}{2}\times4=2$

마찬가지로 삼각형 PMD에서

$\overline{MP}=\sqrt{7}$

점 P에서 선분 MN에 내린 수선의 발을 G라 하면

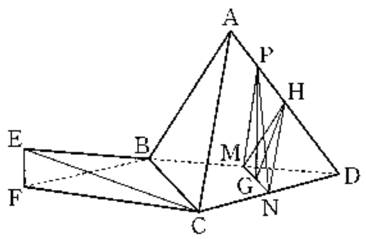
$\overline{GM}=\overline{GN}$, $\overline{GP}\perp\overline{MN}$이므로

$\overline{GN}=\frac{1}{2}\times\overline{MN}=1$

$\overline{GP}=\sqrt{\overline{NP}^2-\overline{GN}^2}=\sqrt{(\sqrt{7})^2-1^2}=\sqrt{6}$

삼각형 PMN의 넓이는

$\frac{1}{2}\times\overline{MN}\times\overline{GP}=\frac{1}{2}\times2\times\sqrt{6}=\sqrt{6}$



선분 AD의 중점을 H라 하면 $\overline{GH}\perp\overline{MN}$이고 $\overline{HN}=2$이므로

$\overline{GH}=\sqrt{\overline{HN}^2-\overline{GN}^2}=\sqrt{2^2-1^2}=\sqrt{3}$

평면 ABC와 평면 HMN은 서로 평행하고 $\overline{GP}\perp\overline{MN}$, $\overline{GH}\perp\overline{MN}$이므로 평면 PMN과 평면 ABC의 이면각의 크기를 θ라 하면

$\cos\theta=\frac{\overline{GP}^2+\overline{GH}^2-\overline{HP}^2}{2\times\overline{GP}\times\overline{GH}}$

$=\frac{(\sqrt{6})^2+(\sqrt{3})^2-1^2}{2\times\sqrt{6}\times\sqrt{3}}=\frac{2\sqrt{2}}{3}$

평면 ABC와 평면 BEC가 서로 수직이므로

두 평면 BEC와 PMN의 이면각의 크기가 $\frac{\pi}{2}-\theta$이다.

이때

$\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\sin\theta=\sqrt{1-\cos^2\theta}$

$=\sqrt{1-\left(\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)^2}=\frac{1}{3}$

이므로 삼각형 PMN의 평면 BEC 위로의 정사영의 넓이 S는

$S=\sqrt{6}\times\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\sqrt{6}\times\frac{1}{3}=\frac{\sqrt{6}}{3}$

따라서 $36S^2=36\times\left(\frac{\sqrt{6}}{3}\right)^2=24$

답 24

30

점 C는 세 점 O, A, B로 만들어지는 평행사변형의 다른 한 꼭짓점이다.

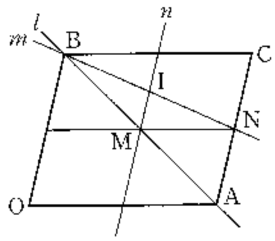
한편, 점 P의 위치벡터 $\vec{p}$에 대하여

$\vec{p}=t\vec{a}+(1-t)\vec{b}$에서 $\vec{p}=\vec{b}+t(\vec{a}-\vec{b})$이므로 직선 l은 점 B를 지나고 방향벡터가 $\vec{a}-\vec{b}$인 직선이다.

또한 $\vec{q}=-s\vec{a}+\left(1+\frac{s}{2}\right)\vec{b}$에서 $\vec{q}=\vec{b}+s\left(-\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}\right)$이므로 직선 m은 점 B를 지나고 방향벡터가 $-\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}$인 직선이다.

같은 방법으로 $\vec{r}=\frac{1}{2}\vec{a}+\left(u+\frac{1}{2}\right)\vec{b}$에서 $\vec{r}=\frac{1}{2}(\vec{a}+\vec{b})+u\vec{b}$이므로 직선 n은 선분 AB의 중점을 지나고 방향벡터가 $\vec{b}$인 직선이다.

평행사변형 OACB에 대하여 선분 AB의 중점을 M, 선분 AC의 중점을 N이라 하고 두 직선 m, n의 교점을 I라 하면 세 직선 l, m, n으로 둘러싸인 부분은 그림과 같다.



삼각형 BAN에서

$\overline{MI}=\frac{1}{2}\overline{AN}$

또한 $\overline{MI}=\frac{1}{2}\overline{AN}=\frac{1}{4}\overline{AC}$이므로 $\overline{AC}=4\overline{MI}$

삼각형 BMI에서 선분 MI를 밑변, 점 B에서 직선 n까지의 거리를 h라 하면 점 B에서 직선 AC까지의 거리는 $2h$이다.

한편, 삼각형 BMI의 넓이가 16이므로

$\frac{1}{2}\times\overline{MI}\times h=16$에서 $\overline{MI}\times h=32$

따라서 평행사변형 OACB의 넓이는

$\overline{AC}\times2h=4\overline{MI}\times2h=8\times\overline{MI}\times h$

$=8\times32=256$

답 256

실전 모의고사 2회

본문 126~137쪽

01 ④	02 ②	03 ⑤	04 ①	05 ②
06 ③	07 ④	08 ③	09 ②	10 ④
11 ⑤	12 ⑤	13 ⑤	14 ①	15 ②
16 7	17 127	18 124	19 581	20 42
21 14	22 109	23 ③	24 ①	25 ③
26 ④	27 ④	28 ④	29 20	30 80

01

$9^{\sqrt{2}}\times 3^{1-2\sqrt{2}}=(3^2)^{\sqrt{2}}\times 3^{1-2\sqrt{2}}=3^{2\sqrt{2}}\times 3^{1-2\sqrt{2}}=3^{2\sqrt{2}+(1-2\sqrt{2})}=3$

답 ④

02

$f(x)=(3x^2-2)(x^2+2x+5)$에서

$f'(x)=6x(x^2+2x+5)+(3x^2-2)(2x+2)$

따라서 $f'(1)=6\times8+1\times4=52$

답 ②

03

$\lim\limits_{x\to1+}f(x)=2$, $\lim\limits_{x\to-2+}f(x)=3$

따라서 $\lim\limits_{x\to1-}f(x)+\lim\limits_{x\to-2-}f(x)=2+3=5$

답 ⑤

04

등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공차를 d라 하면

$a_3=8$에서 $a+2d=8$ …… ㉠

$a_2+a_6=\frac{1}{2}a_{15}$에서 $(a+d)+(a+5d)=\frac{1}{2}(a+14d)$

$4a+12d=a+14d$, $3a=2d$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=2$, $d=3$

즉, 수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 2이고 공차가 3인 등차수열이므로

$a_k=2+(k-1)\times3=3k-1$

$a_k=3k-1>100$에서 $k>\frac{101}{3}$

따라서 조건을 만족시키는 자연수 k의 최솟값은 34이다.

답 ①

05

$\sum\limits_{k=1}^{10}(a_k+2b_k)=30$에서

$\sum\limits_{k=1}^{10}a_k+2\sum\limits_{k=1}^{10}b_k=30$ …… ㉠

$\sum\limits_{k=1}^{10}\left(b_k-\frac{1}{2}\right)=\frac{11}{2}$에서

$\sum\limits_{k=1}^{10}b_k-\frac{1}{2}\times10=\frac{11}{2}$, $\sum\limits_{k=1}^{10}b_k=\frac{11}{2}+5=\frac{21}{2}$ …… ㉡

㉡을 ㉠에 대입하면 $\sum\limits_{k=1}^{10}a_k+21=30$

따라서 $\sum\limits_{k=1}^{10}a_k=30-21=9$

답 ②

06

시각 $t=1$에서 $t=3$까지 점 P의 위치의 변화량은

$$\int_1^3 v(t)\,dt=\int_1^3(2t^2+at+2)\,dt=\left[\frac{2}{3}t^3+\frac{a}{2}t^2+2t\right]_1^3$$
$$=\left(18+\frac{9}{2}a+6\right)-\left(\frac{2}{3}+\frac{a}{2}+2\right)=4a+\frac{64}{3}$$

이므로 $4a+\frac{64}{3}=\frac{100}{3}$에서 $4a=12$

따라서 $a=3$

답 ③

07

직각삼각형 AOH에서 $\overline{\mathrm{AH}}=\sqrt{\overline{\mathrm{OA}}^2-\overline{\mathrm{OH}}^2}=\sqrt{10^2-6^2}=8$이므로

$\angle\mathrm{AOH}=\alpha$라 하면 $\sin\alpha=\frac{4}{5}$, $\cos\alpha=\frac{3}{5}$

직선 l과 x축의 교점을 B라 하면 직각삼각형 AOH와 직각삼각형 ABO는 서로 닮음이므로

$\angle\mathrm{ABO}=\angle\mathrm{AOH}=\alpha$

이때 $\theta=\pi-\alpha$이므로

$\sin\theta=\sin(\pi-\alpha)=\sin\alpha=\frac{4}{5}$

$\cos\theta=\cos(\pi-\alpha)=-\cos\alpha=-\frac{3}{5}$

따라서 $\sin\theta+\cos\theta=\frac{4}{5}+\left(-\frac{3}{5}\right)=\frac{1}{5}$

답 ④

08

$f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ (a, b, c는 상수)라 하면

$f'(x)=3x^2+2ax+b$

곡선 $y=f(x)$가 점 $(1, 3)$에서 직선 $y=4x-1$에 접하므로

$f(1)=3$, $f'(1)=4$

함수 $f(x)$가 $x=\frac{1}{3}$에서 극소이므로 $f'\left(\frac{1}{3}\right)=0$

$f'(1)=3+2a+b=4$에서 $2a+b=1$ …… ㉠

$f'\left(\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{3}+\frac{2}{3}a+b=0$에서 $2a+3b=-1$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=1$, $b=-1$이므로

$f'(x)=3x^2+2x-1=(3x-1)(x+1)$

$f'(x)=0$에서 $x=\frac{1}{3}$ 또는 $x=-1$이므로 함수 $f(x)$는 $x=-1$에서 극대이다.

한편, $f(x)=x^3+x^2-x+c$이고 $f(1)=3$이므로

$1+1-1+c=3$에서 $c=2$

따라서 $f(x)=x^3+x^2-x+2$이므로 구하는 함수 $f(x)$의 극댓값은

$f(-1)=-1+1-(-1)+2=3$

답 ③

09

$\log_2 f(1)+\log_2(1-3)^2=5$에서 $\log_2 f(1)=3$이므로 $f(1)=8$

$f(1)-8=0$ …… ㉠

또한 $\log_2 f(5)+\log_2(5-3)^2=5$에서 $\log_2 f(5)=3$이므로 $f(5)=8$

$f(5)-8=0$ …… ㉡

㉠, ㉡에서

$f(x)-8=a(x-1)(x-5)$ (a는 양수)

$f(x)=a(x-1)(x-5)+8=a(x-3)^2-4a+8$

이차함수 $f(x)$는 $x=3$에서 최솟값 4를 가져야 하므로

$-4a+8=4$에서 $a=1$

따라서 $f(x)=(x-1)(x-5)+8$이므로

$f(0)=(-1)\times(-5)+8=13$

답 ③

10

$f(0)=5$이므로

$f(x)=ax^3+bx^2+cx+5$ (a, b, c는 상수이고 $a\neq0$)이라 하면

$g(x)=\int_{-x}^{x} f(t)\,dt=\int_{-x}^{x} (at^3+bt^2+ct+5)\,dt$

$=2\int_0^x (bt^2+5)\,dt=2\left[\frac{b}{3}t^3+5t\right]_0^x=\frac{2b}{3}x^3+10x$

$g(1)=12$이므로

$\frac{2b}{3}+10=12$, $b=3$

따라서 $g(x)=2x^3+10x$이므로

$\int_0^2 g(x)\,dx=\int_0^2 (2x^3+10x)\,dx=\left[\frac{1}{2}x^4+5x^2\right]_0^2=8+20=28$

답 ④

11

함수 $f(x)$의 최댓값과 최솟값은 각각 $a+c$, $-a+c$이므로

조건 (가)에 의하여

$(a+c)+(-a+c)=2c=6$에서 $c=3$

함수 $f(x)$의 주기는 $\frac{2\pi}{|b\pi|}=\frac{2}{b}$

또한 $g(x)=\left|\cos\left(3\pi x-\frac{1}{2}\right)\right|+1=\left|\cos 3\pi\left(x-\frac{1}{6\pi}\right)\right|+1$이므로

함수 $g(x)$의 주기는 $\frac{\pi}{3\pi}=\frac{1}{3}$

조건 (나)에 의하여 두 함수 $f(x)$와 $g(x)$의 주기가 서로 같으므로

$\frac{2}{b}=\frac{1}{3}$에서 $b=6$

즉, $f(x)=a\sin(6\pi x)+3$이고 $f\left(\frac{1}{4}\right)=1$이므로

$f\left(\frac{1}{4}\right)=a\sin\left(\frac{3}{2}\pi\right)+3=-a+3=1$에서 $a=2$

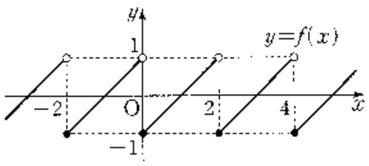
따라서 $f(x)=2\sin(6\pi x)+3$이므로

$f\left(\frac{1}{9}\right)=2\sin\left(\frac{2}{3}\pi\right)+3=2\times\frac{\sqrt{3}}{2}+3=3+\sqrt{3}$

답 ⑤

12

함수 $y=f(x)$의 그래프는 그림과 같다.



ㄱ. $-2\le x<0$일 때, $f(x)=x+1$이므로

$\lim_{x\to0-} f(x)=\lim_{x\to0-}(x+1)=1$

$2\le x<4$일 때, $f(x)=x-3$이므로

$\lim_{x\to2+} f(x)=\lim_{x\to2+}(x-3)=-1$

그러므로 $\lim_{x\to0-} f(x)+\lim_{x\to2+} f(x)=1+(-1)=0$ (참)

ㄴ. 함수 $f(x)$가 $x=2n$ (n은 정수)에서만 불연속이므로 함수 $|f(x)|$가 $x=2n$ (n은 정수)에서 연속이면 실수 전체의 집합에서 연속이다.

앞의 그림에 의하면 모든 정수 n에 대하여

$\lim_{x\to2n-} f(x)=1$이므로 $\lim_{x\to2n-} |f(x)|=1$

$\lim_{x\to2n+} f(x)=-1$이므로 $\lim_{x\to2n+} |f(x)|=1$

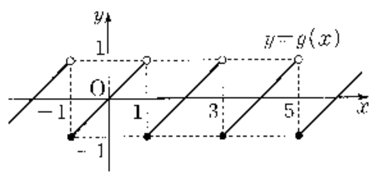
$|f(2n)|=|-1|=1$

즉, $\lim_{x\to2n-} |f(x)|=\lim_{x\to2n+} |f(x)|=|f(2n)|$이므로 함수 $|f(x)|$는 $x=2n$ (n은 정수)에서 연속이다.

그러므로 함수 $|f(x)|$는 실수 전체의 집합에서 연속이다. (참)

ㄷ. 모든 정수 n에 대하여 함수 $f(x)$는 $x=2n$에서만 불연속이고, 함수 $f(x+1)$은 $x=2n-1$에서만 불연속이므로 함수 $f(x)f(x+1)$이 $x=n$ (n은 정수)에서 연속이면 실수 전체의 집합에서 연속이다.

$g(x)=f(x+1)$이라 하면 $-1\le x<1$일 때 $g(x)=x$이고, 모든 실수 x에 대하여 $g(x)=g(x+2)$이므로 함수 $y=g(x)$의 그래프는 그림과 같다.



정수 n에 대하여

(i) $\lim_{x\to2n-} f(x)f(x+1)=\lim_{x\to2n-} f(x)g(x)=1\times0=0$

$\lim_{x\to2n+} f(x)f(x+1)=\lim_{x\to2n+} f(x)g(x)=(-1)\times0=0$

$f(2n)f(2n+1)=f(2n)g(2n)=(-1)\times0=0$

즉, 모든 정수 n에 대하여

$\lim_{x\to2n-} f(x)f(x+1)=\lim_{x\to2n+} f(x)f(x+1)$

$=f(2n)f(2n+1)$

이므로 함수 $f(x)f(x+1)$은 $x=2n$ (n은 정수)에서 연속이다.

(ii) $\lim_{x\to(2n-1)-} f(x)f(x+1)=\lim_{x\to(2n-1)-} f(x)g(x)=0\times1=0$

$\lim_{x\to(2n-1)+} f(x)f(x+1)=\lim_{x\to(2n-1)+} f(x)g(x)=0\times(-1)=0$

$f(2n-1)f(2n)=f(2n-1)g(2n-1)=0\times(-1)=0$

즉, 모든 정수 n에 대하여

$\lim_{x\to(2n-1)-} f(x)f(x+1)=\lim_{x\to(2n-1)+} f(x)f(x+1)$

$=f(2n-1)f(2n)$

이므로 함수 $f(x)f(x+1)$은 $x=2n-1$ (n은 정수)에서 연속이다.

(i), (ii)에 의하여 함수 $f(x)f(x+1)$은 $x=n$ (n은 정수)에서 연속이므로 실수 전체의 집합에서 연속이다. (참)

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

답 ⑤

13

두 점 A, B의 좌표는 각각

A$(t, \log_2 t)$, B$(t, \log_2 16t)$

점 C의 y좌표는 점 A의 y좌표와 같으므로 점 C의 x좌표를 a라 하면

$\log_2 16a = \log_2 t$에서 $16a = t$, 즉 $a = \frac{t}{16}$

점 D의 y좌표는 점 B의 y좌표와 같으므로 점 D의 x좌표를 b라 하면

$\log_2 b = \log_2 16t$에서 $b = 16t$

즉, C$\left(\frac{t}{16}, \log_2 t\right)$, D$(16t, \log_2 16t)$이므로 삼각형 ABC의 무게중심 G_1의 좌표는

$$G_1\left(\frac{t+t+\frac{t}{16}}{3}, \frac{\log_2 t + \log_2 16t + \log_2 t}{3}\right)$$

즉, $G_1\left(\frac{11}{16}t, \frac{4}{3} + \log_2 t\right)$

이고, 삼각형 ADB의 무게중심 G_2의 좌표는

$$G_2\left(\frac{t+16t+t}{3}, \frac{\log_2 t + \log_2 16t + \log_2 16t}{3}\right)$$

즉, $G_2\left(6t, \frac{8}{3} + \log_2 t\right)$

이므로 직선 G_1G_2의 기울기는

$$\frac{\left(\frac{8}{3} + \log_2 t\right) - \left(\frac{4}{3} + \log_2 t\right)}{6t - \frac{11}{16}t} = \frac{\frac{4}{3}}{\frac{85}{16}t} = \frac{64}{255t}$$

즉, $\frac{64}{255t} = \frac{16}{255}$이므로 $t = 4$

따라서 A$(4, 2)$, B$(4, 6)$, D$(64, 6)$이므로 삼각형 ADB의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times (64-4) \times (6-2) = \frac{1}{2} \times 60 \times 4 = 120$$

답 ⑤

14

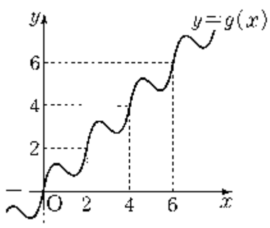
삼차함수 $f(x)$의 최고차항의 계수를 a라 하면 방정식 $f(x) - x = 0$의 세 실근이 0, 1, 2이므로

$f(x) - x = ax(x-1)(x-2)$ $(a > 0)$

으로 놓을 수 있다.

즉, $f(x) = ax(x-1)(x-2) + x$이고, $f(0) = 0$, $f(1) = 1$, $f(2) = 2$이다.

한편, 함수 $g(x)$는 $0 \le x \le 2$일 때 $g(x) = f(x)$이고, 모든 실수 x에 대하여 $g(x+2) = g(x) + 2$를 만족시키므로 함수 $y = g(x)$의 그래프는 그림과 같이 생각할 수 있다.



이때

$$\int_0^2 f(x)\,dx = \int_0^2 \{ax(x-1)(x-2) + x\}\,dx$$
$$= \int_0^2 \{ax^3 - 3ax^2 + (2a+1)x\}\,dx$$
$$= \left[\frac{a}{4}x^4 - ax^3 + \frac{2a+1}{2}x^2\right]_0^2$$
$$= 4a - 8a + 4a + 2 = 2$$

이고, 자연수 k에 대하여

$$\int_{2k-2}^{2k} g(x)\,dx = 2 \times (2k-2) + \int_0^2 g(x)\,dx = (4k-4) + \int_0^2 f(x)\,dx$$
$$= (4k-4) + 2 = 4k - 2$$

이므로

$$\int_0^{2n} g(x)\,dx = \int_0^2 g(x)\,dx + \int_2^4 g(x)\,dx + \cdots + \int_{2n-2}^{2n} g(x)\,dx$$
$$= \sum_{k=1}^{n}(4k-2) = 4 \times \frac{n(n+1)}{2} - 2n = 2n^2$$

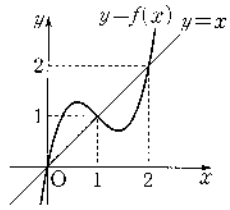
따라서 $2n^2 = 72$에서 $n^2 = 36$

n은 자연수이므로 $n = 6$

답 ①

참고

함수 $y = f(x)$의 그래프와 직선 $y = x$가 세 점 $(0, 0)$, $(1, 1)$, $(2, 2)$에서 만나므로 함수 $y = f(x)$의 그래프의 개형은 그림과 같다.



$f(x) = ax(x-1)(x-2) + x$에서

$$f(x+1) - 1 = ax(x+1)(x-1) + x$$
$$= ax^3 + (1-a)x$$

이므로 함수 $y = f(x+1) - 1$의 그래프는 원점에 대하여 대칭이다.

이때 함수 $y = f(x)$의 그래프는 함수 $y = f(x+1) - 1$의 그래프를 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이므로 함수 $y = f(x)$의 그래프는 점 $(1, 1)$에 대하여 대칭이다.

따라서 그림의 색칠된 부분의 넓이는 한 변의 길이가 2인 정사각형의 넓이의 $\frac{1}{2}$이므로 2이다.

즉, $\int_0^2 f(x)\,dx = 2$

15

선분 CD가 원의 지름이므로 $\angle CPD = \frac{\pi}{2}$

직각삼각형 PCD에서 $\overline{CD}^2 = \overline{PC}^2 + \overline{PD}^2$이므로

$\overline{PD} = \sqrt{\overline{CD}^2 - \overline{PC}^2} = \sqrt{(2\sqrt{5})^2 - 4^2} = 2$

삼각형 APD의 넓이가 $\frac{\sqrt{5}}{3}$이므로 $\angle APD = \theta$라 하면

$\frac{1}{2} \times \overline{PA} \times \overline{PD} \times \sin\theta = \frac{\sqrt{5}}{3}$

$\frac{1}{2} \times 1 \times 2 \times \sin\theta = \frac{\sqrt{5}}{3}$, $\sin\theta = \frac{\sqrt{5}}{3}$

선분 AB가 원의 지름이므로 $\angle APB = \frac{\pi}{2}$

직각삼각형 PAB에서 $\overline{AB}^2 = \overline{PA}^2 + \overline{PB}^2$이므로

$\overline{PB} = \sqrt{\overline{AB}^2 - \overline{PA}^2} = \sqrt{(\sqrt{10})^2 - 1^2} = 3$

삼각형 BPC에서 $\angle BPC = \pi - \theta$이고 $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$이므로

$\cos(\pi - \theta) = -\cos\theta = \sqrt{1 - \sin^2\theta} = \sqrt{1 - \left(\frac{\sqrt{5}}{3}\right)^2} = \frac{2}{3}$

코사인법칙에 의하여

$$\overline{BC}^2 = \overline{PB}^2 + \overline{PC}^2 - 2 \times \overline{PB} \times \overline{PC} \times \cos(\pi - \theta)$$
$$= 3^2 + 4^2 - 2 \times 3 \times 4 \times \frac{2}{3} = 9 + 16 - 16 = 9$$

$\overline{BC} > 0$이므로 $\overline{BC} = 3$

답 ②

16

함수 $f(x)=2x^3-x+1$에 대하여 x의 값이 -2에서 2까지 변할 때의 함수 $f(x)$의 평균변화율은

$$\frac{f(2)-f(-2)}{2-(-2)}=\frac{(16-2+1)-(-16+2+1)}{4}=\frac{28}{4}=7$$

답 7

17

$\log_2 \frac{128}{n}=m$ (m은 자연수)로 놓으면

$\frac{128}{n}=2^m$에서 $2^{7-m}=n$

n이 자연수이므로 $7-m\ge 0$

즉, m은 $1\le m\le 7$인 자연수이므로 조건을 만족시키는 n은

2^0, 2^1, 2^2, 2^3, 2^4, 2^5, 2^6

따라서 모든 n의 값의 합은 $\frac{1\times(2^7-1)}{2-1}=2^7-1=127$

답 127

18

함수 $f(x)$의 차수가 3 이상이면

$\lim_{x\to\infty}\frac{f(2x)+3x^2}{x^2-1}=\infty$ 또는 $\lim_{x\to\infty}\frac{f(2x)+3x^2}{x^2-1}=-\infty$

이므로 조건을 만족시키지 않고, 함수 $f(x)$의 차수가 1 이하이면

$\lim_{x\to\infty}\frac{f(2x)+3x^2}{x^2-1}=3$

이므로 조건을 만족시키지 않는다. 그러므로 함수 $f(x)$는 이차함수이다.

$f(x)=ax^2+bx+c$ (a, b, c는 상수, $a\ne0$)이라 하면

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(2x)+3x^2}{x^2-1}=\lim_{x\to\infty}\frac{4ax^2+2bx+c+3x^2}{x^2-1}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{4a+3+\frac{2b}{x}+\frac{c}{x^2}}{1-\frac{1}{x^2}}=4a+3$$

이므로 $4a+3=7$에서 $a=1$

즉, $f(x)=x^2+bx+c$이고

$\lim_{x\to\infty}f\left(\frac{1}{x}\right)=\lim_{t\to0+}f(t)=\lim_{t\to0+}(t^2+bt+c)=c$

이므로 $c=4$

그러므로 $f(x)=x^2+bx+4$이고

$f(x)=\left(x+\frac{b}{2}\right)^2+4-\frac{b^2}{4}$

이므로 함수 $f(x)$는 $x=-\frac{b}{2}$일 때 최솟값을 갖는다.

즉, $-\frac{b}{2}=-1$에서 $b=2$

따라서 $f(x)=x^2+2x+4$이므로 $f(10)=100+20+4=124$

답 124

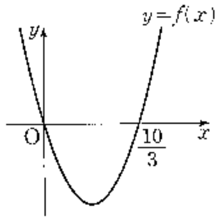
19

$\int_0^1 f(t)\,dt=k$ (k는 상수)로 놓으면 $f(x)=x^2+(k-2)x$이고

$$\int_0^1 \{t^2+(k-2)t\}\,dt=\left[\frac{1}{3}t^3+\frac{k-2}{2}t^2\right]_0^1=\frac{1}{3}+\frac{k-2}{2}=\frac{k}{2}-\frac{2}{3}$$

이므로 $\frac{k}{2}-\frac{2}{3}=k$에서 $k=-\frac{4}{3}$

즉, $f(x)=x^2-\frac{10}{3}x$이고 함수 $y=f(x)$의 그래프는 그림과 같다.



따라서 곡선 $y=f(x)$와 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이는

$$\int_0^{\frac{10}{3}}|f(x)|\,dx=\int_0^{\frac{10}{3}}\{-f(x)\}\,dx$$

$$=\int_0^{\frac{10}{3}}\left(-x^2+\frac{10}{3}x\right)dx$$

$$=\left[-\frac{1}{3}x^3+\frac{5}{3}x^2\right]_0^{\frac{10}{3}}=-\frac{1000}{81}+\frac{500}{27}=\frac{500}{81}$$

즉, $p=81$, $q=500$이므로 $p+q=81+500=581$

답 581

20

조건 (다)에서 n이 홀수이면 $n+2$가 홀수이므로 $f(n)$의 값에 상관없이 $a_n=1$

n이 짝수이면 $n+2$가 짝수이므로

$f(n)>0$이면 $a_n=2$

$f(n)=0$이면 $a_n=1$, $f(n)<0$이면 $a_n=0$

$\sum_{n=1}^{10}a_n=10$에서 $\sum_{n=1}^{10}a_n=\sum_{n=1}^{5}a_{2n-1}+\sum_{n=1}^{5}a_{2n}=5+\sum_{n=1}^{5}a_{2n}=10$

즉, $\sum_{n=1}^{5}a_{2n}=5$ …… ㉠

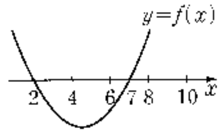
조건 (나)에서 $f(n)=0$인 10 이하의 자연수 n의 값이 2개 이하이므로 ㉠을 만족시키려면 a_2, a_4, a_6, a_8, a_{10} 중에서 $a_n=1$인 짝수 n이 반드시 1개 존재해야 하고 $a_n=2$인 짝수 n이 2개, $a_n=0$인 짝수 n이 2개 존재해야 한다.

즉, 10 이하의 자연수 n 중에서 $f(n)=0$인 짝수 n이 1개, $f(n)>0$인 짝수 n이 2개, $f(n)<0$인 짝수 n이 2개 존재한다.

이때 이차방정식 $f(x)=0$은 서로 다른 두 실근을 갖고 조건 (나)에 의하여 $f(n)=0$인 10 이하의 홀수 n이 하나 존재한다.

(i) $f(2)=0$인 경우

조건 (가)에서 $f(1)>0$이므로 $f(4)$와 $f(6)$의 값이 모두 음수이고 $f(8)$과 $f(10)$의 값이 모두 양수이어야 한다.



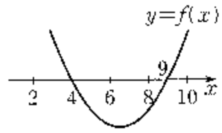
조건 (나)에 의하여 $f(7)=0$이므로

$f(x)=(x-2)(x-7)$

(ii) $f(4)=0$인 경우

$f(2)<0$이면 방정식 $f(x)=0$의 한 실근이 사잇값의 정리에 의하여 1과 2 사이에 존재해야 하므로 조건 (나)를 만족시키지 않는다.

즉, $f(2)>0$이므로 $f(6)$과 $f(8)$의 값이 모두 음수이고 $f(10)$의 값이 양수이어야 한다.



조건 (나)에 의하여 $f(9)=0$이므로

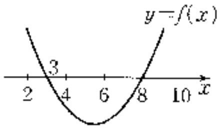
$f(x)=(x-4)(x-9)$

(iii) $f(6)=0$인 경우

$f(4)>0$이면 $f(2)>0$이고 $f(8)$과 $f(10)$의 값이 모두 음수이어야 한다. 즉, 방정식 $f(x)=0$의 한 실근이 10보다 커야 하므로 조건 (나)를 만족시키지 않는다.

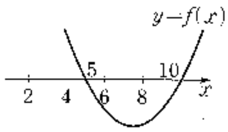
즉, $f(4)<0$이면 $f(8)$과 $f(10)$의 값이 모두 양수이어야 한다.
따라서 $f(2)<0$이고 $f(1)=0$이어야 하는데 조건 (가)를 만족시키지 않으므로 조건을 만족시키는 $f(x)$는 존재하지 않는다.

(iv) $f(8)=0$인 경우
$f(6)>0$이면 $f(2)$와 $f(4)$의 값도 모두 양수이므로 조건을 만족시키지 않는다.
즉, $f(6)<0$이므로 $f(4)<0$이고 $f(2)$와 $f(10)$의 값이 모두 양수이어야 한다.



조건 (나)에 의하여 $f(3)=0$이므로
$f(x)=(x-3)(x-8)$

(v) $f(10)=0$인 경우
$f(8)>0$이면 $f(2)$, $f(4)$, $f(6)$의 값이 모두 양수이므로 조건을 만족시키지 않는다.
즉, $f(8)<0$이므로 $f(6)<0$이고 $f(2)$와 $f(4)$의 값이 모두 양수이어야 한다.



조건 (나)에 의하여 $f(5)=0$이므로
$f(x)=(x-5)(x-10)$

(i)~(v)에서 조건을 만족시키는 $f(x)$는
$f(x)=(x-2)(x-7)$ 또는 $f(x)=(x-4)(x-9)$
또는 $f(x)=(x-3)(x-8)$ 또는 $f(x)=(x-5)(x-10)$
따라서 $f(11)$의 값은 $9\times4=36$, $7\times2=14$, $8\times3=24$, $6\times1=6$이므로 최솟값은 6, 최댓값은 36이고, 그 합은 42이다.

답 42

21

$p<0$이라 하면 자연수 n에 대하여 $a_n\ge0$이면 $a_{n+1}=a_n-p>a_n$, 즉 $a_{21}\neq a_1$이므로 조건을 만족시키지 않는다. 즉, p는 자연수이다.
a_1, a_2, $\cdots$, a_{20} 중 음수인 것의 개수를 k라 하면 0 이상인 것의 개수는 $20-k$이므로
$a_{21}=a_1-(20-k)p+kpq$
$k=20$이면 $a_1>0$에 모순이므로 k는 19 이하인 자연수이다.
$a_{21}=a_1$에서
$(20-k)p=kpq$, $kp(q+1)=20p$
$p\neq0$이므로 $k(q+1)=20$
q는 정수이고 k는 19 이하의 자연수이므로 k는 19 이하인 20의 양의 약수이다. 즉, k는 1, 2, 4, 5, 10

(i) $k=1$인 경우, $q=19$
18 이하의 자연수 n_1에 대하여
$a_{n_1+1}=a_1-n_1p\ge0$, $a_{n_1+2}=a_1-(n_1+1)p<0$
즉, $\dfrac{40}{n_1+1}<p\le\dfrac{40}{n_1}$일 때
$a_{n_1+3}=a_1-(n_1+1)p+19p=a_1+(18-n_1)p$
$n_1\ge14$일 때, $2<\dfrac{40}{n_1+1}<\dfrac{40}{n_1}<3$이므로 이를 만족시키는 자연수 p가 존재하지 않는다.
$n_1=13$일 때, $\dfrac{20}{7}<p\le\dfrac{40}{13}$이므로 $p=3$
$n_1\le12$일 때, $3<\dfrac{40}{n_1+1}<p$이므로 자연수 p가 존재하면 $p>3$
따라서 $p\ge3$이므로 이 경우에 $p+q$의 최솟값은 $3+19=22$

(ii) $k=2$인 경우, $q=9$
8 이하의 자연수 n_1에 대하여
$a_{n_1+1}=a_1-n_1p\ge0$, $a_{n_1+2}=a_1-(n_1+1)p<0$
즉, $\dfrac{40}{n_1+1}<p\le\dfrac{40}{n_1}$일 때
$a_{n_1+3}=a_1-(n_1+1)p+9p=a_1+(8-n_1)p\ge0$
$a_{n_1+4}=a_1+(7-n_1)p$
$\vdots$
$a_{n_1+3+(8-n_1)}=a_1$, 즉 $a_{11}=a_1$이고 $a_{n+10}=a_n$
모든 자연수 n에 대하여 $a_{n+10}=a_n$을 만족시키므로 $a_{21}=a_1$을 만족시킨다.
$n_1=8$일 때, $\dfrac{40}{9}<p\le5$이므로 $p=5$
$n_1\le7$일 때, $5\le\dfrac{40}{n_1+1}$이므로 자연수 p가 존재하면 $p>5$
따라서 $p\ge5$이므로 이 경우에 $p+q$의 최솟값은 $5+9=14$

(iii) $k=4$인 경우, $q=4$
3 이하의 자연수 n_1에 대하여
$a_{n_1+1}=a_1-n_1p\ge0$, $a_{n_1+2}=a_1-(n_1+1)p<0$
즉, $\dfrac{40}{n_1+1}<p\le\dfrac{40}{n_1}$일 때
$a_{n_1+3}=a_1-(n_1+1)p+4p=a_1+(3-n_1)p\ge0$
$a_{n_1+4}=a_1+(2-n_1)p$
$\vdots$
$a_{n_1+3+(3-n_1)}=a_1$, 즉 $a_6=a_1$이고 $a_{n+5}=a_n$
모든 자연수 n에 대하여 $a_{n+5}=a_n$을 만족시키므로 $a_{21}=a_1$을 만족시킨다.
$n_1=3$일 때, $10<p\le\dfrac{40}{3}$이므로 $p=11$, 12, 13
$n_1\le2$일 때, $13<\dfrac{40}{n_1+1}$이므로 자연수 p가 존재하면 $p>13$
따라서 $p\ge11$이므로 이 경우에 $p+q$의 최솟값은 $11+4=15$

(iv) $k=5$인 경우, $q=3$
$a_3=a_1-2p\ge0$, $a_4=a_1-3p<0$인 경우
즉, $\dfrac{40}{3}<p\le20$에서 $p=14$, 15, $\cdots$, 20인 경우
$a_5=a_1-3p+3p=a_1$
$a_2=a_1-p\ge0$, $a_3=a_1-2p<0$인 경우
즉, $\dfrac{40}{2}<p\le40$에서 $p=21$, 22, $\cdots$, 40
$a_4=a_1-2p+3p=a_1+p>0$, 즉 $a_5=a_1$이고 $a_{n+4}=a_n$
모든 자연수 n에 대하여 $a_{n+4}=a_n$을 만족시키므로 $a_{21}=a_1$을 만족시킨다.
따라서 $p\ge14$이므로 이 경우에 $p+q$의 최솟값은 $14+3=17$

(v) $k=10$인 경우, $q=1$
$a_2=a_1-p<0$, 즉 $p>40$을 만족시키고 $a_3=a_1-p+p=a_1$이므로 주기가 2이다. 즉, 모든 자연수 n에 대하여 $a_{n+2}=a_n$을 만족시키므로 $a_{21}=a_1$을 만족시킨다.
따라서 이 경우에 $p+q$의 최솟값은
$41+1=42$

(i)~(v)에서 $p+q$의 최솟값은 14이다.

답 14

22

함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하므로 $x=k$에서 연속이어야 한다. 즉, $f(k)=\lim_{x\to k-}f(x)=\lim_{x\to k+}f(x)$이어야 하므로

$f(k)=k^3-3k+a=-k^2+13k+b$

이때

$$\lim_{x\to k-}\frac{f(x)-f(k)}{x-k}=\lim_{x\to k-}\frac{(x^3-3x+a)-(k^3-3k+a)}{x-k}$$
$$=\lim_{x\to k-}\frac{(x-k)(x^2+kx+k^2-3)}{x-k}$$
$$=\lim_{x\to k-}(x^2+kx+k^2-3)=3k^2-3$$

$$\lim_{x\to k+}\frac{f(x)-f(k)}{x-k}=\lim_{x\to k+}\frac{(-x^2+13x+b)-(-k^2+13k+b)}{x-k}$$
$$=\lim_{x\to k+}\frac{-(x-k)(x+k-13)}{x-k}$$
$$=\lim_{x\to k+}(-x-k+13)=-2k+13$$

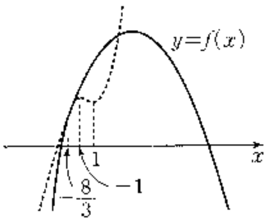
이고, 함수 $f(x)$가 $x=k$에서 미분가능하므로

$3k^2-3=-2k+13$, $3k^2+2k-16=0$, $(3k+8)(k-2)=0$

$k=-\frac{8}{3}$ 또는 $k=2$

이때 함수 $y=x^3-3x+a$에서 $y'=3x^2-3=3(x+1)(x-1)$

이므로 함수 $y=x^3-3x+a$는 $x=1$ 또는 $x=-1$에서 극값을 갖는데, $k=-\frac{8}{3}$이면 함수 $y=f(x)$의 그래프가 [그림 1]과 같으므로 조건 (나)를 만족시킬 수 없다.



[그림 1]

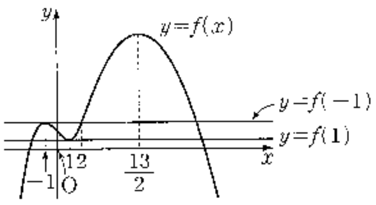
즉, $k=2$이므로

$$f(x)=\begin{cases} x^3-3x+a & (x<2) \\ -x^2+13x+b & (x\geq 2)\end{cases}$$

이고, 함수 $f(x)$가 $x=2$에서 연속이어야 하므로 $2+a=22+b$

$a-b=20$ ······ ㉠

한편, $f(-1)=f(2)<f\left(\frac{13}{2}\right)$이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 [그림 2]와 같다. 즉, 방정식 $f(x)=c$의 서로 다른 실근의 개수가 3이 되는 경우는 $c=f(-1)$ 또는 $c=f(1)$인 경우이다.



[그림 2]

$f(-1)=2+a$, $f(1)=-2+a$이므로

$(2+a)+(-2+a)=8$에서 $a=4$

㉠에서 $b=a-20=-16$

$$\text{즉, } f(x)=\begin{cases} x^3-3x+4 & (x<2) \\ -x^2+13x-16 & (x\geq 2)\end{cases}$$

이고, 방정식 $f(x)=d$의 서로 다른 실근의 개수가 1이 되는 경우는 $d=f\left(\frac{13}{2}\right)$인 경우이므로 구하는 실수 d의 값은

$$d=f\left(\frac{13}{2}\right)=-\left(\frac{13}{2}\right)^2+13\times\frac{13}{2}-16=\frac{105}{4}$$

따라서 $p=4$, $q=105$이므로 $p+q=4+105=109$

답 109

23

두 점 $A(-3, a, 5)$, $B(b, 3, -2)$에 대하여 선분 AB를 $2:3$으로 외분하는 점의 좌표는

$\left(\frac{2b+9}{2-3}, \frac{6-3a}{2-3}, \frac{-4-15}{2-3}\right)$, 즉 $(-2b-9, 3a-6, 19)$

이므로

$-2b-9=1$에서 $b=-5$, $3a-6=-3$에서 $a=1$

$c=19$

따라서 $a+b+c=1+(-5)+19=15$

답 ③

24

그림에서 점 P의 좌표는 $(a, 6)$이고 점 P는 포물선 $y^2=4x$ 위의 점이므로

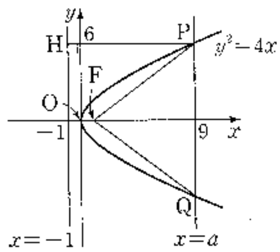
$6^2=4a$에서 $a=9$

포물선 $y^2=4x$의 준선의 방정식이 $x=-1$이므로 점 P에서 준선에 내린 수선의 발을 H라 하면

$\overline{PF}=\overline{PH}=9-(-1)=10$

삼각형 PFQ에서 코사인법칙에 의하여

$$\cos(\angle PFQ)=\frac{10^2+10^2-12^2}{2\times10\times10}$$
$$=\frac{56}{200}=\frac{7}{25}$$



답 ①

다른 풀이

점 P의 좌표는 $(a, 6)$이고 점 P는 포물선 $y^2=4x$ 위의 점이므로

$6^2=4a$에서 $a=9$

즉, 점 P의 좌표가 $(9, 6)$이고 F의 좌표가 $(1, 0)$이므로

$\overline{PF}=\sqrt{(9-1)^2+(6-0)^2}=\sqrt{64+36}=10$

삼각형 PFQ에서 코사인법칙에 의하여

$$\cos(\angle PFQ)=\frac{10^2+10^2-12^2}{2\times10\times10}=\frac{56}{200}=\frac{7}{25}$$

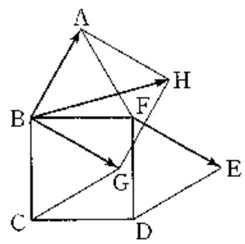
25

그림과 같이 선분 BC를 한 변으로 하는 정삼각형의 다른 한 꼭짓점 중 정사각형 BCDF의 내부에 있는 점을 G라 하면

$\overrightarrow{FE}=\overrightarrow{BG}$이므로

$\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{FE}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BG}$

이때 $\angle ABG=90^\circ$이고 $\overline{AB}=\overline{BG}$이므로



세 점 A, B, G를 꼭짓점으로 하는 정사각형의 다른 한 꼭짓점을 H라 하면

$\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BG}=\overrightarrow{BH}$

따라서 $|\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{FE}|=|\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BG}|=|\overrightarrow{BH}|=2\sqrt{2}$이므로

$|\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{FE}|^2=8$

답 ③

26

쌍곡선 $x^2-\frac{y^2}{2}=1$ 위의 점 (3, 4)에서의 접선의 방정식은

$3x-\frac{4y}{2}=1$에서 $y=\frac{3}{2}x-\frac{1}{2}$

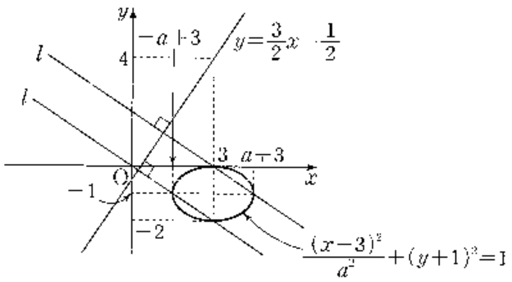
이 접선에 수직인 직선을 l이라 하면 직선 l의 기울기는 $-\frac{2}{3}$이다.

$\frac{(x-3)^2}{a^2}+(y+1)^2=1$ ⋯⋯ ㉠

㉠은 타원 $\frac{x^2}{a^2}+y^2=1$을 x축의 방향으로 3만큼, y축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 것이다.

그러므로 타원 ㉠의 네 꼭짓점의 좌표는

$(3, 0)$, $(3, -2)$, $(a+3, -1)$, $(-a+3, -1)$이다.



그림과 같이 직선 l은 타원 ㉠의 네 꼭짓점 중 두 꼭짓점 $(3, 0)$, $(a+3, -1)$을 지나거나 두 꼭짓점 $(3, -2)$, $(-a+3, -1)$을 지나야 하므로 직선 l의 기울기는

$\frac{(-1)-0}{(a+3)-3}=\frac{(-1)-(-2)}{(-a+3)-3}=-\frac{1}{a}$

따라서 $-\frac{1}{a}=-\frac{2}{3}$이므로 $a=\frac{3}{2}$

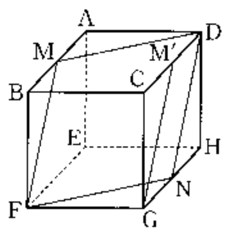
답 ④

27

사각형 DMFN은 두 대각선의 길이가 $2\sqrt{2}$, $2\sqrt{3}$인 마름모이므로 사각형 DMFN의 넓이는

$\frac{1}{2}\times2\sqrt{2}\times2\sqrt{3}=2\sqrt{6}$

그림과 같이 선분 CD의 중점을 M′이라 하면 사각형 DMFN의 평면 CGHD 위로의 정사영이 DM′GN이고 사각형 DM′GN의 넓이는 $1\times2=2$



그러므로 두 평면 DMFN, CGHD가 이루는 예각의 크기를 θ라 하면

$\cos\theta=\frac{2}{2\sqrt{6}}=\frac{\sqrt{6}}{6}$

이때 삼각형 CGD의 넓이는 $\frac{1}{2}\times2\times2=2$

이므로 삼각형 CGD의 평면 DMFN 위로의 정사영의 넓이 S는

$S=2\cos\theta=2\times\frac{\sqrt{6}}{6}=\frac{\sqrt{6}}{3}$

따라서 $S^2=\left(\frac{\sqrt{6}}{3}\right)^2=\frac{2}{3}$

답 ④

28

타원의 중심 $(1, t)$에서 두 직선 $y=2x+4$, $y=2x-4$에 이르는 거리가 서로 같으므로

$\frac{|2\times1-t+4|}{\sqrt{5}}=\frac{|2\times1-t-4|}{\sqrt{5}}$

에서 $|6-t|=|t+2|$이므로

$6-t=-t-2$ 또는 $6-t=t+2$

$6-t=-t-2$에서 $6\neq-2$

즉, 조건을 만족시키지 않는다.

$6-t=t+2$에서 $t=2$

타원 $\frac{(x-1)^2}{a^2}+\frac{(y-2)^2}{b^2}=1$의 기울기가 2인 접선의 방정식은

$y-2=2(x-1)\pm\sqrt{4a^2+b^2}$에서 $y=2x\pm\sqrt{4a^2+b^2}$

즉, $4a^2+b^2=16$ ⋯⋯ ㉠

$\overline{\mathrm{FF'}}=4$이므로 $|a^2-b^2|=4$

$a^2-b^2=4$인 경우 ㉠과 연립하여 풀면 $b^2=0$이므로 조건을 만족시키지 않는다.

$b^2-a^2=4$인 경우 ㉠과 연립하여 풀면

$a^2=\frac{12}{5}$, $b^2=\frac{32}{5}$

따라서 $ta^2+b^2=2\times\frac{12}{5}+\frac{32}{5}=\frac{56}{5}$

답 ④

29

$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=t\overrightarrow{\mathrm{OA}}$에서 $\overrightarrow{\mathrm{OP}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}=t\overrightarrow{\mathrm{OA}}$, $\overrightarrow{\mathrm{OP}}=(t+1)\overrightarrow{\mathrm{OA}}$

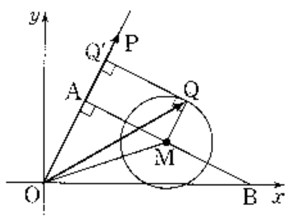
즉, 점 P는 직선 $y=2x$의 $x>2$인 부분에 있는 점이고,

$|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|=(t+1)|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|=2\sqrt{5}(t+1)$

한편, 선분 AB의 중점을 M이라 하면

$|\overrightarrow{\mathrm{AQ}}+\overrightarrow{\mathrm{BQ}}|=|2\overrightarrow{\mathrm{MQ}}|=2\sqrt{5}$에서 $|\overrightarrow{\mathrm{MQ}}|=\sqrt{5}$

이므로 점 Q는 점 M(6, 2)를 중심으로 하고 반지름의 길이가 $\sqrt{5}$인 원 위에 있는 점이다.



이때 점 Q에서 직선 $y=2x$에 내린 수선의 발을 Q′이라 하면

$\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=|\overrightarrow{\mathrm{OP}}||\overrightarrow{\mathrm{OQ'}}|$

이므로 그림과 같이 직선 QQ′이 원 위의 제1사분면에 있는 점 Q에서 원에 접할 때 $\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$의 값이 최대가 된다.

한편, 직선 AM의 기울기가 $\frac{2-4}{6-2}=-\frac{1}{2}$이므로 점 M에서 직선 $y=2x$에 내린 수선의 발이 점 A이다.

즉, 사각형 AMQQ′은 직사각형이고,

$\overline{\mathrm{OA}}=\sqrt{2^2+4^2}=2\sqrt{5}$, $\overline{\mathrm{AQ'}}=\overline{\mathrm{MQ}}=\sqrt{5}$이므로

$\overline{\mathrm{OQ'}}=\overline{\mathrm{OA}}+\overline{\mathrm{AQ'}}=2\sqrt{5}+\sqrt{5}=3\sqrt{5}$

그러므로

$f(t)=|\overrightarrow{\mathrm{OP}}||\overrightarrow{\mathrm{OQ'}}|=2\sqrt{5}(t+1)\times3\sqrt{5}=30(t+1)$

$f(t)=200$에서 $30(t+1)=200$

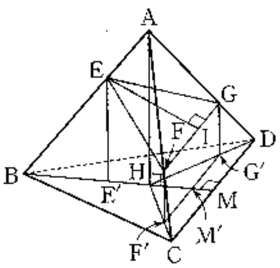
$t=\frac{20}{3}-1=\frac{17}{3}$

따라서 $p=3$, $q=17$이므로 $p+q=3+17=20$

답 20

30

점 A에서 삼각형 BCD에 내린 수선의 발을 H라 하고, 세 점 E, F, G에서 삼각형 BCD에 내린 수선의 발을 각각 E′, F′, G′이라 하자.



두 점 F, G는 두 선분 AC, AD를 $2:1$로 내분하는 점이므로 두 점 F′, G′은 두 선분 HC, HD를 각각 $2:1$로 내분하는 점이다.

또한 점 E는 선분 AB를 $1:t$로 내분하는 점이므로 점 E′은 선분 HB를 $1:t$로 내분하는 점이다.

삼각형 AFG와 삼각형 ACD는 닮음비가 $2:3$인 닮은 도형이므로

$\overline{FG}=\overline{F'G'}=\frac{2}{3}\overline{CD}=\frac{2}{3}\times 6=4$

점 B에서 선분 CD에 내린 수선의 발을 M이라 하고, 직선 BM이 선분 F′G′과 만나는 점을 M′이라 하자.

삼각형 E′F′G′의 넓이가 $\frac{8\sqrt{3}}{3}$이므로

$\frac{1}{2}\times 4\times\overline{E'M'}=\frac{8\sqrt{3}}{3}$, $\overline{E'M'}=\frac{4\sqrt{3}}{3}$

이때 $\overline{HM'}=\frac{2}{3}\overline{HM}=\frac{2}{3}\times\sqrt{3}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$이므로

$\overline{E'H}=\overline{E'M'}-\overline{HM'}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$

또 $\overline{BH}=2\sqrt{3}$이므로 $\overline{BE'}=2\sqrt{3}-\frac{2\sqrt{3}}{3}=\frac{4\sqrt{3}}{3}$

즉, $\overline{E'H}:\overline{BE'}=\frac{2\sqrt{3}}{3}:\frac{4\sqrt{3}}{3}=1:2$이므로 $t=2$

즉, 점 E는 선분 AB를 $1:2$로 내분하는 점이므로

$\overline{AE}=\frac{1}{3}\times 6=2$

삼각형 AEF와 삼각형 AGE에서

$\overline{AF}=\overline{AG}=\frac{2}{3}\times 6=4$, $\angle FAE=\angle GAE=\frac{\pi}{3}$

이므로 $\angle AEF=\angle AEG=\frac{\pi}{2}$이고

$\overline{EF}=\overline{EG}=4\sin\frac{\pi}{3}=4\times\frac{\sqrt{3}}{2}=2\sqrt{3}$

점 E에서 선분 FG에 내린 수선의 발을 I라 하면

$\overline{EI}=\sqrt{(2\sqrt{3})^2-2^2}=2\sqrt{2}$

이므로 삼각형 EFG의 넓이는

$\frac{1}{2}\times 4\times 2\sqrt{2}=4\sqrt{2}$

즉, $\cos^2\theta=\left(\frac{\frac{8\sqrt{3}}{3}}{4\sqrt{2}}\right)^2=\left(\frac{\sqrt{6}}{3}\right)^2=\frac{2}{3}$

따라서 $60t\cos^2\theta=60\times 2\times\frac{2}{3}=80$

답 80

실전 모의고사 3회

본문 138~149쪽

1 ②	2 ③	3 ①	4 ⑤	5 ⑤
6 ④	7 ②	8 ②	9 ⑤	10 ③
11 ④	12 ②	13 ③	14 ②	15 ③
16 6	17 31	18 22	19 2	20 4
21 8	22 45	23 ①	24 ④	25 ④
26 ②	27 ③	28 ④	29 36	30 12

1

$8^{\frac{\sqrt{3}}{3}}\times\left(\frac{1}{2}\right)^{\sqrt{3}+1}=(2^3)^{\frac{\sqrt{3}}{3}}\times(2^{-1})^{\sqrt{3}+1}=2^{\sqrt{3}-\sqrt{3}-1}=2^{-1}=\frac{1}{2}$

답 ②

2

$f(x)=3x^3-6x^2+2$에서 $f'(x)=9x^2-12x$

따라서 $f'(1)=9-12=-3$

답 ③

3

등비수열 $\{a_n\}$의 공비를 r라 하면

$a_4=4a_2$에서 $a_1r^3=4a_1r$, $r^2=4$

모든 항이 양수이므로 $r=2$

따라서 $a_1=a_3\times\frac{1}{r^2}=4\times\frac{1}{2^2}=1$

답 ①

다른 풀이

등비수열 $\{a_n\}$의 공비를 r라 하면

$a_4=a_3\times r=4r$이므로

$a_4=4a_2$에서 $4r=4a_1\times r$

따라서 $a_1=1$

4

$\lim_{x\to -1-}f(x)=1$, $\lim_{x\to 0+}f(x)=2$, $f(1)=-1$이므로

$\lim_{x\to -1-}f(x)+\lim_{x\to 0+}f(x)+f(1)=1+2+(-1)=2$

답 ⑤

5

$\sin\theta-\cos\theta=\frac{1}{3}$의 양변을 제곱하면

$\sin^2\theta-2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta=\frac{1}{9}$

$1-2\sin\theta\cos\theta=\frac{1}{9}$, $\sin\theta\cos\theta=\frac{4}{9}$

$(\sin\theta+\cos\theta)^2=\sin^2\theta+2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta$

$=1+2\times\frac{4}{9}=\frac{17}{9}$

$0<\theta<\frac{\pi}{2}$에서 $\sin\theta>0$, $\cos\theta>0$이므로 $\sin\theta+\cos\theta>0$

따라서 $\sin\theta+\cos\theta=\frac{\sqrt{17}}{3}$

답 ⑤

06

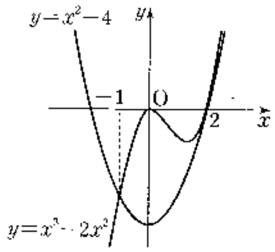
두 곡선 $y=x^3-2x^2$과 $y=x^2-4$가 만나는 점의 x좌표를 구하면

$x^3-2x^2=x^2-4$에서

$x^3-3x^2+4=0$, $(x+1)(x-2)^2=0$

$x=-1$ 또는 $x=2$

두 곡선 $y=x^3-2x^2$과 $y=x^2-4$는 그림과 같다.



따라서 구하는 넓이를 S라 하면

$$S=\int_{-1}^{2}|(x^3-2x^2)-(x^2-4)|\,dx$$

$$=\int_{-1}^{2}(x^3-3x^2+4)\,dx$$

$$=\left[\frac{1}{4}x^4-x^3+4x\right]_{-1}^{2}$$

$$=(4-8+8)-\left(\frac{1}{4}+1-4\right)=\frac{27}{4}$$

답 ①

07

$9^{x-1}-k\times 3^x+9=0$의 양변에 9를 곱하면

$9^x-9k\times 3^x+81=0$

$3^x=X\ (X>0)$이라 하면

$X^2-9kX+81=0$ …… ㉠

이 방정식이 오직 하나의 양의 실근을 가져야 한다.

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 두 근의 곱이 $81>0$이므로 두 근의 부호는 같다. 따라서 이차방정식이 오직 하나의 양의 실근을 가지려면 ㉠의 판별식을 D라 할 때, $D=0$이어야 한다.

즉, $D=(-9k)^2-4\times 81=0$에서

$k^2-4=0$, $k^2=4$

이때 이 중근이 양수이어야 하므로 이차방정식의 두 근의 합이 양수이다.

즉, $9k>0$에서 $k>0$이므로

$k=2$

$X^2-18X+81=0$에서

$(X-9)^2=0$, $X=9$, $3^x=9$, $x=2$

즉, $a=2$

따라서 $k+a=2+2=4$

답 ②

08

두 함수 $f(x)$와 $f(x)+5$는 $x=a$에서만 불연속이므로 함수 $f(x)\{f(x)+5\}$가 실수 전체의 집합에서 연속이려면 $x=a$에서 연속이어야 한다. 즉,

$$\lim_{x\to a-}f(x)\{f(x)+5\}=\lim_{x\to a+}f(x)\{f(x)+5\}=f(a)\{f(a)+5\}$$

…… ㉠

$\lim_{x\to a-}f(x)\{f(x)+5\}=(a+1)(a+6)$

$\lim_{x\to a+}f(x)\{f(x)+5\}=(a-5)a$

$f(a)\{f(a)+5\}=(a+1)(a+6)$

이므로 ㉠에서 $(a+1)(a+6)=(a-5)a$

$a^2+7a+6=a^2-5a$, $12a=-6$

따라서 $a=-\frac{1}{2}$

답 ②

09

$a_3=\frac{1}{6}$에서

$a_3=\frac{1}{4-8a_2}$이므로 $\frac{1}{6}=\frac{1}{4-8a_2}$, $a_2=-\frac{1}{4}$

$a_2=\frac{1}{4-8a_1}$이므로 $-\frac{1}{4}=\frac{1}{4-8a_1}$, $a_1=1$

또한 $a_3=\frac{1}{6}$에서

$$a_4=\frac{1}{4-8a_3}=\frac{1}{4-8\times\frac{1}{6}}=\frac{3}{8}$$

$$a_5=\frac{1}{4-8a_4}=\frac{1}{4-8\times\frac{3}{8}}=1$$

즉, 수열 $\{a_n\}$은 $1, -\frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \frac{3}{8}, 1, -\frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \frac{3}{8}, \cdots$으로 첫째항부터 네 개의 수 $1, -\frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \frac{3}{8}$이 이 순서대로 반복하여 나타난다.

따라서

$$\sum_{n=1}^{25}a_n=\sum_{n=1}^{24}a_n+a_{25}=6(a_1+a_2+a_3+a_4)+a_1$$

$$=6\left(1-\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\frac{3}{8}\right)+1=6\times\frac{31}{24}+1=\frac{35}{4}$$

답 ⑤

10

$y=x^3-x-1$에서 $y'=3x^2-1$

점 $A(-1, -1)$에서의 접선의 기울기는 $3\times(-1)^2-1=2$이므로

곡선 $y=x^3-x-1$ 위의 점 $A(-1, -1)$에서의 접선의 방정식은

$y+1=2(x+1)$, 즉 $y=2x+1$

곡선 $y=x^3-x-1$과 직선 $y=2x+1$이 만나는 점의 x좌표는

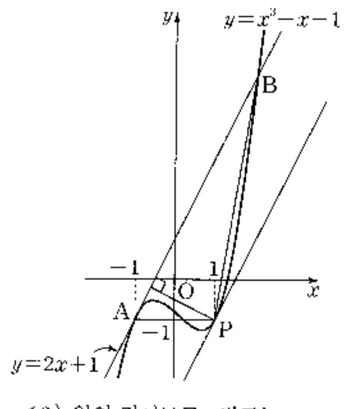
$x^3-x-1=2x+1$에서 $(x+1)^2(x-2)=0$

$x=-1$ 또는 $x=2$

따라서 $A(-1, -1)$, $B(2, 5)$이므로

$\overline{AB}=\sqrt{(2+1)^2+(5+1)^2}=\sqrt{45}=3\sqrt{5}$

삼각형 APB의 넓이는 그림과 같이 점 P에서의 접선의 기울기가 직선 AB의 기울기 2와 같을 때 최대가 된다.



$y'=3x^2-1$에서

점 P의 x좌표를 t라 하면

$3t^2-1=2$

$3(t+1)(t-1)=0$

이때 $t\neq-1$이므로

$t=1$

점 P는 곡선 $y=x^3-x-1\ (-1<x<2)$ 위의 점이므로 y좌표는

$y=1^3-1-1=-1$

즉, $P(1, -1)$

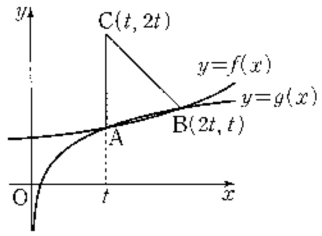
점 P(1, −1)과 직선 $y=2x+1$, 즉 $2x-y+1=0$ 사이의 거리는

$$\frac{|2\times1-(-1)+1|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=\frac{4}{\sqrt5}$$

따라서 삼각형 APB의 넓이의 최댓값은 $\frac{1}{2}\times3\sqrt5\times\frac{4}{\sqrt5}=6$

답 ③

11



조건 (가)에서 직선 OC의 기울기가 2이므로 점 C의 좌표를 $(t, 2t)$라 하면 점 B의 좌표는 $(2t, t)$이다.

점 B가 곡선 $y=f(x)$ 위의 점이므로

$a^{2t}+4=t$ …… ㉠

점 B가 곡선 $y=g(x)$ 위의 점이므로

$\frac{1}{4}\log_a 2t=t$, $a^{4t}=2t$ …… ㉡

㉡에서 $t=\frac{1}{2}a^{4t}$이므로 이를 ㉠에 대입하면

$a^{2t}+4=\frac{1}{2}a^{4t}$

$a^{2t}=k\ (k>0)$이라 하면

$k+4=\frac{1}{2}k^2$, $k^2-2k-8=0$, $(k+2)(k-4)=0$

$k>0$이므로 $k=4$

$a^{2t}=4$이므로 ㉠에서 $t=8$이고, $a^{16}=4$에서 $a=4^{\frac{1}{16}}=2^{\frac{1}{8}}$이다.

즉, 점 B의 좌표는 (16, 8), 점 C의 좌표는 (8, 16)이다.

$f(x)=2^{\frac{1}{8}x}+4$이고, 조건 (나)에서 두 점 A, C의 x좌표가 같으므로

$f(8)=2^1+4=6$

에서 점 A의 좌표는 (8, 6)이다.

$\overline{AC}=16-6=10$이고, 점 B와 직선 AC 사이의 거리는 $16-8=8$이므로 삼각형 ABC의 넓이는

$\frac{1}{2}\times10\times8=40$

답 ④

12

$f(x)=x^4-\frac{4}{3}kx^3-4k^2x^2$에서

$f'(x)=4x^3-4kx^2-8k^2x=4x(x^2-kx-2k^2)$

$f'(x)=0$에서 $4x(x+k)(x-2k)=0$

$x=-k$ 또는 $x=0$ 또는 $x=2k$

$k>0$이므로 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

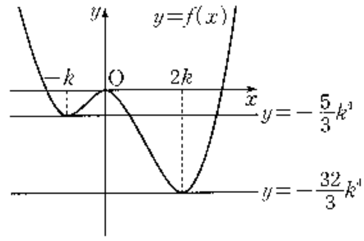
x	…	$-k$	…	0	…	$2k$	…
$f'(x)$	−	0	+	0	−	0	+
$f(x)$	↘	극소	↗	극대	↘	극소	↗

함수 $f(x)$는 $x=-k$와 $x=2k$에서 극소이고 $x=0$에서 극대이다.

$f(-k)=k^4+\frac{4}{3}k^4-4k^4=-\frac{5}{3}k^4$, $f(0)=0$,

$f(2k)=16k^4-\frac{32}{3}k^4-16k^4=-\frac{32}{3}k^4$

함수 $y=f(x)$의 그래프는 그림과 같다.



곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=-\frac{32}{3}k^4$은 오직 한 점에서만 만나므로 조건 (가)에서

$a=-\frac{32}{3}k^4$

직선 $y=0$과 직선 $y=-\frac{5}{3}k^4$은 곡선 $y=f(x)$와 각각 서로 다른 세 점에서 만나므로 조건 (나)에서

$b=-\frac{5}{3}k^4$ 또는 $b=0$

(i) $a=-\frac{32}{3}k^4$, $b=0$일 때, $b-a=0-\left(-\frac{32}{3}k^4\right)=\frac{32}{3}k^4$

(ii) $a=-\frac{32}{3}k^4$, $b=-\frac{5}{3}k^4$일 때, $b-a=-\frac{5}{3}k^4-\left(-\frac{32}{3}k^4\right)=9k^4$

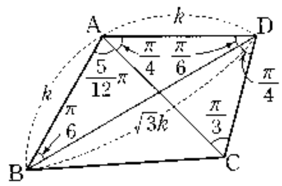
따라서 $b-a$의 모든 값의 합은

$\frac{32}{3}k^4+9k^4=\frac{59}{3}k^4=236$

이므로 $k^4=12$

답 ②

13



선분 AD의 길이를 $k\ (k>0)$이라 하자.

$\angle ABD=\angle BDA=\frac{\pi}{6}$이므로

$\overline{BD}=2\times\overline{AB}\times\cos\frac{\pi}{6}=\sqrt3k$

삼각형 ABD에서 사인법칙에 의하여

$\frac{k}{\sin(\angle ABD)}=2R_1$이므로

$R_1=\frac{k}{2\sin\frac{\pi}{6}}=k$

삼각형 ACD에서 사인법칙에 의하여

$\frac{\overline{AD}}{\sin(\angle ACD)}=\frac{\overline{CD}}{\sin(\angle CAD)}$이므로

$\frac{k}{\sin\frac{\pi}{3}}=\frac{\overline{CD}}{\sin\frac{\pi}{4}}$

$\overline{CD}=\boxed{\frac{\sqrt6}{3}k}$

삼각형 BCD에서 코사인법칙에 의하여

$\overline{BC}^2=\overline{BD}^2+\overline{CD}^2-2\times\overline{BD}\times\overline{CD}\times\cos(\angle CDB)$

$=(\sqrt3k)^2+\left(\frac{\sqrt6}{3}k\right)^2-2\times\sqrt3k\times\frac{\sqrt6}{3}k\times\frac{\sqrt2}{2}$

$=3k^2+\frac{2}{3}k^2-2k^2=\frac{5}{3}k^2$

$\overline{BC}=\boxed{\frac{\sqrt{15}}{3}k}$

삼각형 BCD에서 사인법칙에 의하여

$$\frac{\overline{BC}}{\sin(\angle CDB)}=2R_2,\ R_2=\boxed{\frac{\sqrt{30}}{6}k}$$

이므로 $R_1 : R_2=k : \boxed{\frac{\sqrt{30}}{6}k}$이다.

따라서 $f(k)=\frac{\sqrt{6}}{3}k,\ g(k)=\frac{\sqrt{15}}{3}k,\ h(k)=\frac{\sqrt{30}}{6}k$이므로

$$\frac{f(3)\times g(3)}{h(6)}=\frac{\sqrt{6}\times\sqrt{15}}{\sqrt{30}}=\sqrt{3}$$

답 ③

14

ㄱ. $f(x)g(x)=\begin{cases}(-x^2+x)g(x) & (x<0)\\(x^2-2x)g(x) & (x\ge 0)\end{cases}$

$=\begin{cases}-x(x-1)g(x) & (x<0)\\x(x-2)g(x) & (x\ge 0)\end{cases}$

$f(0)=0$이므로 $f(0)g(0)=0$

$$\lim_{x\to 0-}\frac{f(x)g(x)}{x}=\lim_{x\to 0-}\{-(x-1)g(x)\}=g(0)$$

$$\lim_{x\to 0+}\frac{f(x)g(x)}{x}=\lim_{x\to 0+}\{(x-2)g(x)\}=-2g(0)$$

함수 $f(x)g(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하므로 $x=0$에서도 미분가능하다.

즉, $\lim_{x\to 0-}\frac{f(x)g(x)}{x}=\lim_{x\to 0+}\frac{f(x)g(x)}{x}$에서

$g(0)=-2g(0)$, $g(0)=0$ (참)

ㄴ. ㄱ에서 $g(0)=0$이므로 일차함수 $g(x)$는

$g(x)=mx$ (m은 0이 아닌 상수)

로 놓을 수 있다.

$\int_{-1}^{0}f(x)\,dx=\int_{-1}^{0}f(x)g(x)\,dx$에서

$$\int_{-1}^{0}f(x)\,dx=\int_{-1}^{0}(-x^2+x)\,dx=\left[-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2\right]_{-1}^{0}$$

$$=0-\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\right)=-\frac{5}{6}$$

$$\int_{-1}^{0}f(x)g(x)\,dx=\int_{-1}^{0}mx(-x^2+x)\,dx=m\int_{-1}^{0}(-x^3+x^2)\,dx$$

$$=m\left[-\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{3}x^3\right]_{-1}^{0}$$

$$=m\times\left\{0-\left(-\frac{1}{4}-\frac{1}{3}\right)\right\}=\frac{7}{12}m$$

$-\frac{5}{6}=\frac{7}{12}m$에서 $m=-\frac{10}{7}$

따라서 $g(x)=-\frac{10}{7}x$이므로 $g(-1)=\frac{10}{7}$ (참)

ㄷ. $\int_{-1}^{1}f(x)g(x)\,dx=0$인 일차함수 $g(x)=mx$ (m은 0이 아닌 상수)가 존재한다고 하자.

$$\int_{-1}^{1}f(x)g(x)\,dx=\int_{-1}^{0}mx(-x^2+x)\,dx+\int_{0}^{1}mx(x^2-2x)\,dx$$

이때 ㄴ에서

$$\int_{-1}^{0}mx(-x^2+x)\,dx=\frac{7}{12}m$$

$$\int_{0}^{1}mx(x^2-2x)\,dx=m\int_{0}^{1}(x^3-2x^2)\,dx=m\left[\frac{1}{4}x^4-\frac{2}{3}x^3\right]_{0}^{1}$$

$$=m\left(\frac{1}{4}-\frac{2}{3}\right)=-\frac{5}{12}m$$

따라서

$$\int_{-1}^{1}f(x)g(x)\,dx=\frac{7}{12}m+\left(-\frac{5}{12}m\right)=\frac{m}{6}=0$$

이므로 $m=0$이 되어 모순이다.

즉, $\int_{-1}^{1}f(x)g(x)\,dx=0$을 만족시키는 일차함수 $g(x)$가 존재하지 않는다. (거짓)

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

답 ②

15

등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공차를 d $(d>0)$이라 하자.

$a_na_{n+5}\le 0$에서 $a_n(a_n+5d)\le 0$

$-5d\le a_n\le 0$ ...... ㉠

$$S_n=\frac{n(a+a_n)}{2}$$

$$S_{n+5}=\frac{(n+5)(a+a_{n+5})}{2}=\frac{(n+5)(a+a_n+5d)}{2}$$

n은 자연수이므로 $S_nS_{n+5}\le 0$에서

$(a+a_n)(a+5d+a_n)\le 0$

$d>0$이므로 $-a-5d\le a_n\le -a$ ...... ㉡

한편, $a\ge 0$이면 $a_n\ge 0$에서 $n(A)\le 1$이므로 $n(A\cap B)=3$을 만족시킬 수 없다. 즉, $a<0$

$n(A\cap B)=3$이므로 ㉡에서 $-a-5d<0$ ...... ㉢

따라서 $A\cap B=\{n\,|\,-a-5d\le a_n\le 0,\ n$은 자연수$\}$이다.

한편, $S_m=a_m$인 짝수인 자연수 m이 존재하므로

$a_m=S_m-S_{m-1}$에서 $S_m=S_m-S_{m-1}$, $S_{m-1}=0$

$\frac{(m-1)(a+a_{m-1})}{2}=0$, $a+a_{m-1}=0$

$a+\{a+(m-2)d\}=0$

$m=2k$ (k는 자연수)라 하면 $2a+(2k-2)d=0$

즉, $-a=(k-1)d$인 자연수 k가 존재한다.

㉢에서 $-a-5d=(k-1)d-5d=(k-6)d<0$이므로 k는 5 이하의 자연수이다.

$-a=(k-1)d$에서

$a_n=a+(n-1)d=-(k-1)d+(n-1)d=(n-k)d$

이므로

$A\cap B=\{n\,|\,(k-6)d\le(n-k)d\le 0,\ n$은 자연수$\}$

$=\{n\,|\,k-6\le n-k\le 0,\ n$은 자연수$\}$

$=\{n\,|\,2k-6\le n\le k,\ n$은 자연수$\}$

k의 값에 따라 집합 $A\cap B$를 구하면 다음과 같다.

$k=1$이면 $A\cap B=\{1\}$

$k=2$이면 $A\cap B=\{1,\ 2\}$

$k=3$이면 $A\cap B=\{1,\ 2,\ 3\}$

$k=4$이면 $A\cap B=\{2,\ 3,\ 4\}$

$k=5$이면 $A\cap B=\{4,\ 5\}$

이때 $n(A\cap B)=3$이므로 $k=3$ 또는 $k=4$

(i) $k=3$일 때, $a=-2d$이고

$a_n=(n-k)d=(n-3)d$

㉠에서 $-5d\le(n-3)d\le0$, $-5\le n-3\le0$, $-2\le n\le3$이므로

$A=\{1, 2, 3\}$

㉡에서 $2d-5d\le(n-3)d\le2d$, $-3\le n-3\le2$, $0\le n\le5$이므로

$B=\{1, 2, 3, 4, 5\}$

이때 $A-B=\varnothing$이다.

(ii) $k=4$일 때, $a=-3d$이고

$a_n=(n-k)d=(n-4)d$

㉠에서 $-5d\le(n-4)d\le0$, $-5\le n-4\le0$, $-1\le n\le4$이므로

$A=\{1, 2, 3, 4\}$

㉡에서 $3d-5d\le(n-4)d\le3d$, $-2\le n-4\le3$, $2\le n\le7$이므로

$B=\{2, 3, 4, 5, 6, 7\}$

이때 $A-B=\{1\}\ne\varnothing$이다.

(i), (ii)에서 $k=4$이고 $m=2k=8$이다.

$a=-3d$이므로

$a_m=a_8=a+7d=-3d+7d=4d$,

$a_{m+10}=a_{18}=a+17d=-3d+17d=14d$

따라서 $\dfrac{a_{m+10}}{a_m}=\dfrac{14d}{4d}=\dfrac{7}{2}$

답 ③

16

$t=0$에서 $t=2$까지 점 P가 움직인 거리를 s라 하면

$$s=\int_0^2|v(t)|\,dt=\int_0^2|6t^2-6t|\,dt$$

$$=\int_0^1(6t-6t^2)\,dt+\int_1^2(6t^2-6t)\,dt$$

$$=\Big[3t^2-2t^3\Big]_0^1+\Big[2t^3-3t^2\Big]_1^2$$

$$=(3-2)-0+(16-12)-(2-3)=1+5=6$$

답 6

17

선분 AB의 중점의 x좌표가 1이므로

$\dfrac{\log_2 a+\log_2\frac{2}{3}}{2}=1$, $\log_2\frac{2}{3}a=2$

$\frac{2}{3}a=4$, $a=6$

선분 AB의 중점의 y좌표가 0이므로

$\dfrac{-2+\log_5 b}{2}=0$, $\log_5 b=2$

$b=25$

따라서 $a+b=6+25=31$

답 31

18

$\int_2^x(t^3+2t-1)\,dt=ax^3+3x-f(x)$ …… ㉠

㉠의 양변을 x에 대하여 미분하면

$x^3+2x-1=3ax^2+3-f'(x)$

$f'(x)=-x^3+3ax^2-2x+4$

$f'(2)=16$에서

$-8+12a-4+4=16$

$12a=24$, $a=2$

㉠의 양변에 $x=2$를 대입하면

$\int_2^2(t^3+2t-1)\,dt=8a+6-f(2)$

$0=16+6-f(2)$

따라서 $f(2)=22$

답 22

19

$\sum_{k=1}^{5}(k+a)^2=50+\sum_{k=1}^{5}k(k+a)$에서

$\sum_{k=1}^{5}(k^2+2ak+a^2)=50+\sum_{k=1}^{5}(k^2+ak)$, $\sum_{k=1}^{5}(ak+a^2)=50$

$a\times\dfrac{5\times6}{2}+5a^2=50$, $5a^2+15a-50=0$

$a^2+3a-10=0$, $(a+5)(a-2)=0$

a는 양수이므로 $a=2$

답 2

20

$f(x)=\begin{cases}-2x+2 & (x\le0)\\ 2 & (0<x\le2)\\ 2x-2 & (x>2)\end{cases}$에서

(i) 직선 $y=2x-2$와 곡선 $y=\frac{1}{2}x^2-x+k$가 접하는 경우

이차방정식 $2x-2=\frac{1}{2}x^2-x+k$, 즉 $\frac{1}{2}x^2-3x+k+2=0$의 판별식을 D_1이라 하면

$D_1=(-3)^2-2(k+2)=0$, $k=\frac{5}{2}$

이고, 이때 접점의 좌표는 $(3, 4)$이다.

직선 $y=-2x+2$와 곡선 $y=\frac{1}{2}x^2-x+k$가 접하는 경우

이차방정식 $-2x+2=\frac{1}{2}x^2-x+k$, 즉 $\frac{1}{2}x^2+x+k-2=0$의 판별식을 D_2라 하면

$D_2=1^2-2(k-2)=0$, $k=\frac{5}{2}$

이고, 이때 접점의 좌표는 $(-1, 4)$이다.

직선 $y=2$와 곡선 $y=\frac{1}{2}x^2-x+k$가 접하는 경우

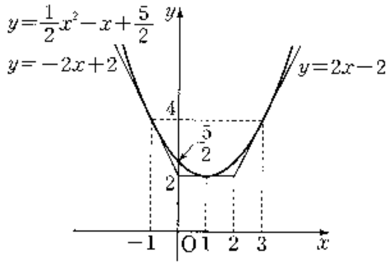
이차방정식 $\frac{1}{2}x^2-x+k=2$, 즉 $\frac{1}{2}x^2-x+k-2=0$의 판별식을 D_3이라 하면

$D_3=(-1)^2-2(k-2)=0$, $k=\frac{5}{2}$

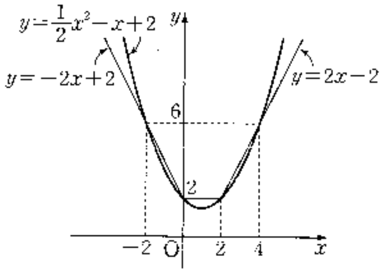
이고, 이때 접점의 좌표는 $(1, 2)$이다.

따라서 $k=\frac{5}{2}$일 때 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프는 세 점 $(3, 4)$, $(-1, 4)$, $(1, 2)$에서 접하므로

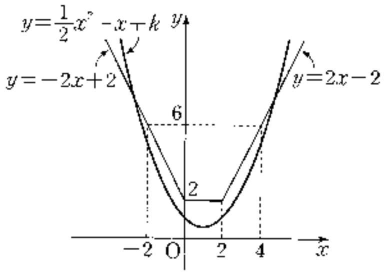
$h\left(\frac{5}{2}\right)=3$



(ii) 함수 $y=g(x)$의 그래프가 함수 $y=f(x)$의 그래프 위의 두 점 $(0,\ 2)$, $(2,\ 2)$를 지나면, 즉 $k=2$이면 함수 $y=f(x)$의 그래프와 서로 다른 두 점 $(-2,\ 6)$, $(4,\ 6)$에서도 만나므로
$h(2)=4$



(iii) $k<2$이면 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프가 만나는 서로 다른 점의 개수는 2이다.



(i), (ii), (iii)에서 함수 $h(k)$는 다음과 같다.

$$h(k)=\begin{cases} 2 & (k<2) \\ 4 & (k=2) \\ 6 & \left(2<k<\frac{5}{2}\right) \\ 3 & \left(k=\frac{5}{2}\right) \\ 0 & \left(k>\frac{5}{2}\right) \end{cases}$$

$h\left(\frac{5}{2}\right)+\lim_{k\to a+}h(k)=9$에서

$\lim_{k\to a+}h(k)=9-h\left(\frac{5}{2}\right)=9-3=6$

$2\le a<\frac{5}{2}$이므로 구하는 실수 a의 최솟값은 $p=2$

따라서 $h(2)=4$

4

21

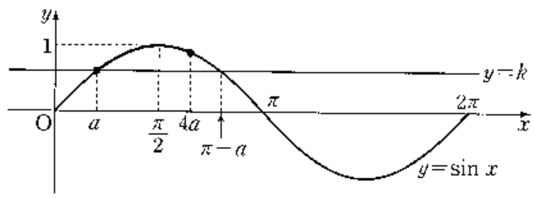
$0<a<\frac{\pi}{2}$에서 $0<4a<2\pi$이고,

$a\le x\le 4a$에서 방정식 $\sin x=1$의 해가 존재하므로 $4a\ge\frac{\pi}{2}$이다.

즉, $\frac{\pi}{2}\le 4a<2\pi$

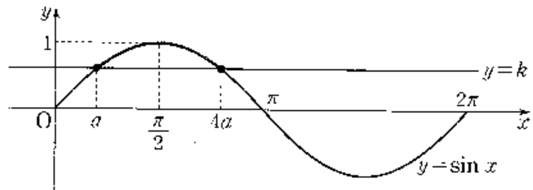
$\sin a=\sin(\pi-a)$이므로 $4a$의 값과 $\pi-a$의 값의 대소 관계에 따라 다음과 같이 경우를 나눌 수 있다.

(i) $\frac{\pi}{2}\le 4a<\pi-a$인 경우



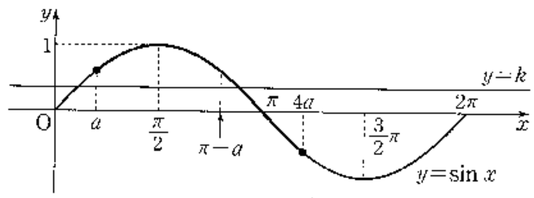
$\sin a\le k<\sin 4a$ 또는 $k=1$이면 $a\le x\le 4a$에서 방정식 $\sin x=k$는 오직 한 개의 실근을 갖는다.

(ii) $4a=\pi-a$인 경우



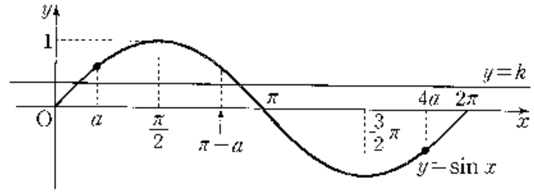
$k=1$이면 $a\le x\le 4a$에서 방정식 $\sin x=k$는 오직 한 개의 실근을 갖는다. $k\ne1$이면 $a\le x\le 4a$에서 방정식 $\sin x=k$의 서로 다른 실근의 개수는 0 또는 2이다.

(iii) $\pi-a<4a\le\frac{3}{2}\pi$인 경우



$\sin 4a\le k<\sin a$ 또는 $k=1$이면 $a\le x\le 4a$에서 방정식 $\sin x=k$는 오직 한 개의 실근을 갖는다.

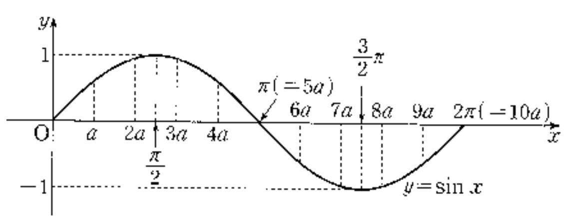
(iv) $\frac{3}{2}\pi<4a<2\pi$인 경우



$\sin 4a<k<\sin a$ 또는 $k=1$ 또는 $k=-1$이면 $a\le x\le 4a$에서 방정식 $\sin x=k$는 오직 한 개의 실근을 갖는다.

(i)~(iv)에서 방정식 $\sin x=k$가 오직 한 개의 실근을 갖도록 하는 실수 k의 값이 1뿐인 경우는 (ii)이다.

즉, $4a=\pi-a$이므로 $a=\frac{\pi}{5}$



한편, m, n $(m<n)$이 10 이하의 두 자연수일 때, 닫힌구간 $[m\alpha, n\alpha]$에서 함수 $y=\sin x$의 최댓값과 최솟값의 합이 0인 경우는

㉠ $0<m\alpha\le\frac{\pi}{2}$이고 $\frac{3}{2}\pi\le n\alpha\le 2\pi$인 경우

(최댓값 1, 최솟값 -1)

㉡ $\frac{\pi}{2}<m\alpha<\pi<n\alpha<\frac{3}{2}\pi$이고 $m\alpha+n\alpha=2\pi$인 경우

(최댓값 $\sin m\alpha$, 최솟값 $\sin n\alpha=\sin(2\pi-m\alpha)=-\sin m\alpha$)

이다.

㉠에서 m의 값은 1 또는 2이고 n의 값은 8 또는 9 또는 10이므로 순서쌍 (m, n)의 개수는 $2\times3=6$

㉡에서 가능한 순서쌍 (m, n)은 $(3, 7)$, $(4, 6)$으로 그 개수는 2

따라서 조건을 만족시키는 모든 순서쌍 (m, n)의 개수는

$6+2=8$

답 8

22

조건 (가)의 $\lim_{x\to2}\frac{f(x)}{x-2}=6$에서 $x\to2$일 때 (분모) $\to0$이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\to0$이어야 한다.

즉, $\lim_{x\to2}f(x)=0$이고 $f(x)$는 다항함수이므로 $f(2)=0$

조건 (나)에서 모든 실수 x에 대하여 $|f(x)|\le|xg(x)|$인 연속함수 $g(x)$가 존재하므로 $0\le|f(0)|\le|0\times g(0)|=0$에서 $f(0)=0$

따라서 최고차항의 계수가 1인 사차함수 $f(x)$를

$f(x)=x(x-2)(x^2+ax+b)$ (a, b는 상수)

로 놓을 수 있다.

$$6=\lim_{x\to2}\frac{f(x)}{x-2}=\lim_{x\to2}\frac{x(x-2)(x^2+ax+b)}{x-2}$$

$$=\lim_{x\to2}x(x^2+ax+b)=2(4+2a+b)$$

에서 $2a+b=-1$

$b=-1-2a$ ...... ㉠

또한 $x\ne0$일 때 $\left|\frac{f(x)}{x}\right|\le|g(x)|$에서 $-|g(x)|\le\frac{f(x)}{x}\le|g(x)|$

함수의 극한의 대소 관계에 의하여

$$-\lim_{x\to0}|g(x)|\le\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x}\le\lim_{x\to0}|g(x)|$$

이고 함수 $g(x)$는 연속함수이므로

$$-|g(0)|\le\lim_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x}\le|g(0)|$$

$-6\le f'(0)\le6$ ...... ㉡

$f(x)=(x^2-2x)(x^2+ax+b)$에서

$f'(x)=(2x-2)(x^2+ax+b)+(x^2-2x)(2x+a)$이므로

$f'(0)=-2b$ ...... ㉢

㉢을 ㉡에 대입하면 $-6\le-2b\le6$, $-3\le b\le3$

㉠에서 $-3\le-2a-1\le3$, $-2\le a\le1$

$f(3)=3(9+3a+b)=3(9+3a-1-2a)=3(a+8)$

따라서 $f(3)=3(a+8)$은

$a=-2$일 때 최소이고 최솟값은 $3\times6=18$,

$a=1$일 때 최대이고 최댓값은 $3\times9=27$이므로 구하는 합은

$18+27=45$

답 45

23

선분 AB를 $1:2$로 내분하는 점을 P라 하면

점 P의 y좌표는 $\frac{1\times b+2\times2}{1+2}=\frac{b+4}{3}$

점 P의 z좌표는 $\frac{1\times(-4)+2\times a}{1+2}=\frac{-4+2a}{3}$

점 P가 x축 위의 점이므로

$\frac{b+4}{3}=0$, $\frac{-4+2a}{3}=0$에서 $a=2$, $b=-4$

따라서 $a+b=2+(-4)=-2$

답 ①

24

한 초점이 x축 위에 있고 두 점근선의 교점이 원점이므로 쌍곡선의 방정식을 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ $(a>0, b>0)$으로 놓을 수 있다.

두 점근선의 방정식이 $y=3x$, $y=-3x$이므로

$\frac{b}{a}=3$, 즉 $b=3a$ ...... ㉠

쌍곡선의 한 초점이 $(2\sqrt{10}, 0)$이므로

$a^2+b^2=(2\sqrt{10})^2$ ...... ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면

$a^2+(3a)^2=40$, $10a^2=40$

즉, $a=2$, $b=6$이므로 구하는 쌍곡선의 방정식은

$\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{36}=1$

따라서 이 쌍곡선의 꼭짓점 중에서 x좌표가 양수인 점의 좌표는 $(2, 0)$이므로 x좌표는 2이다.

답 ④

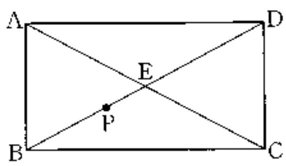
25

$\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}+\frac{1}{3}\overrightarrow{PD}=\frac{1}{3}\overrightarrow{BD}$에서

$$\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}+\frac{1}{3}\overrightarrow{PD}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{PD}-\overrightarrow{PB})$$

$$=\frac{1}{3}\overrightarrow{PD}-\frac{1}{3}\overrightarrow{PB}$$

$\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PC}=-\frac{4}{3}\overrightarrow{PB}=\frac{4}{3}\overrightarrow{BP}$ ...... ㉠



선분 AC의 중점을 E라 하면

$\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PC}=2\times\frac{1}{2}(\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PC})$

$=2\overrightarrow{PE}$ ...... ㉡

㉠, ㉡에서 $\frac{4}{3}\overrightarrow{BP}=2\overrightarrow{PE}$

즉, $\overrightarrow{BP}=\frac{3}{2}\overrightarrow{PE}$

점 P는 선분 BE를 3 : 2로 내분하는 점이므로

$\overrightarrow{BP}=\frac{3}{2}\overrightarrow{PE}=\frac{3}{2}\left(\frac{2}{5}\overrightarrow{BE}\right)$

$\quad=\frac{3}{5}\overrightarrow{BE}=\frac{3}{5}\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{BD}\right)=\frac{3}{10}\overrightarrow{BD}$

에서 $\overrightarrow{PD}=\frac{7}{10}\overrightarrow{BD}$

사각형 ABCD의 넓이가 40이므로 삼각형 ABD의 넓이는

$\frac{1}{2}\times 40=20$

또한 $|\overrightarrow{PD}|=\frac{7}{10}|\overrightarrow{BD}|$이므로 삼각형 APD의 넓이는 삼각형 ABD의 넓이의 $\frac{7}{10}$이다.

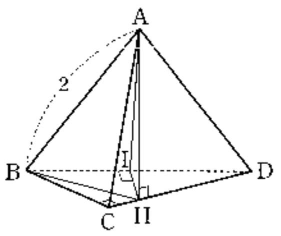
따라서 삼각형 APD의 넓이는

$20\times\frac{7}{10}=14$

답 ④

26

점 H에서 선분 BD에 내린 수선의 발을 I라 하자.



$\overline{AH}\perp$(평면 BCD), $\overline{HC}\perp\overline{BC}$이므로

삼수선의 정리에 의하여 $\overline{AC}\perp\overline{BC}$

직각삼각형 ABC에서

$\overline{AB}=2$, $\angle ABC=\frac{\pi}{3}$이므로

$\overline{BC}=2\cos\frac{\pi}{3}=1$

$\overline{AH}\perp$(평면 BCD), $\overline{HI}\perp\overline{BD}$이므로

삼수선의 정리에 의하여 $\overline{AI}\perp\overline{BD}$

직각삼각형 ABI에서

$\overline{AB}=2$, $\angle ABI=\frac{\pi}{3}$이므로

$\overline{BI}=2\cos\frac{\pi}{3}=1$

선분 BH가 공통, $\overline{BC}=\overline{BI}=1$이므로 두 직각삼각형 BCH, BIH는 서로 합동이다.

따라서 $\angle HBC=\frac{1}{2}\angle DBC=\frac{\pi}{6}$

직각삼각형 BCH에서 $\overline{BC}=1$, $\angle HBC=\frac{\pi}{6}$이므로

$\overline{BC}=\overline{BH}\cos\frac{\pi}{6}$, 즉 $\overline{BH}=\frac{2}{\sqrt{3}}$

따라서 직각삼각형 ABH에서

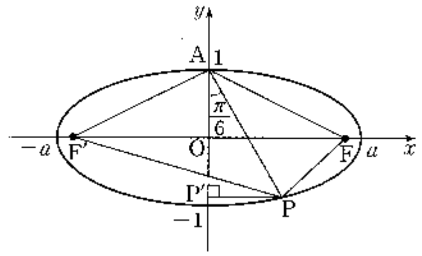
$\cos(\angle ABH)=\frac{\overline{BH}}{\overline{AB}}=\frac{\frac{2}{\sqrt{3}}}{2}=\frac{\sqrt{3}}{3}$

답 ③

27

$\frac{x^2}{a^2}+y^2=1$에서 두 초점 F, F′의 좌표는 각각

$(\sqrt{a^2-1},\ 0)$, $(-\sqrt{a^2-1},\ 0)$ ······ ㉠



점 P의 좌표를 $(p,\ q)$라 하고 점 P에서 y축에 내린 수선의 발을 P′이라 하면 점 P′의 좌표는 $(0,\ q)$이고

$\overline{AP'}=1-q$

직각삼각형 AP′P에서

$\angle P'AP=\frac{\pi}{6}$, $\overline{AP}=\frac{5\sqrt{3}}{4}$이므로

$\overline{AP'}=\overline{AP}\cos\frac{\pi}{6}=\frac{5\sqrt{3}}{4}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{15}{8}=1-q$

즉, $q=1-\frac{15}{8}=-\frac{7}{8}$

$\overline{P'P}=\overline{AP}\sin\frac{\pi}{6}=\frac{5\sqrt{3}}{4}\times\frac{1}{2}=\frac{5\sqrt{3}}{8}=p$

점 $P\left(\frac{5\sqrt{3}}{8},\ -\frac{7}{8}\right)$은 타원 $\frac{x^2}{a^2}+y^2=1\ (a>1)$ 위의 점이므로

$\frac{1}{a^2}\times\left(\frac{5\sqrt{3}}{8}\right)^2+\left(-\frac{7}{8}\right)^2=1$, $\frac{75}{a^2}+49=64$

$\frac{75}{a^2}=15$, $a^2=5$

㉠에서 두 초점이 $F(2,\ 0)$, $F'(-2,\ 0)$이므로

$\overline{F'F}=4$

따라서 사각형 AF′PF의 넓이를 S라 하면

$S=$(삼각형 AF′F의 넓이)+(삼각형 PFF′의 넓이)

$\quad=\frac{1}{2}\times4\times1+\frac{1}{2}\times4\times\frac{7}{8}=\frac{15}{4}$

답 ③

28

조건 (가)에서 $\overline{AF}:\overline{BF}=2:1$, $\overline{AB}:\overline{CF}=3:1$이므로

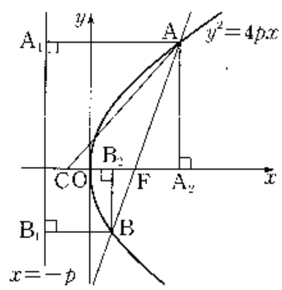
조건 (나)에서

$\overline{CF}=\frac{1}{3}\overline{AB}=3$ ······ ㉠

점 C의 x좌표를 $c\ (c<0)$이라 하면

$\overline{BF}=\overline{CF}=p-c$, $\overline{AF}=2\overline{CF}=2p-2c$

두 점 A, B에서 포물선의 준선 $x=-p$에 내린 수선의 발을 각각 A_1, B_1이라 하고, 두 점 A, B에서 x축에 내린 수선의 발을 각각 A_2, B_2라 하자.



포물선의 정의에 의하여

$\overline{AA_1}=\overline{AF}=2p-2c$

$\overline{BB_1}=\overline{BF}=p-c$

점 $F(p,\ 0)$과 준선 $x=-p$ 사이의 거리가 $2p$이므로

$\overline{A_2F}=\overline{AA_1}-2p=(2p-2c)-2p=-2c$

$\overline{B_2F}=2p-\overline{BB_1}=2p-(p-c)=p+c$

이때 $\overline{AF}:\overline{BF}=2:1$이므로 두 삼각형 AFA_2, BFB_2는 닮음비가 $2:1$인 닮은 도형이다.

즉, $\overline{A_2F}:\overline{B_2F}=2:1$이므로

$-2c:(p+c)=2:1$

$2p+2c=-2c,\ p=-2c$

㉠에서 $\overline{CF}=p-c=-3c=3$이므로 $c=-1$

$\overline{AF}=6,\ \overline{A_2F}=-2c=2$

$\overline{AA_2}=\sqrt{\overline{AF}^2-\overline{A_2F}^2}=\sqrt{6^2-2^2}=4\sqrt{2}$

$\overline{CA_2}=\overline{CF}+\overline{FA_2}=3+2=5$

따라서 직각삼각형 ACA_2에서

$\overline{AC}=\sqrt{\overline{AA_2}^2+\overline{CA_2}^2}=\sqrt{(4\sqrt{2})^2+5^2}=\sqrt{57}$

답 ④

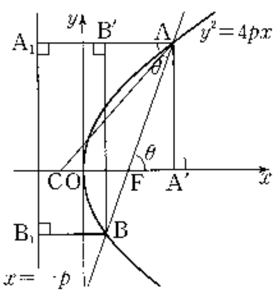
다른 풀이

조건 (가)에서 $\overline{AF}:\overline{BF}=2:1$, $\overline{AB}:\overline{CF}=3:1$이므로

조건 (나)에서

$\overline{CF}=\frac{1}{3}\overline{AB}=3$

두 점 A, B에서 포물선의 준선 $x=-p$에 내린 수선의 발을 각각 A_1, B_1, 점 A에서 x축에 내린 수선의 발을 A', 점 B에서 선분 AA_1에 내린 수선의 발을 B'이라 하자.



포물선의 정의에 의하여

$\overline{BF}=\overline{BB_1}=\overline{A_1B'}=3$,

$\overline{AF}=\overline{AA_1}=6$이므로

$\overline{AB'}=\overline{AA_1}-\overline{A_1B'}=3$

$\angle BAB'=\theta$라 하면

$\cos\theta=\frac{\overline{AB'}}{\overline{AB}}=\frac{3}{9}=\frac{1}{3}$

삼각형 AFA'에서 $\angle AFA'=\theta$이므로

$\overline{FA'}=\overline{AF}\cos\theta=6\times\frac{1}{3}=2$

$\overline{AA'}=\sqrt{\overline{AF}^2-\overline{FA'}^2}=\sqrt{6^2-2^2}=4\sqrt{2}$

삼각형 $AA'C$에서

$\overline{CA'}=\overline{CF}+\overline{FA'}=3+2=5$이므로

$\overline{AC}=\sqrt{\overline{CA'}^2+\overline{AA'}^2}=\sqrt{5^2+(4\sqrt{2})^2}=\sqrt{57}$

29

$(\overrightarrow{DP}+\overrightarrow{DQ})\cdot\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{DP}\cdot\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{DQ}\cdot\overrightarrow{BD}$

$\qquad=-(\overrightarrow{DP}\cdot\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{DQ}\cdot\overrightarrow{DB})$

이므로 $(\overrightarrow{DP}+\overrightarrow{DQ})\cdot\overrightarrow{BD}$의 최댓값이 a이면

$\overrightarrow{DP}\cdot\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{DQ}\cdot\overrightarrow{DB}$의 최솟값은 $-a$이다.

$|\overrightarrow{DB}|=\overline{DB}=\sqrt{2^2+2^2}=2\sqrt{2}$

(i) 점 P에서 선분 BD에 내린 수선의 발을 H라 하자.

$\overrightarrow{DP}\cdot\overrightarrow{DB}=|\overrightarrow{DH}||\overrightarrow{DB}|$에서

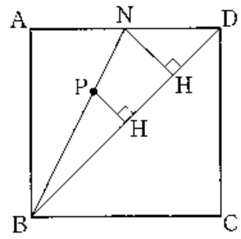
점 P는 선분 BN 위의 점이므로 [그림 1]과 같이 $|\overrightarrow{DH}|=\overline{DH}$의 값은 점 P가 점 N의 위치에 있을 때 최소이고

$\overline{DH}\ge\overline{DN}\cos 45^\circ=1\times\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}$

따라서

$\overrightarrow{DP}\cdot\overrightarrow{DB}=|\overrightarrow{DH}||\overrightarrow{DB}|$

$\qquad\ge\frac{\sqrt{2}}{2}\times2\sqrt{2}=2$



[그림 1]

(ii) 점 Q에서 선분 BD에 내린 수선의 발을 I라 하자.

$\overrightarrow{DQ}\cdot\overrightarrow{DB}=|\overrightarrow{DI}||\overrightarrow{DB}|$에서

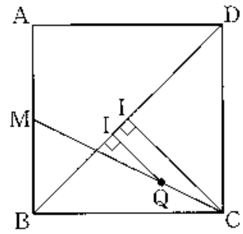
점 Q는 선분 CM 위의 점이므로 [그림 2]와 같이 $|\overrightarrow{DI}|=\overline{DI}$의 값은 점 Q가 점 C의 위치에 있을 때 최소이고

$\overline{DI}\ge\overline{DC}\cos 45^\circ=2\times\frac{\sqrt{2}}{2}=\sqrt{2}$

따라서

$\overrightarrow{DQ}\cdot\overrightarrow{DB}=|\overrightarrow{DI}||\overrightarrow{DB}|$

$\qquad\ge\sqrt{2}\times2\sqrt{2}=4$



[그림 2]

(i), (ii)에서 $\overrightarrow{DP}\cdot\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{DQ}\cdot\overrightarrow{DB}$의 최솟값은 $-a=2+4=6$이므로

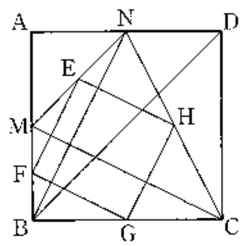
$(\overrightarrow{DP}+\overrightarrow{DQ})\cdot\overrightarrow{BD}$의 최댓값은 $a=-6$이다.

따라서 $a^2=(-6)^2=36$

답 36

다른 풀이

선분 PQ의 중점을 R라 하고 네 선분 MN, MB, BC, CN의 중점을 각각 E, F, G, H라 하면 점 R가 움직일 수 있는 영역은 사각형 EFGH와 그 내부이다.



$(\overrightarrow{DP}+\overrightarrow{DQ})\cdot\overrightarrow{BD}$

$=2\left(\frac{\overrightarrow{DP}+\overrightarrow{DQ}}{2}\right)\cdot\overrightarrow{BD}$

$=2\overrightarrow{DR}\cdot\overrightarrow{BD}=-2(\overrightarrow{DR}\cdot\overrightarrow{DB})$

$\overrightarrow{DR}\cdot\overrightarrow{DB}>0$이므로 $-2(\overrightarrow{DR}\cdot\overrightarrow{DB})$의 값은 점 R가 점 H에 있을 때 최대이다.

점 B를 원점으로 하고 세 점 A, C, D의 좌표가 각각 $(0,\ 2)$, $(2,\ 0)$, $(2,\ 2)$인 좌표평면을 생각하자.

점 $H\left(\frac{3}{2},\ 1\right)$에서 선분 BD에 내린 수선의 발을 H'이라 하면

직선 BD의 방정식은 $y=x$, 즉 $x-y=0$이므로

$\overline{HH'}=\frac{\left|\frac{3}{2}-1\right|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\frac{1}{2\sqrt{2}}$, $\overline{DH}=\sqrt{\left(2-\frac{3}{2}\right)^2+(2-1)^2}=\frac{\sqrt{5}}{2}$

직각삼각형 DHH'에서

$\overline{DH'}=\sqrt{\overline{DH}^2-\overline{HH'}^2}=\sqrt{\frac{5}{4}-\frac{1}{8}}=\frac{3}{2\sqrt{2}}$

또한 $\overline{DB}=\sqrt{2^2+2^2}=2\sqrt{2}$이므로

$-2(\overrightarrow{DR}\cdot\overrightarrow{DB})\le-2|\overrightarrow{DH'}||\overrightarrow{DB}|$

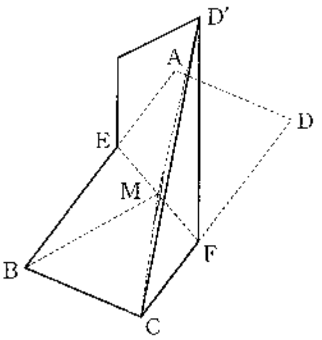
$\qquad=-2\times\overline{DH'}\times\overline{DB}=-2\times\frac{3}{2\sqrt{2}}\times2\sqrt{2}=-6$

따라서 $(\overrightarrow{DP}+\overrightarrow{DQ})\cdot\overrightarrow{BD}$의 최댓값은 -6이므로

$a=-6$에서 $a^2=(-6)^2=36$

30

$\overline{D'M}\perp\overline{BM}$, $\overline{D'M}\perp\overline{MF}$
이므로 직선 D′M은 평면 EBCF와 수직이다.
따라서 $\overline{D'M}\perp\overline{MC}$이므로 삼각형 D′MC는 $\angle D'MC=\frac{\pi}{2}$인 직각삼각형이다.



직사각형 ABCD에서
$\overline{BD}=\sqrt{4^2+2^2}=2\sqrt{5}$이므로
$\overline{D'M}=\overline{DM}=\frac{1}{2}\overline{BD}=\sqrt{5}$
이고 $\overline{MC}=\overline{MB}=\overline{D'M}=\sqrt{5}$
직각삼각형 D′MC에서
$\overline{CD'}=\sqrt{\overline{D'M}^2+\overline{MC}^2}=\sqrt{(\sqrt{5})^2+(\sqrt{5})^2}=\sqrt{10}$
한편, 두 삼각형 DMF, DCB는 서로 닮은 도형이므로
$\overline{DF}:\overline{DB}=\overline{DM}:\overline{DC}$에서
$\overline{DF}=\frac{\overline{DB}\times\overline{DM}}{\overline{DC}}=\frac{2\sqrt{5}\times\sqrt{5}}{4}=\frac{5}{2}$
그러므로
$\overline{CF}=\overline{DC}-\overline{DF}=4-\frac{5}{2}=\frac{3}{2}$, $\overline{D'F}=\overline{DF}=\frac{5}{2}$
삼각형 D′CF에서 코사인법칙에 의하여
$\overline{D'C}^2=\overline{D'F}^2+\overline{CF}^2-2\times\overline{D'F}\times\overline{CF}\times\cos(\angle CFD')$
$10=\frac{25}{4}+\frac{9}{4}-2\times\frac{5}{2}\times\frac{3}{2}\times\cos(\angle CFD')$
$\cos(\angle CFD')=-\frac{1}{5}$
$\sin(\angle CFD')=\sqrt{1-\cos^2(\angle CFD')}=\sqrt{1-\left(-\frac{1}{5}\right)^2}=\frac{2\sqrt{6}}{5}$
삼각형 CFD′의 넓이를 S_1이라 하면
$S_1=\frac{1}{2}\times\overline{D'F}\times\overline{CF}\times\sin(\angle CFD')=\frac{1}{2}\times\frac{5}{2}\times\frac{3}{2}\times\frac{2\sqrt{6}}{5}=\frac{3\sqrt{6}}{4}$
점 D′의 평면 EBCF 위로의 정사영이 M이므로 삼각형 CFD′의 평면 EBCF 위로의 정사영은 삼각형 CFM이다.
직각삼각형 DMF에서
$\overline{MF}=\sqrt{\overline{DF}^2-\overline{DM}^2}=\sqrt{\left(\frac{5}{2}\right)^2-(\sqrt{5})^2}=\frac{\sqrt{5}}{2}$
$\sin(\angle CFM)=\sin(\pi-\angle DFM)=\sin(\angle DFM)$
$=\sin(\angle DBC)$
$=\frac{\overline{DC}}{\overline{DB}}=\frac{4}{2\sqrt{5}}=\frac{2\sqrt{5}}{5}$
삼각형 CFM의 넓이를 S_2라 하면
$S_2=\frac{1}{2}\times\overline{MF}\times\overline{CF}\times\sin(\angle CFM)=\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{5}}{2}\times\frac{3}{2}\times\frac{2\sqrt{5}}{5}=\frac{3}{4}$
평면 CFD′과 평면 EBCF가 이루는 각의 크기가 θ이므로
$S_2=S_1\times\cos\theta$
즉, $\frac{3}{4}=\frac{3\sqrt{6}}{4}\times\cos\theta$에서 $\cos\theta=\frac{1}{\sqrt{6}}=\frac{\sqrt{6}}{6}$
따라서 $72\cos^2\theta=72\times\left(\frac{\sqrt{6}}{6}\right)^2=12$

답 12

실전 모의고사 4회

본문 150~161쪽

01 ①	02 ④	03 ②	04 ⑤	05 ⑤
06 ③	07 ④	08 ③	09 ⑤	10 ②
11 ②	12 ①	13 ①	14 ⑤	15 ②
16 6	17 8	18 62	19 10	20 54
21 135	22 52	23 ③	24 ③	25 ④
26 ③	27 ③	28 ⑤	29 33	30 3

01

$2^{\sqrt{2}-1}\times\left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{1}{2}}=2^{\sqrt{2}-1}\times(2^{-2})^{\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{1}{2}}=2^{\sqrt{2}-1}\times2^{-2\times\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{1}{2}\right)}$
$=2^{\sqrt{2}-1-\sqrt{2}-1}=2^{-2}=\frac{1}{4}$

답 ①

02

$f(x)=(x+1)(x^2+2)$에서
$f'(x)=1\times(x^2+2)+(x+1)\times2x$
$=x^2+2+2x^2+2x$
$=3x^2+2x+2$
따라서 $f'(2)=3\times2^2+2\times2+2=18$

답 ④

03

등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공비를 r라 하자.
$a_2=10$에서 $ar=10$ …… ㉠
$\frac{a_4}{a_1}=8$에서 $\frac{ar^3}{a}=r^3=8$
등비수열 $\{a_n\}$의 모든 항이 실수이므로
$r=2$ …… ㉡
㉡을 ㉠에 대입하면
$2a=10$, $a=5$
따라서 $a_5=ar^4=5\times2^4=80$

답 ②

04

$\lim_{x\to0+}f(x)=1$, $\lim_{x\to1-}f(x)=2$, $\lim_{x\to2+}f(x)=2$이므로
$\lim_{x\to0+}f(x)+\lim_{x\to1-}f(x)\times\lim_{x\to2+}f(x)=1+2\times2=5$

답 ⑤

05

$\sin\theta-\cos\theta=\frac{1}{2}$의 양변을 제곱하면
$\sin^2\theta-2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta=\frac{1}{4}$
$(\sin^2\theta+\cos^2\theta)-2\sin\theta\cos\theta=\frac{1}{4}$
$1-2\sin\theta\cos\theta=\frac{1}{4}$
$\sin\theta\cos\theta=\frac{3}{8}$

$|\sin\theta+\cos\theta|^2=(\sin\theta+\cos\theta)^2$

$=\sin^2\theta+2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta$

$=(\sin^2\theta+\cos^2\theta)+2\sin\theta\cos\theta$

$=1+2\times\dfrac{3}{8}=\dfrac{7}{4}$

$|\sin\theta+\cos\theta|\ge 0$이므로

$|\sin\theta+\cos\theta|=\dfrac{\sqrt{7}}{2}$

답 ⑤

06

방정식 $x^3+x^2+4=x^2+3x+k$, 즉 $x^3-3x+4=k$의 서로 다른 실근의 개수가 2이다.

$h(x)=x^3-3x+4$라 하면

$h'(x)=3x^2-3=3(x+1)(x-1)$

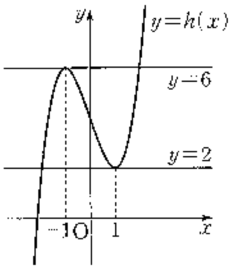
$h'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=1$

함수 $h(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
$h'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$h(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

$h(-1)=6$, $h(1)=2$

함수 $y=h(x)$의 그래프는 그림과 같다.



곡선 $y=h(x)$와 직선 $y=k$가 만나는 점의 개수가 2이려면 $k=2$ 또는 $k=6$이어야 한다.

따라서 모든 실수 k의 값의 합은

$2+6=8$

답 ③

07

$a_1=10$이고 10은 짝수이므로 $a_2=\dfrac{1}{2}a_1=\dfrac{1}{2}\times10=5$

$a_2=5$이고 5는 홀수이므로 $a_3=a_2+1=5+1=6$

$a_3=6$이고 6은 짝수이므로 $a_4=\dfrac{1}{2}a_3=\dfrac{1}{2}\times6=3$

$a_4=3$이고 3은 홀수이므로 $a_5=a_4+1=3+1=4$

$a_5=4$이고 4는 짝수이므로 $a_6=\dfrac{1}{2}a_5=\dfrac{1}{2}\times4=2$

$a_6=2$이고 2는 짝수이므로 $a_7=\dfrac{1}{2}a_6=\dfrac{1}{2}\times2=1$

$a_7=1$이고 1은 홀수이므로 $a_8=a_7+1=1+1=2$

$a_8=2$이고 2는 짝수이므로 $a_9=\dfrac{1}{2}a_8=\dfrac{1}{2}\times2=1$

이와 같은 과정을 반복하면

$a_6=a_8=a_{10}=\cdots=2$

$a_7=a_9=a_{11}=\cdots=1$

따라서 모든 자연수 n에 대하여 $a_n\ge1$이고, $n\le5$이면 $a_n\ge3$, $a_6+a_7=2+1=3$이므로 $a_k+a_{k+1}=3$을 만족시키는 자연수 k의 최솟값은 6이다.

답 ④

08

직사각형 ABCD의 넓이가 6이므로 선분 AB와 곡선 $y=kx^2$ 및 두 직선 $x=-1$, $x=1$로 둘러싸인 부분의 넓이가 3이다.

$\displaystyle\int_{-1}^{1}(2-kx^2)\,dx=2\int_0^1(2-kx^2)\,dx=2\left[2x-\frac{kx^3}{3}\right]_0^1=2\left(2-\frac{k}{3}\right)$

$2\left(2-\dfrac{k}{3}\right)=3$에서 $2-\dfrac{k}{3}=\dfrac{3}{2}$, $\dfrac{k}{3}=\dfrac{1}{2}$

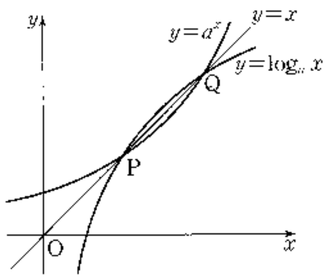
따라서 $k=\dfrac{3}{2}$

답 ③

09

$f(x)=a^x$, $g(x)=\log_a x$라 하면 두 함수 $f(x)$, $g(x)$는 서로 역함수 관계이고, 함수 $f(x)$는 실수 전체의 집합에서 증가하므로 두 곡선 $y=a^x$, $y=\log_a x$의 교점은 곡선 $y=a^x$과 직선 $y=x$의 교점과 같다.

즉, 두 점 P, Q는 직선 $y=x$ 위의 점이다.



$\overline{OP}=\overline{PQ}$이므로 양수 k에 대하여 점 P의 좌표를 (k, k)라 하면 점 Q의 좌표는 $(2k, 2k)$이다.

두 점 P, Q는 곡선 $y=a^x$ 위의 점이므로

$a^k=k$ ······ ㉠

$a^{2k}=2k$ ······ ㉡

㉡에서 $a^{2k}=(a^k)^2$이므로 ㉠을 대입하면 $k^2=2k$, $k(k-2)=0$

$k>0$이므로 $k=2$ ······ ㉢

㉢을 ㉠에 대입하면 $a^2=2$

$a>1$이므로 $a=\sqrt{2}$

답 ⑤

10

$g(x)=2x+4$라 하면 $f'(1)=g'(1)$, $f(1)=g(1)$이므로 함수 $f(x)-g(x)$는 $(x-1)^2$을 인수로 갖는다.

또 $f'(2)=g'(2)$, $f(2)=g(2)$이므로 함수 $f(x)-g(x)$는 $(x-2)^2$을 인수로 갖는다. 즉, $f(x)-g(x)=(x-1)^2(x-2)^2$이므로

$f(x)=(x-1)^2(x-2)^2+2x+4$

따라서 $f(3)=(3-1)^2\times(3-2)^2+2\times3+4=14$

답 ②

11

점 C의 y좌표를 t라 하면

$S_1=\dfrac{1}{2}\times\overline{AB}\times(1-t)$, $S_2=\dfrac{1}{2}\times\overline{OD}\times t$이므로

$\dfrac{S_2}{S_1}=\dfrac{\overline{OD}\times t}{\overline{AB}\times(1-t)}$

$\dfrac{\overline{OD}\times t}{\overline{AB}\times(1-t)}=\dfrac{\overline{OD}}{\overline{AB}}$에서 $1-t=t$, 즉 $t=\dfrac{1}{2}$

곡선 $y=f(x-a)$는 곡선 $y=f(x)$를 x축의 방향으로 a만큼 평행이동한 것이므로 두 점 A, B의 x좌표는 각각 $\frac{1}{2}$, $a+\frac{1}{2}$이고,

점 C의 x좌표는 $\dfrac{\frac{1}{2}+\left(a+\frac{1}{2}\right)}{2}=\frac{1}{2}a+\frac{1}{2}$

즉, $C\left(\frac{1}{2}a+\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$이고 점 C는 곡선 $y=f(x)$ 위의 점이므로

$\frac{1}{2}=\sin\left\{\left(\frac{1}{2}a+\frac{1}{2}\right)\pi\right\}$

한편, $0<a<1$에서 $\frac{\pi}{2}<\left(\frac{1}{2}a+\frac{1}{2}\right)\pi<\pi$이고

$\sin\frac{5}{6}\pi=\frac{1}{2}$이므로 $\left(\frac{1}{2}a+\frac{1}{2}\right)\pi=\frac{5}{6}\pi$

따라서 $\frac{1}{2}a+\frac{1}{2}=\frac{5}{6}$이므로 $a=\frac{2}{3}$

답 ②

12

$\lim_{x\to-1}|g(x)|=\lim_{x\to-1}\left|\frac{x^3+x+1}{f(x)}\right|$

$\lim_{x\to-1}(x^3+x+1)=-1$이므로 조건 (가)를 만족시키려면

$\lim_{x\to-1}|f(x)|=0$

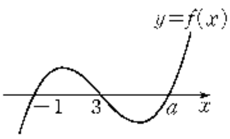
즉, 함수 $f(x)$는 $x+1$을 인수로 갖는다.

$\lim_{x\to3}g(x)=\lim_{x\to3}\frac{x^3+x+1}{f(x)}$

$\lim_{x\to3}(x^3+x+1)=31$이므로 $\lim_{x\to3}f(x)=0$이고 함수 $f(x)$는 $x-3$을 인수로 갖는다.

$f(x)=(x+1)(x-3)(x-a)$ (a는 상수)라 하자.

$a>3$이면 함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형은 그림과 같다.



$x \to 3+$일 때 $f(x) \to 0-$이므로

$\lim_{x\to3+}g(x)=-\infty$이고

$x\to3-$일 때 $f(x)\to0+$이므로 $\lim_{x\to3-}g(x)=\infty$이다.

따라서 조건 (나)를 만족시키지 않는다.

마찬가지로 $a<3$인 경우도 조건 (나)를 만족시키지 않는다.

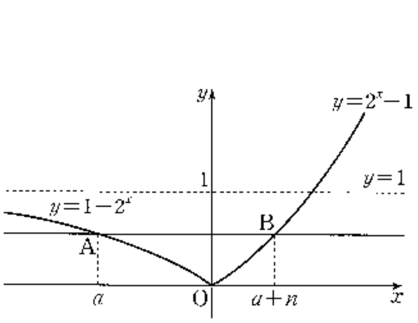
$a=3$이면 $f(x)=(x+1)(x-3)^2$, $g(x)=\frac{x^3+x+1}{(x+1)(x-3)^2}$이므로

조건 (나)를 만족시킨다.

따라서 $f(5)=6\times4=24$

답 ①

13



$f(x)=|2^x-1|=\begin{cases}1-2^x & (x<0)\\ 2^x-1 & (x\ge0)\end{cases}$

이고, 곡선 $y=f(x)$의 점근선은 $y=1$이다.

곡선 $y=1-2^x$ $(x<0)$ 위의 점 A, 곡선 $y=2^x-1$ $(x>0)$ 위의 점 B를 직선 AB가 x축과 평행하고 $\overline{AB}=n$이 되도록 잡는다.

점 A의 x좌표를 a라 하면 점 B의 x좌표는 $a+n$이므로

$1-2^a=2^{a+n}-1$, $(2^n+1)\times2^a=2$, $2^a=\frac{2}{2^n+1}$

즉, $a=\log_2\frac{2}{2^n+1}$

(i) $t<a$일 때

단힌구간 $[t, t+n]$에서 함수 $f(x)=|2^x-1|$의 최댓값은 $f(t)$

(ii) $t=a$일 때

닫힌구간 $[t, t+n]$에서 함수 $f(x)=|2^x-1|$의 최댓값은 $f(t)=f(t+n)$

(iii) $t>a$일 때

닫힌구간 $[t, t+n]$에서 함수 $f(x)=|2^x-1|$의 최댓값은 $f(t+n)$

(i), (ii), (iii)에서 $t\ge a$일 때, 닫힌구간 $[t, t+n]$에서 함수 $f(x)=|2^x-1|$의 최댓값이 $f(t+n)$이므로 닫힌구간 $[t, t+n]$에서 함수 $f(x)=|2^x-1|$의 최댓값이 $f(t+n)$이 되도록 하는 실수 t의 최솟값은 $a=\log_2\frac{2}{2^n+1}$이고 $g(n)=\log_2\frac{2}{2^n+1}$이다.

$2^{g(n)}=\frac{2}{2^n+1}$, $\frac{1}{2^{g(n)}}=\frac{2^n+1}{2}$이므로

$\frac{1}{2^{g(3)}}=\frac{2^3+1}{2}=\frac{9}{2}$

$\frac{1}{2^{g(4)}}=\frac{2^4+1}{2}=\frac{17}{2}$

$\frac{1}{2^{g(5)}}=\frac{2^5+1}{2}=\frac{33}{2}$

따라서 $\frac{1}{2^{g(3)}}+\frac{1}{2^{g(4)}}+\frac{1}{2^{g(5)}}=\frac{9}{2}+\frac{17}{2}+\frac{33}{2}=\frac{59}{2}$

답 ①

14

ㄱ. $a=0$이면 $v(t)=t^2(t-2)=t^3-2t^2$이므로

$x(1)=\int_0^1(t^3-2t^2)\,dt=\left[\frac{1}{4}t^4-\frac{2}{3}t^3\right]_0^1$

$=\frac{1}{4}-\frac{2}{3}=-\frac{5}{12}<0$ (참)

ㄴ. $x(2)=\int_0^2 v(t)dt=\int_0^2 t(t-2)(t-a)\,dt$

$=\int_0^2\{t^3-(a+2)t^2+2at\}\,dt=\left[\frac{1}{4}t^4-\frac{a+2}{3}t^3+at^2\right]_0^2$

$=4-\frac{8(a+2)}{3}+4a=\frac{4a-4}{3}$

$\frac{4a-4}{3}=a$에서 $a=4$ (참)

ㄷ. $x(a)=\int_0^a v(t)\,dt=\int_0^a t(t-2)(t-a)\,dt$

$=\int_0^a\{t^3-(a+2)t^2+2at\}\,dt=\left[\frac{1}{4}t^4-\frac{a+2}{3}t^3+at^2\right]_0^a$

$=\frac{1}{4}a^4-\frac{a+2}{3}\times a^3+a^3=-\frac{1}{12}a^4+\frac{1}{3}a^3$

$-\frac{1}{12}a^4+\frac{1}{3}a^3=-a^2$에서

$a>0$이므로 $-\frac{1}{12}a^2+\frac{1}{3}a=-1$

$a^2-4a-12=0$, $(a+2)(a-6)=0$

$a>0$이므로 $a=6$, 즉 $x(6)=-6^2$

$0\le t\le 2$에서 $v(t)\ge 0$이고, $2\le t\le 6$에서 $v(t)\le 0$이므로

$$\begin{aligned}\int_0^6 |v(t)|\,dt&=\int_0^2 v(t)\,dt+\int_2^6 \{-v(t)\}\,dt\\&=\int_0^2 v(t)\,dt-\int_2^6 v(t)\,dt\\&=\int_0^2 v(t)\,dt-\left(\int_0^6 v(t)\,dt-\int_0^2 v(t)\,dt\right)\\&=2\int_0^2 v(t)\,dt-\int_0^6 v(t)\,dt\\&=2\times x(2)-x(6)=2\times x(2)-(-6^2)\\&=2\times x(2)+36 \text{ (참)}\end{aligned}$$

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

답 ⑤

15

x에 대한 방정식 $\sin x-|\sin t|=0$에서

$0<t<\frac{\pi}{2}$일 때, $x=t$ 또는 $x=\pi-t$

$\frac{\pi}{2}<t<\pi$일 때, $x=\pi-t$ 또는 $x=t$

$\pi<t<\frac{3}{2}\pi$일 때, $x=t-\pi$ 또는 $x=2\pi-t$

$\frac{3}{2}\pi<t<2\pi$일 때, $x=2\pi-t$ 또는 $x=t-\pi$

x에 대한 방정식 $|\sin x|-\sin t=0$에서

$0<t<\frac{\pi}{2}$일 때, $x=t$ 또는 $x=\pi-t$ 또는 $x=\pi+t$ 또는 $x=2\pi-t$

$\frac{\pi}{2}<t<\pi$일 때, $x=\pi-t$ 또는 $x=t$ 또는 $x=2\pi-t$ 또는 $x=\pi+t$

$\pi<t<\frac{3}{2}\pi$일 때, 실근은 존재하지 않는다.

$\frac{3}{2}\pi<t<2\pi$일 때, 실근은 존재하지 않는다.

그러므로 각 경우의 $0<x<2\pi$에서 x에 대한 방정식 $(\sin x-|\sin t|)(|\sin x|-\sin t)=0$의 실근을 크기순으로 나열하고 서로 다른 모든 실근의 합을 구하면

(i) $0<t<\frac{\pi}{2}$일 때

$x=t$ 또는 $x=\pi-t$ 또는 $x=\pi+t$ 또는 $x=2\pi-t$이므로 서로 다른 모든 실근의 합은

$t+(\pi-t)+(\pi+t)+(2\pi-t)=4\pi$

(ii) $\frac{\pi}{2}<t<\pi$일 때

$x=\pi-t$ 또는 $x=t$ 또는 $x=2\pi-t$ 또는 $x=\pi+t$이므로 서로 다른 모든 실근의 합은

$(\pi-t)+t+(2\pi-t)+(\pi+t)=4\pi$

(iii) $\pi<t<\frac{3}{2}\pi$일 때

$x=t-\pi$ 또는 $x=2\pi-t$이므로 서로 다른 모든 실근의 합은

$(t-\pi)+(2\pi-t)=\pi$

(iv) $\frac{3}{2}\pi<t<2\pi$일 때

$x=2\pi-t$ 또는 $x=t-\pi$이므로 서로 다른 모든 실근의 합은

$(2\pi-t)+(t-\pi)=\pi$

즉,

$$f(t)=\begin{cases}t & \left(0<t<\frac{\pi}{2}\right)\\ \pi-t & \left(\frac{\pi}{2}<t<\pi\right)\\ t-\pi & \left(\pi<t<\frac{3}{2}\pi\right)\\ 2\pi-t & \left(\frac{3}{2}\pi<t<2\pi\right)\end{cases},\quad g(t)=\begin{cases}2\pi-t & \left(0<t<\frac{\pi}{2}\right)\\ \pi+t & \left(\frac{\pi}{2}<t<\pi\right)\\ 2\pi-t & \left(\pi<t<\frac{3}{2}\pi\right)\\ t-\pi & \left(\frac{3}{2}\pi<t<2\pi\right)\end{cases}$$

$$g(t)-f(t)=\begin{cases}2\pi-2t & \left(0<t<\frac{\pi}{2}\right)\\ 2t & \left(\frac{\pi}{2}<t<\pi\right)\\ 3\pi-2t & \left(\pi<t<\frac{3}{2}\pi\right)\\ 2t-3\pi & \left(\frac{3}{2}\pi<t<2\pi\right)\end{cases},\quad h(t)=\begin{cases}4\pi & \left(0<t<\frac{\pi}{2}\right)\\ 4\pi & \left(\frac{\pi}{2}<t<\pi\right)\\ \pi & \left(\pi<t<\frac{3}{2}\pi\right)\\ \pi & \left(\frac{3}{2}\pi<t<2\pi\right)\end{cases}$$

$0<t<\pi\left(t\ne\frac{\pi}{2}\right)$에서 $\pi<kh(t)<2\pi$일 때

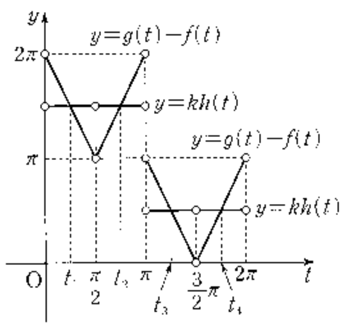
방정식 $g(t)-f(t)=kh(t)$의 두 실근을 t_1, t_2라 하면

$\frac{t_1+t_2}{2}=\frac{\pi}{2}$에서 $t_1+t_2=\pi$

$\pi<t<2\pi\left(t\ne\frac{3}{2}\pi\right)$에서 $0<kh(t)<\pi$일 때

방정식 $g(t)-f(t)=kh(t)$의 두 실근을 t_3, t_4라 하면

$\frac{t_3+t_4}{2}=\frac{3}{2}\pi$에서 $t_3+t_4=3\pi$



$t_1+t_2+t_3+t_4=(t_1+t_2)+(t_3+t_4)=\pi+3\pi=4\pi$이므로

$0<t<\pi\left(t\ne\frac{\pi}{2}\right)$에서 $\pi<kh(t)<2\pi$이고

$\pi<t<2\pi\left(t\ne\frac{3}{2}\pi\right)$에서 $0<kh(t)<\pi$인 경우에만

방정식 $g(t)-f(t)=kh(t)$의 모든 실근의 합이 4π이다.

$0<t<\pi\left(t\ne\frac{\pi}{2}\right)$에서 $h(t)=4\pi$이므로 $\pi<4\pi k<2\pi$

$\frac{1}{4}<k<\frac{1}{2}$ …… ㉠

$\pi<t<2\pi\left(t\ne\frac{3}{2}\pi\right)$에서 $h(t)=\pi$이므로 $0<\pi k<\pi$

$0<k<1$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 모든 실수 k의 값의 범위는 $\frac{1}{4}<k<\frac{1}{2}$

따라서 $\alpha=\frac{1}{4}$, $\beta=\frac{1}{2}$이므로 $\alpha\beta=\frac{1}{4}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{8}$

답 ②

16

$$\log_2 9\times\frac{1}{\log_8 3}=\log_2 9\times\log_3 8=\frac{\log 9}{\log 2}\times\frac{\log 8}{\log 3}$$
$$=\frac{2\log 3}{\log 2}\times\frac{3\log 2}{\log 3}=2\times 3=6$$

답 6

17

$$f(x)=\int(3x^2+4x+1)dx$$
$$=x^3+2x^2+x+C \text{ (단, } C\text{는 적분상수)}$$

한편, $f(0)=4$이므로 $C=4$

따라서 $f(x)=x^3+2x^2+x+4$이므로

$f(1)=1^3+2\times 1^2+1+4=8$

답 8

18

$$\sum_{k=1}^{10}(a_k+2)(b_k+2)=\sum_{k=1}^{10}(a_kb_k+2a_k+2b_k+4)$$
$$=\sum_{k=1}^{10}a_kb_k+2\sum_{k=1}^{10}(a_k+b_k)+40$$

$150=\sum_{k=1}^{10}a_kb_k+2\times 24+40$에서

$\sum_{k=1}^{10}a_kb_k=150-(48+40)=62$

답 62

19

이차함수 $f(x)$가 최고차항의 계수가 1이고

모든 실수 x에 대하여 $f(1+x)=f(1-x)$이므로

$f(x)=(x-1)^2+k=x^2-2x+(k+1)$ (단, k는 실수)

조건 (가)에서 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $\mathrm{A}(a,\ f(a))$에서의 접선 l_1은

$y=f'(a)(x-a)+f(a)$

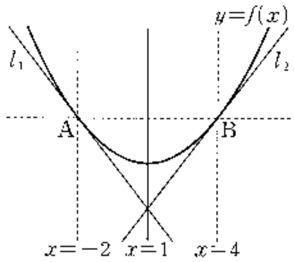
이고, 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $\mathrm{B}(b,\ f(b))$에서의 접선 l_2는

$y=f'(b)(x-b)+f(b)$

이므로 x에 대한 방정식 $f'(a)(x-a)+f(a)=f'(b)(x-b)+f(b)$의 근은 두 직선 l_1, l_2의 교점의 x좌표와 같다.

$\frac{a+b}{2}=1$인 경우에만 두 직선 l_1, l_2의 교점의 x좌표가 1이므로

$a+b=2$ ...... ㉠



$\frac{a+b}{2}=1$에서 $f(a)=f(b)$이므로

조건 (나)에서

$\sqrt{(b-a)^2+\{f(b)-f(a)\}^2}$

$=\sqrt{(b-a)^2}$

$=b-a=6$ ...... ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=-2,\ b=4$

따라서 $f'(x)=2x-2,\ a+2b=(-2)+2\times 4=6$이므로

$f'(a+2b)=f'(6)=2\times 6-2=10$

답 10

20

조건 (가)에서

$\int_0^6 xf(x)\,dx-6\int_0^6 f(x)\,dx=0$

$\int_0^6 xf(x)\,dx=6\int_0^6 f(x)\,dx$ ...... ㉠

조건 (나)에서

$2\int_0^6 xf(x)\,dx+3\int_0^6 f(x)\,dx=90$ ...... ㉡

$\int_0^6 f(x)\,dx=A,\ \int_0^6 xf(x)\,dx=B$라 하면

㉠에서 $B=6A$, ㉡에서 $2B+3A=90$

두 식을 연립하여 풀면

$A=\int_0^6 f(x)\,dx=6,\ B=\int_0^6 xf(x)\,dx=36$ ...... ㉢

$f(x)=x^2+ax+b$ (a, b는 상수)라 하면

$$\int_0^6 f(x)\,dx=\int_0^6(x^2+ax+b)\,dx=\left[\frac{1}{3}x^3+\frac{a}{2}x^2+bx\right]_0^6$$
$$=72+18a+6b=6(12+3a+b)$$

㉢에 의하여 $12+3a+b=1,\ 3a+b=-11$ ...... ㉣

$$\int_0^6 xf(x)\,dx=\int_0^6(x^3+ax^2+bx)\,dx=\left[\frac{1}{4}x^4+\frac{a}{3}x^3+\frac{b}{2}x^2\right]_0^6$$
$$=\frac{1}{4}\times 6^4+\frac{a}{3}\times 6^3+\frac{b}{2}\times 6^2=36\left(9+2a+\frac{b}{2}\right)$$

㉢에 의하여 $9+2a+\frac{b}{2}=1,\ 4a+b=-16$ ...... ㉤

㉣, ㉤을 연립하여 풀면 $a=-5,\ b=4$

따라서 $f(x)=x^2-5x+4$이므로

$f(10)=10^2-5\times 10+4=54$

답 54

21

등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항이 $\frac{4}{3}$이고, 공차가 $\frac{1}{3}$이므로 모든 자연수 n에 대하여 $a_n<a_{n+1}$이고, 2와 3의 최소공배수는 6이다.

$m=6$일 때, $A_6=\{a_2,\ a_4,\ a_6,\ \cdots,\ a_{12}\}$, $B_6=\{a_3,\ a_6,\ a_9,\ \cdots,\ a_{18}\}$

$A_6\cap B_6=\{a_6,\ a_{12}\}$, $b_6=a_{12}$

$m=7$일 때, $A_7=\{a_2,\ a_4,\ a_6,\ \cdots,\ a_{14}\}$, $B_7=\{a_3,\ a_6,\ a_9,\ \cdots,\ a_{21}\}$

$A_7\cap B_7=\{a_6,\ a_{12}\}$, $b_7=a_{12}$

$m=8$일 때, $A_8=\{a_2,\ a_4,\ a_6,\ \cdots,\ a_{16}\}$, $B_8=\{a_3,\ a_6,\ a_9,\ \cdots,\ a_{24}\}$

$A_8\cap B_8=\{a_6,\ a_{12}\}$, $b_8=a_{12}$

$m=9$일 때, $A_9=\{a_2,\ a_4,\ a_6,\ \cdots,\ a_{18}\}$, $B_9=\{a_3,\ a_6,\ a_9,\ \cdots,\ a_{27}\}$

$A_9\cap B_9=\{a_6,\ a_{12},\ a_{18}\}$, $b_9=a_{18}$

$m=10$일 때, $A_{10}=\{a_2,\ a_4,\ a_6,\ \cdots,\ a_{20}\}$, $B_{10}=\{a_3,\ a_6,\ a_9,\ \cdots,\ a_{30}\}$

$A_{10}\cap B_{10}=\{a_6,\ a_{12},\ a_{18}\}$, $b_{10}=a_{18}$

$m=11$일 때, $A_{11}=\{a_2,\ a_4,\ a_6,\ \cdots,\ a_{22}\}$, $B_{11}=\{a_3,\ a_6,\ a_9,\ \cdots,\ a_{33}\}$

$A_{11}\cap B_{11}=\{a_6,\ a_{12},\ a_{18}\}$, $b_{11}=a_{18}$

⋮

이와 같은 과정을 반복하면

$b_{3k+3}=b_{3k+4}=b_{3k+5}=a_{6k+6}$ ($k=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$)

$a_n=\frac{4}{3}+(n-1)\times\frac{1}{3}$이므로

$a_{6k+6}=\frac{4}{3}+\{(6k+6)-1\}\times\frac{1}{3}=2k+3$

따라서

$\sum_{m=6}^{20} b_m=\sum_{k=1}^{5}(b_{3k+3}+b_{3k+4}+b_{3k+5})=\sum_{k=1}^{5}3a_{6k+6}$

$=3\sum_{k=1}^{5}a_{6k+6}=3\sum_{k=1}^{5}(2k+3)=3\times\left(2\times\frac{5\times6}{2}+3\times5\right)=135$

답 135

22

$f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ (a, b, c는 상수)라 하면

$f'(x)=3x^2+2ax+b$

(i) 함수 $g(x)$는 $x=2$에서 연속이므로

$\lim_{x\to2-}g(x)=\lim_{x\to2-}\frac{f'(x+2)-f'(x-2)}{x-2}$

$g(2)=2\times f(2)$ …… ㉠

$x\to2-$일 때 (분모) $\to0$이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\to0$ 이어야 한다.

즉, $\lim_{x\to2-}\{f'(x+2)-f'(x-2)\}=0$이고 $f'(x)$가 연속이므로

$f'(4)=f'(0)$

$3\times4^2+2\times a\times4+b=b$에서

$a=-6$

또한 $f'(x)=3x^2-12x+b$에서

$f'(x+2)-f'(x-2)$

$=3(x+2)^2-12(x+2)+b-3(x-2)^2+12(x-2)-b$

$=3x^2+12x+12-12x-24-3x^2+12x-12+12x-24$

$=24(x-2)$

이므로

$\lim_{x\to2-}g(x)=\lim_{x\to2-}\frac{24(x-2)}{x-2}=24$

$f(x)=x^3-6x^2+bx+c$에서 $f(2)=2b+c-16$

㉠에 의하여 $2(2b+c-16)=24$

$2b+c=28$ …… ㉡

(ii) 함수 $g(x)$는 $x=2$에서 미분가능하므로

$x<2$일 때, $g(x)=24$이고 $g'(x)=0$

$\lim_{x\to2-}\frac{g(x)-g(2)}{x-2}=0$ …… ㉢

$x\geq2$일 때, $g(x)=xf(x)$이고

$\lim_{x\to2+}\frac{xf(x)-2f(2)}{x-2}=\lim_{x\to2+}\frac{(x-2)f(x)+2\{f(x)-f(2)\}}{x-2}$

$=\lim_{x\to2+}f(x)+2\lim_{x\to2+}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}$

$=f(2)+2f'(2)$ …… ㉣

이때 $f'(2)=12-24+b=b-12$이고 ㉡에서 $f(2)=12$이므로

$f(2)+2f'(2)=12+2(b-12)=2b-12$

$g(x)$가 $x=2$에서 미분가능하므로 ㉢=㉣

$2b-12=0$에서 $b=6$

$b=6$을 ㉡에 대입하면

$12+c=28$에서 $c=16$

(i), (ii)에 의하여 $f(x)=x^3-6x^2+6x+16$이므로

$f(6)=6^3-6\times6^2+6\times6+16=52$

답 52

23

A$(2,\ a,\ -b)$, B$(-2,\ a,\ -b)$이므로 선분 AB를 $1:2$로 외분하는 점의 좌표는

$\left(\frac{1\times(-2)-2\times2}{1-2},\ \frac{1\times a-2\times a}{1-2},\ \frac{1\times(-b)-2\times(-b)}{1-2}\right)$

즉, $(6,\ a,\ -b)$

이 좌표를 구의 방정식에 대입하면

$36+a^2+b^2=60$

따라서 $a^2+b^2=24$

답 ③

24

쌍곡선 $x^2-\frac{y^2}{3}=1$에서 $c^2=1+3=4$이므로 $c=2$

즉, F$(2,\ 0)$, F$'(-2,\ 0)$이고 $\overline{\mathrm{F'F}}=4$이다.

$\overline{\mathrm{PF}}=x$라 하면 쌍곡선의 정의에 의하여 $\overline{\mathrm{PF'}}=x+2$이고

삼각형 PF′F의 둘레의 길이가 14이므로

$\overline{\mathrm{PF'}}+\overline{\mathrm{F'F}}+\overline{\mathrm{PF}}=(x+2)+4+x=2x+6=14$

$x=4$

따라서 선분 PF의 길이는 4이다.

답 ③

25

직선 $\frac{x+1}{a}=\frac{y-1}{3}$은 점 $(1,\ 2)$를 지나므로

$\frac{1+1}{a}=\frac{2-1}{3}$, $\frac{2}{a}=\frac{1}{3}$에서 $a=6$

직선 $\frac{x}{b}=\frac{y+1}{a}$은 점 $(1,\ 2)$를 지나므로

$\frac{1}{b}=\frac{2+1}{a}$, $\frac{1}{b}=\frac{3}{6}$에서 $b=2$

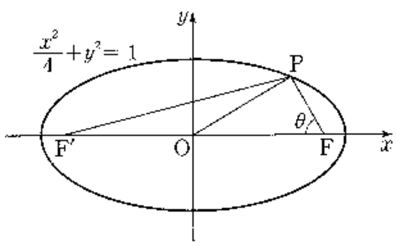
두 직선의 방향벡터가 각각 $(6,\ 3)$, $(2,\ 6)$이므로

$\cos\theta=\frac{|(6,\ 3)\cdot(2,\ 6)|}{\sqrt{6^2+3^2}\times\sqrt{2^2+6^2}}=\frac{|6\times2+3\times6|}{\sqrt{45}\times\sqrt{40}}=\frac{30}{3\sqrt{5}\times2\sqrt{10}}$

$=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$

답 ④

26



$\overline{\mathrm{PF}}=t$라 하면

타원 $\frac{x^2}{4}+y^2=1$의 장축의 길이가 4이므로 $\overline{\mathrm{PF'}}=4-t$

$\overline{\mathrm{OF}}=\sqrt{2^2-1^2}=\sqrt{3}$, $\overline{\mathrm{FF'}}=2\times\overline{\mathrm{OF}}=2\sqrt{3}$

$\angle\mathrm{PFO}=\theta$라 하고, 두 삼각형 POF, PF′F에 각각 코사인법칙을 적용하면

$$\cos\theta=\frac{(\sqrt{3})^2+t^2-\left(\frac{3}{2}\right)^2}{2\times\sqrt{3}\times t}=\frac{(2\sqrt{3})^2+t^2-(4-t)^2}{2\times2\sqrt{3}\times t}$$

$t^2-4t+\frac{11}{4}=0$

$t(4-t)=\frac{11}{4}$

따라서 $\overline{\mathrm{PF}}\times\overline{\mathrm{PF'}}=t(4-t)=\frac{11}{4}$

답 ③

27

$\overline{\mathrm{AB}}=\sqrt{3^2+4^2}=5$이고 직각삼각형 OAB의 빗변의 중점이 M이므로

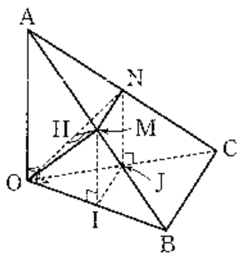
$\overline{\mathrm{OM}}=\overline{\mathrm{AM}}=\frac{5}{2}$

$\overline{\mathrm{BC}}=\sqrt{3^2+4^2}=5$이고 삼각형 ABC에서

$\overline{\mathrm{MN}}=\frac{5}{2}$

$\overline{\mathrm{AC}}=\sqrt{4^2+4^2}=4\sqrt{2}$이고 직각이등변삼각형 OCA의 빗변의 중점이 N이므로

$\overline{\mathrm{ON}}=\overline{\mathrm{AN}}=2\sqrt{2}$



삼각형 OMN은 $\overline{\mathrm{OM}}=\overline{\mathrm{MN}}$인 이등변삼각형이므로 점 M에서 선분 ON에 내린 수선의 발을 H라 하면

$\overline{\mathrm{MH}}=\sqrt{\left(\frac{5}{2}\right)^2-(\sqrt{2})^2}=\frac{\sqrt{17}}{2}$

이때 삼각형 OMN의 넓이는

$\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{ON}}\times\overline{\mathrm{MH}}=\frac{1}{2}\times2\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{17}}{2}$

$=\frac{\sqrt{34}}{2}$

점 M에서 평면 OBC에 내린 수선의 발 I는 선분 OB의 중점이고,
점 N에서 평면 OBC에 내린 수선의 발 J는 선분 OC의 중점이다.
이때 삼각형 OIJ의 넓이는

$\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{OI}}\times\overline{\mathrm{OJ}}=\frac{1}{2}\times\frac{3}{2}\times2=\frac{3}{2}$

따라서 $\cos\theta=\dfrac{\frac{3}{2}}{\frac{\sqrt{34}}{2}}=\frac{3\sqrt{34}}{34}$

답 ③

28

포물선 $y^2=4px$ $(p>0)$ 위의 점 (x_1, y_1)에서의 접선의 방정식은 $y_1y=2p(x+x_1)$이므로 $y_1\neq0$이면 접선의 기울기는 $\frac{2p}{y_1}$이다.

포물선 $y^2=4px$가 기울기가 1인 직선과 접하기 위해서는 $\frac{2p}{y_1}=1$에서 $y_1=2p$이고 접점의 y좌표는 $2p$이다.

$y=2p$를 $y^2=4px$에 대입하면 $(2p)^2=4p^2=4px$에서 $x=p$이므로 접점의 좌표는 $(p, 2p)$이다.

포물선 $C_1: y^2=4p_1(x-k_1)$은 포물선 $y^2=4p_1x$를 x축의 방향으로 k_1만큼 평행이동한 것이므로 점 P에서 x축에 내린 수선의 발은 F_1이고

$\overline{\mathrm{PF_1}}=\overline{\mathrm{OF_1}}=2p_1$, $\overline{\mathrm{A_1F_1}}=p_1$

$\overline{\mathrm{OA_1}}=\overline{\mathrm{OF_1}}-\overline{\mathrm{A_1F_1}}=2p_1-p_1=p_1$, $k_1=\overline{\mathrm{OA_1}}=p_1$ (단, O는 원점이다.)

같은 방법으로 포물선 $C_2: y^2=-4p_2(x+k_2)$는 포물선 $y^2=-4p_2x$를 x축의 방향으로 $-k_2$만큼 평행이동한 것이므로 점 Q에서 x축에 내린 수선의 발은 F_2이고

$\overline{\mathrm{QF_2}}=\overline{\mathrm{OF_2}}=2p_2$, $\overline{\mathrm{A_2F_2}}=p_2$

$\overline{\mathrm{OA_2}}=\overline{\mathrm{OF_2}}-\overline{\mathrm{A_2F_2}}=2p_2-p_2=p_2$, $k_2=\overline{\mathrm{OA_2}}=p_2$

$\overline{\mathrm{F_1F_2}}=\overline{\mathrm{OF_1}}+\overline{\mathrm{OF_2}}=2p_1+2p_2=2(p_1+p_2)$이고

$\overline{\mathrm{PQ}}=\sqrt{2}\times\overline{\mathrm{F_1F_2}}=2\sqrt{2}(p_1+p_2)$이므로 조건 (가)에서

$2\sqrt{2}(p_1+p_2)=4\sqrt{2}$

$p_1+p_2=2$ …… ㉠

$\overline{\mathrm{A_1F_2}}=\overline{\mathrm{OA_1}}+\overline{\mathrm{OF_2}}=p_1+2p_2$, $\overline{\mathrm{A_2F_1}}=\overline{\mathrm{OF_1}}+\overline{\mathrm{OA_2}}=2p_1+p_2$이므로

$\overline{\mathrm{A_1F_2}}-\overline{\mathrm{A_2F_1}}=(p_1+2p_2)-(2p_1+p_2)=-p_1+p_2$

조건 (나)에 의하여

$-p_1+p_2=1$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $p_1=\frac{1}{2}$, $p_2=\frac{3}{2}$

따라서 $p_1\times p_2=\frac{1}{2}\times\frac{3}{2}=\frac{3}{4}$

답 ⑤

29

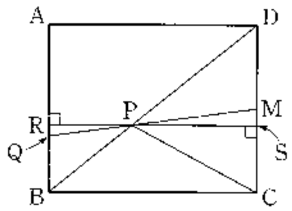
$\overrightarrow{\mathrm{PA}}+k\overrightarrow{\mathrm{PB}}+\overrightarrow{\mathrm{PC}}+\overrightarrow{\mathrm{PD}}=\vec{0}$에서

$\frac{\overrightarrow{\mathrm{PA}}+k\overrightarrow{\mathrm{PB}}}{k+1}+\frac{2}{k+1}\times\frac{\overrightarrow{\mathrm{PC}}+\overrightarrow{\mathrm{PD}}}{2}=\vec{0}$

선분 AB를 $k:1$로 내분하는 점을 Q, 선분 CD의 중점을 M이라 하면

$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}+\frac{2}{k+1}\times\overrightarrow{\mathrm{PM}}=\vec{0}$

세 점 P, Q, M은 한 직선 위에 있고, 점 P는 선분 QM을 $2:(k+1)$로 내분한다.



점 P를 지나고 선분 AD에 평행한 직선이 두 선분 AB, CD와 만나는 점을 각각 R, S라 하면 삼각형 PQR와 삼각형 PMS는 닮음이므로 점 P는 선분 RS를 $2:(k+1)$로 내분한다.

이때 $\overline{\mathrm{PS}}=5\times\frac{k+1}{k+3}$이므로

(삼각형 PCD의 넓이) $=\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{CD}}\times\overline{\mathrm{PS}}$

$=\frac{1}{2}\times4\times\frac{5(k+1)}{k+3}=\frac{10(k+1)}{k+3}$

즉, $\frac{10(k+1)}{k+3}=6$에서 $10k+10=6k+18$이므로

$k=2$

점 B를 원점으로 하고 직선 BC를 x축, 직선 AB를 y축으로 잡으면

$\mathrm{A}(0, 4)$, $\mathrm{B}(0, 0)$

$k=2$이므로 $\mathrm{Q}\left(0, \frac{4}{3}\right)$, $\mathrm{M}(5, 2)$

점 P는 선분 QM을 $2:3$으로 내분하는 점이므로 점 P의 좌표는

$\left(\frac{2\times5+3\times0}{2+3}, \frac{2\times2+3\times\frac{4}{3}}{2+3}\right)$, 즉 $\left(2, \frac{8}{5}\right)$

$\overrightarrow{PA}=\left(-2,\ \frac{12}{5}\right)$, $\overrightarrow{PB}=\left(-2,\ -\frac{8}{5}\right)$이므로

$\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}=4-\frac{96}{25}=\frac{4}{25}$

따라서 $k\times\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}=2\times\frac{4}{25}=\frac{8}{25}$

즉, $p=25$, $q=8$이므로 $p+q=25+8=33$

답 33

다른 풀이

삼각형 ACD의 무게중심을 G라 하면 점 G는 선분 BD 위에 있다.
선분 AC와 선분 BD의 교점을 M이라 하면
$\overline{BM}=\overline{DM}$, $\overline{DG}:\overline{GM}=2:1$이므로
$\overline{BG}:\overline{BD}=2:3$

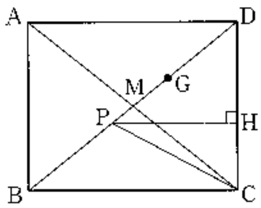
$\overrightarrow{BG}=\frac{2}{3}\times\overrightarrow{BD}$ …… ㉠

$\overrightarrow{PA}+k\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}+\overrightarrow{PD}=\vec{0}$에서
$k\overrightarrow{BP}=\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PC}+\overrightarrow{PD}$
$k\overrightarrow{BP}=3\overrightarrow{PG}$
세 점 B, P, G는 한 직선 위에 있고, 점 P는 선분 BG를 $3:k$로 내분한다.

$\overrightarrow{BP}=\frac{3}{3+k}\times\overrightarrow{BG}$ …… ㉡

㉠, ㉡에서

$\overrightarrow{BP}=\frac{2}{3+k}\times\overrightarrow{BD}$ …… ㉢



점 P에서 선분 CD에 내린 수선의 발을 H라 하면

$(\text{삼각형 PCD의 넓이})=\frac{1}{2}\times\overline{CD}\times\overline{PH}$
$=\frac{1}{2}\times4\times\overline{PH}=2\overline{PH}$

$2\overline{PH}=6$에서 $\overline{PH}=3$
$\overline{PH}:\overline{BC}=\overline{DP}:\overline{DB}=3:5$이므로
$\overline{BP}:\overline{BD}=2:5$

$\overrightarrow{BP}=\frac{2}{5}\times\overrightarrow{BD}$ …… ㉣

㉢, ㉣에서 $\frac{2}{3+k}=\frac{2}{5}$이므로
$k=2$
점 B를 원점으로 하고 직선 BC를 x축, 직선 AB를 y축으로 잡으면
A(0, 4), B(0, 0), C(5, 0), D(5, 4)
점 P는 선분 BD를 $2:3$으로 내분하는 점이므로
점 P의 좌표는

$\left(\frac{2\times5+3\times0}{2+3},\ \frac{2\times4+3\times0}{2+3}\right)$, 즉 $\left(2,\ \frac{8}{5}\right)$

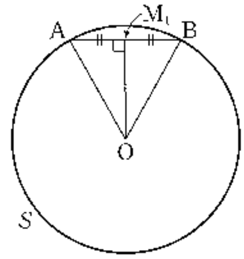
$\overrightarrow{PA}=\left(-2,\ \frac{12}{5}\right)$, $\overrightarrow{PB}=\left(-2,\ -\frac{8}{5}\right)$이므로

$\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}=4-\frac{96}{25}=\frac{4}{25}$

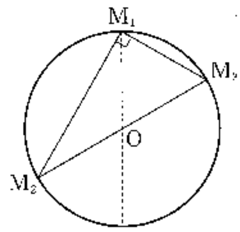
$k\times\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}=2\times\frac{4}{25}=\frac{8}{25}$

따라서 $p=25$, $q=8$이므로 $p+q=25+8=33$

30



구 S의 중심을 O라 하자.
직각삼각형 OM_1A에서
$\overline{OA}=2$, $\overline{AM_1}=\frac{1}{2}\times\overline{AB}=1$이므로
$\overline{OM_1}=\sqrt{3}$
같은 방법으로
$\overline{OM_2}=\overline{OM_3}=\sqrt{3}$
세 점 M_1, M_2, M_3을 지나는 원의 중심은 O이고, 반지름의 길이는 $\sqrt{3}$이다.



삼각형 ABC의 넓이는

$\frac{1}{2}\times\overline{AB}\times\overline{M_1M_2}=\frac{1}{2}\times2\times\overline{M_1M_2}$
$=\overline{M_1M_2}$

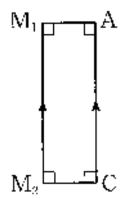
이므로
$\overline{M_1M_2}=3$

$\angle M_2M_1M_3=\frac{\pi}{2}$이므로 선분 M_2M_3의 중점은 O이고
$\overline{M_2M_3}=2\sqrt{3}$

$\overline{M_1M_3}=\sqrt{\overline{M_2M_3}^2-\overline{M_1M_2}^2}=\sqrt{(2\sqrt{3})^2-3^2}=\sqrt{3}$

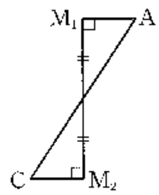
좌표공간은 평면 $M_1M_2M_3$에 의하여 두 영역으로 나누어진다. 두 영역을 각각 ㉠, ㉡이라 하자.
점 A가 ㉠에 속한다고 하면

(i) 점 C가 ㉠에 속할 때



두 직선 AC와 M_1M_2는 만나지 않는다.

(ii) 점 C가 ㉡에 속할 때



두 직선 AC와 M_1M_2는 한 점에서 만난다.

(i), (ii)에서 점 C는 ㉡에 속하고 같은 방법으로 점 E는 ㉠에 속한다.

$\overline{AC}=\sqrt{\overline{AB}^2+\overline{M_1M_2}^2}=\sqrt{2^2+3^2}=\sqrt{13}$

$\overline{CE}=\sqrt{\overline{EF}^2+\overline{M_2M_3}^2}=\sqrt{2^2+(2\sqrt{3})^2}=4$

$\overline{AE}=\overline{M_1M_3}=\sqrt{3}$이므로 삼각형 ACE는 $\angle CAE=\frac{\pi}{2}$인 직각삼각형이다.

따라서 삼각형 ACE의 넓이는

$\frac{1}{2}\times\overline{AC}\times\overline{AE}=\frac{1}{2}\times\sqrt{13}\times\sqrt{3}=\frac{\sqrt{39}}{2}$

즉, $p=2$, $q=1$이므로 $p+q=2+1=3$

답 3

실전 모의고사 5회 본문 162~173쪽

01 ①	02 ②	03 ④	04 ⑤	05 ③
06 ③	07 ⑤	08 ①	09 ②	10 ⑤
11 ③	12 ③	13 ①	14 ③	15 ⑤
16 114	17 8	18 81	19 17	20 32
21 21	22 426	23 ⑤	24 ③	25 ①
26 ②	27 ④	28 ③	29 160	30 5

01

$4^{\frac{1}{2}}+27^{\frac{2}{3}}=(2^2)^{\frac{1}{2}}+(3^3)^{\frac{2}{3}}=2+3^2=2+9=11$

답 ①

02

$f(x)=2x^3-5x^2+3x$에서 $f(1)=2-5+3=0$이므로

$\lim_{h\to0}\frac{f(1+h)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=f'(1)$

$f'(x)=6x^2-10x+3$이므로

$f'(1)=6-10+3=-1$

답 ②

03

$a_1=a$, $a_{99}=l$이라 하면 $\sum_{k=1}^{99}a_k=297$에서

$\frac{99(a+l)}{2}=297$, $\frac{a+l}{2}=\frac{297}{99}=3$

수열 $\{a_n\}$이 등차수열이므로 수열 $\{a_{2n-1}\}$도 등차수열이다.

$a_{2\times1-1}=a_1=a$, $a_{2\times50-1}=a_{99}=l$

이므로

$\sum_{k=1}^{50}a_{2k-1}=\frac{50(a+l)}{2}=50\times3=150$

답 ④

04

$\lim_{x\to-1+}f(x)=1$

$x+1=t$라 하면 $x\to0-$일 때 $t\to1-$이므로

$\lim_{x\to0-}f(x+1)=\lim_{t\to1-}f(t)=1$

따라서 $\lim_{x\to-1+}f(x)+\lim_{x\to0}f(x+1)=1+1=2$

답 ⑤

05

$a_{2n-1}=2^n$, $a_{2n}=3^n$이므로 짝수번째 항과 홀수번째 항을 나누어 생각하면

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{10}\log_6 a_n&=\sum_{k=1}^{5}\log_6 a_{2k-1}+\sum_{k=1}^{5}\log_6 a_{2k}=\sum_{k=1}^{5}\log_6 2^k+\sum_{k=1}^{5}\log_6 3^k\\&=\sum_{k=1}^{5}k\log_6 2+\sum_{k=1}^{5}k\log_6 3=\log_6 2\times\sum_{k=1}^{5}k+\log_6 3\times\sum_{k=1}^{5}k\\&=(\log_6 2+\log_6 3)\times\frac{5\times(5+1)}{2}\\&=\log_6 6\times15=15\end{aligned}$$

답 ③

06

함수 $f(x)$는 이차함수이므로 실수 전체의 집합에서 연속이고, 함수 $g(x)$는 $x=-1$과 $x=1$에서만 불연속이다.

그러므로 함수 $f(x)g(x)$가 $x=-1$과 $x=1$에서 연속이면 실수 전체의 집합에서 연속이 된다.

함수 $f(x)g(x)$가 $x=-1$에서 연속이려면

$\lim_{x\to-1-}f(x)g(x)=\lim_{x\to-1+}f(x)g(x)=f(-1)g(-1)$이어야 한다.

$\lim_{x\to-1-}f(x)g(x)=(1-a+b)\times(-2-1)=-3(1-a+b)$

$\lim_{x\to-1+}f(x)g(x)=(1-a+b)\times1=1-a+b$

$f(-1)g(-1)=(1-a+b)\times(-2-1)=-3(1-a+b)$

이므로 $-3(1-a+b)=1-a+b$

$a-b=1$ $\cdots\cdots$ ㉠

함수 $f(x)g(x)$가 $x=1$에서 연속이려면

$\lim_{x\to1-}f(x)g(x)=\lim_{x\to1+}f(x)g(x)=f(1)g(1)$이어야 한다.

$\lim_{x\to1-}f(x)g(x)=(1+a+b)\times(-1)=-(1+a+b)$

$\lim_{x\to1+}f(x)g(x)=(1+a+b)\times2=2(1+a+b)$

$f(1)g(1)=(1+a+b)\times(-1)=-(1+a+b)$

이므로 $-(1+a+b)=2(1+a+b)$

$a+b=-1$ $\cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=0$, $b=-1$이므로 $f(x)=x^2-1$

따라서 $f(2)=4-1=3$

답 ③

07

$$\begin{aligned}y&=\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right)\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)+\cos x-2\\&=-\sin x\times\sin x+\cos x-2=-\sin^2 x+\cos x-2\\&=\cos^2 x-1+\cos x-2=\cos^2 x+\cos x-3\\&=\left(\cos x+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{13}{4}\end{aligned}$$

$0\le x<2\pi$에서 $-1\le\cos x\le1$이므로

함수 $y=\left(\cos x+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{13}{4}$은 $\cos x=-\frac{1}{2}$일 때 최솟값 $-\frac{13}{4}$, $\cos x=1$일 때 최댓값 -1을 갖는다.

따라서 $M=-1$, $m=-\frac{13}{4}$이므로 $M-m=-1-\left(-\frac{13}{4}\right)=\frac{9}{4}$

답 ⑤

08

$2\times3^x+a\times3^{-x}\le1$에서 $2\times3^x+\frac{a}{3^x}\le1$, $2(3^x)^2+a\le3^x$

$3^x-2(3^x)^2\ge a$

$t=3^x$이라 하면 $t>0$이고 $t-2t^2\ge a$

$f(t)=t-2t^2$ $(t>0)$이라 하면 $f(t)=-2\left(t-\frac{1}{4}\right)^2+\frac{1}{8}$ $(t>0)$

부등식 $f(t)\ge a$의 실수인 해가 존재하려면 a는 함수 $f(t)$의 최댓값보다는 작거나 같아야 한다.

$t>0$일 때 함수 $f(t)$의 최댓값은 $f\left(\frac{1}{4}\right)=\frac{1}{8}$이므로 $a\le\frac{1}{8}$이다.

이때 $a=\frac{1}{8}$이면 $t=\frac{1}{4}=3^x$이므로 이를 만족시키는 실수인 x가 존재한다.

따라서 a의 최댓값은 $\frac{1}{8}$이다.

답 ①

09

$y=-x^3-3x^2+6$에서 $y'=-3x^2-6x$

곡선 위의 점 $(t,\ -t^3-3t^2+6)$에서의 접선의 방정식은

$y-(-t^3-3t^2+6)=(-3t^2-6t)(x-t)$

이 직선이 점 $(1,\ a)$를 지나므로

$a-(-t^3-3t^2+6)=(-3t^2-6t)(1-t)$

$2t^3-6t+6-a=0$ …… ㉠

삼차함수의 그래프에서 두 개 이상의 점에 동시에 접하는 직선은 존재하지 않으므로 방정식 ㉠이 서로 다른 세 실근을 가지면 그을 수 있는 접선의 개수가 3이 된다.

$f(t)=2t^3-6t+6-a$라 하면

$f'(t)=6t^2-6=6(t+1)(t-1)$

$f'(t)=0$에서 $t=-1$ 또는 $t=1$

함수 $f(t)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

t	…	-1	…	1	…
$f'(t)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(t)$	↗	극대	↘	극소	↗

$f(-1)=-2+6+6-a=-a+10$

$f(1)=2-6+6-a=-a+2$

방정식 ㉠이 서로 다른 세 실근을 가지려면

$-a+10>0,\ -a+2<0$에서 $2<a<10$

따라서 정수 a의 개수는

$10-2-1=7$

답 ②

10

$2\int_p^x f(t)\,dt-\int_p^x \{f'(t)\}^2dt=2-3x$ …… ㉠

㉠의 양변에 $x=p$를 대입하면

$0=2-3p,\ p=\frac{2}{3}$

㉠의 양변을 x에 대하여 미분하면

$2f(x)-\{f'(x)\}^2=-3$ …… ㉡

$f'(1)=-2$에서 $f(x)$는 상수함수가 아니므로

$f(x)$의 차수를 $n\ (n\geq 1)$이라 하면 $f'(x)$의 차수는 $n-1$,

$\{f'(x)\}^2$의 차수는 $2(n-1)$이다.

㉡의 양변의 차수를 비교하면 $n=2(n-1)$에서 $n=2$

$f(x)=ax^2+bx+c$ ($a,\ b,\ c$는 상수, $a\neq 0$)이라 하면

$f'(x)=2ax+b$ …… ㉢

이므로 ㉡에서 $2(ax^2+bx+c)-(2ax+b)^2=-3$

$(2a-4a^2)x^2+(2b-4ab)x+2c-b^2=-3$

위의 등식이 모든 실수 x에 대하여 성립하므로

$2a-4a^2=0,\ 2b-4ab=0,\ 2c-b^2=-3$ …… ㉣

에서 $a=\frac{1}{2}$

$f'(1)=-2$이므로 ㉢에서

$f'(1)=2a+b=1+b=-2$

$b=-3$

㉣에서 $2c-(-3)^2=-3$

$c=3$

이므로 $f(x)=\frac{1}{2}x^2-3x+3$이고 $f(2)=2-6+3=-1$

따라서 $p+f(2)=\frac{2}{3}+(-1)=-\frac{1}{3}$

답 ⑤

11

$y=3\tan \pi x$에 $x=\frac{1}{3}$을 대입하면

$3\tan\frac{\pi}{3}=3\sqrt{3}$이므로 $\mathrm{P}\left(\frac{1}{3},\ 3\sqrt{3}\right)$

$0<x\leq 1$이고 $y=3\tan\pi x=0$에서 $\pi x=\pi,\ x=1$이므로 $\mathrm{R}(1,\ 0)$

주어진 그래프에서 $y=a\sin\frac{\pi}{b}x$의 주기가 1이므로

$\frac{2\pi}{\frac{\pi}{b}}=2b=1$에서 $b=\frac{1}{2}$

함수 $y=a\sin 2\pi x$의 그래프가 점 $\mathrm{P}\left(\frac{1}{3},\ 3\sqrt{3}\right)$을 지나므로

$a\sin\frac{2}{3}\pi=\frac{\sqrt{3}}{2}a=3\sqrt{3}$에서 $a=6$

이때 두 곡선 $y=3\tan\pi x,\ y=6\sin 2\pi x$는 점 $\left(\frac{1}{2},\ 0\right)$에 대하여 대칭이므로 사각형 OQRP는 평행사변형이다.

사각형 OQRP의 넓이는 삼각형 ORP의 넓이의 2배이므로

$S=2\times\left(\frac{1}{2}\times 1\times 3\sqrt{3}\right)=3\sqrt{3}$

따라서 $abS=6\times\frac{1}{2}\times 3\sqrt{3}=9\sqrt{3}$

답 ③

12

$f(x)=x^3-4x,\ g(x)=x^2+ax$라 하고, 점 P의 x좌표를 t라 하면

$f(t)=g(t)$이고 $f'(t)=g'(t)$이다.

$f'(x)=3x^2-4,\ g'(x)=2x+a$이므로

$t^3-4t=t^2+at$ …… ㉠

$3t^2-4=2t+a$ …… ㉡

㉡에서 $a=3t^2-2t-4$이고, 이를 ㉠에 대입하면

$t^3-4t=t^2+(3t^2-2t-4)t,\ t^2(2t-1)=0$에서 $t=0$ 또는 $t=\frac{1}{2}$

$t=0$이면 $a=-4$

$t=\frac{1}{2}$이면 $a=-\frac{17}{4}$

(i) $a=-4$일 때

$$f(x)-g(x)=(x^3-4x)-(x^2-4x)$$
$$=x^3-x^2=x^2(x-1)$$

이므로 두 곡선으로 둘러싸인 부분의 넓이는

$-\int_0^1(x^3-x^2)\,dx=-\left[\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{3}x^3\right]_0^1=-\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{12}$

(ii) $a=-\frac{17}{4}$일 때

$$f(x)-g(x)=(x^3-4x)-\left(x^2-\frac{17}{4}x\right)$$
$$=x^3-x^2+\frac{1}{4}x=x\left(x-\frac{1}{2}\right)^2$$

이므로 두 곡선으로 둘러싸인 부분의 넓이는

$$\int_0^{\frac{1}{2}}\left(x^3-x^2+\frac{1}{4}x\right)dx=\left[\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{8}x^2\right]_0^{\frac{1}{2}}$$
$$=\frac{1}{64}-\frac{1}{24}+\frac{1}{32}=\frac{1}{192}$$

따라서 $S_1=\frac{1}{12}$, $S_2=\frac{1}{192}$이므로 $\frac{S_1}{S_2}=\frac{\frac{1}{12}}{\frac{1}{192}}=\frac{192}{12}=16$

답 ③

13

$y=\log_2 4(x-5)=\log_2(x-5)+\log_2 4=\log_2(x-5)+2$

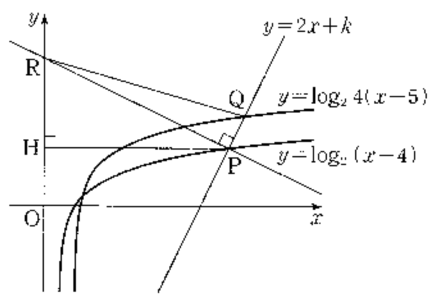
이므로 함수 $y=\log_2 4(x-5)$의 그래프는 함수 $y=\log_2(x-4)$의 그래프를 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이다.

직선 $y=2x+k$의 기울기가 2이므로 점 P를 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 점이 점 Q이다.

$\overline{PQ}=\sqrt{1^2+2^2}=\sqrt{5}$이고 삼각형 PQR의 넓이가 15이므로

$\frac{1}{2}\times\sqrt{5}\times\overline{PR}=15$, $\overline{PR}=\frac{30}{\sqrt{5}}=6\sqrt{5}$

점 P에서 y축에 내린 수선의 발을 H라 하면 직선 PR의 기울기가 $-\frac{1}{2}$이므로 $\overline{RH}:\overline{PH}:\overline{PR}=1:2:\sqrt{5}$이다.



$\overline{PR}=6\sqrt{5}$이므로 $\overline{PH}=12$

점 P의 x좌표를 p라 하면 $p=12$

점 P$(p, 2p+k)$, 즉 P$(12, 24+k)$는 곡선 $y=\log_2(x-4)$ 위의 점이므로

$24+k=\log_2 8=3$

따라서 $k=3-24=-21$

답 ①

다른 풀이

$y=\log_2 4(x-5)=\log_2(x-5)+\log_2 4=\log_2(x-5)+2$

이므로 함수 $y=\log_2 4(x-5)$의 그래프는 함수 $y=\log_2(x-4)$의 그래프를 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이다.

직선 $y=2x+k$의 기울기가 2이므로 점 P를 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 점이 점 Q이다.

$\overline{PQ}=\sqrt{1^2+2^2}=\sqrt{5}$이고 삼각형 PQR의 넓이가 15이므로

$\frac{1}{2}\times\sqrt{5}\times\overline{PR}=15$, $\overline{PR}=\frac{30}{\sqrt{5}}=6\sqrt{5}$ ...... ㉠

점 P의 x좌표를 p $(p>0)$이라 하면 점 P는 직선 $y=2x+k$ 위의 점이므로

P$(p, 2p+k)$

점 P를 지나고 직선 $y=2x+k$에 수직인 직선의 기울기는 $-\frac{1}{2}$이므로 직선 PR의 방정식은

$y-(2p+k)=-\frac{1}{2}(x-p)$, $x+2y-5p-2k=0$

$x=0$이면 $y=\frac{5p+2k}{2}$이므로 $\mathrm{R}\left(0, \frac{5p+2k}{2}\right)$

$\overline{PR}$는 점 R와 직선 $y=2x+k$, 즉 $2x-y+k=0$ 사이의 거리이므로

$$\overline{PR}=\frac{\left|0-\frac{5p+2k}{2}+k\right|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=\frac{\frac{5}{2}p}{\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{5}}{2}p \quad \cdots\cdots ㉡$$

㉠, ㉡에서 $\frac{\sqrt{5}}{2}p=6\sqrt{5}$, $p=12$

점 P$(12, 24+k)$는 곡선 $y=\log_2(x-4)$ 위의 점이므로

$24+k=\log_2 8=3$

따라서 $k=3-24=-21$

14

$h(x)=x^3-3a^2x$라 하면

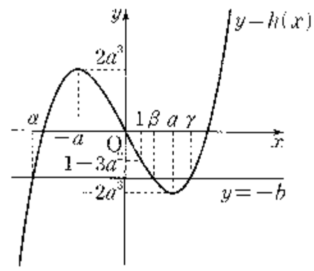
$h'(x)=3x^2-3a^2=3(x+a)(x-a)$

$h'(x)=0$에서 $x=-a$ 또는 $x=a$

함수 $h(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	$-a$	$\cdots$	a	$\cdots$
$h'(x)$	+	0	−	0	+
$h(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

$h(-a)=-a^3+3a^3=2a^3$, $h(a)=a^3-3a^3=-2a^3$



삼차방정식 $x^3-3a^2x+b=0$이 서로 다른 세 실근을 가지려면

$x^3-3a^2x=-b$에서 함수 $y=h(x)$의 그래프와 직선 $y=-b$가 서로 다른 세 점에서 만나야 하고, 세 근 α, β, γ $(\alpha<\beta<\gamma)$에 대하여 $\beta>1$이 성립하려면 $h(1)=1-3a^2$이므로

$-2a^3<-b<1-3a^2$, 즉 $3a^2-1<b<2a^3$

따라서 $f(a)=3a^2-1$, $g(a)=2a^3$이므로

$f(3)+g(2)=26+16=42$

답 ⑤

15

ㄱ. $a_1=1$

$a_2=a_1+1\times\sin\frac{\pi}{2}=a_1+1=2$

$a_3=a_2+2\times\sin\pi=a_2=2$

$a_4=a_3+3\times\sin\frac{3\pi}{2}=a_3-3=-1$

이므로 $a_1+a_2+a_3+a_4=1+2+2+(-1)=4$ (참)

ㄴ. 자연수 k에 대하여

$a_{4k+1}=a_{4k}+4k\sin\frac{4k\pi}{2}=a_{4k}$

$a_{4k+2}=a_{4k+1}+(4k+1)\sin\frac{(4k+1)\pi}{2}=a_{4k}+4k+1$

$a_{4k+3}=a_{4k+2}+(4k+2)\sin\frac{(4k+2)\pi}{2}=a_{4k+2}=a_{4k}+4k+1$

$a_{4k+4}=a_{4k+3}+(4k+3)\sin\frac{(4k+3)\pi}{2}$

$=(a_{4k}+4k+1)-(4k+3)=a_{4k}-2$

$a_{4k+5}=a_{4k+4}=a_{4k}-2=a_{4k+1}-2$

$a_{4k+6}=a_{4k+5}+(4k+5)=a_{4k}-2+(4k+5)$

$=a_{4k}+4k+3=a_{4k+2}+2$

$a_{4k+7}=a_{4k+6}=a_{4k+2}+2=a_{4k+3}+2$

이므로 수열 $\{a_{4k-3}\}$, $\{a_{4k-2}\}$, $\{a_{4k-1}\}$, $\{a_{4k}\}$는 각각 공차가 -2, 2, 2, -2인 등차수열이다.

$a_4=-1$이므로

$a_{4k}=-1+(k-1)\times(-2)=-2k+1$ (참)

ㄷ. $a_{4k-3}+a_{4k-2}+a_{4k-1}+a_{4k}=a_1+a_2+a_3+a_4=4$

이고

$a_{4k+1}+a_{4k+2}=a_{4k}+(a_{4k}+4k+1)=2a_{4k}+4k+1$

$=2(-2k+1)+4k+1=3$

따라서

$\sum_{k=1}^{50}a_k=\sum_{k=1}^{48}a_k+a_{49}+a_{50}=4\times12+3=48+3=51$ (참)

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

답 ⑤

16

$\int_{-3}^{3}(6x^2+5x+1)\,dx=2\int_0^3(6x^2+1)\,dx$

$=2\Big[2x^3+x\Big]_0^3$

$=2(54+3)=114$

답 114

17

등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공비를 r라 하면

$a_3a_5=2a_7$에서 $ar^2\times ar^4=2ar^6$

$a^2r^6=2ar^6$

$a\neq0$, $r\neq0$이므로 $a=2$

$a_8+a_9=6a_7$에서

$2r^7+2r^8=6\times2r^6$

$r+r^2=6$, $r^2+r-6=0$, $(r+3)(r-2)=0$

$r>0$이므로 $r=2$

즉, $a_n=2\times2^{n-1}=2^n$이므로

$a_3=2^3=8$

답 8

18

$f(x)=x^3+2ax^2+3ax-1$에서

$f'(x)=3x^2+4ax+3a$

함수 $f(x)$의 역함수가 존재하려면 $f(x)$는 실수 전체의 집합에서 증가해야 한다.

즉, 모든 실수 x에 대하여 $f'(x)\geq0$이어야 하므로 이차방정식 $f'(x)=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=4a^2-9a\leq0$, $a(4a-9)\leq0$

$0\leq a\leq\frac{9}{4}$

따라서 a의 최댓값은 $\frac{9}{4}$, 최솟값은 0이므로

$36(M+m)=36\left(\frac{9}{4}+0\right)=81$

답 81

19

삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의하여

$\cos B=\frac{5^2+4^2-7^2}{2\times5\times4}=-\frac{1}{5}$이므로

$\sin B=\sqrt{1-\left(-\frac{1}{5}\right)^2}=\sqrt{\frac{24}{25}}=\frac{2\sqrt{6}}{5}$

사각형 ABCD가 한 원에 내접하므로 마주보는 각의 크기의 합은 π이다.

즉, $B+D=\pi$이므로

$\sin D=\sin(\pi-B)=\sin B=\frac{2\sqrt{6}}{5}$ ······ ㉠

$\cos D=\cos(\pi-B)=-\cos B=\frac{1}{5}$

$\overline{AD}=a$라 하면 $\overline{CD}=2a$이므로

삼각형 ACD에서 코사인법칙에 의하여

$\overline{AC}^2=a^2+(2a)^2-4a^2\cos D$이므로

$49=5a^2-4a^2\times\frac{1}{5}=\frac{21}{5}a^2$

$a^2=\frac{5}{21}\times49=\frac{35}{3}$ ······ ㉡

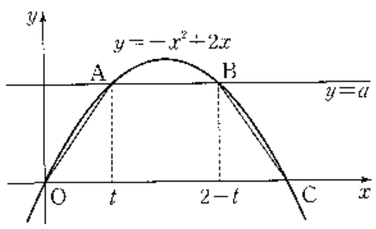
㉠, ㉡에서 삼각형 ACD의 넓이는

$\frac{1}{2}\times a\times2a\times\sin D=a^2\sin D=\frac{35}{3}\times\frac{2\sqrt{6}}{5}=\frac{14\sqrt{6}}{3}$

따라서 $p=3$, $q=14$이므로 $p+q=3+14=17$

답 17

20



점 C의 좌표는 $(2, 0)$이고, 곡선 $y=-x^2+2x$는 직선 $x=1$에 대하여 대칭이므로 점 A의 x좌표를 t $(0<t<1)$이라 하면 점 B의 x좌표는 $2-t$이다.

점 A의 y좌표가 $-t^2+2t$이므로 사각형 OCBA의 넓이를 $f(t)$라 하면

$$f(t)=\frac{1}{2}\times\{2+(2-2t)\}\times(-t^2+2t)$$
$$=t(t-2)^2=t(t^2-4t+4)$$
$$f'(t)=(t-2)^2+2t(t-2)$$
$$=(t-2)(3t-2)$$

$0<t<1$이므로 $f'(t)=0$에서 $t=\frac{2}{3}$

이때 $f(t)$는 $t=\frac{2}{3}$에서 극대이면서 최대이므로 최댓값 S는

$$S=f\left(\frac{2}{3}\right)=\frac{2}{3}\times\left(\frac{2}{3}-2\right)^2=\frac{2}{3}\times\frac{16}{9}=\frac{32}{27}$$

따라서 $27S=32$

답 32

21

집합 S_n의 원소는

$(-2)^0a_1+(-2)^1a_2+(-2)^2a_3+\cdots+(-2)^{n-1}a_n$

$=a_1-2a_2+2^2a_3-\cdots+(-2)^{n-1}a_n$

과 같이 나타낼 수 있다.

집합 S_3의 원소는 $a_1-2a_2+4a_3$의 꼴로 나타나고 $a_k\ (k=1,\ 2,\ 3)$의 값은 0 또는 1이다.

따라서 a_1+4a_3의 값은 0, 1, 4, 5로 4가지

$-2a_2$의 값은 -2, 0으로 2가지

경우가 될 수 있으므로

$S_3=\{-2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}$

즉, $p=8$

집합 S_n에 속하는 원소 $a_1-2a_2+2^2a_3-\cdots+(-2)^{n-1}a_n$의 값은

$a_{2i-1}=1,\ a_{2i}=0\ (i=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$

일 때 최대이다.

자연수 j에 대하여 $n=2j$라 하면 집합 S_n에 속하는 원소의 최댓값은

$a_1-2a_2+2^2a_3-\cdots+(-2)^{2j-1}a_{2j}$

$=1-0+2^2-0+\cdots+(-2)^{2j-2}-0$

$=1+2^2+\cdots+2^{2j-2}=\frac{2^{2j}-1}{4-1}=\frac{2^{2j}-1}{3}$

$n=2j+1$이라 하면

$a_1-2a_2+2^2a_3-\cdots+(-2)^{(2j+1)-1}a_{2j+1}$

$=1-0+2^2-0+\cdots+(-2)^{2j-2}-0+(-2)^{2j}$

$=1+2^2+\cdots+2^{2j-2}+2^{2j}=\frac{2^{2j+2}-1}{3}$

$\frac{2^{2j}-1}{3}\leq 5453\leq\frac{2^{2j+2}-1}{3}$에서

$\frac{2^{12}-1}{3}=\frac{4095}{3}=1365,\ \frac{2^{14}-1}{3}=\frac{16383}{3}=5461$이고

$5453=5461-8$이므로

$5453=1+2^2+2^4+\cdots+2^{12}-2^3$

따라서 5453을 원소로 갖는 S_n 중 n의 값이 최소인 경우는

$n=2\times6+1=13$일 때이다.

그러므로 $q=13$

따라서 $p+q=8+13=21$

답 21

22

$f(x)=x^3+3x^2-3(t^2-1)x+2t^3-3t^2+1$에서

$f'(x)=3x^2+6x-3(t^2-1)$

$=3x^2+6x-3(t+1)(t-1)$

$=3\{x-(t-1)\}\{x+(t+1)\}$

$f'(x)=0$에서 $x=t-1$ 또는 $x=-t-1$

$t>0$이므로 $-t-1<-1<t-1$이고, 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	$-t-1$	$\cdots$	$t-1$	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

$f(t-1)=(t-1)^3+3(t-1)^2-3(t^2-1)(t-1)+2t^3-3t^2+1$

$=(t-1)^3+3(t-1)^2-3(t-1)^2(t+1)+(t-1)^2(2t+1)$

$=(t-1)^2\{(t-1)+3-3(t+1)+(2t+1)\}=0$

$f(-1)=-1+3+3(t^2-1)+2t^3-3t^2+1$

$=2t^3$

$f(2)=8+12-6(t^2-1)+2t^3-3t^2+1$

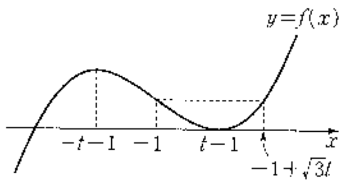
$=2t^3-9t^2+27$

$f(x)=f(-1)$에서

$f(x)-2t^3=(x+1)(x^2+2x+1-3t^2)=0$이므로

$x=-1$ 또는 $x=-1\pm\sqrt{3}t$

에서 $f(-1)=f(-1+\sqrt{3}t)=2t^3$



이때 $-1+\sqrt{3}t\geq2$, 즉 $t\geq\sqrt{3}$이면 $g(t)=f(-1)=2t^3$

$0<t<\sqrt{3}$이면 $g(t)=f(2)=2t^3-9t^2+27$

한편, $t-1\geq2$, 즉 $t\geq3$이면 $h(t)=f(2)=2t^3-9t^2+27$

$0<t<3$이면 $h(t)=f(t-1)=0$

그러므로 두 함수 $g(t)$, $h(t)$는 다음과 같다.

$$g(t)=\begin{cases}2t^3-9t^2+27 & (0<t<\sqrt{3})\\ 2t^3 & (t\geq\sqrt{3})\end{cases}$$

$$h(t)=\begin{cases}0 & (0<t<3)\\ 2t^3-9t^2+27 & (t\geq3)\end{cases}$$

이때 함수 $g(t)$는 $t=\sqrt{3}$에서 미분가능하지 않으므로 $a=\sqrt{3}$이다.

$g(2a)=g(2\sqrt{3})=2\times(2\sqrt{3})^3$

$=48\sqrt{3}$

$h(3a)=h(3\sqrt{3})=2(3\sqrt{3})^3-9(3\sqrt{3})^2+27$

$=162\sqrt{3}-216$

따라서

$g(2a)+h(3a)=48\sqrt{3}+(162\sqrt{3}-216)$

$=210\sqrt{3}-216$

즉, $p=210$, $q=-216$이므로

$p-q=210-(-216)=426$

답 426

23

$\vec{a}\cdot\vec{b}=(2,\ k)\cdot(-3,\ 1)=0$에서

$-6+k=0$

따라서 $k=6$

답 ⑤

24

좌표공간의 점 $A(2,\ 0,\ \sqrt{3})$에서 xy평면에 내린 수선의 발 H의 좌표는 $(2,\ 0,\ 0)$이다.

xy평면 위의 타원 $x^2+9y^2=9$, 즉 $\frac{x^2}{9}+y^2=1$의 장축은 x축 위에 있으므로 점 P가 장축의 양 끝점 중 점 H와의 거리가 먼 점 $(-3,\ 0,\ 0)$에 있을 때 선분 AP의 길이가 최대이다.

따라서

$\overline{AP}=\sqrt{\overline{AH}^2+\overline{HP}^2}\le\sqrt{(\sqrt{3})^2+(-3-2)^2}=2\sqrt{7}$

이므로 선분 AP의 길이의 최댓값은 $2\sqrt{7}$이다.

답 ⑤

25

정팔면체의 한 모서리의 길이를 2라 하자.

선분 CF의 중점을 N이라 하면 두 사각형 ACFE, ABFD는 모두 한 변의 길이가 2인 정사각형이므로

$\overline{AN}=\sqrt{2^2+1^2}=\sqrt{5}$, $\overline{AM}=\sqrt{2^2+1^2}=\sqrt{5}$

삼각형 CBF는 한 변의 길이가 2인 정삼각형이므로

$\overline{MN}=1$

사각형 BCDE는 정사각형이므로

$\overline{DE}\,/\!/\,\overline{BC}$

정삼각형 CBF에서

$\overline{BC}\,/\!/\,\overline{MN}$

즉, $\overline{DE}\,/\!/\,\overline{MN}$이므로 두 직선 AM, DE가 이루는 예각의 크기는 두 직선 AM, MN이 이루는 예각의 크기와 같다.

이등변삼각형 AMN에서

$$\cos\theta=\cos(\angle AMN)=\frac{\frac{1}{2}}{\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{5}}{10}$$

답 ①

26

포물선 $y^2=4px$의 준선의 방정식이 $x=-2$이므로 $p=2$이다.

네 점 F, Q, R, S는 모두 중심이 P인 원 위의 점이므로 원의 두 현 RF, SQ가 서로 평행하면 사다리꼴 FQSR는 $\overline{FQ}=\overline{SR}$인 등변사다리꼴이다.

이때 서로 합동인 두 이등변삼각형 PFQ, PRS의 꼭짓점 P에서 x축 및 y축에 내린 두 수선의 길이는 서로 같으므로 점 P의 x좌표와 y좌표는 같다.

$y^2=8x$, $y=x$를 연립하면

$x^2=8x$에서 $x=0$ 또는 $x=8$

두 점 F, P의 좌표가 각각 $(2,\ 0)$, $(8,\ 8)$이므로 세 점 Q, R, S의 좌표는 각각 $Q(14,\ 0)$, $R(0,\ 2)$, $S(0,\ 14)$이다.

따라서 사각형 FQSR의 넓이는

$\frac{1}{2}\times14^2-\frac{1}{2}\times2^2=96$

답 ②

27

두 삼각형 ABH, ABE의 넓이를 각각 S_1, S_2라 하자.

두 평면 α, β가 이루는 예각 θ에 대하여 $\cos\theta=\frac{5}{8}$이므로

$S_1=\frac{4}{5}S\times\cos\theta=\frac{1}{2}S$ …… ㉠

평면 β 위의 점 D에서 평면 α 위에 내린 수선의 발 H가 선분 AE 위의 점이므로 $\frac{\overline{AE}}{\overline{AH}}=p\ (p>0)$으로 놓으면

$S_1 : S_2=1 : p$

$S_1=\frac{1}{p}\times S_2$ …… ㉡

점 E는 선분 BC를 $2:1$로 내분하는 점이므로

$S_2=\frac{2}{3}\times S$ …… ㉢

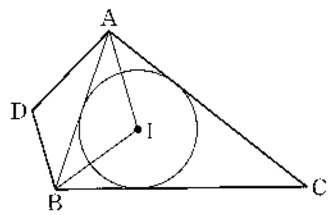
㉠, ㉡, ㉢에서

$\frac{1}{2}S=\frac{1}{p}\times\left(\frac{2}{3}\times S\right)$

따라서 $p=\frac{2}{3}\times2=\frac{4}{3}$

답 ④

28



조건 (가)에서 $\overrightarrow{DB}=\frac{3}{10}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{5}\overrightarrow{AC}$

$2\overrightarrow{DB}=\frac{3}{5}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{5}\overrightarrow{AC}$ …… ㉠

점 I는 삼각형 ABC의 내심이므로 $\angle BAC$의 이등분선인 직선 AI가 변 BC와 만나는 점을 E라 하면

$\overline{BE} : \overline{EC}=\overline{AB} : \overline{AC}=2:3$

점 E는 선분 BC를 $2:3$으로 내분하는 점이므로

$\overrightarrow{AE}=\frac{3}{5}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{5}\overrightarrow{AC}$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 $\overrightarrow{AE}=2\overrightarrow{DB}$이고, 조건 (나)에서 $\overrightarrow{AI}=\frac{5}{4}\overrightarrow{DB}$이므로

$\overrightarrow{AI}=\frac{5}{8}\overrightarrow{AE}$

즉, 점 I는 선분 AE를 $5:3$으로 내분하는 점이므로

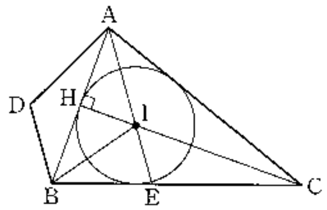
(삼각형 IBC의 넓이)$=\frac{3}{8}\times$(삼각형 ABC의 넓이) …… ㉢

삼각형 ABC의 내접원의 반지름의 길이를 $r\ (r>0)$, $\overline{BC}=k\ (k>0)$이라 하면 ㉢에서

$\frac{1}{2}\times k\times r=\frac{3}{8}\times\frac{1}{2}\times(4+6+k)\times r$

$k=\frac{3}{8}(10+k)$, $k=6$

따라서 삼각형 ABC는 $\overline{AC}=\overline{BC}=6$인 이등변삼각형이다.



점 C에서 밑변 AB에 내린 수선의 발을 H라 하면 점 H는 선분 AB의 중점이므로

$\overline{HC}=\sqrt{\overline{AC}^2-\overline{AH}^2}=\sqrt{6^2-2^2}=4\sqrt{2}$

$(삼각형 ABC의 넓이)=\frac{1}{2}\times\overline{HC}\times\overline{AB}=\frac{1}{2}\times4\sqrt{2}\times4=8\sqrt{2}$

이므로

$(삼각형 ABI의 넓이)=\frac{5}{8}\times(삼각형 ABE의 넓이)$

$=\frac{5}{8}\times\frac{2}{5}\times(삼각형 ABC의 넓이)$

$=\frac{1}{4}\times8\sqrt{2}=2\sqrt{2}$

이때 $\overline{DB}\mathbin{/\!/}\overline{AI}$에서 두 삼각형 DBA, ABI의 높이는 서로 같고, $\overline{DB}:\overline{AI}=4:5$이므로

$(삼각형 DBA의 넓이)=\frac{4}{5}\times(삼각형 ABI의 넓이)$

$=\frac{4}{5}\times2\sqrt{2}=\frac{8\sqrt{2}}{5}$

따라서 사각형 ADBI의 넓이는

(삼각형 ABI의 넓이)+(삼각형 DBA의 넓이)

$=2\sqrt{2}+\frac{8\sqrt{2}}{5}=\frac{18\sqrt{2}}{5}$

답 ③

29

조건 (가)에서 쌍곡선의 두 초점은 두 포물선 $y^2=4(x+a)$, $y^2=-4(x-a)$의 교점이므로 $4(x+a)=-4(x-a)$에서 $x=0$

$y^2=4(0+a)$에서 $y=\pm2\sqrt{a}$

따라서 두 포물선의 교점의 좌표는 $(0, 2\sqrt{a})$, $(0, -2\sqrt{a})$이고,

쌍곡선 $x^2-y^2=-b^2$, 즉 $\frac{x^2}{b^2}-\frac{y^2}{b^2}=-1$의 두 초점의 좌표가

$(0, b\sqrt{2})$, $(0, -b\sqrt{2})$이므로

$2\sqrt{a}=b\sqrt{2}$에서 $b^2=2a$ …… ㉠

점 F의 y좌표가 양수라 하자.

두 점 P, Q는 모두 쌍곡선 $\frac{x^2}{b^2}-\frac{y^2}{b^2}=-1$ 위의 점이므로

$\overline{FP}=p$, $\overline{FQ}=q$라 하면 쌍곡선의 정의에 의하여

$\overline{F'P}=p+2b$, $\overline{F'Q}=q+2b$

두 삼각형 FPQ, F'QP의 둘레의 길이의 차는

$|(\overline{F'P}+\overline{F'Q}+\overline{PQ})-(\overline{FP}+\overline{FQ}+\overline{PQ})|$

$=|(\overline{F'P}-\overline{FP})+(\overline{F'Q}-\overline{FQ})|=4b$

이므로 조건 (나)에서

$4b=8\sqrt{3}$, $b=2\sqrt{3}$

㉠에서 $2a=12$, $a=6$

두 식 $y^2=4(x+6)$, $x^2-y^2=-12$를 연립하면

$x^2-4(x+6)=-12$, $x^2-4x-12=0$, $(x+2)(x-6)=0$

$x=-2$ 또는 $x=6$

$x=-2$일 때, $y=\pm4$

$x=6$일 때, $y=\pm4\sqrt{3}$

따라서 두 점 P, Q의 좌표는 $(-2, 4)$, $(6, 4\sqrt{3})$이므로

$\overline{PQ}^2=(6+2)^2+(4\sqrt{3}-4)^2=128-32\sqrt{3}$

즉, $p=128$, $q=32$이므로 $p+q=128+32=160$

답 160

30

조건 (가)의 $\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{PB}=0$에서 $\overrightarrow{AP}\perp\overrightarrow{PB}$

즉, 점 P는 선분 AB를 지름으로 하는 원 C_1 위의 점이다.

$\overrightarrow{BQ}\cdot\overrightarrow{QC}=0$에서 $\overrightarrow{BQ}\perp\overrightarrow{QC}$

즉, 점 Q는 선분 BC를 지름으로 하는 원 C_2 위의 점이다.

조건 (나)에서 점 P의 좌표를 (x_1, y_1)이라 하면

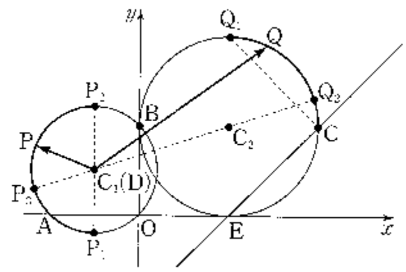
$\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{BC}=(x_1+2, y_1)\cdot(4, 0)=4(x_1+2)\le4$

$x_1\le-1$

따라서 원 C_1이 직선 $x=-1$과 만나는 두 점을 P_1, P_2라 하면 점 P는 원 C_1 위의 점 중 x좌표가 -1보다 작거나 같은 호 P_1P_2 위의 점이다.

점 E(2, 0)에 대하여 점 C를 지나고 직선 EC에 수직인 직선이 원 C_2와 만나는 점 중 C가 아닌 점을 Q_1이라 하자.

$\overrightarrow{CQ}\cdot\overrightarrow{AB}\ge0$에서 점 Q는 중심각의 크기가 $\frac{\pi}{2}$인 원 C_2의 호 Q_1C 위의 점이다.



두 원 C_1, C_2의 중심을 각각 C_1, C_2라 하면 점 D$(-1, 1)$은 점 C_1과 일치한다.

$\overrightarrow{DP}\cdot\overrightarrow{DQ}$, 즉 $\overrightarrow{C_1P}\cdot\overrightarrow{C_1Q}$의 값은 점 P가 P_2의 위치에 있고, 점 Q가 Q_1의 위치에 있을 때 최대이므로

$M=\overrightarrow{C_1P_2}\cdot\overrightarrow{C_1Q_1}$

$=(0, \sqrt{2})\cdot(3, 3)=3\sqrt{2}$

직선 C_1C_2가 원 C_1과 만나는 점 중 C_1에 가까운 점을 P_3이라 하고

직선 C_1C_2가 원 C_2와 만나는 점 중 C_2에 가까운 점을 Q_2라 하자.

$\overrightarrow{C_1P}\cdot\overrightarrow{C_1Q}$의 값은 점 P가 P_3의 위치에 있고, 점 Q가 Q_2의 위치에 있을 때 최소이므로

$m=\overrightarrow{C_1P_3}\cdot\overrightarrow{C_1Q_2}=-|\overrightarrow{C_1P_3}|\times|\overrightarrow{C_1Q_2}|$

$=-\sqrt{2}\times(\sqrt{3^2+1^2}+2)=-2\sqrt{5}-2\sqrt{2}$

따라서 $M+m=\sqrt{2}-2\sqrt{5}$

즉, $p=1$, $q=-2$이므로 $p^2+q^2=1^2+(-2)^2=5$

답 5