수능완성

수학영역 | **수학 Ⅰ·수학 Ⅱ·미적분**

정답과 풀이

01 지수함수와 로그함수

정답 본문 6~15쪽

필수 유형 ❶ ①	01 ④	02 ③	03 ④	04 5
필수 유형 ❷ ①	05 ①	06 ④	07 16	08 48
필수 유형 ❸ 2	09 ①	10 ②	11 5	12 ③
필수 유형 ❹ ①	13 ①	14 ④	15 37	
필수 유형 ❺ ②	16 ②	17 8	18 ⑤	
필수 유형 ❻ ⑤	19 ③	20 ④	21 ③	
필수 유형 ❼ ③	22 ③	23 ②	24 7	
필수 유형 ❽ 15	25 4	26 ①	27 6	
필수 유형 ❾ 192	28 ⑤	29 ①	30 22	
필수 유형 ❿ ④	31 ①	32 ②	33 23	

필수 유형 ❶

$-n^2+9n-18=-(n^2-9n+18)=-(n-3)(n-6)$이므로

$-n^2+9n-18$의 n제곱근 중에서 음의 실수는

$-n^2+9n-18<0$일 때, 홀수 n에 대하여 $\sqrt[n]{-n^2+9n-18}$이고

$-n^2+9n-18>0$일 때, 짝수 n에 대하여 $-\sqrt[n]{-n^2+9n-18}$이다.

(i) $-n^2+9n-18<0$일 때

$-(n-3)(n-6)<0$에서 $(n-3)(n-6)>0$이므로

$n<3$ 또는 $n>6$

즉, $2\le n<3$ 또는 $6<n\le 11$을 만족시키는 홀수는 7, 9, 11이다.

(ii) $-n^2+9n-18>0$일 때

$-(n-3)(n-6)>0$에서 $(n-3)(n-6)<0$이므로 $3<n<6$

즉, 이를 만족시키는 짝수는 4이다.

(i), (ii)에 의하여 조건을 만족시키는 모든 n의 값의 합은

$4+7+9+11=31$

답 ①

01

$(\sqrt[3]{5})^3=5$, $\sqrt[3]{27}\times\sqrt[4]{16}=\sqrt[3]{3^3}\times\sqrt[4]{2^4}=3\times2=6$,

$\sqrt[3]{\sqrt{64}}=\sqrt[6]{64}=\sqrt[6]{2^6}=2$이므로

$(\sqrt[3]{5})^3+\sqrt[3]{27}\times\sqrt[4]{16}-\sqrt[3]{\sqrt{64}}=5+6-2=9$

답 ④

02

$a>0$, $b>0$일 때, 지수법칙에 의하여 $(ab)^{12}=a^{12}b^{12}$

$a^3=\sqrt[4]{5}$이므로 $a^{12}=(a^3)^4=(\sqrt[4]{5})^4=5$

$b^4=\sqrt[3]{3}$이므로 $b^{12}=(b^4)^3=(\sqrt[3]{3})^3=3$

따라서 $(ab)^{12}=a^{12}b^{12}=5\times3=15$

답 ③

03

m^2-4m-5의 네제곱근 중 실수인 것이 존재하지 않으려면

$m^2-4m-5<0$이어야 한다.

$m^2-4m-5<0$에서 $(m+1)(m-5)<0$이므로

$-1<m<5$

따라서 조건을 만족시키는 자연수 m의 최댓값은 4이다.

답 ④

04

$x^2-65x+64=0$에서 $(x-1)(x-64)=0$

$x=1$ 또는 $x=64$이므로 $A=\{1, 64\}$

또한 $x^2-7x+10<0$에서 $(x-2)(x-5)<0$

$2<x<5$이므로 부등식 $x^2-7x+10<0$을 만족시키는 자연수 x의 값은 3, 4이다. 즉, $B=\{3, 4\}$

(i) $a=1$, $n=3$인 경우

$x^3=1$에서 $x^3-1=0$

$(x-1)(x^2+x+1)=0$

$x=1$ 또는 $x=\frac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}$이므로 1의 세제곱근 중 실수인 것의 개수는 1이다.

(ii) $a=1$, $n=4$인 경우

$x^4=1$에서 $x^4-1=0$

$(x^2-1)(x^2+1)=0$

$x=\pm1$ 또는 $x=\pm i$이므로 1의 네제곱근 중 실수인 것의 개수는 2이다.

(iii) $a=64$, $n=3$인 경우

$x^3=64$에서 $x^3-64=0$

$(x-4)(x^2+4x+16)=0$

$x=4$ 또는 $x=-2\pm2\sqrt{3}i$이므로 64의 세제곱근 중 실수인 것의 개수는 1이다.

(iv) $a=64$, $n=4$인 경우

$x^4=64$에서 $x^4-64=0$

$(x^2-8)(x^2+8)=0$

$x=\pm2\sqrt{2}$ 또는 $x=\pm2\sqrt{2}i$이므로 64의 네제곱근 중 실수인 것의 개수는 2이다.

(i)~(iv)에서 1은 1의 세제곱근이면서 동시에 1의 네제곱근이므로 집합 C의 원소 중에서 실수인 것의 개수는 $1+2+1+2-1=5$이다.

답 5

필수 유형 ❷

$\frac{1}{\sqrt[4]{3}}=3^{-\frac{1}{4}}$이므로

$$\frac{1}{\sqrt[4]{3}}\times3^{-\frac{7}{4}}=3^{-\frac{1}{4}}\times3^{-\frac{7}{4}}$$
$$=3^{-\frac{1}{4}-\frac{7}{4}}$$
$$=3^{-2}=\frac{1}{9}$$

답 ①

05

$$(2-\sqrt{2})^{1+\sqrt{3}}\times(2-\sqrt{2})^{1-\sqrt{3}}+2^{\frac{5}{2}}=(2-\sqrt{2})^{(1+\sqrt{3})+(1-\sqrt{3})}+4\sqrt{2}$$
$$=(2-\sqrt{2})^2+4\sqrt{2}$$
$$=4-4\sqrt{2}+2+4\sqrt{2}=6$$

답 ①

06

$$2^{\frac{4}{3}}\times6^{\frac{2}{3}}=2^{\frac{4}{3}}\times(2\times3)^{\frac{2}{3}}=2^{\frac{4}{3}}\times2^{\frac{2}{3}}\times3^{\frac{2}{3}}=(2^6\times3^2)^{\frac{1}{3}}=\sqrt[3]{2^6\times3^2}$$

따라서 $p=6$, $q=2$이므로

$p+q=6+2=8$

답 ④

07

$f(x)=x\sqrt{x}=x^{\frac{3}{2}}$이므로 $f(f(n))=\left(n^{\frac{3}{2}}\right)^{\frac{3}{2}}=n^{\frac{3}{2}\times\frac{3}{2}}=n^{\frac{9}{4}}$

$n^{\frac{9}{4}}$의 값이 1보다 큰 자연수가 되려면 n은 1보다 큰 자연수 k에 대하여 $n=k^4$의 꼴이어야 한다. 즉, 자연수 n의 최솟값은 1보다 큰 자연수의 네제곱의 꼴로 표현되는 자연수 중 가장 작은 값이므로

$2^4=16$

답 16

08

한 내각의 크기가 60°이고 한 변의 길이가 $2^{\frac{n}{3}}$인 직각삼각형의 세 꼭짓점을 A, B, C라 하면 직각삼각형 ABC는 다음과 같다.

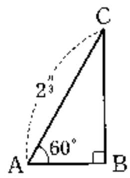
(i) 그림과 같이 길이가 $2^{\frac{n}{3}}$인 변이 빗변인 직각삼각형일 때

$\angle A=60°$, $\overline{AC}=2^{\frac{n}{3}}$이라 하면

$\overline{AB}=2^{\frac{n}{3}}\times\cos60°$, $\overline{BC}=2^{\frac{n}{3}}\times\sin60°$

이므로 직각삼각형 ABC의 넓이는

$\frac{1}{2}\times\left(2^{\frac{n}{3}}\times\cos60°\right)\times\left(2^{\frac{n}{3}}\times\sin60°\right)=\frac{\sqrt{3}}{8}\times2^{\frac{2n}{3}}$



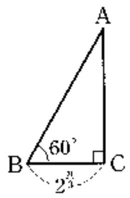
(ii) 그림과 같이 길이가 $2^{\frac{n}{3}}$인 변의 양 끝 각의 크기가 60°, 90°인 직각삼각형일 때

$\angle B=60°$, $\overline{BC}=2^{\frac{n}{3}}$이라 하면

$\overline{AC}=2^{\frac{n}{3}}\times\tan60°$

이므로 직각삼각형 ABC의 넓이는

$\frac{1}{2}\times2^{\frac{n}{3}}\times\left(2^{\frac{n}{3}}\times\tan60°\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}\times2^{\frac{2n}{3}}$



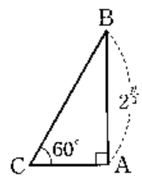
(iii) 그림과 같이 길이가 $2^{\frac{n}{3}}$인 변과 마주 보는 각의 크기가 60°인 직각삼각형일 때

$\angle C=60°$, $\overline{AB}=2^{\frac{n}{3}}$이라 하면

$\overline{AC}\times\tan60°=2^{\frac{n}{3}}$에서 $\overline{AC}=2^{\frac{n}{3}}\times\frac{1}{\sqrt{3}}$

이므로 직각삼각형 ABC의 넓이는

$\frac{1}{2}\times2^{\frac{n}{3}}\times\left(2^{\frac{n}{3}}\times\frac{1}{\sqrt{3}}\right)=\frac{\sqrt{3}}{6}\times2^{\frac{2n}{3}}$



(i), (ii), (iii)에 의하여 $f(n)=\frac{\sqrt{3}}{2}\times2^{\frac{2n}{3}}$이므로

$f(3)\times f(6)=\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\times2^2\right)\times\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\times2^4\right)=48$

답 48

필수 유형 ❸

$\log_4\frac{2}{3}+\log_4 24=\log_4\left(\frac{2}{3}\times24\right)=\log_4 16=2$

답 2

09

로그의 성질에 의하여

$\log_2(\sqrt{17}+1)+\log_2(\sqrt{17}-1)-\log_2 8$

$=\log_2\{(\sqrt{17}+1)(\sqrt{17}-1)\}-3$

$=\log_2 16-3=4-3=1$

답 ①

10

$\log_{(x-2)}\{-x^2+(2a+3)x-a(a+3)\}$이 정의되기 위해서는 밑의 조건 $x-2\neq1$, $x-2>0$과 진수의 조건

$-x^2+(2a+3)x-a(a+3)>0$을 모두 만족시켜야 한다.

밑의 조건에 의하여 $x\neq3$, $x>2$ …… ㉠

진수의 조건에 의하여

$-x^2+(2a+3)x-a(a+3)=-(x-a)\{x-(a+3)\}>0$

$(x-a)\{x-(a+3)\}<0$에서

$a<x<a+3$ …… ㉡

a가 자연수이므로 ㉡을 만족시키는 자연수 x의 값은 $a+1$, $a+2$이다.

(i) $a+1=4$일 때

$a=3$이므로 ㉠, ㉡에 의하여 $3<x<6$이므로 주어진 로그의 값이 정의되도록 하는 자연수 x의 값은 4, 5이다.

즉, 조건을 만족시키지 않는다.

(ii) $a+2=4$일 때

$a=2$이므로 ㉠, ㉡에 의하여 $2<x<5$, $x\neq3$이므로 주어진 로그의 값이 정의되도록 하는 자연수 x의 값은 4뿐이다.

즉, 조건을 만족시킨다.

(i), (ii)에 의하여 $a=2$

답 ②

11

$a=2^m$, $b=3^{3n+1}$이므로

$\log_2(\log_2 a)+\log_2(\log_3 b)=\log_2(\log_2 2^m)+\log_2(\log_3 3^{3n+1})$

$=\log_2 m+\log_2(3n+1)$

$=\log_2 m(3n+1)$

이므로 $\log_2 m(3n+1)=4$에서 $m(3n+1)=16$

$3n+1$이 16의 양의 약수이어야 하므로 자연수 n의 값은 1 또는 5이다.

$n=1$이면 $m=4$이고 $n=5$이면 $m=1$이므로 $m+n$의 최솟값은 5이다.

답 5

12

두 물체 A, B의 단면의 넓이를 각각 S_A, S_B라 하고 두께를 각각 L_A, L_B라 하자.

물체 A의 열전도율 P_A는 다음을 만족시킨다.

$\log_a P_A = k + \log_a \dfrac{S_A T}{L_A}$ …… ㉠

물체 B는 물체 A에 비하여 단면의 넓이를 25 % 확장시키고 두께를 50 % 증가시켰으므로

$S_B = \left(1 + \dfrac{25}{100}\right) S_A = \dfrac{5}{4} S_A$, $L_B = \left(1 + \dfrac{50}{100}\right) L_A = \dfrac{3}{2} L_A$

이고 물체 B의 열전도율 P_B는 다음을 만족시킨다.

$$\log_a P_B = k + \log_a \frac{S_B T}{L_B} = k + \log_a \frac{\frac{5}{4} S_A T}{\frac{3}{2} L_A}$$
$$= k + \log_a \frac{S_A T}{L_A} + \log_a \frac{5}{6} \quad \cdots\cdots ㉡$$

㉠, ㉡에서 $\log_a P_B - \log_a P_A = \log_a \dfrac{5}{6}$

즉, $\log_a \dfrac{P_B}{P_A} = \log_a \dfrac{5}{6}$이므로 $\dfrac{P_B}{P_A} = \dfrac{5}{6}$

답 ③

필수 유형 ④

$\log_a b = \dfrac{\log_b c}{2} = \dfrac{\log_c a}{4} = k$라 하면 $k > 0$이고

$\log_a b = k$, $\log_b c = 2k$, $\log_c a = 4k$

$\log_a b \times \log_b c \times \log_c a = 1$에서 $k \times 2k \times 4k = 8k^3 = 1$

$k^3 = \dfrac{1}{8}$, $k = \dfrac{1}{2}$이므로

$\log_a b + \log_b c + \log_c a = k + 2k + 4k = 7k = \dfrac{7}{2}$

답 ①

13

$$\log_3 6 \times \log_4 81 - \frac{1}{\log_3 2} = \frac{\log 6}{\log 3} \times \frac{\log 81}{\log 4} - \log_2 3$$
$$= \frac{\log 6}{\log 3} \times \frac{4 \log 3}{2 \log 2} - \log_2 3$$
$$= \frac{2 \log 6}{\log 2} - \log_2 3$$
$$= 2 \log_2 6 - \log_2 3$$
$$= \log_2 36 - \log_2 3$$
$$= \log_2 12$$

이므로 $k = \log_2 12$

따라서 $2^k = 12$

답 ①

14

수직인 두 직선의 기울기의 곱이 -1이므로

두 점 $(\log_3 2,\ \log_9 a)$, $(\log_3 54,\ \log_9 a^2)$을 지나는 직선의 기울기는 $\dfrac{1}{2}$이다.

따라서 $\dfrac{\log_9 a^2 - \log_9 a}{\log_3 54 - \log_3 2} = \dfrac{\log_9 a}{\log_3 27} = \dfrac{\log_9 a}{3} = \dfrac{1}{2}$에서

$\log_9 a = \dfrac{3}{2}$이므로

$a = 9^{\frac{3}{2}} = (3^2)^{\frac{3}{2}} = 3^{2 \times \frac{3}{2}} = 3^3 = 27$

답 ④

15

$\dfrac{1}{\log_9 27} = \dfrac{1}{\log_{3^2} 3^3} = \dfrac{1}{\frac{3}{2}} = \dfrac{2}{3}$

$\dfrac{1}{3} \log_b b^5 = \dfrac{5}{3} \log_b b = \dfrac{5}{3}$

$\log_a a^{\frac{2}{3}} = \dfrac{2}{3} \log_a a = \dfrac{2}{3}$이므로

$A = \left\{\log_a b,\ \dfrac{2}{3},\ \dfrac{5}{3}\right\}$, $B = \left\{2,\ \dfrac{2}{3},\ \log_2 a + \log_2 b\right\}$

$A = B$이기 위해서는 $\log_a b = 2$, $\log_2 a + \log_2 b = \dfrac{5}{3}$이어야 한다.

$\log_a b = 2$에서 $\dfrac{\log_2 b}{\log_2 a} = 2$이므로

$\log_2 b = 2 \log_2 a$ …… ㉠

$\log_2 a + \log_2 b = \dfrac{5}{3}$에 ㉠을 대입하면 $\log_2 a = \dfrac{5}{9}$

㉠에서 $\log_2 b = \dfrac{10}{9}$

이때 $\log_a 2 + \log_b 2 = \dfrac{1}{\log_2 a} + \dfrac{1}{\log_2 b} = \dfrac{9}{5} + \dfrac{9}{10} = \dfrac{27}{10}$

따라서 $p = 10$, $q = 27$이므로

$p + q = 10 + 27 = 37$

답 37

필수 유형 ⑤

곡선 $y = 2^{x+2} - 1$을 x축에 대하여 대칭이동한 곡선은

$y = -2^{x+2} + 1$이므로 $f(x) = -2^{x+2} + 1$

곡선 $y = f(x)$와 y축이 만나는 점의 좌표가 $(0, a)$이므로

$a = -2^{0+2} + 1$, $a = -3$

한편, 점근선은 직선 $y = 1$이므로 $b = 1$

따라서 $a + b = (-3) + 1 = -2$

답 ②

16

곡선 $y = 2^{x+2} - 3$을 x축의 방향으로 -1만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동하면 $y - 2 = 2^{(x+1)+2} - 3$, 즉 $y = 2^{x+3} - 1$이므로

$f(x) = 2^{x+3} - 1$

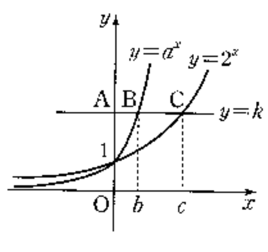
이때 점근선은 직선 $y = -1$이므로 $a = -1$

따라서 $f(a) = f(-1) = 2^2 - 1 = 3$이므로

$a + f(a) = -1 + 3 = 2$

답 ②

17



두 점 B, C의 x좌표를 각각 b, c $(0 < b < c)$라 하면

$\overline{AB} : \overline{BC} = 1 : 2$이므로

$c = 3b$ …… ㉠

두 점 B, C의 y좌표는 서로 같으므로

$a^b = 2^c$ …… ㉡

㉠, ㉡에서

$a^b = 2^{3b} = 8^b$ …… ㉢

따라서 $a>2$, $b>0$이므로 ㉢에서 $a=8$

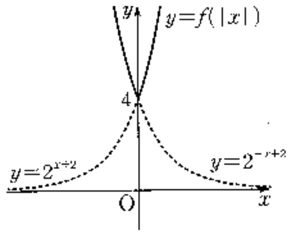
답 8

18

ㄱ. $x\ge0$일 때, $|x|=x$이므로 $f(|x|)=f(x)=2^{x+2}$이고

$x<0$일 때, $|x|=-x$이므로 $f(|x|)=f(-x)=2^{-x+2}$이다.

따라서 함수 $y=f(|x|)$의 그래프는 그림과 같다.



따라서 치역은 $\{y|y\ge4\}$이다. (참)

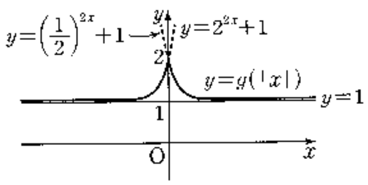
ㄴ. (i) $x\ge0$일 때, $|x|=x$이므로

$g(|x|)=g(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^{2x}+1$

(ii) $x<0$일 때, $|x|=-x$이므로

$g(|x|)=g(-x)=\left(\frac{1}{2}\right)^{-2x}+1=2^{2x}+1$

$g(0)=2$이므로 (i), (ii)에 의하여 함수 $y=g(|x|)$의 그래프는 그림과 같다.



따라서 함수 $y=g(|x|)$의 최댓값은 2이므로 모든 실수 x에 대하여 $g(|x|)\le2$이다. (참)

ㄷ. ㄱ에서 함수 $y=f(|x|)$의 그래프가 y축과 만나는 점은 점 $(0, 4)$이고, ㄴ에서 함수 $y=g(|x|)$의 그래프가 y축과 만나는 점은 점 $(0, 2)$이므로 $g(0)=2$

이때 두 함수 $y=f(|x|)$, $y=g(|x|)+k$의 그래프가 y축 위의 점에서 만나므로 함수 $y=g(|x|)+k$의 그래프가 점 $(0, 4)$를 지나야 한다.

따라서 $4=g(0)+k$에서 $k=4-g(0)$이므로 $k=2$이다.

함수 $y=g(|x|)$의 그래프의 점근선은 직선 $y=1$이고 함수 $y=g(|x|)+2$의 그래프는 함수 $y=g(|x|)$의 그래프를 y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 그래프이므로 점근선은 직선 $y=3$이다.

(참)

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

답 ⑤

필수 유형 ❻

$\left(\frac{1}{9}\right)^x=(3^{-2})^x=3^{-2x}$이므로 부등식 $\left(\frac{1}{9}\right)^x<3^{21-4x}$에서 $3^{-2x}<3^{21-4x}$이다.

밑 3은 1보다 크므로 $-2x<21-4x$에서

$x<\frac{21}{2}=10.5$

따라서 부등식을 만족시키는 자연수 x의 값은 1, 2, 3, $\cdots$, 10이고 그 개수는 10이다.

답 ⑤

19

$3^x=t$라 하면 $t>0$이고 $9^x=t^2$이므로 방정식 $2\times9^x+63=(3^x+6)^2$은

$2t^2+63=(t+6)^2$, $t^2-12t+27=0$, $(t-3)(t-9)=0$

$t=3$ 또는 $t=9$

따라서 $3^x=3$에서 $x=1$이고 $3^x=9$에서 $x=2$이므로 모든 실수 x의 값의 합은

$1+2=3$

답 ③

20

곡선 $y=2^x$과 직선 $x=n$이 만나는 점 A_n의 좌표는 $(n, 2^n)$

곡선 $y=(\sqrt{2})^x$과 직선 $x=n$이 만나는 점 B_n의 좌표는 $\left(n, 2^{\frac{n}{2}}\right)$

$f(n)=\frac{1}{2}\times\overline{OP_n}\times\overline{A_nP_n}=\frac{1}{2}\times n\times2^n=\frac{n}{2}\times2^n$

$g(n)=\frac{1}{2}\times\overline{OP_n}\times\overline{B_nP_n}=\frac{1}{2}\times n\times2^{\frac{n}{2}}=\frac{n}{2}\times2^{\frac{n}{2}}$

부등식 $f(n)-4\times g(n)\ge16n$에서

$\frac{n}{2}\times2^n-4\times\frac{n}{2}\times2^{\frac{n}{2}}\ge16n$, $2^n-4\times2^{\frac{n}{2}}\ge32$

$2^{\frac{n}{2}}=t$라 하면 $t>0$이고 $t^2-4t-32\ge0$

$(t+4)(t-8)\ge0$이므로 $t\ge8$

즉, $2^{\frac{n}{2}}\ge8=2^3$이므로 $\frac{n}{2}\ge3$, $n\ge6$

따라서 자연수 n의 최솟값은 6이다.

답 ④

21

부등식 $\left(\frac{1}{2}\right)^{-x^2+4x+1}\le4^{x-3}$에서

$2^{x^2-4x-1}\le2^{2x-6}$이고 밑 2가 1보다 크므로

$x^2-4x-1\le2x-6$

$x^2-6x+5\le0$, $(x-1)(x-5)\le0$, $1\le x\le5$

따라서 부등식을 만족시키는 정수 x의 값은 1, 2, 3, 4, 5이므로

$A=\{1, 2, 3, 4, 5\}$

$a\in A$에 대하여

$x=3^{a^2}\times\left(\frac{1}{3}\right)^{6a-k}=3^{a(a-6)+k}$이므로

$a=1$일 때, $x=3^{-5+k}$

$a=2$일 때, $x=3^{-8+k}$

$a=3$일 때, $x=3^{-9+k}$

$a=4$일 때, $x=3^{-8+k}$

$a=5$일 때, $x=3^{-5+k}$

집합 $B=\{3^{-5+k}, 3^{-8+k}, 3^{-9+k}\}$이므로

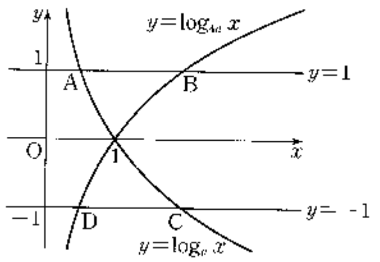
집합 B의 모든 원소의 곱은

$3^{-5+k}\times3^{-8+k}\times3^{-9+k}=3^{-22+3k}$

즉, $3^{-22+3k}=3^2$에서 $-22+3k=2$이므로 $k=8$

답 ③

필수 유형 7



ㄱ. $\mathrm{A}(a,\ 1)$, $\mathrm{B}(4a,\ 1)$이므로 선분 AB를 $1:4$로 외분하는 점의 좌표는 $\left(\frac{4a-4a}{1-4},\ \frac{1-4}{1-4}\right)$, 즉 $(0,\ 1)$이다. (참)

ㄴ. 사각형 ABCD가 직사각형이면 점 A와 점 D, 점 B와 점 C는 x축에 대하여 대칭이므로 x좌표가 각각 같다. 한편, 점 D의 좌표는 $\left(\frac{1}{4a},\ -1\right)$이므로 $a=\frac{1}{4a}$에서 $4a^2=1$이고 $\frac{1}{4}<a<1$이므로 $a=\frac{1}{2}$ (참)

ㄷ. 네 점의 좌표가 각각 $\mathrm{A}(a,\ 1)$, $\mathrm{B}(4a,\ 1)$, $\mathrm{C}\left(\frac{1}{a},\ -1\right)$, $\mathrm{D}\left(\frac{1}{4a},\ -1\right)$이므로 $\overline{\mathrm{AB}}=3a$, $\overline{\mathrm{CD}}=\frac{3}{4a}$

$\overline{\mathrm{AB}}<\overline{\mathrm{CD}}$이면 $3a<\frac{3}{4a}$에서 $a^2<\frac{1}{4}$이고, $\frac{1}{4}<a<1$이므로

$\frac{1}{4}<a<\frac{1}{2}$ (거짓)

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

답 ③

22

곡선 $y=\log_3(ax+b)$가 점 $(0,\ 2)$를 지나므로 $2=\log_3 b$에서 $b=9$

곡선 $y=\log_3(ax+9)$의 점근선이 직선 $x=-\frac{9}{a}$이므로

$-\frac{9}{a}=-3$에서 $a=3$

따라서 주어진 곡선은 $y=\log_3(3x+9)$이고 이 곡선이 점 $(2,\ k)$를 지나므로

$k=\log_3(3\times2+9)=\log_3 15=\log_3(3\times5)=1+\log_3 5$

답 ③

23

곡선 $y=\log_a x$와 직선 $x=n$이 만나는 점의 x좌표가 n이므로 점 P_n의 좌표는 $(n,\ \log_a n)$이고 점 P_{n+1}의 좌표는 $(n+1,\ \log_a(n+1))$이다.

주어진 직사각형은 선분 $\mathrm{P}_n\mathrm{P}_{n+1}$을 대각선으로 하고 모든 변이 x축 또는 y축과 평행하므로 그 넓이 $f(n)$은

$f(n)=\{(n+1)-n\}\times\{\log_a(n+1)-\log_a n\}$

$\quad=\log_a(n+1)-\log_a n=\log_a\frac{n+1}{n}$

따라서

$f(2)+f(3)+f(4)+f(5)$

$=\log_a\frac{3}{2}+\log_a\frac{4}{3}+\log_a\frac{5}{4}+\log_a\frac{6}{5}=\log_a\left(\frac{3}{2}\times\frac{4}{3}\times\frac{5}{4}\times\frac{6}{5}\right)$

$=\log_a 3=3$

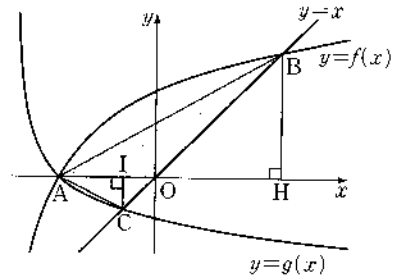
이므로 $a^3=3$에서 $a=\sqrt[3]{3}$

답 ②

24

함수 $g(x)=\log_{\frac{1}{3}}(x+4)$의 그래프가 x축과 만나는 점의 좌표는 $(-3,\ 0)$이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프가 점 $(-3,\ 0)$을 지난다.

즉, $0=\log_a(-3-m)$에서 $m=-4$이므로 $f(x)=\log_a(x+4)$



점 B는 직선 $y=x$ 위의 점이므로 점 B의 좌표를 $(k,\ k)$ $(k>0)$이라 하고 점 B에서 x축에 내린 수선의 발을 H, 점 $\mathrm{C}(-1,\ -1)$에서 x축에 내린 수선의 발을 I라 하면 $\overline{\mathrm{CI}}=1$이고 $\overline{\mathrm{BH}}=k$

한편, 삼각형 ABC의 넓이는 원점 O에 대하여 두 삼각형 OAC와 OAB의 넓이의 합이므로

(삼각형 ABC의 넓이)$=\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{OA}}\times\overline{\mathrm{CI}}+\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{OA}}\times\overline{\mathrm{BH}}$

$=\frac{1}{2}\times3\times1+\frac{1}{2}\times3\times k=\frac{3}{2}(1+k)$

즉, $\frac{3}{2}(1+k)=\frac{15}{2}$에서 $k=4$

점 B가 곡선 $y=f(x)$ 위의 점이므로 $4=\log_a(4+4)$에서 $a^4=8$

$a>1$이므로 $a=2^{\frac{3}{4}}$

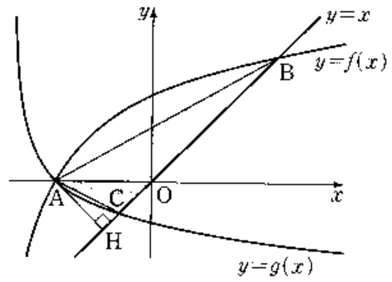
따라서 $p=4$, $q=3$이므로 $p+q=4+3=7$

답 7

다른 풀이

함수 $g(x)=\log_{\frac{1}{3}}(x+4)$의 그래프가 x축과 만나는 점의 좌표는 $(-3,\ 0)$이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프가 점 $(-3,\ 0)$을 지난다.

즉, $0=\log_a(-3-m)$에서 $m=-4$이므로 $f(x)=\log_a(x+4)$



한편, 점 $\mathrm{A}(-3,\ 0)$에서 직선 $y=x$, 즉 $x-y=0$에 내린 수선의 발을 H라 하면

$\overline{\mathrm{AH}}=\frac{|-3-0|}{\sqrt{2}}=\frac{3\sqrt{2}}{2}$

또한 점 B의 좌표를 $(k,\ k)$라 하면 $k>0$이고 $\mathrm{C}(-1,\ -1)$이므로

$\overline{\mathrm{BC}}=\sqrt{2(k+1)^2}=\sqrt{2}(k+1)$

삼각형 ABC의 넓이는 $\frac{1}{2}\times\sqrt{2}(k+1)\times\frac{3\sqrt{2}}{2}=\frac{15}{2}$에서 $k=4$

점 $\mathrm{B}(4,\ 4)$가 곡선 $y=f(x)$ 위의 점이므로 $4=\log_a(4+4)$에서 $a^4=8$

$a>1$이므로 $a=2^{\frac{3}{4}}$

따라서 $p=4$, $q=3$이므로 $p+q=4+3=7$

필수 유형 ❸

로그의 진수의 조건에 의하여 $f(x)>0$, $x>1$

$f(x)>0$에서 $0<x<7$이고, $x>1$이므로 $1<x<7$

$\log_3 f(x)+\log_{\frac{1}{3}}(x-1)\le 0$에서

$\log_3 f(x)-\log_3(x-1)\le 0$

$\log_3 f(x)\le \log_3(x-1)$

$f(x)\le x-1$ …… ㉠

$1<x<7$에서 ㉠을 만족시키는 x의 값의 범위는 $4\le x<7$

따라서 부등식을 만족시키는 모든 자연수 x의 값은 4, 5, 6이고 그 합은

$4+5+6=15$

답 15

25

로그의 진수의 조건에 의하여 $x>\frac{1}{3}$, $x>3$에서 $x>3$

$\log_4(3x-1)+\log_4(x-3)=\log_4 11$에서

$\log_4(3x-1)(x-3)=\log_4 11$이므로 $(3x-1)(x-3)=11$

$3x^2-10x-8=0$, $(3x+2)(x-4)=0$

따라서 $x=-\frac{2}{3}$ 또는 $x=4$

$x>3$이므로 구하는 실수 x의 값은 4이다.

답 4

26

$$\log_3 \frac{x}{3}\times\log_3\frac{x}{9}=(\log_3 x-\log_3 3)(\log_3 x-\log_3 9)$$
$$=(\log_3 x-1)(\log_3 x-2)$$

$\log_3 x=t$라 하면

$(t-1)(t-2)<6$에서 $t^2-3t-4<0$

$(t+1)(t-4)<0$이므로 $-1<t<4$

즉, $-1<\log_3 x<4$, $\frac{1}{3}<x<81$

따라서 부등식을 만족시키는 자연수 x의 최댓값은 80이다.

답 ①

27

사각형 ABDC는 두 변 AB와 CD가 평행한 사다리꼴이다.

$\overline{\mathrm{AB}}=\log_4 n-\log_{\frac{1}{2}} n=\frac{1}{2}\log_2 n+\log_2 n=\frac{3}{2}\log_2 n$

$\overline{\mathrm{CD}}=\log_4 m-\log_{\frac{1}{2}} m=\frac{1}{2}\log_2 m+\log_2 m=\frac{3}{2}\log_2 m$

사다리꼴 ABDC의 넓이는

$\frac{1}{2}\times\left(\frac{3}{2}\log_2 m+\frac{3}{2}\log_2 n\right)\times(m-n)$이므로

$\frac{1}{2}\times\left(\frac{3}{2}\log_2 m+\frac{3}{2}\log_2 n\right)\times(m-n)=\frac{9}{2}$

$\frac{3}{4}(m-n)\log_2 mn=\frac{9}{2}$

$\log_2 mn=\frac{6}{m-n}$

$mn=2^{\frac{6}{m-n}}$ …… ㉠

이때 m, n이 2 이상의 자연수이고 $m>n$이므로 $m-n$은 자연수이다.

mn은 자연수이므로 ㉠을 만족시키기 위해서는 $m-n$이 6의 양의 약수이어야 한다.

(i) $m-n=1$일 때, $m=n+1$이고

$mn=64$에서 $n(n+1)=64$, $n^2+n-64=0$

이때 이를 만족시키는 2 이상의 자연수 n은 존재하지 않는다.

(ii) $m-n=2$일 때, $m=n+2$이고

$mn=8$에서 $n(n+2)=8$, $n^2+2n-8=0$, $(n+4)(n-2)=0$

n은 2 이상의 자연수이므로 $n=2$이고 $m=4$

(iii) $m-n=3$일 때, $m=n+3$이고

$mn=4$에서 $n(n+3)=4$, $n^2+3n-4=0$, $(n+4)(n-1)=0$

이때 이를 만족시키는 2 이상의 자연수 n은 존재하지 않는다.

(iv) $m-n=6$일 때, $m=n+6$이고

$mn=2$에서 $n(n+6)=2$, $n^2+6n-2=0$

이때 이를 만족시키는 2 이상의 자연수 n은 존재하지 않는다.

(i)~(iv)에 의하여 $m=4$, $n=2$이므로

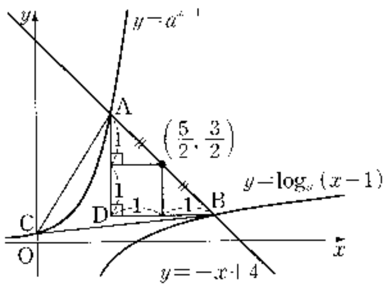
$m+n=4+2=6$

답 6

필수 유형 ❾

두 곡선 $y=a^{x-1}$, $y=\log_a(x-1)$은 두 곡선 $y=a^x$, $y=\log_a x$를 x축의 방향으로 각각 1만큼 평행이동한 것이다. 두 곡선 $y=a^x$, $y=\log_a x$는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로 두 곡선 $y=a^x$, $y=\log_a x$를 x축의 방향으로 각각 1만큼 평행이동한 두 곡선 $y=a^{x-1}$, $y=\log_a(x-1)$은 직선 $y=x-1$에 대하여 대칭이다.

따라서 두 점 A, B는 두 직선 $y=x-1$과 $y=-x+4$의 교점인 점 $\left(\frac{5}{2}, \frac{3}{2}\right)$에 대하여 대칭이다.



$\overline{\mathrm{AB}}=2\sqrt{2}$이므로 그림의 직각이등변삼각형 ADB에서

$\mathrm{A}\left(\frac{3}{2}, \frac{5}{2}\right)$, $\mathrm{B}\left(\frac{7}{2}, \frac{1}{2}\right)$임을 알 수 있다.

함수 $y=a^{x-1}$의 그래프가 점 $\mathrm{A}\left(\frac{3}{2}, \frac{5}{2}\right)$를 지나므로 $a^{\frac{1}{2}}=\frac{5}{2}$, $a=\frac{25}{4}$

따라서 점 C의 좌표는 $\left(0, \frac{4}{25}\right)$이다.

선분 AB를 밑변으로 할 때, 점 C와 직선 $x+y-4=0$ 사이의 거리는

$$\frac{\left|0+\frac{4}{25}-4\right|}{\sqrt{2}}=\frac{\frac{96}{25}}{\sqrt{2}}=\frac{48\sqrt{2}}{25}$$

이므로 삼각형 ABC의 넓이 S는 $S=\frac{1}{2}\times 2\sqrt{2}\times\frac{48\sqrt{2}}{25}=\frac{96}{25}$

따라서 $50\times S=50\times\frac{96}{25}=192$

답 192

28

함수 $f(x)=2^{x-1}+a$의 역함수는 $y=2^{x-1}+a$에서 x와 y를 바꾸면

$x=2^{y-1}+a$이고

$y=\log_2(x-a)+1$이므로 $a=2$

한편, 함수 $g(x)=\log_2(x-2)+1$의 그래프를 x축의 방향으로 m만큼 평행이동하면 $g(x-m)=\log_2(x-m-2)+1$이고, 이 함수의 그래프의 점근선은 $x=m+2$이므로 $m+2=5$에서 $m=3$

따라서 $a+m=2+3=5$

답 ⑤

29

곡선 $y=\log_2(x-1)-1$을 x축의 방향으로 -1만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동하면 곡선 $y=\log_2 x$가 되고, 점 $(5,\ 1)$을 x축의 방향으로 -1만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동하면 점 $(4,\ 2)$가 되며 이 점은 직선 l 위의 점이다.

곡선 $y=\log_2 x$와 곡선 $y=2^x$은 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로 직선 l과 곡선 $y=2^x$이 만나는 점의 좌표는 $(2,\ 4)$이다.

따라서 $a=2$, $b=4$이므로 $\frac{b}{a}=\frac{4}{2}=2$

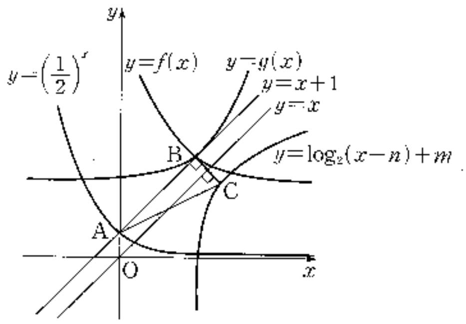
답 ①

30

점 A의 좌표는 $(0,\ 1)$이므로 점 B의 좌표는 $(m,\ 1+n)$이다.

점 B는 직선 $y=x+1$ 위의 점이므로 $1+n=m+1$에서 $m=n$이다.

함수 $y=2^x$의 그래프도 y축과 점 A에서 만나므로 $g(x)=2^{x-m}+n$이라 하면 함수 $y=g(x)$의 그래프도 점 $\mathrm{B}(m,\ 1+n)$을 지난다. 또한 함수 $y=g(x)$의 역함수가 $y=\log_2(x-n)+m$이고 기울기가 -1인 직선이 두 함수 $y=g(x)$, $y=\log_2(x-n)+m$의 그래프와 만나는 점이 각각 B, C이므로 두 점 B, C는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이다.



즉, 두 점 B, C의 좌표는 각각 $(m,\ m+1)$, $(m+1,\ m)$이므로

$\overline{\mathrm{BC}}=\sqrt{1^2+(-1)^2}=\sqrt{2}$

두 직선 AB, BC의 기울기의 곱은 -1이므로 삼각형 ABC에서

$\angle \mathrm{B}=90°$이다.

$m>0$이고 삼각형 ABC의 넓이가 6이므로

$\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{AB}}\times\overline{\mathrm{BC}}=\frac{1}{2}\times\sqrt{2}m\times\sqrt{2}=m=6$

따라서 $f(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^{x-6}+6$이므로

$f(2)=\left(\frac{1}{2}\right)^{-4}+6=16+6=22$

답 22

필수 유형 ⑩

함수 $f(x)=2\log_{\frac{1}{2}}(x+k)$는 밑 $\frac{1}{2}$이 1보다 작으므로

$x=0$에서 최댓값을 갖고 $x=12$에서 최솟값을 갖는다.

$f(0)=2\log_{\frac{1}{2}}k=-4$에서 $\log_{\frac{1}{2}}k=-2$이므로 $k=\left(\frac{1}{2}\right)^{-2}=4$

한편, $m=f(12)=2\log_{\frac{1}{2}}(12+4)=-2\log_2 16=-8$

따라서 $k+m=4+(-8)=-4$

답 ④

31

함수 $g(x)$는 밑이 1보다 큰 지수함수이므로 실수 전체의 집합에서 x의 값이 증가하면 y의 값도 증가한다.

$g(f(x))=2^{x^2-2x+3}=2^{(x-1)^2+2}$이고 $(x-1)^2+2\ge2$이므로

$2^{(x-1)^2+2}\ge2^2$

따라서 함수 $y=(g\circ f)(x)$는 $x=1$일 때 최솟값 $2^2=4$를 갖는다.

답 ①

32

$a>1$이므로 두 함수 $y=2^{x+2}$, $y=\log_a(x+2)$는 모두 x의 값이 증가하면 y의 값도 증가한다.

$-1\le x_1<x_2$이면 $2^{x_1+2}<2^{x_2+2}$, $\log_a(x_1+2)<\log_a(x_2+2)$이므로

$f(x_1)<f(x_2)$이다. 즉, 함수 $f(x)$도 x의 값이 증가하면 y의 값도 증가하는 함수이므로 함수 $f(x)$는 $x=-1$에서 최솟값을 갖고, $x=2$에서 최댓값을 갖는다.

$f(-1)=2^1+\log_a 1=2$, $f(2)=2^4+\log_a 4=16+\log_a 4$

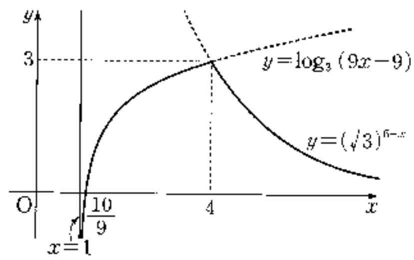
이고 $2+(16+\log_a 4)=19$에서 $\log_a 4=1$

따라서 $a=4$

답 ②

33

함수 $y=f(x)$의 그래프는 그림과 같다.



함수 $f(x)$는 $x=4$일 때 최댓값 3을 가지므로 $t\le x\le t+2$에 $x=4$가 포함되면 최댓값은 3이다. 즉, $t\le4\le t+2$에서 $2\le t\le4$이고 이를 만족시키는 자연수 t의 값은 2, 3, 4로 그 개수는 3이다. 즉, $a=3$

$s\le x\le s+1$에서 최솟값이 1인 경우는 다음과 같이 경우를 나누어 생각할 수 있다.

(i) $s>1$, $s+1<4$일 때, $1<s<3$이고 함수 $f(x)$는 $s\le x\le s+1$에서 x의 값이 증가하면 y의 값도 증가하는 함수이므로 $x=s$일 때 최소이다.

$f(s)=\log_3(9s-9)=1$에서 $9s-9=3$, $s=\frac{4}{3}$

이는 $1<s<3$을 만족시킨다.

(ii) $1<s<4$, $s+1\ge 4$일 때, $3\le s<4$이고 $f(3)=\log_3 18>\log_3 3=1$

$f(4)=(\sqrt{3})^2=3>1$이므로 $s\le x\le s+1$에서 함수 $f(x)$의 최솟값은 1보다 크다.

(iii) $s\ge 4$일 때, 함수 $f(x)$는 $s\le x\le s+1$에서 x의 값이 증가하면 y의 값은 감소하는 함수이므로 $x=s+1$일 때 최소이다.

즉, $f(s+1)=(\sqrt{3})^{6-(s+1)}=1$에서 $5-s=0$, $s=5$

이는 $s\ge 4$를 만족시킨다.

(i), (ii), (iii)에 의하여 $b=\frac{4}{3}\times 5=\frac{20}{3}$

따라서 $a+3b=3+3\times\frac{20}{3}=23$

답 23

02 삼각함수

정답 본문 18~25쪽

필수 유형 ❶ ③	01 ②	02 ④	03 11
필수 유형 ❷ ④	04 ⑤	05 ⑤	06 ①
	07 ⑤		
필수 유형 ❸ ③	08 24	09 ⑤	
필수 유형 ❹ ⑤	10 ①	11 ③	12 ④
필수 유형 ❺ ③	13 ④	14 ③	15 64
필수 유형 ❻ ②	16 ①	17 ③	18 ②
	19 185		
필수 유형 ❼ 21	20 ④	21 ②	22 39
필수 유형 ❽ ①	23 9	24 135	

필수 유형 ❶

부채꼴의 반지름의 길이를 $r\ (r>0)$이라 하면

이 부채꼴의 중심각의 크기는 $\frac{5}{9}\pi$이고 호의 길이는 $\frac{10}{3}\pi$이므로

$r\times\frac{5}{9}\pi=\frac{10}{3}\pi$

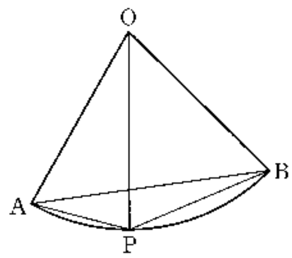
$r=6$

따라서 부채꼴의 넓이는

$\frac{1}{2}\times 6^2\times\frac{5}{9}\pi=10\pi$

답 ③

01



중심각과 원주각의 크기 사이의 관계에 의하여

$\angle\mathrm{AOP}=2\angle\mathrm{ABP}=\frac{\pi}{6}$,

$\angle\mathrm{BOP}=2\angle\mathrm{BAP}=\frac{\pi}{4}$

이므로

$\angle\mathrm{AOB}=\angle\mathrm{AOP}+\angle\mathrm{BOP}$

$=\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{4}=\frac{5}{12}\pi$

부채꼴 OAB의 반지름의 길이를 $r\ (r>0)$이라 하면

부채꼴 OAB의 넓이가 30π이므로

$\frac{1}{2}\times r^2\times\frac{5}{12}\pi=30\pi$

$r^2=144$

$r>0$이므로 $r=12$

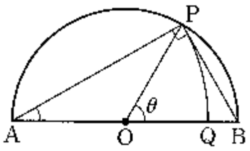
따라서 호 AB의 길이는

$12\times\frac{5}{12}\pi=5\pi$

답 ②

02

선분 AB의 중점을 O라 하면



$\overline{OA}=\overline{OB}=3$

$\angle POB=\theta$ $(0<\theta<\pi)$라 하면 호 BP의 길이가 π이므로

$\pi=3\times\theta$, $\theta=\frac{\pi}{3}$

삼각형 ABP에서 $\angle APB=\frac{\pi}{2}$, $\angle PAB=\frac{1}{2}\angle POB=\frac{\pi}{6}$이므로

$\overline{AP}=\overline{AB}\times\cos\frac{\pi}{6}=6\times\frac{\sqrt{3}}{2}=3\sqrt{3}$

따라서 부채꼴 APQ의 호 PQ의 길이는

$3\sqrt{3}\times\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}\pi$

답 ④

03

부채꼴 OAB의 중심각의 크기는 $\frac{4}{25}\pi$이고 호의 길이는 $\frac{8}{5}\pi$이므로

$\overline{OA}\times\frac{4}{25}\pi=\frac{8}{5}\pi$, $\overline{OA}=10$

부채꼴 OAB의 넓이는 $\frac{1}{2}\times10^2\times\frac{4}{25}\pi=8\pi$

한편, 선분 OB를 3 : 2로 내분하는 점이 C이므로

$\overline{OC}=\frac{3}{5}\times10=6$

부채꼴 OCD에서 $\angle COD=\theta$라 하면 부채꼴 OCD의 넓이는

$\frac{1}{2}\times6^2\times\theta=18\theta$

부채꼴 OAB의 넓이와 부채꼴 OCD의 넓이가 같으므로

$8\pi=18\theta$에서 $\theta=\frac{4}{9}\pi$

부채꼴 OCD에서 호 CD의 길이는

$6\times\frac{4}{9}\pi=\frac{8}{3}\pi$

따라서 $p=3$, $q=8$이므로

$p+q=3+8=11$

답 11

필수 유형 ❷

$\cos^2\theta=\frac{4}{9}$이고 $\frac{\pi}{2}<\theta<\pi$일 때 $\cos\theta<0$이므로

$\cos\theta=-\frac{2}{3}$

한편, $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$이므로

$\sin^2\theta=1-\cos^2\theta=1-\frac{4}{9}=\frac{5}{9}$

따라서 $\sin^2\theta+\cos\theta=\frac{5}{9}+\left(-\frac{2}{3}\right)=-\frac{1}{9}$

답 ④

04

$\sin\theta=-\frac{\sqrt{7}}{4}$이고 $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$이므로

$\cos^2\theta=1-\sin^2\theta=1-\left(-\frac{\sqrt{7}}{4}\right)^2=\frac{9}{16}$

$\frac{3}{2}\pi<\theta<2\pi$일 때 $\cos\theta>0$이므로 $\cos\theta=\frac{3}{4}$

따라서 $\frac{2\cos\theta}{1+\cos\theta}=\frac{2\times\frac{3}{4}}{1+\frac{3}{4}}=\frac{6}{7}$

답 ⑤

05

$\tan\theta+\frac{1}{\tan\theta}=-4$에서

$\frac{\sin\theta}{\cos\theta}+\frac{\cos\theta}{\sin\theta}=-4$, $\frac{\sin^2\theta+\cos^2\theta}{\sin\theta\cos\theta}=-4$

$\frac{1}{\sin\theta\cos\theta}=-4$, $\sin\theta\cos\theta=-\frac{1}{4}$

$$\begin{aligned}(\sin\theta-\cos\theta)^2&=\sin^2\theta-2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta\\&=(\sin^2\theta+\cos^2\theta)-2\sin\theta\cos\theta\\&=1-2\times\left(-\frac{1}{4}\right)=\frac{3}{2}\end{aligned}$$

한편, $\frac{\pi}{2}<\theta<\pi$에서 $\sin\theta>0$, $\cos\theta<0$이므로

$\sin\theta-\cos\theta>0$

따라서 $\sin\theta-\cos\theta=\sqrt{\frac{3}{2}}=\frac{\sqrt{6}}{2}$

답 ⑤

06

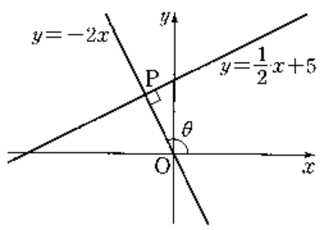
직선 OP의 기울기를 m이라 하면 직선 $y=\frac{1}{2}x+5$와 직선 OP가 서로 수직이므로

$m\times\frac{1}{2}=-1$, $m=-2$

직선 $y=\frac{1}{2}x+5$와 직선 $y=-2x$가 만나는 점의 x좌표는

$\frac{1}{2}x+5=-2x$에서 $x=-2$

이때 $y=-2\times(-2)=4$이므로 점 P의 좌표는 $(-2, 4)$이다.



$\overline{OP}=\sqrt{(-2)^2+4^2}=2\sqrt{5}$

$\sin\theta=\frac{4}{2\sqrt{5}}=\frac{2\sqrt{5}}{5}$, $\cos\theta=\frac{-2}{2\sqrt{5}}=-\frac{\sqrt{5}}{5}$

따라서 $\sin\theta\times\cos\theta=\frac{2\sqrt{5}}{5}\times\left(-\frac{\sqrt{5}}{5}\right)=-\frac{2}{5}$

답 ①

07

선분 AP를 포함하는 부채꼴 OAP에서 $\angle AOP=\alpha$라 하자.

조건 (가)에서 부채꼴 AOP의 호 AP의 길이가 4π이므로

$6\alpha=4\pi$, $\alpha=\frac{2}{3}\pi$

이때 $\theta=\frac{2}{3}\pi$ 또는 $\theta=\frac{4}{3}\pi$이다.

(i) $\theta=\frac{2}{3}\pi$일 때, θ는 제2사분면의 각이므로 $\cos\theta<0$, $\tan\theta<0$

이때 $\frac{\tan\theta}{\cos\theta}>0$이므로 조건 (나)를 만족시키지 않는다.

(ii) $\theta=\frac{4}{3}\pi$일 때, θ는 제3사분면의 각이므로 $\cos\theta<0$, $\tan\theta>0$

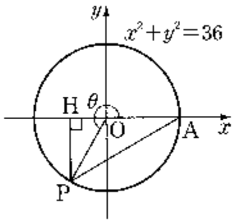
이때 $\frac{\tan\theta}{\cos\theta}<0$이므로 조건 (나)를 만족시킨다.

(i), (ii)에서 $\theta=\frac{4}{3}\pi$

점 P에서 x축에 내린 수선의 발을 H라 하면

$\overline{OH}=3$, $\overline{PH}=3\sqrt{3}$

이므로 점 P의 좌표는 $(-3, -3\sqrt{3})$이다.



따라서 $\cos\theta=\frac{-3}{6}=-\frac{1}{2}$,

$\tan\theta=\frac{-3\sqrt{3}}{-3}=\sqrt{3}$이므로

$\cos\theta+\tan^2\theta=-\frac{1}{2}+(\sqrt{3})^2=\frac{5}{2}$

답 ⑤

다른 풀이

선분 AP를 포함하는 부채꼴 OAP에서 $\angle AOP=\alpha$라 하자.

조건 (가)에서 부채꼴 AOP의 호 AP의 길이가 4π이므로

$6\alpha=4\pi$, $\alpha=\frac{2}{3}\pi$

이때 $\theta=\frac{2}{3}\pi$ 또는 $\theta=\frac{4}{3}\pi$이다.

(i) $\theta=\frac{2}{3}\pi$일 때, θ는 제2사분면의 각이므로 $\cos\theta<0$, $\tan\theta<0$

이때 $\frac{\tan\theta}{\cos\theta}>0$이므로 조건 (나)를 만족시키지 않는다.

(ii) $\theta=\frac{4}{3}\pi$일 때, θ는 제3사분면의 각이므로 $\cos\theta<0$, $\tan\theta>0$

이때 $\frac{\tan\theta}{\cos\theta}<0$이므로 조건 (나)를 만족시킨다.

(i), (ii)에서 $\theta=\frac{4}{3}\pi$

$\cos\theta=\cos\frac{4}{3}\pi=\cos\left(\pi+\frac{\pi}{3}\right)=-\cos\frac{\pi}{3}=-\frac{1}{2}$

$\tan\theta=\tan\frac{4}{3}\pi=\tan\left(\pi+\frac{\pi}{3}\right)=\tan\frac{\pi}{3}=\sqrt{3}$

따라서 $\cos\theta+\tan^2\theta=-\frac{1}{2}+(\sqrt{3})^2=\frac{5}{2}$

필수 유형 ❸

함수 $y=a\sin b\pi x$의 주기는 $\frac{2\pi}{b\pi}=\frac{2}{b}$

점 A의 x좌표가 점 B의 x좌표보다 작다고 하면

$A\left(\frac{1}{2b}, a\right)$, $B\left(\frac{5}{2b}, a\right)$이므로 $\overline{AB}=\frac{5}{2b}-\frac{1}{2b}=\frac{4}{2b}=\frac{2}{b}$

삼각형 OAB의 넓이가 5이므로 $\frac{1}{2}\times\frac{2}{b}\times a=5$, $\frac{a}{b}=5$

$a=5b$ …… ㉠

직선 OA의 기울기와 직선 OB의 기울기의 곱이 $\frac{5}{4}$이므로

$\frac{a}{\frac{1}{2b}}\times\frac{a}{\frac{5}{2b}}=2ab\times\frac{2ab}{5}=\frac{4a^2b^2}{5}=\frac{5}{4}$

$a^2b^2=\frac{25}{16}$

$ab>0$이므로 $ab=\frac{5}{4}$ …… ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면 $5b^2=\frac{5}{4}$, $b^2=\frac{1}{4}$

$b>0$이므로 $b=\frac{1}{2}$

$b=\frac{1}{2}$을 ㉠에 대입하면 $a=\frac{5}{2}$

따라서 $a+b=\frac{5}{2}+\frac{1}{2}=3$

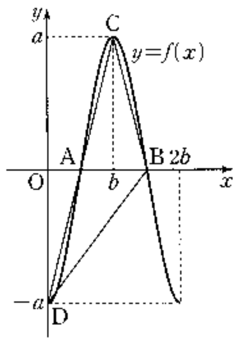
답 ③

08

함수 $f(x)=-a\cos\frac{\pi x}{b}$의 주기는 $\frac{2\pi}{\frac{\pi}{b}}=2b$이므로

$A\left(\frac{b}{2}, 0\right)$, $B\left(\frac{3b}{2}, 0\right)$이고,

함수 $y=f(x)$의 그래프는 그림과 같다.



함수 $f(x)$는 $x=b$일 때,

최댓값 $f(b)=a$를 가지므로 $c=b$이고

$C(b, a)$, $D(0, -a)$이다.

한편, 직선 AC의 기울기는 $\frac{a}{b-\frac{b}{2}}=\frac{2a}{b}$

이고, 직선 BC의 기울기는 $\frac{a}{b-\frac{3b}{2}}=-\frac{2a}{b}$이다.

조건 (가)에 의하여

$\frac{2a}{b}\times\left(-\frac{2a}{b}\right)=-16$, $\left(\frac{a}{b}\right)^2=4$

$\frac{a}{b}>0$이므로 $\frac{a}{b}=2$

$a=2b$ …… ㉠

조건 (나)에서

(삼각형 BCD의 넓이)

$=$(삼각형 ABC의 넓이)$+$(삼각형 ADB의 넓이)

$=\frac{1}{2}\times b\times a+\frac{1}{2}\times b\times a$

$=ab=72$ …… ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면 $2b^2=72$, $b^2=36$

$b>0$이므로 $b=6$

$b=6$을 ㉠에 대입하면 $a=12$

한편, $c=b=6$

따라서 $a+b+c=12+6+6=24$

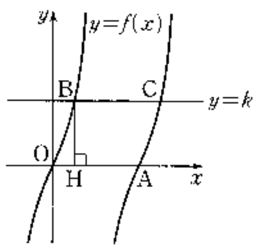
답 24

09

함수 $y=f(x)$의 주기가 2이므로 $\frac{\pi}{b}=2$, 즉 $b=\frac{\pi}{2}$

$\overline{OA}=2$이므로 점 A의 좌표는 $(2, 0)$이다.

점 B에서 x축에 내린 수선의 발을 H라 하면 $\angle BAO=\frac{\pi}{4}$이므로



$\overline{AH}=\overline{BH}=k$, $\overline{OH}=2-k$

직각삼각형 BOH에서

$\tan\theta=\tan(\angle BOH)=3$이므로

$\frac{\overline{BH}}{\overline{OH}}=\frac{k}{2-k}=3$, $k=\frac{3}{2}$

점 B의 좌표가 $\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$이고, 함수 $y=f(x)$의 그래프가 점 B를 지나므로

$f\left(\frac{1}{2}\right)=a\tan\left(\frac{\pi}{2}\times\frac{1}{2}\right)=a\tan\frac{\pi}{4}=a=\frac{3}{2}$

이때 점 C의 좌표는 $\left(\frac{5}{2}, \frac{3}{2}\right)$이고 $f(x)=\frac{3}{2}\tan\frac{\pi x}{2}$이다.

$f\left(\frac{k}{3}\right)=f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{3}{2}\tan\frac{\pi}{4}=\frac{3}{2}$

$\overline{OC}^2=\left(\frac{5}{2}\right)^2+\left(\frac{3}{2}\right)^2=\frac{17}{2}$

따라서 $f\left(\frac{k}{3}\right)+\overline{OC}^2=\frac{3}{2}+\frac{17}{2}=10$

답 ⑤

필수 유형 4

$\cos\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)=-\sin\theta$이므로 $\cos\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)=\frac{\sqrt{5}}{5}$에서 $\sin\theta=-\frac{\sqrt{5}}{5}$

$\tan\theta<0$, $\sin\theta<0$이므로 θ는 제4사분면의 각이고, $\cos\theta>0$이다.

$\cos^2\theta=1-\sin^2\theta=1-\left(-\frac{\sqrt{5}}{5}\right)^2=\frac{4}{5}$에서

$\cos\theta>0$이므로 $\cos\theta=\frac{2\sqrt{5}}{5}$

답 ⑤

10

$\sin\left(-\frac{5}{6}\pi\right)=-\sin\frac{5}{6}\pi=-\sin\left(\pi-\frac{\pi}{6}\right)=-\sin\frac{\pi}{6}=-\frac{1}{2}$

$\cos\frac{8}{3}\pi=\cos\left(2\pi+\frac{2}{3}\pi\right)=\cos\frac{2}{3}\pi=\cos\left(\pi-\frac{\pi}{3}\right)$

$=-\cos\frac{\pi}{3}=-\frac{1}{2}$

따라서 $\sin\left(-\frac{5}{6}\pi\right)+\cos\frac{8}{3}\pi=-\frac{1}{2}+\left(-\frac{1}{2}\right)=-1$

답 ①

11

$\cos\theta=-\frac{1}{3}$이므로 $\sin^2\theta=1-\cos^2\theta=1-\left(-\frac{1}{3}\right)^2=\frac{8}{9}$

$\frac{\pi}{2}<\theta<\pi$일 때, $\sin\theta>0$이므로 $\sin\theta=\frac{2\sqrt{2}}{3}$

$\sin(\pi+\theta)=-\sin\theta=-\frac{2\sqrt{2}}{3}$, $\cos\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)=-\sin\theta=-\frac{2\sqrt{2}}{3}$

$\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\cos\theta=-\frac{1}{3}$, $\cos(\pi-\theta)=-\cos\theta=\frac{1}{3}$

따라서

$\sin(\pi+\theta)\cos\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)+\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)\cos(\pi-\theta)$

$=-\frac{2\sqrt{2}}{3}\times\left(-\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)+\left(-\frac{1}{3}\right)\times\frac{1}{3}=\frac{7}{9}$

답 ③

12

$\sin(2\pi-\theta)=\sin(-\theta)=-\sin\theta$

$\cos(\pi+\theta)=-\cos\theta$

$\cos\left(\frac{3}{2}\pi+\theta\right)=\cos\left\{\pi+\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)\right\}=-\cos\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)=\sin\theta$

이므로 $\sin(2\pi-\theta)+\cos(\pi+\theta)+2\cos\left(\frac{3}{2}\pi+\theta\right)=3\sin\theta$에서

$-\sin\theta-\cos\theta+2\sin\theta=3\sin\theta$

$\cos\theta=-2\sin\theta$ …… ㉠

한편, $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$이므로 $\sin^2\theta+(-2\sin\theta)^2=1$, $\sin^2\theta=\frac{1}{5}$

$\frac{3}{2}\pi<\theta<2\pi$에서 $\sin\theta<0$이므로

$\sin\theta=-\frac{\sqrt{5}}{5}$ …… ㉡

㉡을 ㉠에 대입하면 $\cos\theta=\frac{2\sqrt{5}}{5}$

따라서 $\sin\theta+\cos\theta=-\frac{\sqrt{5}}{5}+\frac{2\sqrt{5}}{5}=\frac{\sqrt{5}}{5}$

답 ④

필수 유형 5

함수 $f(x)=a-\sqrt{3}\tan 2x$의 그래프의 주기는 $\frac{\pi}{2}$이다.

함수 $f(x)$가 닫힌구간 $\left[-\frac{\pi}{6}, b\right]$에서 최댓값과 최솟값을 가지므로

$-\frac{\pi}{6}<b<\frac{\pi}{4}$이다.

한편, 함수 $y=f(x)$의 그래프는 구간 $\left[-\frac{\pi}{6}, b\right]$에서 x의 값이 증가할 때, y의 값은 감소하므로 함수 $f(x)$는 $x=-\frac{\pi}{6}$에서 최댓값 7을 갖는다.

즉, $f\left(-\frac{\pi}{6}\right)=a-\sqrt{3}\tan\left(-\frac{\pi}{3}\right)=7$에서

$a+\sqrt{3}\tan\frac{\pi}{3}=7$, $a+3=7$, $a=4$

함수 $f(x)$는 $x=b$에서 최솟값 3을 가지므로

$f(b)=4-\sqrt{3}\tan 2b=3$에서 $\tan 2b=\frac{\sqrt{3}}{3}$

이때 $-\frac{\pi}{3}<2b<\frac{\pi}{2}$이므로 $2b=\frac{\pi}{6}$, $b=\frac{\pi}{12}$

따라서 $a\times b=4\times\frac{\pi}{12}=\frac{\pi}{3}$

답 ③

13

함수 $f(x)$의 최솟값이 -1이고 $a>0$이므로

$-a+b=-1$ …… ㉠

$f\left(\dfrac{\pi}{3}\right)=a\sin\dfrac{\pi}{6}+b=\dfrac{a}{2}+b$이므로

$\dfrac{a}{2}+b=5$ $\quad\cdots\cdots$ ㉡

㉡－㉠을 하면 $\dfrac{3}{2}a=6$, $a=4$

$a=4$를 ㉠에 대입하면 $-4+b=-1$, $b=3$

따라서 $a+b=4+3=7$

답 ④

14

$\sin(\pi+x)=-\sin x$, $\sin(\pi-x)=\sin x$,

$\sin\left(\dfrac{3}{2}\pi+x\right)=\sin\left\{\pi+\left(\dfrac{\pi}{2}+x\right)\right\}=-\sin\left(\dfrac{\pi}{2}+x\right)=-\cos x$

이므로

$$\begin{aligned}f(x)&=2\sin(\pi+x)\sin(\pi-x)+\sin\left(\frac{3}{2}\pi+x\right)+3\\&=-2\sin^2 x-\cos x+3=-2(1-\cos^2 x)-\cos x+3\\&=2\cos^2 x-\cos x+1=2\left(\cos x-\frac{1}{4}\right)^2+\frac{7}{8}\end{aligned}$$

$-1\le\cos x\le1$이므로 $\cos x=-1$인 때 함수 $f(x)$는 최댓값을 갖고

$\cos x=\dfrac{1}{4}$인 때, 함수 $f(x)$는 최솟값을 갖는다.

따라서 $M=2\left(-1-\dfrac{1}{4}\right)^2+\dfrac{7}{8}=4$, $m=2\left(\dfrac{1}{4}-\dfrac{1}{4}\right)^2+\dfrac{7}{8}=\dfrac{7}{8}$이므로

$M+m=4+\dfrac{7}{8}=\dfrac{39}{8}$

답 ③

15

함수 $y=f(x)$의 그래프의 점근선은 직선 $x=3$이다.

함수 $g(x)$의 주기는 $\dfrac{\pi}{\frac{\pi}{a}}=a$이므로 함수 $y=g(x)$의 그래프의 점근선은

직선 $x=na+\dfrac{a}{2}$ (n은 정수)이다.

조건 (가)에서 $na+\dfrac{a}{2}=3$이므로 $a=\dfrac{6}{2n+1}$

a는 자연수이므로 $2n+1$은 6의 양의 약수이어야 한다.

$2n+1=1$ 또는 $2n+1=2$ 또는 $2n+1=3$ 또는 $2n+1=6$

즉, $n=0$ 또는 $n=\dfrac{1}{2}$ 또는 $n=1$ 또는 $n=\dfrac{5}{2}$

이때 n은 정수이므로 $n=0$ 또는 $n=1$

(i) $n=0$일 때, $a=6$이므로 $g(x)=\tan\dfrac{\pi x}{6}$

$g\left(\dfrac{2}{3}\right)=\tan\dfrac{\pi}{9}<\tan\dfrac{\pi}{4}=1$이므로 조건 (나)를 만족시키지 않는다.

(ii) $n=1$인 때, $a=2$이므로 $g(x)=\tan\dfrac{\pi x}{2}$

$g\left(\dfrac{2}{3}\right)=\tan\dfrac{\pi}{3}=\sqrt{3}>1$이므로 조건 (나)를 만족시킨다.

(i), (ii)에서 $g(x)=\tan\dfrac{\pi x}{2}$

함수 $y=f(x)$의 정의역은 $\{x\,|\,x>3$인 실수$\}$이고 밑 4가 1보다 크므로

함수 $y=f(x)$의 그래프는 x의 값이 증가하면 y의 값도 증가한다.

$\dfrac{13}{4}\le x\le19$에서 $f\left(\dfrac{13}{4}\right)=\dfrac{1}{3}\log_4\dfrac{1}{4}=-\dfrac{1}{3}$, $f(19)=\dfrac{1}{3}\log_4 16=\dfrac{2}{3}$

이므로 $-\dfrac{1}{3}\le f(x)\le\dfrac{2}{3}$

또 $-1<x<1$일 때, 함수 $y=g(x)$의 그래프는 x의 값이 증가하면 y의 값도 증가한다.

$g\left(-\dfrac{1}{3}\right)=\tan\left(-\dfrac{\pi}{6}\right)=-\tan\dfrac{\pi}{6}=-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$,

$g\left(\dfrac{2}{3}\right)=\tan\dfrac{\pi}{3}=\sqrt{3}$이므로 $-\dfrac{\sqrt{3}}{3}\le(g\circ f)(x)\le\sqrt{3}$

따라서 $M=\sqrt{3}$, $m=-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$이므로

$12(M-m)^2=12\times\left\{\sqrt{3}-\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)\right\}^2=12\times\left(\dfrac{4\sqrt{3}}{3}\right)^2=64$

답 64

필수 유형 ❻

$\cos\left(\dfrac{\pi}{2}+x\right)=-\sin x$이므로 $4\sin^2 x-4\cos\left(\dfrac{\pi}{2}+x\right)-3=0$에서

$4\sin^2 x+4\sin x-3=0$

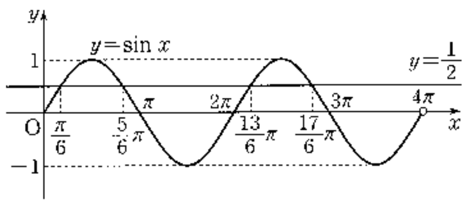
$(2\sin x-1)(2\sin x+3)=0$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

$0\le x<4\pi$일 때, $2\sin x+3>0$이므로 ㉠에서

$2\sin x-1=0$, $\sin x=\dfrac{1}{2}$

$0\le x<4\pi$일 때, 방정식 $\sin x=\dfrac{1}{2}$의 해는

$x=\dfrac{\pi}{6}$ 또는 $x=\dfrac{5}{6}\pi$ 또는 $x=\dfrac{13}{6}\pi$ 또는 $x=\dfrac{17}{6}\pi$



따라서 방정식의 모든 해의 합은

$\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{5}{6}\pi+\dfrac{13}{6}\pi+\dfrac{17}{6}\pi=6\pi$

답 ②

16

부등식 $(2\sin x-1)(\sqrt{2}\cos x-1)>0$에서

$2\sin x-1>0$, $\sqrt{2}\cos x-1>0$ 또는

$2\sin x-1<0$, $\sqrt{2}\cos x-1<0$

(i) $2\sin x-1>0$, $\sqrt{2}\cos x-1>0$일 때

부등식 $2\sin x-1>0$에서 $\sin x>\dfrac{1}{2}$이므로

$\dfrac{\pi}{6}<x<\dfrac{5}{6}\pi$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

부등식 $\sqrt{2}\cos x-1>0$에서 $\cos x>\dfrac{\sqrt{2}}{2}$이므로

$0\le x<\dfrac{\pi}{4}$ 또는 $\dfrac{7}{4}\pi<x<2\pi$ $\quad\cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡에서 $\dfrac{\pi}{6}<x<\dfrac{\pi}{4}$

(ii) $2\sin x-1<0$, $\sqrt{2}\cos x-1<0$일 때

부등식 $2\sin x-1<0$에서 $\sin x<\dfrac{1}{2}$이므로

$0\le x<\frac{\pi}{6}$ 또는 $\frac{5}{6}\pi<x<2\pi$ $\cdots\cdots$ ㉢

부등식 $\sqrt{2}\cos x-1<0$에서 $\cos x<\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\frac{\pi}{4}<x<\frac{7}{4}\pi$ $\cdots\cdots$ ㉣

㉢, ㉣에서 $\frac{5}{6}\pi<x<\frac{7}{4}\pi$

(i), (ii)에서 $\frac{\pi}{6}<x<\frac{\pi}{4}$ 또는 $\frac{5}{6}\pi<x<\frac{7}{4}\pi$

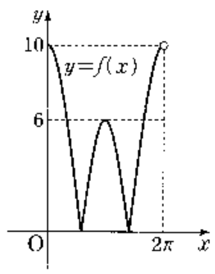
따라서 $\alpha=\frac{\pi}{6}$, $\beta=\frac{\pi}{4}$, $\gamma=\frac{5}{6}\pi$, $\delta=\frac{7}{4}\pi$이므로

$$\begin{aligned}\sin(\delta-\beta)+\cos(\gamma-\alpha)&=\sin\left(\frac{7}{4}\pi-\frac{\pi}{4}\right)+\cos\left(\frac{5}{6}\pi-\frac{\pi}{6}\right)\\&=\sin\frac{3}{2}\pi+\cos\frac{2}{3}\pi\\&=-1+\left(-\frac{1}{2}\right)=-\frac{3}{2}\end{aligned}$$

답 ①

17

$f(x)=|8\cos x+2|$라 하면 $0\le x<2\pi$에서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 그림과 같다.



방정식 $|8\cos x+2|=k$가 서로 다른 세 실근을 가지므로 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=k$가 서로 다른 세 점에서 만나야 한다.

즉, $k=6$

방정식 $|8\cos x+2|=6$에서

$8\cos x+2=6$ 또는 $8\cos x+2=-6$

(i) $8\cos x+2=6$일 때, $\cos x=\frac{1}{2}$이므로 $x=\frac{\pi}{3}$ 또는 $x=\frac{5}{3}\pi$

(ii) $8\cos x+2=-6$일 때, $\cos x=-1$이므로 $x=\pi$

(i), (ii)에서 $\alpha=\frac{\pi}{3}$, $\beta=\pi$, $\gamma=\frac{5}{3}\pi$

따라서 $\frac{k(\gamma-\alpha)}{\beta}=\frac{6\times\left(\frac{5}{3}\pi-\frac{\pi}{3}\right)}{\pi}=8$

답 ③

18

이차방정식 $x^2+(4\sin\theta)x-2+10\cos\theta=0$의 판별식을 D라 하면 이차방정식 $x^2+(4\sin\theta)x-2+10\cos\theta=0$이 실근을 가져야 하므로

$\frac{D}{4}=(2\sin\theta)^2-(-2+10\cos\theta)\ge0$이어야 한다.

즉, $4(1-\cos^2\theta)+2-10\cos\theta\ge0$에서

$2\cos^2\theta+5\cos\theta-3\le0$

$(2\cos\theta-1)(\cos\theta+3)\le0$

$0\le\theta<2\pi$에서 $-1\le\cos\theta\le1$이므로 $\cos\theta+3>0$

즉, $2\cos\theta-1\le0$에서 $\cos\theta\le\frac{1}{2}$이므로 $\frac{\pi}{3}\le\theta\le\frac{5}{3}\pi$

따라서 $\alpha=\frac{\pi}{3}$, $\beta=\frac{5}{3}\pi$이므로

$\beta-\alpha=\frac{5}{3}\pi-\frac{\pi}{3}=\frac{4}{3}\pi$

답 ②

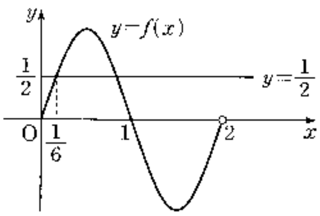
19

함수 $y=\sin(n\pi x)$의 주기는 $\frac{2\pi}{n\pi}=\frac{2}{n}$

(i) $0\le x<2$, 즉 $n=1$일 때, $f(x)=\sin(\pi x)$이다.

방정식 $2f(x)-1=0$에서 $\sin(\pi x)=\frac{1}{2}$

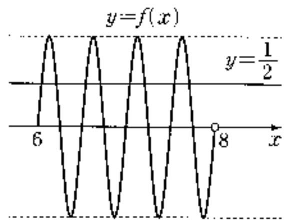
$0\le x<2$에서 방정식 $\sin(\pi x)=\frac{1}{2}$의 실근 중 가장 작은 것이 α이므로 $\alpha=\frac{1}{6}$



(ii) $6\le x<8$, 즉 $n=4$일 때, $f(x)=\sin(4\pi x)$이다.

방정식 $2f(x)-1=0$에서 $\sin(4\pi x)=\frac{1}{2}$

$6\le x<8$에서 방정식 $\sin(4\pi x)=\frac{1}{2}$의 실근 중 가장 큰 것이 β이므로 $\beta=6+\frac{3}{2}+\frac{5}{24}=\frac{185}{24}$



(i), (ii)에서 $\frac{4\beta}{\alpha}=\frac{4\times\frac{185}{24}}{\frac{1}{6}}=185$

답 185

《필수 유형 ❼》

삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이가 15이므로 사인법칙에 의하여

$\frac{\overline{AC}}{\sin B}=2\times15=30$

따라서 $\overline{AC}=30\sin B=30\times\frac{7}{10}=21$

답 21

20

$\sin^2A=1-\cos^2A=1-\left(\frac{\sqrt{7}}{4}\right)^2=\frac{9}{16}$

이때 $0<A<\pi$이고 $\sin A>0$이므로

$\sin A=\frac{3}{4}$

삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이가 16이므로

사인법칙에 의하여

$\dfrac{\overline{BC}}{\sin A}=2\times16$

따라서 $\overline{BC}=2\times16\times\sin A=2\times16\times\dfrac{3}{4}=24$

답 ④

21

삼각형 ADC에서 사인법칙에 의하여

$\dfrac{\overline{AD}}{\sin(\angle ACD)}=\dfrac{\overline{CD}}{\sin(\angle CAD)}$이므로

$\overline{AD}=\dfrac{\overline{CD}}{\sin(\angle CAD)}\times\sin(\angle ACD)=\dfrac{2}{\sin\frac{\pi}{6}}\times\sin\dfrac{\pi}{4}$

$=\dfrac{2}{\frac{1}{2}}\times\dfrac{\sqrt{2}}{2}=2\sqrt{2}$

삼각형 ABD의 외접원의 반지름의 길이를 R라 하면

사인법칙에 의하여

$\dfrac{\overline{AD}}{\sin(\angle ABD)}=2R$이므로

$R=\dfrac{\overline{AD}}{2\sin(\angle ABD)}=\dfrac{2\sqrt{2}}{2\sin\frac{\pi}{3}}$

$=\dfrac{2\sqrt{2}}{2\times\frac{\sqrt{3}}{2}}=\dfrac{2\sqrt{6}}{3}$

답 ②

22

직각삼각형 ABC에서

$\overline{BC}=\sqrt{\overline{AC}^2-\overline{AB}^2}=\sqrt{4^2-3^2}=\sqrt{7}$이므로 $\sin(\angle CAB)=\dfrac{\sqrt{7}}{4}$

점 D는 선분 AB를 2 : 1로 내분하는 점이므로

$\overline{BD}=\dfrac{1}{3}\times\overline{AB}=\dfrac{1}{3}\times3=1$

직각삼각형 DBC에서 $\overline{CD}=\sqrt{\overline{BD}^2+\overline{BC}^2}=\sqrt{1^2+(\sqrt{7})^2}=2\sqrt{2}$

삼각형 ADC의 외접원의 반지름의 길이를 R라 하면 사인법칙에 의하여

$\dfrac{\overline{CD}}{\sin(\angle CAD)}=2R$에서 $\dfrac{2\sqrt{2}}{\frac{\sqrt{7}}{4}}=2R$, $R=\dfrac{4\sqrt{2}}{\sqrt{7}}$

삼각형 ADC의 외접원의 넓이는 $\pi\times\left(\dfrac{4\sqrt{2}}{\sqrt{7}}\right)^2=\dfrac{32}{7}\pi$

따라서 $p=7$, $q=32$이므로

$p+q=7+32=39$

답 39

필수 유형 ❻

$\angle BAC=\angle CAD=\theta\left(0<\theta<\dfrac{\pi}{2}\right)$라 하면

삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의하여

$\overline{BC}^2=\overline{AB}^2+\overline{AC}^2-2\times\overline{AB}\times\overline{AC}\times\cos\theta$

$=5^2+(3\sqrt{5})^2-2\times5\times3\sqrt{5}\times\cos\theta$

$=70-30\sqrt{5}\cos\theta$

삼각형 ACD에서 코사인법칙에 의하여

$\overline{CD}^2=\overline{AD}^2+\overline{AC}^2-2\times\overline{AD}\times\overline{AC}\times\cos\theta$

$=7^2+(3\sqrt{5})^2-2\times7\times3\sqrt{5}\times\cos\theta$

$=94-42\sqrt{5}\cos\theta$

$\angle BAC=\angle CAD$이므로 $\overline{BC}=\overline{CD}$, 즉 $\overline{BC}^2=\overline{CD}^2$이다.

이때 $70-30\sqrt{5}\cos\theta=94-42\sqrt{5}\cos\theta$에서

$\cos\theta=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$

$\overline{BC}^2=70-30\sqrt{5}\cos\theta=70-30\sqrt{5}\times\dfrac{2\sqrt{5}}{5}=10$

$\overline{BC}=\sqrt{10}$

한편, $\sin^2\theta=1-\cos^2\theta=1-\left(\dfrac{2\sqrt{5}}{5}\right)^2=\dfrac{1}{5}$이므로

$\sin\theta=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$

따라서 구하는 원의 반지름의 길이를 R라 하면

삼각형 ABC에서 사인법칙에 의하여

$\dfrac{\overline{BC}}{\sin\theta}=2R$이므로

$\dfrac{\sqrt{10}}{\frac{\sqrt{5}}{5}}=2R$

$5\sqrt{2}=2R$

따라서 $R=\dfrac{5\sqrt{2}}{2}$

답 ①

23

$\overline{BC}=a\ (a>4\sqrt{2})$라 하면 삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의하여

$\overline{AC}^2=\overline{AB}^2+\overline{BC}^2-2\times\overline{AB}\times\overline{BC}\times\cos(\angle ABC)$

이므로

$(2\sqrt{2})^2=(4\sqrt{2})^2+a^2-2\times4\sqrt{2}\times a\times\dfrac{5\sqrt{2}}{8}$

$a^2-10a+24=0$, $(a-6)(a-4)=0$

$a>4\sqrt{2}$이므로 $a=6$

한편, $\angle BAD=\angle CAD$이므로 $\overline{AB}:\overline{AC}=\overline{BD}:\overline{CD}$

즉, $2:1=\overline{BD}:\overline{CD}$이므로 $\overline{BD}=2\overline{CD}$

$\overline{BC}=\overline{BD}+\overline{CD}=3\overline{CD}=6$에서 $\overline{CD}=2$

이때 $\overline{BD}=4$

직각삼각형 ABE에서 $\angle BAE=\theta\left(0<\theta<\dfrac{\pi}{4}\right)$라 하면

$\overline{AE}=4\sqrt{2}\cos\theta$

직각삼각형 CAF에서

$\angle CAF=\theta$이므로 $\overline{AF}=2\sqrt{2}\cos\theta$

삼각형 ABD에서 코사인법칙에 의하여

$\overline{AD}^2=\overline{AB}^2+\overline{BD}^2-2\times\overline{AB}\times\overline{BD}\times\cos(\angle ABD)$

$=(4\sqrt{2})^2+4^2-2\times4\sqrt{2}\times4\times\dfrac{5\sqrt{2}}{8}=8$

$\overline{AD}=2\sqrt{2}$

삼각형 ABD에서

$\cos\theta=\dfrac{\overline{AB}^2+\overline{AD}^2-\overline{BD}^2}{2\times\overline{AB}\times\overline{AD}}=\dfrac{(4\sqrt{2})^2+(2\sqrt{2})^2-4^2}{2\times4\sqrt{2}\times2\sqrt{2}}=\dfrac{3}{4}$

따라서

$\overline{AF}\times\overline{AE}=2\sqrt{2}\cos\theta\times4\sqrt{2}\cos\theta=16\cos^2\theta$

$=16\times\left(\frac{3}{4}\right)^2=9$

답 9

24

삼각형 ABC에서 $\angle CAB=\theta\left(\frac{\pi}{2}<\theta<\pi\right)$라 하면

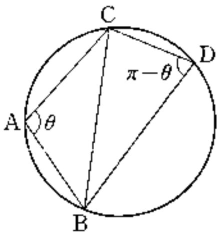
사인법칙에 의하여

$\frac{\overline{BC}}{\sin\theta}=2\times\frac{4\sqrt{10}}{5}$, $\frac{2\sqrt{6}}{\sin\theta}=2\times\frac{4\sqrt{10}}{5}$, $\sin\theta=\frac{\sqrt{15}}{4}$

이때 $\cos^2\theta=1-\sin^2\theta=1-\left(\frac{\sqrt{15}}{4}\right)^2=\frac{1}{16}$

$\frac{\pi}{2}<\theta<\pi$에서 $\cos\theta<0$이므로

$\cos\theta=-\frac{1}{4}$



삼각형 BDC에서

$\angle BDC=\pi-\theta$이므로

$\cos(\angle BDC)=\cos(\pi-\theta)=-\cos\theta=\frac{1}{4}$

$\overline{CD}=k\ (k>0)$이라 하면

$\overline{BD}=2k$

이므로 코사인법칙에 의하여

$\overline{BC}^2=\overline{BD}^2+\overline{CD}^2-2\times\overline{BD}\times\overline{CD}\times\cos(\angle BDC)$

$(2\sqrt{6})^2=(2k)^2+k^2-2\times2k\times k\times\frac{1}{4}$

$24=4k^2$, $k^2=6$

$k>0$이므로

$k=\sqrt{6}$

$\overline{CD}=\sqrt{6}$, $\overline{BD}=2\sqrt{6}$

$\sin(\angle BDC)=\sin(\pi-\theta)=\sin\theta=\frac{\sqrt{15}}{4}$이므로

삼각형 BDC의 넓이 S는

$S=\frac{1}{2}\times\overline{BD}\times\overline{CD}\times\sin(\angle BDC)$

$=\frac{1}{2}\times2\sqrt{6}\times\sqrt{6}\times\frac{\sqrt{15}}{4}=\frac{3\sqrt{15}}{2}$

따라서 $4S^2=4\times\left(\frac{3\sqrt{15}}{2}\right)^2=135$

답 135

03 수열

정답 — 본문 28~39쪽

필수 유형 ❶ ①	01 ①	02 ②	03 42
필수 유형 ❷ 7	04 ③	05 ①	06 ⑤
	07 8		
필수 유형 ❸ 36	08 ④	09 ①	10 ④
필수 유형 ❹ 64	11 ①	12 ③	13 ④
필수 유형 ❺ ③	14 ③	15 ②	16 ③
필수 유형 ❻ 9	17 ④	18 ③	19 ②
필수 유형 ❼ 22	20 ⑤	21 ①	22 ④
필수 유형 ❽ 91	23 ③	24 29	25 ⑤
	26 ②		
필수 유형 ❾ ④	27 ②	28 ④	29 ①
필수 유형 ❿ ④	30 16	31 ④	32 99
필수 유형 ⓫ ⑤	33 ⑤	34 ④	35 ③
필수 유형 ⓬ ④	36 ②		

필수 유형 ❶

등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d라 하면

$a_{10}-a_7=(a_1+9d)-(a_1+6d)=3d=6$이므로 $d=2$

따라서 $a_4=a_1+3d=4+6=10$

답 ①

01

등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a라 하면

$a_2=a+d=3$ …… ㉠

$a_7-a_5=(a+6d)-(a+4d)=2d$에서

$2d=3-d$이므로 $d=1$ …… ㉡

㉡을 ㉠에 대입하면 $a=2$

따라서 $a_4=a+3d=2+3=5$

답 ①

02

수열 $\{a_n\}$의 첫째항이 45이고 공차가 -7이므로 일반항 a_n은 $a_n=-7n+52$이다. 또한 수열 $\{b_n\}$은 첫째항과 공차가 같고 모든 항이 자연수이므로 수열 $\{b_n\}$의 공차를 d라 하면 d는 자연수이다.

$b_n=b_1+(n-1)d$에서 $b_1=d$이므로 $b_n=dn$이다.

따라서 $c_n=(d-7)n+52$

$c_n>100$을 만족시키는 자연수 n의 최솟값이 10이므로

$c_9\le100$, $c_{10}>100$이다.

$c_9=9(d-7)+52=9d-11$에서 $9d-11\le100$, $d\le\frac{37}{3}$

$c_{10}=10(d-7)+52=10d-18$에서 $10d-18>100$, $d>\frac{59}{5}$

즉, $\frac{59}{5}<d\le\frac{37}{3}$이고 d는 자연수이므로 $d=12$

따라서 $b_1=12$

답 ②

03

3으로 나눈 나머지가 1인 자연수를 나열하면 1, 4, 7, 10, 13, …이므로 첫째항이 1이고 공차가 3인 등차수열이다.

즉, $a_n=3n-2$

4로 나눈 나머지가 2인 자연수를 나열하면

2, 6, 10, 14, 18, …이므로 첫째항이 2이고 공차가 4인 등차수열이다.

즉, $b_n=4n-2$

$a_k=b_m$에서 $3k-2=4m-2$, $3k=4m$

즉, k는 4의 배수이고 m은 3의 배수이므로

$k=4k'$, $m=3m'$ (단, $k'\le5$, $m'\le6$인 자연수)

이를 대입하면 $3\times4k'=4\times3m'$에서 $k'=m'$이다.

k와 m은 20 이하의 자연수이므로 $k+m$의 최솟값은 $k'=m'=1$, 즉 $k=4$, $m=3$일 때 7이고, $k+m$의 최댓값은 $k'=m'=5$, 즉 $k=20$, $m=15$일 때 35이다.

따라서 $k+m$의 최댓값과 최솟값의 합은

$35+7=42$

답 42

필수 유형 ❷

$S_{k+2}-S_k=a_{k+2}+a_{k+1}=4$이고 등차수열 $\{a_n\}$의 공차가 2이므로

$a_1+2(k+1)+a_1+2k=4$, $2a_1+4k=2$

$a_1=1-2k$ …… ㉠

한편, $S_k=\frac{k\{2a_1+2(k-1)\}}{2}=-16$이고 ㉠을 대입하면

$\frac{k\{2(1-2k)+2(k-1)\}}{2}=-16$

$-k^2=-16$에서 k는 자연수이므로 $k=4$

이것을 ㉠에 대입하면 $a_1=-7$

따라서 $a_{2k}=a_8=a_1+7d=-7+7\times2=7$

답 7

04

첫째항이 3이고 공차가 2인 등차수열 $\{a_n\}$의 일반항은

$a_n=3+2(n-1)=2n+1$이므로

$a_{2n-1}=2(2n-1)+1=4n-1$, $a_{2n}=2\times2n+1=4n+1$이고

$b_n=a_{2n-1}+a_{2n}=(4n-1)+(4n+1)=8n$

따라서 수열 $\{b_n\}$은 첫째항이 $b_1=8$이고 공차가 8인 등차수열이다.

따라서 $S_5=\frac{5\times(2\times8+4\times8)}{2}=120$

답 ③

05

등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공차를 d라 하면 $a_n=a+(n-1)d$

또한 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합이 S_n이므로

$S_{n+1}=S_n+a_{n+1}$

즉, $2S_n+a_{n+1}=3n^2-28n-14$ …… ㉠

한편, $S_n=\frac{n\{2a+(n-1)d\}}{2}$이므로 이것을 ㉠에 대입하면

$2\times\frac{n\{2a+(n-1)d\}}{2}+(a+dn)=3n^2-28n-14$

$n\{2a+(n-1)d\}+(a+dn)=dn^2+2an+a$

$dn^2+2an+a=3n^2-28n-14$ …… ㉡

이 식은 모든 자연수 n에 대하여 성립하므로 ㉡은 n에 대한 항등식이다.

즉, $d=3$, $a=-14$

따라서 수열 $\{a_n\}$의 일반항은 $a_n=3n-17$이므로

$a_6=3\times6-17=1$

답 ①

다른 풀이

$S_{n+1}+S_n=3n^2-28n-14$에

$n=1$을 대입하면 $(a_2+a_1)+a_1=-39$ …… ㉠

$n=2$를 대입하면 $(a_3+a_2+a_1)+(a_2+a_1)=-58$ …… ㉡

등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d라 하면

$a_2=a_1+d$이므로 이것을 ㉠에 대입하면

$3a_1+d=-39$ …… ㉢

$a_3=a_1+2d$, $a_2=a_1+d$를 ㉡에 대입하면

$5a_1+4d=-58$ …… ㉣

㉢, ㉣을 연립하여 풀면 $a_1=-14$, $d=3$

따라서 수열 $\{a_n\}$의 일반항은 $a_n=3n-17$이므로

$a_6=3\times6-17=1$

06

$b_n=\frac{(a_{n+1})^2-(a_n)^2}{3}=\frac{1}{3}(a_{n+1}-a_n)(a_{n+1}+a_n)$

등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a $(a>0)$, 공차를 d $(d>0)$이라 하면

$a_n=a+(n-1)d$에서 $a_{n+1}-a_n=d$이고 $a_{n+1}+a_n=2a+(2n-1)d$

$b_n=\frac{d}{3}(2dn+2a-d)$

즉, $b_1=\frac{d}{3}(2a+d)=4$ …… ㉠

한편, $b_3=\frac{d}{3}(2a+5d)$이고 $S_6=\frac{6(2a+5d)}{2}=3(2a+5d)$이므로

$b_3=\frac{1}{3}S_6$에서 $\frac{d}{3}(2a+5d)=2a+5d$

$a>0$, $d>0$에서 $2a+5d\neq0$이므로 $\frac{d}{3}=1$

$d=3$ …… ㉡

㉡을 ㉠에 대입하면 $2a+3=4$이므로 $a=\frac{1}{2}$

따라서 $a_n=3n-\frac{5}{2}$이므로 $a_4=3\times4-\frac{5}{2}=\frac{19}{2}$

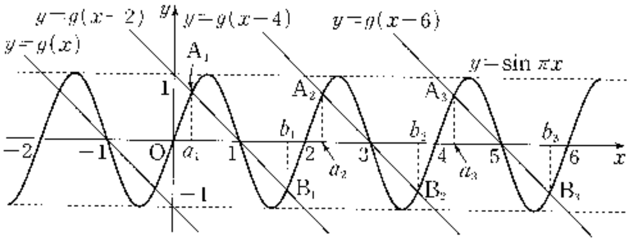
답 ⑤

07

직선 $y=-x$가 원점에 대하여 대칭인 직선이므로 직선 $y=g(x)$는 점 $(-1, 0)$에 대하여 대칭인 직선이다.

따라서 직선 $y=g(x-2n)$은 점 $(2n-1,\ 0)$에 대하여 대칭이고 기울기가 -1인 직선이다.

함수 $y=\sin \pi x$의 그래프는 함수 $y=\sin \pi x$의 그래프가 x축과 만나는 모든 점에 대하여 대칭이고 점 $(2n-1,\ 0)$은 함수 $y=\sin \pi x$의 그래프 위의 점이므로 함수 $y=\sin \pi x$의 그래프는 점 $(2n-1,\ 0)$에 대하여 대칭이다.



따라서 그림과 같이 곡선 $y=\sin \pi x$와 직선 $y=g(x-2n)$이 모두 점 $(2n-1,\ 0)$에 대하여 대칭이므로 두 함수의 그래프의 교점 A_n, B_n도 점 $(2n-1,\ 0)$에 대하여 대칭이다.

즉, $\dfrac{a_n+b_n}{2}=2n-1$에서 $a_n+b_n=4n-2$

따라서 $c_n=4n-2$

그러므로 수열 $\{c_n\}$은 첫째항이 2이고 공차가 4인 등차수열이다.

$S_n=\dfrac{n\{4+4(n-1)\}}{2}=2n^2$이므로 $2n^2>100$에서 $n^2>50$

한편, $7<\sqrt{50}<8$이므로 $n^2>50$을 만족시키는 자연수 n의 최솟값은 8이다.

답 8

필수 유형 ❸

주어진 등비수열의 첫째항을 a, 공비를 r라 하면

모든 항이 양수이므로 $a>0$, $r>0$

$a_n=ar^{n-1}$에서

$\dfrac{a_{16}}{a_{14}}+\dfrac{a_8}{a_7}=\dfrac{ar^{15}}{ar^{13}}+\dfrac{ar^7}{ar^6}=r^2+r=12$

$r^2+r-12=0$, $(r+4)(r-3)=0$

$r>0$이므로 $r=3$

따라서 $\dfrac{a_3}{a_1}+\dfrac{a_6}{a_3}=\dfrac{ar^2}{a}+\dfrac{ar^5}{ar^2}=r^2+r^3=3^2+3^3=36$

답 36

08

등비수열 $\{a_n\}$의 공비를 r라 하면 $\dfrac{a_4}{a_3}=r=\sqrt{6}$이다.

따라서 $a_5=\dfrac{1}{9}\times(\sqrt{6})^4=\dfrac{1}{9}\times 36=4$

답 ①

09

등비수열 $\{a_n\}$의 공비를 r라 하면

$a_3-a_1=4$에서

$a_1(r^2-1)=4$ …… ㉠

$a_7-a_5=36$에서

$a_5(r^2-1)=36$ …… ㉡

㉡÷㉠을 하면

$\dfrac{a_5}{a_1}=9$, $a_5=a_1\times 9$

한편, $a_5=a_1r^4$이므로 $r^4=9$

$r^2=3$이므로 이것을 ㉠에 대입하면 $a_1=2$

따라서 $a_9=a_1\times r^8=a_1\times(r^2)^4=2\times 3^4=162$

답 ①

10

등비수열 $\{a_n\}$의 공비를 r $(r>0)$이라 하면

$a_1+a_2=a_1(1+r)$, $a_4+a_5=a_4(1+r)$이므로

$\dfrac{a_1+a_2}{a_4+a_5}=\dfrac{1}{2}$에서 $\dfrac{a_1}{a_4}=\dfrac{1}{2}$

즉, $a_4=2a_1$이므로 $r^3=2$

$a_{10}=a_1\times r^9=a_1\times(r^3)^3=8a_1$이므로

$8a_1\le 40$, $a_1\le 5$

따라서 자연수 a_1의 값은 1, 2, 3, 4, 5이고 그 합은 15이다.

답 ④

필수 유형 ❹

주어진 등비수열의 공비를 r라 하면

$r=1$일 때, $a_n=1$이므로 $\dfrac{S_6}{S_3}=\dfrac{6}{3}=2$, $2a_4-7=-5$가 되어 모순이다.

즉, $r\neq 1$

$\dfrac{S_6}{S_3}=\dfrac{\dfrac{r^6-1}{r-1}}{\dfrac{r^3-1}{r-1}}=\dfrac{r^6-1}{r^3-1}=\dfrac{(r^3+1)(r^3-1)}{r^3-1}=r^3+1$이고

$\dfrac{S_6}{S_3}=2a_4-7$에서 $2a_4-7=2r^3-7$이므로

$r^3+1=2r^3-7$

$r^3=8$, $r=2$

따라서 $a_7=a_1r^6=1\times 2^6=64$

답 64

11

등비수열 $\{a_n\}$의 공비를 r $(r>0)$이라 하면

$r=1$이면 $a_n=3$이므로 $S_4=3\times 4=12$, $S_8=3\times 8=24$가 되어

$S_8=10S_4$를 만족시키지 않는다.

$r\neq 1$이므로

$S_8=\dfrac{3(1-r^8)}{1-r}$, $S_4=\dfrac{3(1-r^4)}{1-r}$

$S_8=10S_4$에서

$\dfrac{3(1-r^8)}{1-r}=10\times\dfrac{3(1-r^4)}{1-r}$

$\dfrac{3(1-r^4)(1+r^4)}{1-r}=10\times\dfrac{3(1-r^4)}{1-r}$

$1+r^4=10$, $r^4=9$

$r>0$이므로 $r=\sqrt{3}$

따라서 $a_3=a_1r^2=3\times(\sqrt{3})^2=9$

답 ①

다른 풀이

등비수열 $\{a_n\}$의 공비를 $r\ (r>0)$이라 하면

$S_8=10S_4$에서 $S_8-S_4=9S_4$이므로

$a_5+a_6+a_7+a_8=9(a_1+a_2+a_3+a_4)$

$a_1r^4+a_1r^5+a_1r^6+a_1r^7=9(a_1+a_1r+a_1r^2+a_1r^3)$

$r^4(a_1+a_1r+a_1r^2+a_1r^3)=9(a_1+a_1r+a_1r^2+a_1r^3)$

$r^4=9$

$r>0$이므로 $r=\sqrt{3}$

따라서 $a_3=a_1r^2=3\times(\sqrt{3})^2=9$

12

등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 $a\ (a>0)$, 공비를 $r\ (r>0)$이라 하면

$\dfrac{a_1a_4}{a_3}=\dfrac{a\times ar^3}{ar^2}=ar=2$ …… ㉠

$a_2+a_6=ar+ar^5=ar(1+r^4)=10$ …… ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면

$1+r^4=5,\ r^4=4$

$r>0$이므로 $r=\sqrt{2}$

㉠에 의하여 $a=\sqrt{2}$

즉, $a_n=(\sqrt{2})^n$이므로

$b_n=\dfrac{a_{2n}}{2a_{n+1}}=\dfrac{(\sqrt{2})^{2n}}{2\times(\sqrt{2})^{n+1}}=\dfrac{(\sqrt{2})^n}{2\sqrt{2}}=(\sqrt{2})^{n-3}$

따라서 수열 $\{b_n\}$은 첫째항이 $\dfrac{1}{2}$이고 공비가 $\sqrt{2}$인 등비수열이므로 첫째항부터 제8항까지의 합은

$\dfrac{\frac{1}{2}\{(\sqrt{2})^8-1\}}{\sqrt{2}-1}=\dfrac{15}{2}\times\dfrac{1}{\sqrt{2}-1}=\dfrac{15}{2}(\sqrt{2}+1)$

답 ③

13

등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공비 $\sqrt[5]{3}$을 r라 하자.

수열 $\{a_n\}$의 일반항은 $a_n=ar^{n-1}$이므로

$S_n=(a_1+a_2)+(a_2+a_3)+(a_3+a_4)+\cdots+(a_n+a_{n+1})$

$T_n=(a_1+a_2)+(a_3+a_4)+(a_5+a_6)+\cdots+(a_{2n-1}+a_{2n})$

에서

T_5-S_5

$=(a_1+a_2)+(a_3+a_4)+(a_5+a_6)+(a_7+a_8)+(a_9+a_{10})$

$\quad-\{(a_1+a_2)+(a_2+a_3)+(a_3+a_4)+(a_4+a_5)+(a_5+a_6)\}$

$=(a_7+a_8+a_9+a_{10})-(a_2+a_3+a_4+a_5)$

$=(a_2\times r^5+a_3\times r^5+a_4\times r^5+a_5\times r^5)-(a_2+a_3+a_4+a_5)$

$=(r^5-1)(a_2+a_3+a_4+a_5)$

$r^5=(\sqrt[5]{3})^5=3$이므로

$T_5-S_5=2(a_2+a_3+a_4+a_5)=8$

따라서 $a_2+a_3+a_4+a_5=4$

답 ④

다른 풀이

등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공비 $\sqrt[5]{3}$을 r라 하면

수열 $\{a_n\}$의 일반항은 $a_n=ar^{n-1}$이므로

$b_n=a_n+a_{n+1}=ar^{n-1}+ar^n=a(1+r)r^{n-1}$

$c_n=a_{2n-1}+a_{2n}=ar^{2n-2}+ar^{2n-1}=a(1+r)r^{2n-2}$

$T_5=c_1+c_2+c_3+c_4+c_5=\dfrac{a(1+r)(1-r^{10})}{1-r^2}$

$S_5=b_1+b_2+b_3+b_4+b_5=\dfrac{a(1+r)(1-r^5)}{1-r}$

$T_5-S_5=\dfrac{a(1+r)(1-r^{10})}{1-r^2}-\dfrac{a(1+r)(1-r^5)}{1-r}$

$=\dfrac{a(1+r)(1-r^5)}{1-r}\left(\dfrac{1+r^5}{1+r}-1\right)$

$=\dfrac{a(1+r)(1-r^5)}{1-r}\times\dfrac{1+r^5-1-r}{1+r}$

$=\dfrac{a(1-r^5)(r^5-r)}{1-r}$

$=ar(r^5-1)(r+1)(r^2+1)$

$=(r^5-1)(ar+ar^2+ar^3+ar^4)$

$=(r^5-1)(a_2+a_3+a_4+a_5)=8$

$r^5=(\sqrt[5]{3})^5=3$이므로

$2(a_2+a_3+a_4+a_5)=8$에서

$a_2+a_3+a_4+a_5=4$

필수 유형 5

$x^2-nx+4(n-4)=0$에서 $(x-4)(x-n+4)=0$

$x=4$ 또는 $x=n-4$

한편, 세 수 $1,\ \alpha,\ \beta$가 이 순서대로 등차수열을 이루므로

$2\alpha=\beta+1$ …… ㉠

(i) $\alpha=4,\ \beta=n-4$일 때

$\alpha<\beta$이므로 $4<n-4$에서 $n>8$

㉠에서 $8=(n-4)+1$이므로 $n=11$

(ii) $\alpha=n-4,\ \beta=4$일 때

$\alpha<\beta$이므로 $n-4<4$에서 $n<8$

㉠에서 $2(n-4)=4+1$이므로 $n=\dfrac{13}{2}$

(i), (ii)에서 구하는 자연수 n의 값은 11이다.

답 ③

14

수열 $\{a_n\}$이 등비수열이므로

$a_2a_4=(a_3)^2$

$a_2a_4=256$에서 $(a_3)^2=256$

$a_3>0$이므로 $a_3=16$

$a_1+a_3=24$에서 $a_1+16=24$

$a_1=8$

$a_1\times a_5=(a_3)^2$에서 $8\times a_5=16^2$

따라서 $a_5=32$

답 ③

15

세 수 $a,\ a+b,\ ab$가 이 순서대로 등차수열을 이루므로

$2(a+b)=a+ab$

$a+2b-ab=0$ …… ㉠

세 수 a^2, ab, $2b$가 이 순서대로 등비수열을 이루므로
$(ab)^2=a^2\times 2b$
$a^2b(b-2)=0$
$a\neq 0$, $b\neq 0$이므로 $b=2$
$b=2$를 ㉠에 대입하면
$a+2\times 2-a\times 2=0$
$a=4$
따라서 $ab=4\times 2=8$

답 ②

16

$\mathrm{P}(n, \sqrt{n})$, $\mathrm{Q}(n, \sqrt{2n})$, $\mathrm{R}(n, \sqrt{mn})$이므로
$\overline{\mathrm{PA}}=\sqrt{n}$, $\overline{\mathrm{QA}}=\sqrt{2n}$, $\overline{\mathrm{RA}}=\sqrt{mn}$
$\overline{\mathrm{PA}}$, $\overline{\mathrm{QA}}$, $\overline{\mathrm{RA}}$가 이 순서대로 등비수열을 이루므로
$\overline{\mathrm{QA}}^2=\overline{\mathrm{PA}}\times\overline{\mathrm{RA}}$
즉, $(\sqrt{2n})^2=\sqrt{n}\times\sqrt{mn}$에서 $n>0$이므로 $2n=n\sqrt{m}$이고,
$\sqrt{m}=2$, $m=4$
또 $\overline{\mathrm{OP}}^2=n^2+n$, $\overline{\mathrm{OQ}}^2+4=n^2+2n+4$, $\overline{\mathrm{OR}}^2+5=n^2+4n+5$
$\overline{\mathrm{OP}}^2$, $\overline{\mathrm{OQ}}^2+4$, $\overline{\mathrm{OR}}^2+5$가 이 순서대로 등차수열을 이루므로
$2(\overline{\mathrm{OQ}}^2+4)=\overline{\mathrm{OP}}^2+(\overline{\mathrm{OR}}^2+5)$
즉, $2(n^2+2n+4)=(n^2+n)+(n^2+4n+5)$에서 $n=3$
따라서 $m+n=4+3=7$

답 ③

필수 유형 6

모든 자연수 n에 대하여
$S_{n+3}-S_n=13\times 3^{n-1}$이 성립하고
$S_{n+3}-S_n=a_{n+1}+a_{n+2}+a_{n+3}$이므로 모든 자연수 n에 대하여
$a_{n+1}+a_{n+2}+a_{n+3}=13\times 3^{n-1}$ …… ㉠
이 성립한다.
㉠에 $n=1$을 대입하면 $a_2+a_3+a_4=13$이므로
등비수열 $\{a_n\}$의 공비를 r라 하면
$a_1r+a_1r^2+a_1r^3=13$
$a_1r(1+r+r^2)=13$ …… ㉡
또 ㉠에 $n=2$를 대입하면 $a_3+a_4+a_5=13\times 3=39$이므로
$a_1r^2+a_1r^3+a_1r^4=39$
$a_1r^2(1+r+r^2)=39$ …… ㉢
㉢÷㉡을 하면
$\dfrac{a_1r^2(1+r+r^2)}{a_1r(1+r+r^2)}=\dfrac{39}{13}$에서 $r=3$
$r=3$을 ㉡에 대입하면
$a_1\times 3\times(1+3+9)=13$에서 $a_1=\dfrac{1}{3}$
따라서 $a_4=a_1r^3=\dfrac{1}{3}\times 3^3=9$

답 9

17

$a_4=S_4-S_3=(2\times 4^2+4k)-(2\times 3^2+3k)=14+k$
이때 $a_4=20$이므로
$14+k=20$, $k=6$
따라서 $a_1=S_1=2+6=8$

답 ④

18

등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a $(a>0)$, 공비를 r라 하자.
$S_{10}-S_8=a_{10}+a_9=ar^9+ar^8=ar^8(r+1)$
$S_7-S_5=a_7+a_6=ar^6+ar^5=ar^5(r+1)$
$\dfrac{S_{10}-S_8}{S_7-S_5}=\dfrac{ar^8(r+1)}{ar^5(r+1)}=r^3$이므로
$\dfrac{S_{10}-S_8}{S_7-S_5}=4$에서 $r^3=4$ …… ㉠
또 $S_2-S_1=a_2=ar$이므로
$(S_2-S_1)^3=108$에서 $(ar)^3=108$
즉, $a^3r^3=108$ …… ㉡
㉠을 ㉡에 대입하면
$a^3\times 4=108$, $a^3=27$
$a>0$이므로 $a=3$
따라서 $a_2\times a_6=(a_4)^2=(ar^3)^2=a^2\times(r^3)^2=3^2\times 4^2=144$

답 ③

19

조건 (가)에 의하여
$S_{2n-1}=S_1+(n-1)\times 3$
조건 (나)에 의하여
$S_{2n}=S_2+(n-1)\times 4$
$a_{11}=S_{11}-S_{10}=(S_1+15)-(S_2+16)=S_1-S_2-1$
$a_{12}=S_{12}-S_{11}=(S_2+20)-(S_1+15)=S_2-S_1+5$
이때 $a_{11}=a_{12}$이므로
$S_1-S_2-1=S_2-S_1+5$
$S_2-S_1=-3$
따라서
$a_7=S_7-S_6=(S_1+9)-(S_2+8)$
$=1-(S_2-S_1)$
$=1-(-3)=4$

답 ②

필수 유형 7

$\sum_{k=1}^{5}(3a_k+5)=55$에서
$3\sum_{k=1}^{5}a_k+25=55$
$\sum_{k=1}^{5}a_k=10$
$\sum_{k=1}^{5}(a_k+b_k)=32$에서
$\sum_{k=1}^{5}a_k+\sum_{k=1}^{5}b_k=32$
따라서 $\sum_{k=1}^{5}b_k=32-\sum_{k=1}^{5}a_k=32-10=22$

답 22

20

$\sum_{k=1}^{15}(2a_k-b_k)=17$에서

$\sum_{k=1}^{15}(2a_k-b_k)=2\sum_{k=1}^{15}a_k-\sum_{k=1}^{15}b_k=2\times12-\sum_{k=1}^{15}b_k=24-\sum_{k=1}^{15}b_k$

이므로 $24-\sum_{k=1}^{15}b_k=17$

$\sum_{k=1}^{15}b_k=24-17=7$

따라서 $\sum_{k=1}^{15}(b_k+1)=\sum_{k=1}^{15}b_k+\sum_{k=1}^{15}1=7+15=22$

답 ⑤

21

$\sum_{k=1}^{10}\{ka_{k+1}-(k+1)a_k\}=70$에서

$\sum_{k=1}^{10}\{ka_{k+1}-(k+1)a_k\}$

$=(a_2-2a_1)+(2a_3-3a_2)+(3a_4-4a_3)+\cdots+(10a_{11}-11a_{10})$

$=10a_{11}-2(a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{10})$

$=10a_{11}-2\sum_{k=1}^{10}a_k$

이고, $a_{11}=15$이므로

$10\times15-2\sum_{k=1}^{10}a_k=70$, $\sum_{k=1}^{10}a_k=40$

따라서

$$\sum_{k=1}^{10}a_k(a_k+6)-\sum_{k=1}^{10}(a_k+2)^2=\sum_{k=1}^{10}\{a_k(a_k+6)-(a_k+2)^2\}$$
$$=\sum_{k=1}^{10}(2a_k-4)=2\sum_{k=1}^{10}a_k-\sum_{k=1}^{10}4$$
$$=2\times40-4\times10=40$$

답 ①

22

$a_n+b_n=2$ …… ㉠

이므로

$(a_n)^2-(b_n)^2=(a_n+b_n)(a_n-b_n)=2(a_n-b_n)$

$\sum_{k=1}^{10}\{(a_k)^2-(b_k)^2\}=310$에서

$\sum_{k=1}^{10}\{(a_k)^2-(b_k)^2\}=\sum_{k=1}^{10}2(a_k-b_k)=2\sum_{k=1}^{10}(a_k-b_k)$

이므로 $2\sum_{k=1}^{10}(a_k-b_k)=310$

$\sum_{k=1}^{10}(a_k-b_k)=155$ …… ㉡

㉠에서 $b_k=-a_k+2$ …… ㉢

㉢을 ㉡에 대입하면

$\sum_{k=1}^{10}\{a_k-(-a_k+2)\}=\sum_{k=1}^{10}(2a_k-2)=2\sum_{k=1}^{10}a_k-20=155$

이므로 $\sum_{k=1}^{10}a_k=\frac{175}{2}$

따라서

$$\sum_{k=1}^{10}(2a_k-4b_k)=\sum_{k=1}^{10}\{2a_k-4(-a_k+2)\}=6\sum_{k=1}^{10}a_k-\sum_{k=1}^{10}8$$
$$=6\times\frac{175}{2}-80=445$$

답 ④

필수 유형 ❸

$a_n=2n^2-3n+1$이므로

$$\sum_{n=1}^{7}(a_n-n^2+n)=\sum_{n=1}^{7}(n^2-2n+1)=\sum_{n=1}^{7}(n-1)^2=\sum_{k=1}^{6}k^2$$
$$=\frac{6\times7\times13}{6}=91$$

답 91

23

$$\sum_{k=1}^{10}k(k^2+16)-\sum_{k=1}^{10}k^2(k+2)=\sum_{k=1}^{10}\{k(k^2+16)-k^2(k+2)\}$$
$$=\sum_{k=1}^{10}(16k-2k^2)$$
$$=16\times\frac{10\times11}{2}-2\times\frac{10\times11\times21}{6}$$
$$=880-770=110$$

답 ③

24

$\sum_{k=1}^{20}\left(\frac{1}{3}k+a\right)=\frac{1}{3}\sum_{k=1}^{20}k+\sum_{k=1}^{20}a=\frac{1}{3}\times\frac{20\times21}{2}+20a=70+20a$

$\sum_{k=1}^{12}k^2=\frac{12\times13\times25}{6}=650$

$\sum_{k=1}^{20}\left(\frac{1}{3}k+a\right)=\sum_{k=1}^{12}k^2$에서 $70+20a=650$

따라서 $a=29$

답 29

25

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$a_n=\frac{n^2-12n}{n}=n-12$, $b_n=-\frac{8}{n}$

따라서

$$\sum_{k=1}^{15}\frac{a_k}{b_k}=\sum_{k=1}^{15}\frac{k-12}{-\frac{8}{k}}=\sum_{k=1}^{15}\left(-\frac{k^2}{8}+\frac{3k}{2}\right)=-\frac{1}{8}\sum_{k=1}^{15}k^2+\frac{3}{2}\sum_{k=1}^{15}k$$
$$=-\frac{1}{8}\times\frac{15\times16\times31}{6}+\frac{3}{2}\times\frac{15\times16}{2}$$
$$=-155+180=25$$

답 ⑤

26

부등식 $\left(\frac{1}{2}\right)^{x-2n}\ge\left(\frac{1}{2}\right)^{-x-8}$에서 밑 $\frac{1}{2}$이 0보다 크고 1보다 작으므로

$x-2n\le-x-8$

$x\le n-4$

(i) $n\le4$일 때,

부등식 $x\le n-4$를 만족시키는 자연수 x는 존재하지 않으므로

$a_1=a_2=a_3=a_4=0$

(ii) $n\ge5$일 때,

부등식 $x\le n-4$를 만족시키는 자연수 x의 개수는 $n-4$이므로

$a_n=n-4$ $(n\ge5)$

(i), (ii)에서 $a_n=\begin{cases} 0 & (n\le 4) \\ n-4 & (n\ge 5)\end{cases}$

따라서 $\sum_{k=1}^{20}a_k=\sum_{k=5}^{20}(k-4)=\sum_{k=1}^{16}k=\frac{16\times17}{2}=136$

답 ②

필수 유형 ❾

등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항과 공차가 같으므로 $a_1=a$라 하면

$a_n=a+(n-1)\times a=an$

$\sum_{k=1}^{15}\frac{1}{\sqrt{a_k}+\sqrt{a_{k+1}}}=2$에서

$$\sum_{k=1}^{15}\frac{1}{\sqrt{a_k}+\sqrt{a_{k+1}}}=\sum_{k=1}^{15}\frac{1}{\sqrt{ak}+\sqrt{a(k+1)}}=\sum_{k=1}^{15}\frac{\sqrt{a(k+1)}-\sqrt{ak}}{a}$$
$$=\frac{1}{a}\sum_{k=1}^{15}\{\sqrt{a(k+1)}-\sqrt{ak}\}$$
$$=\frac{1}{a}\{(\sqrt{2a}-\sqrt{a})+(\sqrt{3a}-\sqrt{2a})+(\sqrt{4a}-\sqrt{3a})+\cdots+(\sqrt{16a}-\sqrt{15a})\}$$
$$=\frac{1}{a}(4\sqrt{a}-\sqrt{a})=\frac{3\sqrt{a}}{a}$$

이므로 $\frac{3}{\sqrt{a}}=2$

$a=\frac{9}{4}$

따라서 $a_4=4a=4\times\frac{9}{4}=9$

답 ④

27

등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d라 하면 $a_4=a_2+8$에서

$a_4-a_2=8$, $2d=8$

즉, $d=4$이므로 $a_{n+1}-a_n=4$

$$\sum_{k=1}^{15}\frac{1}{a_ka_{k+1}}=\frac{1}{4}\sum_{k=1}^{15}\frac{a_{k+1}-a_k}{a_ka_{k+1}}=\frac{1}{4}\sum_{k=1}^{15}\left(\frac{1}{a_k}-\frac{1}{a_{k+1}}\right)$$
$$=\frac{1}{4}\left\{\left(\frac{1}{a_1}-\frac{1}{a_2}\right)+\left(\frac{1}{a_2}-\frac{1}{a_3}\right)+\left(\frac{1}{a_3}-\frac{1}{a_4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{a_{15}}-\frac{1}{a_{16}}\right)\right\}$$
$$=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{a_1}-\frac{1}{a_{16}}\right)=\frac{1}{4}\left(1-\frac{1}{a_{16}}\right) \quad \cdots\cdots ㉠$$

한편, $a_{16}=a_1+15d=1+15\times4=61$ ...... ㉡

㉠, ㉡에서

$$\sum_{k=1}^{15}\frac{1}{a_ka_{k+1}}=\frac{1}{4}\left(1-\frac{1}{a_{16}}\right)=\frac{1}{4}\left(1-\frac{1}{61}\right)=\frac{15}{61}$$

답 ②

다른 풀이

등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d라 하면 $a_4=a_2+8$에서

$a_4-a_2=8$, $2d=8$

즉, $d=4$

이때 $a_1=1$이므로 $a_n=1+(n-1)\times4=4n-3$

따라서

$$\sum_{k=1}^{15}\frac{1}{a_ka_{k+1}}=\sum_{k=1}^{15}\frac{1}{(4k-3)(4k+1)}=\sum_{k=1}^{15}\frac{1}{4}\left(\frac{1}{4k-3}-\frac{1}{4k+1}\right)$$
$$=\frac{1}{4}\left\{\left(1-\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{9}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{57}-\frac{1}{61}\right)\right\}$$
$$=\frac{1}{4}\left(1-\frac{1}{61}\right)=\frac{15}{61}$$

28

등비수열 $\{a_n\}$의 공비가 2이므로

$a_{n+1}=2a_n$, $S_n=\frac{a_1(2^n-1)}{2-1}=a_1(2^n-1)$

이때 $a_n=\frac{1}{2}a_{n+1}=\frac{1}{2}(S_{n+1}-S_n)$이므로

$$\sum_{k=1}^{10}\frac{a_k}{S_{k+1}S_k}=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{10}\frac{S_{k+1}-S_k}{S_{k+1}S_k}=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{10}\left(\frac{1}{S_k}-\frac{1}{S_{k+1}}\right)$$
$$=\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{1}{S_1}-\frac{1}{S_2}\right)+\left(\frac{1}{S_2}-\frac{1}{S_3}\right)+\left(\frac{1}{S_3}-\frac{1}{S_4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{S_{10}}-\frac{1}{S_{11}}\right)\right\}$$
$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{S_1}-\frac{1}{S_{11}}\right)=\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{a_1}-\frac{1}{a_1(2^{11}-1)}\right\}$$
$$=\frac{2^{10}-1}{a_1(2^{11}-1)}$$

즉, $p=\frac{2^{10}-1}{a_1(2^{11}-1)}$에서 $pa_1=\frac{2^{10}-1}{2^{11}-1}$이므로

$1-pa_1=\frac{2^{10}}{2^{11}-1}$, $(2^{11}-1)(1-pa_1)=2^{10}$

따라서

$$\log_2(2^{11}-1)+\log_2(1-pa_1)=\log_2(2^{11}-1)(1-pa_1)$$
$$=\log_2 2^{10}=10$$

답 ④

29

점 $\mathrm{A}(0, -1)$에서 함수 $y=\frac{1}{n}x^2$의 그래프에 그은 접선의 기울기를 $m\ (m>0)$이라 하면 접선의 방정식은 $y=mx-1$이다.

$y=\frac{1}{n}x^2$, $y=mx-1$을 연립하면

$\frac{1}{n}x^2=mx-1$

$\frac{1}{n}x^2-mx+1=0$ ...... ㉠

이차방정식 ㉠의 판별식을 D라 하면 $D=0$이어야 하므로

$D=m^2-\frac{4}{n}=0$, $m^2=\frac{4}{n}$

$m>0$이므로 $m=\frac{2}{\sqrt{n}}$

따라서 접선의 방정식은 $y=\frac{2}{\sqrt{n}}x-1$이고

접점의 x좌표 x_n은 ㉠에서

$\frac{1}{n}{x_n}^2-\frac{2}{\sqrt{n}}x_n+1=0$

$\left(\frac{1}{\sqrt{n}}x_n-1\right)^2=0$이므로 $x_n=\sqrt{n}$

이때 $y_n=1$이므로 접점은 $\mathrm{P}(\sqrt{n}, 1)$이다.

따라서

$$\sum_{n=1}^{15}\frac{y_n}{x_n+x_{n+1}}$$
$$=\sum_{n=1}^{15}\frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}=\sum_{n=1}^{15}\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$$

$=\sum_{n=1}^{15}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$
$=(\sqrt{2}-\sqrt{1})+(\sqrt{3}-\sqrt{2})+(\sqrt{4}-\sqrt{3})+\cdots+(\sqrt{16}-\sqrt{15})$
$=-1+\sqrt{16}=-1+4=3$

답 ①

필수 유형 ⑩

$a_{n+1}+a_n=(-1)^{n+1}\times n$에서 $a_{n+1}=-a_n+(-1)^{n+1}\times n$
이때 $a_1=12$이므로
$a_2=-a_1+1=-11$, $a_3=-a_2-2=9$
$a_4=-a_3+3=-6$, $a_5=-a_4-4=2$
$a_6=-a_5+5=3$, $a_7=-a_6-6=-9$
$a_8=-a_7+7=16$
따라서 $a_k>a_1$을 만족시키는 자연수 k의 최솟값은 8이다.

답 ④

30

조건 (나)에서 $a_n=-\frac{1}{2}a_{n+1}$, 즉 $a_{n+1}=-2a_n$이므로
수열 $\{a_n\}$은 공비가 -2인 등비수열이다.
조건 (가)에서 $2\times(-2a_1)+4\times 4a_1=3$이므로 $a_1=\frac{1}{4}$
따라서 $a_7=\frac{1}{4}\times(-2)^6=16$

답 16

31

$a_1=2$이므로 $\log_2 2\times\log_2 a_2=1$에서
$\log_2 a_2=1$, 즉 $a_2=2$
$a_2=2$이므로 $\log_2 2\times\log_2 a_3=3$에서
$\log_2 a_3=3$, 즉 $a_3=8$
$a_3=2^3$이므로 $\log_2 2^3\times\log_2 a_4=5$에서
$\log_2 a_4=\frac{5}{3}$, 즉 $a_4=2^{\frac{5}{3}}$
$a_4=2^{\frac{5}{3}}$이므로 $\log_2 2^{\frac{5}{3}}\times\log_2 a_5=7$에서
$\log_2 a_5=\frac{21}{5}$, 즉 $a_5=2^{\frac{21}{5}}$
따라서 $\log_2\frac{a_5}{a_2}=\log_2\frac{2^{\frac{21}{5}}}{2}=\log_2 2^{\frac{16}{5}}=\frac{16}{5}$

답 ④

32

조건 (가)에서 $a_{n+1}=a_n+4$, 즉 $a_{n+1}-a_n=4$이므로 수열 $\{a_n\}$은 공차가 4인 등차수열이다.
조건 (나)에서 $\sum_{k=1}^{10}a_k=a_1+a_2$이므로 $\sum_{k=3}^{10}a_k=\frac{8(a_3+a_{10})}{2}=0$
$a_3+a_{10}=(a_1+8)+(a_1+36)=0$에서 $a_1=-22$
$a_2=-22+4=-18$
따라서 $\frac{a_1\times a_2}{4}=\frac{(-22)\times(-18)}{4}=99$

답 99

필수 유형 ⑪

(i) a_6이 3의 배수인 경우
$a_7=40$이므로 $\frac{a_6}{3}=a_7$에서 $a_6=3a_7=3\times 40=120$
$a_7=40$이 3의 배수가 아니므로 $a_8=a_6+a_7=120+40=160$
$a_8=160$이 3의 배수가 아니므로 $a_9=a_7+a_8=40+160=200$

(ii) $a_6=3k-2$ (k는 자연수)인 경우
$a_5+a_6=a_7$
$a_5=a_7-a_6=40-(3k-2)=42-3k=3(14-k)$
a_5는 자연수이므로 $3(14-k)>0$에서 $k<14$
한편, a_5는 3의 배수이므로 $a_6=\frac{a_5}{3}$
즉, $3k-2=\frac{3(14-k)}{3}$에서
$4k=16$, $k=4$
따라서 $a_6=3\times 4-2=10$이므로 $a_8=a_6+a_7=10+40=50$
$a_8=50$이 3의 배수가 아니므로 $a_9=a_7+a_8=40+50=90$

(iii) $a_6=3k-1$ (k는 자연수)인 경우
$a_5+a_6=a_7$
$a_5=a_7-a_6=40-(3k-1)=41-3k$
a_5는 자연수이므로 $41-3k>0$에서
$k<\frac{41}{3}$ …… ㉠
한편, a_5는 3의 배수가 아니므로
$a_4+a_5=a_6$에서
$a_4=a_6-a_5=(3k-1)-(41-3k)=6k-42=3(2k-14)$
a_4가 자연수이므로 $3(2k-14)>0$에서
$k>7$ …… ㉡
㉠, ㉡에서
$7<k<\frac{41}{3}$
한편, a_4는 3의 배수이므로 $a_5=\frac{a_4}{3}$
즉, $41-3k=\frac{3(2k-14)}{3}$에서
$5k=55$
$k=11$
따라서 $a_6=3\times 11-1=32$이므로
$a_8=a_6+a_7=32+40=72$
$a_8=72$가 3의 배수이므로
$a_9=\frac{a_8}{3}=\frac{72}{3}=24$

(i), (ii), (iii)에서 a_9의 최댓값 $M=200$이고 최솟값 $m=24$이다.
따라서 $M+m=200+24=224$

답 ⑤

33

$a_1=1$이므로 $a_2=2a_1=2\times 1=2$
$a_2=2$이므로 $a_3=2a_2=2\times 2=4$
$a_3=4$이므로 $a_4=2a_3=2\times 4=8$
$a_4=8$이므로 $a_5=2a_4=2\times 8=16$

$a_5=16$이므로 $a_6=a_5-10=16-10=6$

$a_6=6$이므로 $a_7=2a_6=2\times 6=12$

$a_7=12$이므로 $a_8=a_7-10=12-10=2$

$\vdots$

이므로

$a_n=a_{n+6}\ (n\geq 2)$

따라서

$\sum_{k=1}^{20}a_k=a_1+3\sum_{k=2}^{7}a_k+a_{20}=1+3(2+4+8+16+6+12)+2=147$

답 ⑤

34

$\sum_{k=1}^{24}a_k=\sum_{k=1}^{12}(a_{2k-1}+a_{2k})=\sum_{k=1}^{12}\left\{\frac{1}{2}(2k-1)+2\right\}=\sum_{k=1}^{12}k+\sum_{k=1}^{12}\frac{3}{2}$

$=\frac{12\times 13}{2}+\frac{3}{2}\times 12=96$ ...... ㉠

$\sum_{k=2}^{25}a_k=\sum_{k=1}^{12}(a_{2k}+a_{2k+1})=\sum_{k=1}^{12}\left(\frac{1}{2}\times 2k+2\right)=\sum_{k=1}^{12}k+\sum_{k=1}^{12}2$

$=\frac{12\times 13}{2}+2\times 12=102$ ...... ㉡

㉠, ㉡에서 $\sum_{k=2}^{25}a_k-\sum_{k=1}^{24}a_k=102-96=6$

즉, $a_{25}-a_1=6$

따라서 $a_1=a_{25}-6=20-6=14$

답 ④

35

(i) a_2가 홀수일 때, $a_3=6a_2=4$, $a_2=\frac{2}{3}$

a_2가 자연수가 아니므로 주어진 조건을 만족시키지 않는다.

(ii) a_2가 짝수일 때, $a_3=\frac{a_2}{2}+1=4$, $a_2=6$

① a_1이 홀수일 때, $a_2=6a_1=6$, $a_1=1$

이때 $a_2>a_1$을 만족시킨다.

② a_1이 짝수일 때, $a_2=\frac{a_1}{2}+1=6$, $a_1=10$

이때 $a_2>a_1$을 만족시키지 않는다.

(i), (ii)에서 $a_1=1$, $a_2=6$

한편, a_3이 짝수이므로 $a_4=\frac{a_3}{2}+1=\frac{4}{2}+1=3$

a_4가 홀수이므로 $a_5=6a_4=6\times 3=18$

a_5가 짝수이므로 $a_6=\frac{a_5}{2}+1=\frac{18}{2}+1=10$

a_6이 짝수이므로 $a_7=\frac{a_6}{2}+1=\frac{10}{2}+1=6$

이때

$a_1=1$

$a_2=a_7=a_{12}=a_{17}=\cdots=6$

$a_3=a_8=a_{13}=a_{18}=\cdots=4$

$a_4=a_9=a_{14}=a_{19}=\cdots=3$

$a_5=a_{10}=a_{15}=a_{20}=\cdots=18$

$a_6=a_{11}=a_{16}=a_{21}=\cdots=10$

따라서 $a_k<a_2$를 만족시키는 20 이하의 자연수 k의 값은 1, 3, 4, 8, 9, 13, 14, 18, 19이므로 그 개수는 9이다.

답 ③

필수 유형 ⑫

(i) $n=1$일 때, (좌변)$=3$, (우변)$=3$이므로 (*)이 성립한다.

(ii) $n=m$일 때, (*)이 성립한다고 가정하면

$\sum_{k=1}^{m}a_k=2^{m(m-1)}-(m+1)\times 2^{-m}$

이다. $n=m+1$일 때,

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{m+1}a_k&=\sum_{k=1}^{m}a_k+a_{m+1}\\&=2^{m(m+1)}-(m+1)\times 2^{-m}\\&\qquad+\{2^{2(m+1)}-1\}\times 2^{(m+1)m}+m\times 2^{-(m-1)}\\&=2^{m(m+1)}-(m+1)\times 2^{-m}\\&\qquad+(2^{2m+2}-1)\times\boxed{2^{m(m+1)}}+m\times 2^{-m-1}\\&=\boxed{2^{m(m+1)}}\times\boxed{2^{2m+2}}-\frac{m+2}{2}\times 2^{-m}\\&=2^{(m+1)(m+2)}-(m+2)\times 2^{-(m+1)}\end{aligned}$$

이다. 따라서 $n=m+1$일 때도 (*)이 성립한다.

(i), (ii)에 의하여 모든 자연수 n에 대하여

$\sum_{k=1}^{n}a_k=2^{n(n+1)}-(n+1)\times 2^{-n}$이다.

따라서 $f(m)=2^{m(m+1)}$, $g(m)=2^{2m+2}$이므로 $\frac{g(7)}{f(3)}=\frac{2^{16}}{2^{12}}=2^4=16$

답 ④

36

(i) $n=1$일 때,

(좌변)$=4$, (우변)$=4$이므로 (*)이 성립한다.

(ii) $n=k$일 때, (*)이 성립한다고 가정하면

$\frac{1\times 2^2}{2k^2-1}+\frac{5\times 4^2}{2k^2-1}+\frac{9\times 6^2}{2k^2-1}+\cdots+\frac{(4k-3)\times(2k)^2}{2k^2-1}$

$=2k(k+1)$

이다. 이때

$$\begin{aligned}&1\times 2^2+5\times 4^2+9\times 6^2+\\&\qquad\cdots+(4k-3)\times(2k)^2+(4k+1)\times(2k+2)^2\\&=\boxed{2k(k+1)(2k^2-1)}+(4k+1)\times(2k+2)^2\\&=2(k+1)(2k^3+8k^2+9k+2)\\&=2(k+1)\times(k+2)\times\{2\times(\boxed{k^2+2k})+1\}\\&=2(k+1)(k+2)\{2(k+1)^2-1\}\end{aligned}$$

이므로

$$\begin{aligned}&\frac{1\times 2^2}{2(k+1)^2-1}+\frac{5\times 4^2}{2(k+1)^2-1}+\frac{9\times 6^2}{2(k+1)^2-1}+\\&\qquad\cdots+\frac{(4k+1)\times\{2(k+1)\}^2}{2(k+1)^2-1}\\&=2(k+1)(k+2)\end{aligned}$$

이다. 따라서 $n=k+1$일 때도 (*)이 성립한다.

(i), (ii)에 의하여 모든 자연수 n에 대하여

$\frac{1\times 2^2}{2n^2-1}+\frac{5\times 4^2}{2n^2-1}+\frac{9\times 6^2}{2n^2-1}+\cdots+\frac{(4n-3)\times(2n)^2}{2n^2-1}=2n(n+1)$

이다.

이상에서 $f(k)=2k(k+1)(2k^2-1)$, $g(k)=k^2+2k$이므로

$\frac{f(5)}{g(3)}=\frac{10\times 6\times 49}{15}=196$

답 ②

04 함수의 극한과 연속

정답 본문 42~49쪽

필수 유형 ❶ ②	01 ②	02 ②	03 ④
필수 유형 ❷ ②	04 ④	05 ③	06 ④
	07 ②		
필수 유형 ❸ 30	08 ④	09 ①	10 4
	11 12		
필수 유형 ❹ ②	12 ④	13 14	14 ⑤
필수 유형 ❺ ②	15 ⑤	16 ②	17 ③
	18 ④	19 18	
필수 유형 ❻ ⑤	20 ④	21 ②	22 ③
	23 11	24 ③	
필수 유형 ❼ ④	25 ④	26 ④	27 38

필수 유형 ❶

주어진 그래프에서

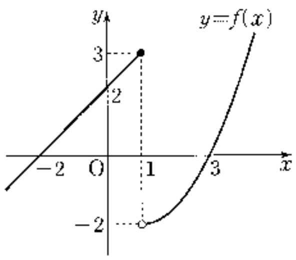
$\lim_{x\to0-}f(x)=-2$, $\lim_{x\to1+}f(x)=1$이므로

$\lim_{x\to0-}f(x)+\lim_{x\to1+}f(x)=-2+1=-1$

답 ②

01

함수 $y=f(x)$의 그래프는 그림과 같다.



위의 그래프에서

$\lim_{x\to1-}f(x)=3$, $\lim_{x\to1+}f(x)=-2$이므로

$\lim_{x\to1-}f(x)+\lim_{x\to1+}f(x)=3+(-2)=1$

답 ②

다른 풀이

$\lim_{x\to1-}f(x)=\lim_{x\to1-}(x+2)=3$

$\lim_{x\to1+}f(x)=\lim_{x\to1+}\left\{\frac{1}{2}(x-1)^2-2\right\}=-2$

따라서 $\lim_{x\to1-}f(x)+\lim_{x\to1+}f(x)=3+(-2)=1$

02

함수 $y=f(x)-2$의 그래프는 함수 $y=f(x)$의 그래프를 y축의 방향으로 -2만큼 평행이동한 것과 같으므로

$\lim_{x\to1+}\{f(x)-2\}=0$

함수 $y=f(x-1)$의 그래프는 함수 $y=f(x)$의 그래프를 x축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것과 같으므로

$\lim_{x\to2-}f(x-1)=\lim_{x\to1-}f(x)=-2$

따라서 $\lim_{x\to1+}\{f(x)-2\}+\lim_{x\to2-}f(x-1)=0+(-2)=-2$

답 ②

03

$\lim_{x\to1-}f(x)=0$, $\lim_{x\to-1+}g(x)=1$, $\lim_{x\to-1}g(x)=1$

이므로 $0+1=f(k)+1$에서 $f(k)=0$

따라서 그림에서 $f(1)=0$이므로 $k=1$이다.

답 ④

필수 유형 ❷

$$\lim_{x\to-1}\frac{x^2+9x+8}{x+1}=\lim_{x\to-1}\frac{(x+1)(x+8)}{x+1}=\lim_{x\to-1}(x+8)$$
$$=-1+8=7$$

답 ②

04

$$\lim_{x\to0}\frac{10x-x^2}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{x(10-x)(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})}{(\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x})(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{x(10-x)(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})}{(1+x)-(1-x)}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{x(10-x)(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})}{2x}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{(10-x)(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})}{2}$$
$$=\frac{10\times(1+1)}{2}=10$$

답 ④

05

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x(2x+3)}{3x^2+2x+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{2+\frac{3}{x}}{3+\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}}=\frac{2+0}{3+0+0}=\frac{2}{3}$$

답 ③

06

$$\lim_{x\to\infty}\{\sqrt{x(x+k)}-x\}$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\{\sqrt{x(x+k)}-x\}\{\sqrt{x(x+k)}+x\}}{\sqrt{x(x+k)}+x}$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{kx}{\sqrt{x^2+kx}+x}=\lim_{x\to\infty}\frac{k}{\sqrt{1+\frac{k}{x}}+1}=\frac{k}{1+1}=\frac{k}{2}=2$$

에서 $k=4$

답 ④

07

$\frac{x^2-2}{6x} \le f(x) \le \frac{x^2+2}{6x}$에서 $x>0$이므로

$$\frac{x^2-2}{3x^2} \le \frac{2f(x)}{x} \le \frac{x^2+2}{3x^2}$$

이때 $\lim_{x\to\infty} \frac{x^2-2}{3x^2} = \lim_{x\to\infty}\frac{1-\frac{2}{x^2}}{3} = \frac{1}{3}$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+2}{3x^2} = \lim_{x\to\infty}\frac{1+\frac{2}{x^2}}{3} = \frac{1}{3}$$

따라서 함수의 극한의 대소 관계에 의하여 $\lim_{x\to\infty}\frac{2f(x)}{x} = \frac{1}{3}$

답 ②

필수 유형 ❸

$$\lim_{x\to1}(2x^2+1)f(x) = \lim_{x\to1}\left\{\frac{2x^2+1}{x+1}\times(x+1)f(x)\right\}$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{2x^2+1}{x+1}\times\lim_{x\to1}(x+1)f(x)$$

$$=\frac{2+1}{1+1}\times1=\frac{3}{2}$$

에서 $a=\frac{3}{2}$

따라서 $20a=20\times\frac{3}{2}=30$

답 30

다른 풀이

$$a=\lim_{x\to1}(2x^2+1)f(x)=\frac{\lim_{x\to1}(2x^2+1)f(x)}{\lim_{x\to1}(x+1)f(x)}=\lim_{x\to1}\frac{(2x^2+1)f(x)}{(x+1)f(x)}$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{2x^2+1}{x+1}=\frac{2+1}{1+1}=\frac{3}{2}$$

따라서 $20a=20\times\frac{3}{2}=30$

08

$\lim_{x\to0}g(x)=\lim_{x\to0}[\{g(x)-2\}+2]$에서

$$\lim_{x\to0}\{g(x)-2\}=\lim_{x\to0}\frac{f(x)\{g(x)-2\}}{f(x)}=\lim_{x\to0}\frac{f(x)g(x)-2f(x)}{f(x)}$$

$$=\frac{\lim_{x\to0}\{f(x)g(x)-2f(x)\}}{\lim_{x\to0}f(x)}=\frac{6}{2}=3$$

따라서

$$\lim_{x\to0}g(x)=\lim_{x\to0}[\{g(x)-2\}+2]=\lim_{x\to0}\{g(x)-2\}+\lim_{x\to0}2$$

$$=3+2=5$$

답 ④

09

$$\lim_{x\to1}\frac{x^3-1}{xf(x)}=\lim_{x\to1}\left\{\frac{x^2-1}{f(x)}\times\frac{x^3-1}{x(x^2-1)}\right\}$$

$$=\lim_{x\to1}\left\{\frac{x^2-1}{f(x)}\times\frac{(x-1)(x^2+x+1)}{x(x-1)(x+1)}\right\}$$

$$=\lim_{x\to1}\left\{\frac{x^2-1}{f(x)}\times\frac{x^2+x+1}{x(x+1)}\right\}$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{1}{\frac{f(x)}{x^2-1}}\times\lim_{x\to1}\frac{x^2+x+1}{x(x+1)}=\frac{1}{\frac{3}{2}}\times\frac{3}{2}=1$$

답 ①

10

$f(x)=ax+b$ (a, b는 상수, $a\neq0$)이라 하면

$\lim_{x\to0}f(x)=\lim_{x\to0}(ax+b)=b=2$

$$\lim_{x\to1}\frac{3(x^2-1)}{(x-1)f(x)}=\lim_{x\to1}\frac{3(x-1)(x+1)}{(x-1)(ax+2)}=\lim_{x\to1}\frac{3(x+1)}{ax+2}$$

$$=\frac{3\lim_{x\to1}(x+1)}{\lim_{x\to1}(ax+2)}=\frac{3(1+1)}{a+2}=\frac{6}{a+2}=2$$

에서 $a+2=3$이므로 $a=1$

따라서 $f(x)=x+2$이므로 $f(2)=2+2=4$

답 4

11

$f(x)$가 다항함수이므로

$\lim_{x\to1-}f(x)=\lim_{x\to1+}f(x)=\lim_{x\to1}f(x)$

조건 (가)에서

$$\lim_{x\to1-}f(x)+\lim_{x\to1+}2f(x)=\lim_{x\to1}f(x)+2\lim_{x\to1}f(x)=3\lim_{x\to1}f(x)=6$$

이므로 $\lim_{x\to1}f(x)=2$

조건 (나)에서

$$\lim_{x\to1}\{f(x)g(x)+2xf(x)\}=\lim_{x\to1}f(x)\{g(x)+2x\}$$

$$=\lim_{x\to1}f(x)\times\left\{\lim_{x\to1}g(x)+\lim_{x\to1}2x\right\}$$

$$=2\left\{\lim_{x\to1}g(x)+2\right\}=10$$

이므로 $\lim_{x\to1}g(x)=3$

따라서

$$\lim_{x\to1}\{3f(x)+2g(x)\}=3\lim_{x\to1}f(x)+2\lim_{x\to1}g(x)=3\times2+2\times3=12$$

답 12

다른 풀이

$f(x)$, $g(x)$가 다항함수이므로 $x=1$에서 연속이다.

$\lim_{x\to1-}f(x)=\lim_{x\to1+}f(x)=\lim_{x\to1}f(x)=f(1)$

$\lim_{x\to1}g(x)=g(1)$

조건 (가)에서 $f(1)+2f(1)=6$이므로 $f(1)=2$

조건 (나)에서 $f(1)g(1)+2f(1)=10$이므로

$2g(1)+4=10$, $g(1)=3$

따라서 $\lim_{x\to1}\{3f(x)+2g(x)\}=3f(1)+2g(1)=3\times2+2\times3=12$

필수 유형 ❹

조건 (가)에서 다항함수 $f(x)$는

$f(x)=2x^2+ax+b$ (a, b는 상수)로 놓을 수 있다.

조건 (나)에서 $x\to0$일 때 극한값이 존재하고 (분모) → 0이므로

(분자) → 0이어야 한다.

즉, $\lim_{x\to0}f(x)=\lim_{x\to0}(2x^2+ax+b)=b=0$에서

$f(x)=2x^2+ax$이므로

$$\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to0}\frac{x(2x+a)}{x}=\lim_{x\to0}(2x+a)=a=3$$

따라서 $f(x)=2x^2+3x$이므로 $f(2)=14$

답 ②

12

$$\lim_{x\to2}\frac{\sqrt{x+a}-b}{x^2-4}=\frac{1}{16}\quad\cdots\cdots ㉠$$

에서 $x\to2$일 때 극한값이 존재하고 (분모) $\to0$이므로 (분자) $\to0$이어야 한다.

즉, $\lim_{x\to2}(\sqrt{x+a}-b)=0$에서 $\sqrt{2+a}-b=0$이므로

$b=\sqrt{2+a}\quad\cdots\cdots ㉡$

㉡을 ㉠에 대입하면

$$\begin{aligned}\lim_{x\to2}\frac{\sqrt{x+a}-\sqrt{2+a}}{x^2-4}&=\lim_{x\to2}\frac{(\sqrt{x+a}-\sqrt{2+a})(\sqrt{x+a}+\sqrt{2+a})}{(x^2-4)(\sqrt{x+a}+\sqrt{2+a})}\\&=\lim_{x\to2}\frac{x-2}{(x-2)(x+2)(\sqrt{x+a}+\sqrt{2+a})}\\&=\lim_{x\to2}\frac{1}{(x+2)(\sqrt{x+a}+\sqrt{2+a})}\\&=\frac{1}{(2+2)(\sqrt{2+a}+\sqrt{2+a})}\\&=\frac{1}{8\sqrt{2+a}}=\frac{1}{16}\end{aligned}$$

에서 $\sqrt{2+a}=2$이므로 $a=2$

이것을 ㉡에 대입하면 $b=2$

따라서 $a+b=2+2=4$

답 ④

13

$\lim_{x\to1}\frac{(x-1)f(x)}{(x+a)(x+b)}=\frac{1}{4}$에서 $x\to1$일 때 0이 아닌 극한값이 존재하고 (분자) $\to0$이므로 (분모) $\to0$이어야 한다.

즉, $\lim_{x\to1}\{(x+a)(x+b)\}=(1+a)(1+b)=0$에서

$1+a=0$ 또는 $1+b=0$, 즉 $a=-1$ 또는 $b=-1$

한편, 다항함수 $y=f(x)$의 그래프가 점 $(1, 4)$를 지나므로 $f(1)=4$

$a=-1$일 때,

$$\lim_{x\to1}\frac{(x-1)f(x)}{(x-1)(x+b)}=\lim_{x\to1}\frac{f(x)}{x+b}=\frac{f(1)}{1+b}=\frac{4}{1+b}=\frac{1}{4}\text{에서}$$

$b=15$

같은 방법으로 $b=-1$일 때, $a=15$

따라서 $a+b=-1+15=14$

답 14

참고

$b=-1$일 때,

$$\lim_{x\to1}\frac{(x-1)f(x)}{(x+a)(x-1)}=\lim_{x\to1}\frac{f(x)}{x+a}=\frac{f(1)}{1+a}=\frac{4}{1+a}=\frac{1}{4}\text{에서}$$

$a=15$

14

조건 (가)에서 $f(x)-ax^2$은 일차항의 계수가 4인 일차함수이므로

$f(x)-ax^2=4x+b$ (b는 상수)라 하자.

조건 (나)에서 $x\to-2$일 때, 극한값이 존재하고 (분모) $\to0$이므로 (분자) $\to0$이어야 한다. 즉,

$\lim_{x\to-2}f(x)=\lim_{x\to-2}(ax^2+4x+b)=4a-8+b=0$

에서 $b=-4a+8\quad\cdots\cdots ㉠$

$$\begin{aligned}\lim_{x\to-2}\frac{f(x)}{x+2}&=\lim_{x\to-2}\frac{ax^2+4x-4a+8}{x+2}\\&=\lim_{x\to-2}\frac{(x+2)(ax-2a+4)}{x+2}\\&=\lim_{x\to-2}(ax-2a+4)=-4a+4=4\end{aligned}$$

에서 $a=0$

이것을 ㉠에 대입하면 $b=8$

따라서 $f(x)=4x+8$이므로

$f(1)=4+8=12$

답 ⑤

필수 유형 ❺

두 점 A, B의 좌표를 각각 $A(a, a^2)$, $B(b, b^2)$이라 하면 x에 대한 이차방정식 $x^2-x-t=0$의 두 근이 a, b이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$a+b=1$, $ab=-t$

$\overline{AH}=a-b=\sqrt{(a+b)^2-4ab}=\sqrt{1+4t}$

한편, 점 C의 좌표는 $C(-a, a^2)$이므로

$\overline{CH}=b-(-a)=a+b=1$

따라서

$$\begin{aligned}\lim_{t\to0+}\frac{\overline{AH}-\overline{CH}}{t}&=\lim_{t\to0+}\frac{\sqrt{1+4t}-1}{t}\\&=\lim_{t\to0+}\frac{(\sqrt{1+4t}-1)(\sqrt{1+4t}+1)}{t(\sqrt{1+4t}+1)}\\&=\lim_{t\to0+}\frac{4t}{t(\sqrt{1+4t}+1)}\\&=\lim_{t\to0+}\frac{4}{\sqrt{1+4t}+1}\\&=\frac{4}{1+1}=2\end{aligned}$$

답 ③

15

사각형 PQCR가 평행사변형이므로

$\overline{DR}=\overline{PR}-\overline{PD}=\overline{QC}-\overline{PD}=1-t$

즉, 직각삼각형 ABR에서

$\overline{AB}=3$, $\overline{AR}=3+(1-t)=4-t$

이므로

$\overline{BR}=\sqrt{3^2+(4-t)^2}=\sqrt{t^2-8t+25}$

따라서

$$\lim_{t\to0+}\frac{\overline{\mathrm{PD}}}{5-\overline{\mathrm{BR}}}=\lim_{t\to0+}\frac{t}{5-\sqrt{t^2-8t+25}}=\lim_{t\to0+}\frac{t(5+\sqrt{t^2-8t+25})}{25-(t^2-8t+25)}$$
$$=\lim_{t\to0+}\frac{t(5+\sqrt{t^2-8t+25})}{t(8-t)}=\lim_{t\to0+}\frac{5+\sqrt{t^2-8t+25}}{8-t}$$
$$=\frac{5+5}{8}=\frac{5}{4}$$

답 ⑤

16

두 점 $\mathrm{P}(t,\ t^2)$, $\mathrm{A}(4,\ 0)$에 대하여 선분 PA의 중점을 M이라 하면

점 M의 좌표는 $\left(\frac{t+4}{2},\ \frac{t^2}{2}\right)$

직선 PA의 기울기는 $\frac{t^2}{t-4}$이므로 이 직선에 수직인 직선의 기울기는

$-\frac{t-4}{t^2}$이다.

즉, 선분 PA의 수직이등분선의 방정식은

$$y-\frac{t^2}{2}=-\frac{t-4}{t^2}\left(x-\frac{t+4}{2}\right)$$

이 직선의 x절편이 $f(t)$이므로

$$0-\frac{t^2}{2}=-\frac{t-4}{t^2}\left\{f(t)-\frac{t+4}{2}\right\}$$

$$f(t)-\frac{t+4}{2}=\frac{t^4}{2(t-4)}$$

$$f(t)=\frac{t^4}{2(t-4)}+\frac{t+4}{2}=\frac{t^4+t^2-16}{2(t-4)}$$

따라서 $\lim_{t\to\infty}\frac{f(t)}{t^3}=\lim_{t\to\infty}\frac{t^4+t^2-16}{2t^3(t-4)}=\lim_{t\to\infty}\frac{1+\frac{1}{t^2}-\frac{16}{t^4}}{2\left(1-\frac{4}{t}\right)}=\frac{1}{2}$

답 ②

17

$4x^2=t\ (x>0)$에서 $x=\frac{\sqrt{t}}{2}$이므로 점 A의 좌표는 $\left(\frac{\sqrt{t}}{2},\ t\right)$이다.

또 $x^2=t\ (x>0)$에서 $x=\sqrt{t}$이므로 점 B의 좌표는 $(\sqrt{t},\ t)$이다.

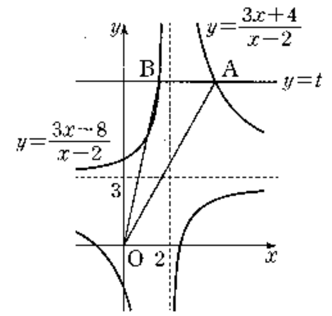
따라서 $f(t)=\sqrt{\frac{t}{4}+t^2}$, $g(t)=\sqrt{t+t^2}$이므로

$$\lim_{t\to\infty}\{g(t)-f(t)\}=\lim_{t\to\infty}\left(\sqrt{t+t^2}-\sqrt{\frac{t}{4}+t^2}\right)$$
$$=\lim_{t\to\infty}\frac{(t+t^2)-\left(\frac{t}{4}+t^2\right)}{\sqrt{t+t^2}+\sqrt{\frac{t}{4}+t^2}}$$
$$=\lim_{t\to\infty}\frac{\frac{3}{4}t}{\sqrt{t+t^2}+\sqrt{\frac{t}{4}+t^2}}$$
$$=\lim_{t\to\infty}\frac{\frac{3}{4}}{\sqrt{\frac{1}{t}+1}+\sqrt{\frac{1}{4t}+1}}$$
$$=\frac{\frac{3}{4}}{1+1}=\frac{3}{8}$$

답 ③

18

두 함수 $y=\frac{3x+4}{x-2}$, $y=\frac{3x-8}{x-2}$의 그래프는 그림과 같다.



$\frac{3x+4}{x-2}=t$에서 $x=\frac{2t+4}{t-3}$이므로 점 A의 좌표는 $\left(\frac{2t+4}{t-3},\ t\right)$이다.

$\frac{3x-8}{x-2}=t$에서 $x=\frac{2t-8}{t-3}$이므로 점 B의 좌표는 $\left(\frac{2t-8}{t-3},\ t\right)$이다.

즉, $\overline{\mathrm{AB}}=\frac{2t+4}{t-3}-\frac{2t-8}{t-3}=\frac{12}{t-3}$이므로 삼각형 OAB의 넓이 $f(t)$는

$$f(t)=\frac{1}{2}\times t\times\frac{12}{t-3}=\frac{6t}{t-3}$$

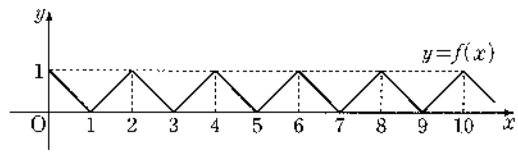
따라서

$$\lim_{t\to3+}(t^2-4t+3)f(t)=\lim_{t\to3+}\frac{6t(t^2-4t+3)}{t-3}$$
$$=\lim_{t\to3+}\frac{6t(t-1)(t-3)}{t-3}=\lim_{t\to3+}6t(t-1)$$
$$=6\times3\times2=36$$

답 ④

19

조건 (가), (나)에 의하여 함수 $y=f(x)$의 그래프는 그림과 같다.



이때 직선 $y=\frac{x}{t}$는 원점을 지나고 기울기가 $\frac{1}{t}$인 직선이므로

$0<t<2$일 때, $g(t)=1$

자연수 n에 대하여 $t=2n$일 때, $g(t)=2n$

$2n<t<2n+2$일 때, $g(t)=2n+1$

즉, $2<t<4$일 때 $g(t)=3$이므로 $\lim_{t\to4-}g(t)=3$

$8<t<10$일 때 $g(t)=9$이므로 $\lim_{t\to8+}g(t)=9$

따라서 $\lim_{t\to4-}g(t)+g(6)+\lim_{t\to8+}g(t)=3+6+9=18$

답 18

필수 유형 6

함수 $|f(x)|$가 실수 전체의 집합에서 연속이므로 $x=-1$과 $x=3$에서도 연속이어야 한다.

(i) 함수 $|f(x)|$가 $x=-1$에서 연속이므로

$$\lim_{x\to -1-}|f(x)|=\lim_{x\to -1+}|f(x)|=|f(-1)|$$

$$\lim_{x\to -1-}|x+a|=\lim_{x\to -1+}|x|=|-1|$$

$$|-1+a|=|-1|=|-1|$$

$$|-1+a|=1$$

$a>0$이므로

$a=2$

(ii) 함수 $|f(x)|$가 $x=3$에서 연속이므로

$$\lim_{x\to 3-}|f(x)|=\lim_{x\to 3+}|f(x)|=|f(3)|$$

$$\lim_{x\to 3-}|x|=\lim_{x\to 3+}|bx-2|=|3b-2|$$

$$|3|=|3b-2|=|3b-2|$$

$$|3b-2|=3$$

$b>0$이므로

$b=\frac{5}{3}$

따라서 $a+b=2+\frac{5}{3}=\frac{11}{3}$

답 ⑤

20

함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이므로 $x=2$에서도 연속이어야 한다.

즉, $\lim_{x\to 2-}f(x)=\lim_{x\to 2+}f(x)=f(2)$

$$\lim_{x\to 2-}(x-a)=\lim_{x\to 2+}(ax+3)=2a+3$$

$2-a=2a+3$

$3a=-1$

$a=-\frac{1}{3}$

따라서 $f(x)=\begin{cases} x+\frac{1}{3} & (x<2) \\ -\frac{1}{3}x+3 & (x\geq 2)\end{cases}$ 이므로

$$f(1)+f(3)=\left(1+\frac{1}{3}\right)+(-1+3)=\frac{10}{3}$$

답 ④

21

함수 $f(x)$가 $x=1$에서 연속이므로 $\lim_{x\to 1}f(x)=f(1)$이어야 한다.

따라서

$$a=\lim_{x\to 1}f(x)=\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x^2+3}-2}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{(x-1)(\sqrt{x^2+3}+2)}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{x+1}{\sqrt{x^2+3}+2}=\frac{2}{2+2}=\frac{1}{2}$$

답 ②

22

함수 $g(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이므로 $x=0$과 $x=2$에서도 연속이어야 한다.

(i) 함수 $g(x)$가 $x=0$에서 연속이므로

$$\lim_{x\to 0-}g(x)=\lim_{x\to 0+}g(x)=g(0)$$

이때 $\lim_{x\to 0+}g(x)=g(0)=b$이므로 $\lim_{x\to 0-}g(x)=b$이어야 한다.

즉, $\lim_{x\to 0-}\frac{x^2+x+a}{x^2-x}=b$에서 $x\to 0-$일 때 (분모) $\to 0$이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\to 0$이어야 한다.

그러므로 $a=0$이고

$$b=\lim_{x\to 0-}\frac{x^2+x}{x^2-x}=\lim_{x\to 0-}\frac{x(x+1)}{x(x-1)}=\lim_{x\to 0-}\frac{x+1}{x-1}=-1$$

(ii) 함수 $g(x)$가 $x=2$에서 연속이므로

$$\lim_{x\to 2-}g(x)=\lim_{x\to 2+}g(x)=g(2)$$

$$\lim_{x\to 2-}(x-1)=\lim_{x\to 2+}f(x)=f(2)$$

즉, $f(2)=1$

한편, 함수 $f(x)$는 이차항의 계수가 1인 이차함수이고, $x\geq 2$에서 최솟값이 0이므로

$f(x)=(x-k)^2$ (단, k는 2보다 큰 상수)

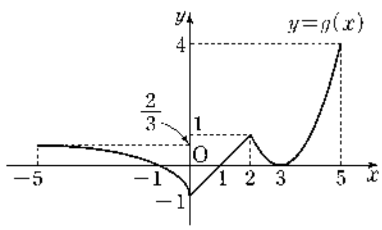
로 놓을 수 있다. 이때 $f(2)=1$이므로

$(2-k)^2=1$

$k>2$이므로 $k=3$

그러므로 $g(x)=\begin{cases} \frac{x+1}{x-1} & (x<0) \\ x-1 & (0\leq x<2) \\ (x-3)^2 & (x\geq 2)\end{cases}$

이고 닫힌구간 $[-5,\ 5]$에서 함수 $y=g(x)$의 그래프는 그림과 같다.



따라서 닫힌구간 $[-5,\ 5]$에서 함수 $g(x)$의 최댓값은 4, 최솟값은 -1이므로 구하는 합은

$4+(-1)=3$

답 ③

23

함수 $g(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이므로 $x=1$, $x=3$에서도 연속이어야 한다.

즉, $\lim_{x\to 1-}g(x)=\lim_{x\to 1+}g(x)=g(1)$에서

$\frac{1}{2}=\frac{1}{f(1)}$, $f(1)=2$ …… ㉠

또 $\lim_{x\to 3+}g(x)=\lim_{x\to 3-}g(x)=g(3)$에서

$\frac{1}{f(3)}=\frac{1}{6}$, $f(3)=6$ …… ㉡

㉠, ㉡에 의하여

$f(x)-2x=a(x-1)(x-3)$ (단, a는 0보다 큰 상수)

로 놓을 수 있다. 즉,

$$f(x)=ax^2-2(2a-1)x+3a$$

$$=a\left(x-\frac{2a-1}{a}\right)^2-\frac{a^2-4a+1}{a} \quad \cdots\cdots ㉢$$

이고 함수 $g(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이려면 $1\le x\le 3$에서 $f(x)\ne 0$이어야 한다.

(ⅰ) $\dfrac{2a-1}{a}\le 1$인 경우

$2a-1\le a$, $a\le 1$

즉, $0<a\le 1$인 경우 $f(1)=2>0$이므로 조건을 만족시킨다.

(ⅱ) $\dfrac{2a-1}{a}\ge 3$인 경우

$2a-1\ge 3a$

$a\le -1$이므로 조건을 만족시키는 양수 a는 존재하지 않는다.

(ⅲ) $1<\dfrac{2a-1}{a}<3$, 즉 $a>1$인 경우

ⓒ에서 $-\dfrac{a^2-4a+1}{a}>0$이어야 하므로

$a^2-4a+1<0$, $2-\sqrt{3}<a<2+\sqrt{3}$

즉, $1<a<2+\sqrt{3}$

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에 의하여 조건을 만족시키는 양수 a의 값의 범위는 $0<a<2+\sqrt{3}$이고, $k=f(0)=3a$이므로

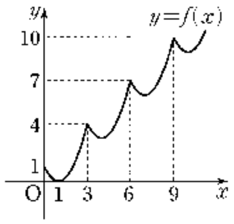
$0<k<6+3\sqrt{3}$

이때 $11<6+3\sqrt{3}<12$이므로 조건을 만족시키는 자연수 k의 최댓값은 11이다.

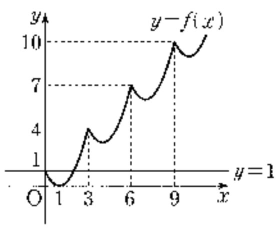
답 11

24

조건 (가), (나)에 의하여 함수 $y=f(x)$의 그래프는 그림과 같다.



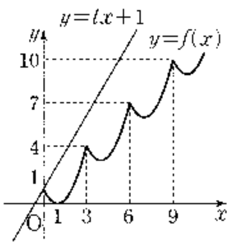
ㄱ. $t=0$일 때, 직선 $y=1$은 그림과 같이 함수 $y=f(x)$의 그래프와 두 점에서 만나므로 $g(0)=2$ (참)



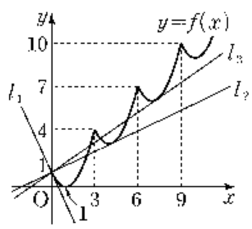
ㄴ. $t>1$일 때, 직선 $y=tx+1$은 그림과 같이 함수 $y=f(x)$의 그래프와 점 $(0, 1)$에서만 만난다.

즉, $t>1$일 때, $g(t)=1$이므로

$\lim\limits_{t\to 1+} g(t)=1$ (거짓)



ㄷ. 그림과 같이 점 $(0, 1)$에서 곡선 $y=(x-1)^2$에 접하는 직선을 l_1, $3<x<6$인 점에서 곡선 $y=f(x)$에 접하고 점 $(0, 1)$을 지나는 직선을 l_2, $6<x<9$인 점에서 곡선 $y=f(x)$에 접하고 점 $(0, 1)$을 지나는 직선을 l_3, …이라 하고, 자연수 n에 대하여 직선 l_n의 기울기를 t_n이라 하자.



$(x-1)^2=tx+1$에서 $x^2-(t+2)x=0$이므로

$t=-2$일 때 직선 $y=-2x+1$은 점 $(0, 1)$에서 곡선 $y=(x-1)^2$에 접한다.

즉, $t_1=-2$이고 $t\le -2$일 때 $g(t)=1$, $-2<t<t_2$인 때 $g(t)=2$이므로 함수 $g(t)$는 $t=-2$에서 불연속이고 $a_1=-2$이다.

또 $g(t_2)=3$이고 $t_2<t<t_3$일 때 $g(t)=4$이므로 함수 $g(t)$는 $t=t_2$에서 불연속이고 $a_2=t_2$이다.

마찬가지 방법으로 하면 $a_3=t_3$임을 알 수 있다.

즉, 직선 $y=a_3x+1$이 $6<x<9$인 점에서 곡선 $y=(x-7)^2+6$에 접하므로 이차방정식

$(x-7)^2+6=a_3x+1$, 즉 $x^2-(a_3+14)x+54=0$의 판별식을 D라 하면

$D=(a_3+14)^2-4\times 54=0$

$(a_3+14)^2=4\times 9\times 6$

$a_3>0$이므로 $a_3+14=6\sqrt{6}$

그러므로 $a_3=-14+6\sqrt{6}$ (참)

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

답 ③

필수 유형 ❼

$g(x)=\{f(x)\}^2$이라 하자.

함수 $g(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이려면 $x=a$에서 연속이어야 한다.

즉, $\lim\limits_{x\to a-} g(x)=\lim\limits_{x\to a+} g(x)=g(a)$이어야 한다.

이때

$\lim\limits_{x\to a-} g(x)=\lim\limits_{x\to a-} \{f(x)\}^2=\lim\limits_{x\to a-} (-2x+6)^2=(-2a+6)^2$,

$\lim\limits_{x\to a+} g(x)=\lim\limits_{x\to a+} (2x-a)^2=a^2$,

$g(a)=\{f(a)\}^2=a^2$이므로

$(-2a+6)^2=a^2$에서 $a^2-8a+12=0$

$(a-2)(a-6)=0$

$a=2$ 또는 $a=6$

따라서 조건을 만족시키는 모든 상수 a의 값의 합은

$2+6=8$

답 ④

25

함수 $f(x)$가 $x=1$, $x=3$에서만 불연속이고, 함수 $g(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이므로 함수 $h(x)$가 $x=1$, $x=3$에서 연속이면 닫힌구간 $[0, 4]$에서 연속이다.

함수 $h(x)$가 $x=1$에서 연속이어야 하므로

$\lim\limits_{x\to 1-} h(x)=\lim\limits_{x\to 1+} h(x)=h(1)$

$\lim\limits_{x\to 1-} f(x)g(x)=\lim\limits_{x\to 1+} f(x)g(x)=f(1)g(1)$

$1\times g(1)=0\times g(1)=1\times g(1)$

즉, $g(1)=0$ …… ㉠

또 함수 $h(x)$가 $x=3$에서 연속이어야 하므로

$\lim\limits_{x\to 3-} h(x)=\lim\limits_{x\to 3+} h(x)=h(3)$

$\lim_{x\to3-} f(x)g(x)=\lim_{x\to3-} f(x)g(x)=f(3)g(3)$

$2\times g(3)=0\times g(3)=2\times g(3)$

즉, $g(3)=0$ ⋯⋯ ㉡

㉠, ㉡에 의하여

$g(x)=a(x-1)(x-3)$ (단, a는 0이 아닌 상수)

로 놓을 수 있다.

이때 $h(0)-h(4)=-6$이므로 $2\times g(0)-1\times g(4)=-6$

$6a-3a=-6$

$a=-2$

즉,

$g(x)=-2(x-1)(x-3)=-2x^2+8x-6$

$\quad=-2(x-2)^2+2$

이므로 함수 $g(x)$는 $x=2$에서 최댓값 2를 갖는다.

따라서 $k=2$, $M=2$이므로 $k+M=2+2=4$

답 ④

26

(i) $x<0$일 때

$g(x)=x+3x+4=4x+4$이므로 $x\neq-1$일 때

$h(x)=\frac{x^2-x-2}{4x+4}=\frac{(x+1)(x-2)}{4(x+1)}=\frac{x-2}{4}$

그러므로 $x<0$에서 함수 $h(x)$가 연속이려면

$h(-1)=\lim_{x\to-1} h(x)=\lim_{x\to-1}\frac{x-2}{4}=-\frac{3}{4}$

이어야 한다.

즉, $a=-\frac{3}{4}$

(ii) $x\geq0$일 때

$g(x)=x-3x+4=-2x+4$이므로 $x\neq2$일 때

$h(x)=\frac{x^2-x-2}{-2x+4}=\frac{(x+1)(x-2)}{-2(x-2)}=-\frac{x+1}{2}$

그러므로 $x\geq0$에서 함수 $h(x)$가 연속이려면

$h(2)=\lim_{x\to2} h(x)=\lim_{x\to2}\left(-\frac{x+1}{2}\right)=-\frac{3}{2}$

이어야 한다.

즉, $b=-\frac{3}{2}$

따라서 $a\times b=\left(-\frac{3}{4}\right)\times\left(-\frac{3}{2}\right)=\frac{9}{8}$

답 ④

27

$h(x)=f(x)-g(x)$라 하면 방정식 $f(x)-g(x)=0$의 실근은 방정식 $h(x)=0$의 실근과 같다.

$h(x)=x^5+x^3+x-k-1$에서 $h(1)=2-k$, $h(2)=41-k$이고,

방정식 $h(x)=0$이 열린구간 $(1, 2)$에서 오직 하나의 실근을 가지려면 $h(1)h(2)<0$이어야 하므로

$(2-k)(41-k)<0$

$2<k<41$

따라서 조건을 만족시키는 정수 k의 개수는 38이다.

답 38

05 다항함수의 미분법

정답			본문 52~63쪽
필수 유형 ❶ 11	01 ①	02 ③	03 ④
필수 유형 ❷ ⑤	04 ⑤	05 ①	06 ④
필수 유형 ❸ ③	07 ④	08 ④	09 ②
필수 유형 ❹ ③	10 ④	11 ⑤	12 20
필수 유형 ❺ 6	13 ③	14 51	15 ②
필수 유형 ❻ 2	16 ③	17 ⑤	18 ①
필수 유형 ❼ ③	19 ⑤	20 ①	21 ③
필수 유형 ❽ ⑤	22 ③	23 ③	24 ②
	25 ②		
필수 유형 ❾ ③	26 ①	27 ②	28 ④
	29 ⑤	30 ③	
필수 유형 ❿ ⑤	31 ③	32 ④	33 ④
필수 유형 ⓫ 22	34 ⑤	35 ⑤	36 13

필수 유형 ❶

함수 $f(x)=x^3-6x^2+5x$에서 x의 값이 0에서 4까지 변할 때의 평균변화율은

$\frac{f(4)-f(0)}{4-0}=\frac{4^3-6\times4^2+5\times4}{4}=-3$

$f'(x)=3x^2-12x+5$에서 $f'(a)=3a^2-12a+5$

$\frac{f(4)-f(0)}{4-0}=f'(a)$에서 $-3=3a^2-12a+5$

$3a^2-12a+8=0$

$g(a)=3a^2-12a+8$이라 하면

$g(a)=3(a-2)^2-4$에서 $g(2)=-4<0$이고,

$g(0)=8>0$, $g(4)=8>0$

이므로 이차방정식 $g(a)=0$은 열린구간 $(0, 4)$에서 서로 다른 두 실근을 갖는다.

이때 조건을 만족시키는 모든 실수 a의 값의 곱은 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 $\frac{8}{3}$이므로 $p=3$, $q=8$

따라서 $p+q=3+8=11$

답 11

01

$\lim_{x\to2}\frac{f(x)-1}{x-2}=5$에서 $x\to2$일 때 (분모) → 0이고 극한값이 존재하므로 (분자) → 0이어야 한다.

즉, $\lim_{x\to2}\{f(x)-1\}=f(2)-1=0$이므로 $f(2)=1$

이때 $\lim_{x\to2}\frac{f(x)-1}{x-2}=\lim_{x\to2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=f'(2)$이므로

$f'(2)=5$

한편, 함수 $f(x)$에서 x의 값이 2에서 4까지 변할 때의 평균변화율은

$\frac{f(4)-f(2)}{4-2}=\frac{f(4)-1}{2}$이므로

$\frac{f(4)-1}{2}=\frac{1}{2}f'(2)=\frac{5}{2}$

따라서 $f(4)=6$

답 ①

02

$\lim_{h\to0}\frac{\{f(3+h)\}^2-\{f(3)\}^2}{2h}$

$=\lim_{h\to0}\frac{\{f(3+h)-f(3)\}\{f(3+h)+f(3)\}}{2h}$

$=\lim_{h\to0}\left\{\frac{f(3+h)-f(3)}{h}\times\frac{f(3+h)+f(3)}{2}\right\}$

$=f'(3)\times\frac{f(3)+f(3)}{2}=f'(3)\times f(3)$

이므로

$f'(3)\times f(3)=16$

따라서 $f'(3)=\frac{16}{f(3)}=\frac{16}{2}=8$

답 ③

03

$\lim_{x\to1}\frac{f(x)+3}{x-1}=4$에서 $x\to1$일 때 (분모) $\to$ 0이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\to$ 0이어야 한다.

즉, $\lim_{x\to1}\{f(x)+3\}=f(1)+3=0$이므로 $f(1)=-3$

이때 $\lim_{x\to1}\frac{f(x)+3}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=f'(1)$이므로 $f'(1)=4$

한편, $\lim_{x\to1}\frac{f(x)+g(x)}{x-1}=10$에서 $x\to1$일 때 (분모) $\to$ 0이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\to$ 0이어야 한다.

즉, $\lim_{x\to1}\{f(x)+g(x)\}=f(1)+g(1)=0$이므로

$g(1)=-f(1)=-(-3)=3$

이때

$\lim_{x\to1}\frac{f(x)+g(x)}{x-1}=\lim_{x\to1}\left\{\frac{f(x)-f(1)}{x-1}+\frac{g(x)-g(1)}{x-1}\right\}$

$=f'(1)+g'(1)=10$

이므로

$g'(1)=10-f'(1)=10-4=6$

따라서 $g(1)+g'(1)=3+6=9$

답 ④

필수 유형 ❷

함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하므로 $x=-2$에서도 미분가능하다.

함수 $f(x)$가 $x=-2$에서 미분가능하면 $x=-2$에서 연속이므로

$\lim_{x\to-2-}f(x)=\lim_{x\to-2+}f(x)=f(-2)$이어야 한다.

이때

$\lim_{x\to-2-}f(x)=\lim_{x\to-2-}(x^2+ax+b)=4-2a+b$

$\lim_{x\to-2+}f(x)=\lim_{x\to-2+}2x=-4$

$f(-2)=4-2a+b$

이므로

$4-2a+b=-4$에서

$2a-b=8$ …… ㉠

한편, 함수 $f(x)$가 $x=-2$에서 미분가능하므로

$\lim_{x\to-2-}\frac{f(x)-f(-2)}{x-(-2)}=\lim_{x\to-2+}\frac{f(x)-f(-2)}{x-(-2)}$

이어야 한다.

이때

$\lim_{x\to-2-}\frac{f(x)-f(-2)}{x-(-2)}=\lim_{x\to-2-}\frac{(x^2+ax+b)-(4-2a+b)}{x+2}$

$=\lim_{x\to-2-}\frac{x^2+ax-4+2a}{x+2}$

$=\lim_{x\to-2-}\frac{(x+2)(x+a-2)}{x+2}$

$=\lim_{x\to-2-}(x+a-2)=a-4$

$\lim_{x\to-2+}\frac{f(x)-f(-2)}{x-(-2)}=\lim_{x\to-2+}\frac{2x-(4-2a+b)}{x+2}$

$=\lim_{x\to-2+}\frac{2x-(-4)}{x+2}$

$=\lim_{x\to-2+}\frac{2(x+2)}{x+2}=\lim_{x\to-2+}2=2$

이므로 $a-4=2$에서 $a=6$

이것을 ㉠에 대입하면

$2\times6-b=8$, $b=4$

따라서 $a+b=6+4=10$

답 ⑤

04

함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하므로 $x=-1$에서도 미분가능하다.

함수 $f(x)$가 $x=-1$에서 미분가능하면 $x=-1$에서 연속이므로

$\lim_{x\to-1-}f(x)=\lim_{x\to-1+}f(x)=f(-1)$

이어야 한다.

이때

$\lim_{x\to-1-}f(x)=\lim_{x\to-1-}(ax^2+x-3)=a-4$

$\lim_{x\to-1+}f(x)=\lim_{x\to-1+}(bx+1)=-b+1$

$f(-1)=-b+1$

이므로 $a-4=-b+1$에서

$a+b=5$ …… ㉠

한편, 함수 $f(x)$가 $x=-1$에서 미분가능하므로

$\lim_{x\to-1-}\frac{f(x)-f(-1)}{x-(-1)}=\lim_{x\to-1+}\frac{f(x)-f(-1)}{x-(-1)}$

이어야 한다.

이때

$\lim_{x\to-1-}\frac{f(x)-f(-1)}{x-(-1)}=\lim_{x\to-1-}\frac{(ax^2+x-3)-(-b+1)}{x+1}$

$=\lim_{x\to-1-}\frac{(ax^2+x-3)-(a-4)}{x+1}$

$$= \lim_{x \to -1-} \frac{(x+1)(ax-a+1)}{x+1}$$
$$= \lim_{x \to -1-} (ax-a+1) = -2a+1$$
$$\lim_{x \to -1+} \frac{f(x)-f(-1)}{x-(-1)} = \lim_{x \to -1+} \frac{(bx+1)-(-b+1)}{x+1}$$
$$= \lim_{x \to -1+} \frac{b(x+1)}{x+1}$$
$$= \lim_{x \to -1+} b = b$$

이므로 $-2a+1=b$에서

$2a+b=1$ ······ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=-4$, $b=9$

따라서

$$f(x)=\begin{cases} -4x^2+x-3 & (x<-1) \\ 9x+1 & (x \ge -1) \end{cases}$$

이므로

$$f(2)-f(-2)=(18+1)-(-16-2-3)$$
$$=19-(-21)=40$$

답 ⑤

05

ㄱ. $\displaystyle\lim_{x \to 0-} \frac{f(x)+1}{x} = \lim_{x \to 0-} \frac{(x^2-1)+1}{x} = \lim_{x \to 0-} \frac{x^2}{x}$

$\displaystyle= \lim_{x \to 0-} x = 0$ (참)

ㄴ. $\displaystyle\lim_{x \to 0-} f(x) = \lim_{x \to 0-} (x^2-1) = -1$

$\displaystyle\lim_{x \to 0+} f(x) = \lim_{x \to 0+} (1-x^3) = 1$

이므로 $\displaystyle\lim_{x \to 0-} f(x) \ne \lim_{x \to 0+} f(x)$

즉, 함수 $f(x)$가 $x=0$에서 연속이 아니므로 $x=0$에서 미분가능하지 않다. (거짓)

ㄷ. $\displaystyle\lim_{x \to 1-} |f(x)| = \lim_{x \to 1-} |1-x^3| = 0$

$\displaystyle\lim_{x \to 1+} |f(x)| = \lim_{x \to 1+} |3-3x| = 0$

$|f(1)|=0$

에서 $\displaystyle\lim_{x \to 1-} |f(x)| = \lim_{x \to 1+} |f(x)| = |f(1)|$이므로 함수 $|f(x)|$는 $x=1$에서 연속이다.

그런데

$$\lim_{x \to 1-} \frac{|f(x)|-|f(1)|}{x-1} = \lim_{x \to 1-} \frac{|1-x^3|-0}{x-1} = \lim_{x \to 1-} \frac{1-x^3}{x-1}$$
$$= \lim_{x \to 1-} \frac{(1-x)(1+x+x^2)}{x-1}$$
$$= \lim_{x \to 1-} (-x^2-x-1) = -3$$
$$\lim_{x \to 1+} \frac{|f(x)|-|f(1)|}{x-1} = \lim_{x \to 1+} \frac{|3-3x|-0}{x-1} = \lim_{x \to 1+} \frac{3(x-1)}{x-1}$$
$$= \lim_{x \to 1+} 3 = 3$$

에서 $\displaystyle\lim_{x \to 1-} \frac{|f(x)|-|f(1)|}{x-1} \ne \lim_{x \to 1+} \frac{|f(x)|-|f(1)|}{x-1}$이므로

함수 $|f(x)|$는 $x=1$에서 미분가능하지 않다. (거짓)

이상에서 옳은 것은 ㄱ이다.

답 ①

06

조건 (나)에 의하여 함수 $y=f(x)$의 그래프는 $0 \le x \le k$에서의 곡선 $y=f(x)$를 x축의 방향으로 k만큼, y축의 방향으로 $f(k)$만큼 평행이동하거나 x축의 방향으로 $-k$만큼, y축의 방향으로 $-f(k)$만큼 평행이동하면서 반복되므로 함수 $f(x)$가 $x=k$에서 미분가능하면 실수 전체의 집합에서 미분가능하다.

(i) $\displaystyle\lim_{x \to k-} f(x) = \lim_{x \to k-} (x^3-6x^2+10x) = k^3-6k^2+10k$

$\displaystyle\lim_{x \to k+} f(x) = \lim_{x \to 0+} f(x+k) = \lim_{x \to 0+} \{f(x)+f(k)\}$

$=f(0)+f(k)=k^3-6k^2+10k$

$f(k)=k^3-6k^2+10k$

에서 $\displaystyle\lim_{x \to k-} f(x) = \lim_{x \to k+} f(x) = f(k)$이므로 함수 $f(x)$는 $x=k$에서 연속이다.

(ii) $\displaystyle\lim_{h \to 0-} \frac{f(k+h)-f(k)}{h}$

$$= \lim_{h \to 0-} \frac{(k+h)^3-6(k+h)^2+10(k+h)-k^3+6k^2-10k}{h}$$
$$= \lim_{h \to 0-} \frac{3k^2h+3kh^2+h^3-12kh-6h^2+10h}{h}$$
$$= \lim_{h \to 0-} (3k^2+3kh+h^2-12k-6h+10)$$
$$=3k^2-12k+10$$
$$\lim_{h \to 0+} \frac{f(k+h)-f(k)}{h} = \lim_{h \to 0+} \frac{f(k)+f(h)-f(k)}{h}$$
$$= \lim_{h \to 0+} \frac{f(h)}{h}$$
$$= \lim_{h \to 0+} \frac{h^3-6h^2+10h}{h}$$
$$= \lim_{h \to 0+} (h^2-6h+10) = 10$$

이므로 함수 $f(x)$가 $x=k$에서 미분가능하려면

$3k^2-12k+10=10$이어야 한다.

즉, $3k(k-4)=0$

따라서 $k>0$이므로 $k=4$

답 ④

필수 유형 ❸

$g(x)=x^2f(x)$에서

$g'(x)=2xf(x)+x^2f'(x)$

따라서

$g'(2)=2\times2\times f(2)+2^2\times f'(2)$

$=4\times1+4\times3$

$=16$

답 ③

07

$f(x)=(x^2+1)(x^2+ax-3)$에서

$f'(x)=2x(x^2+ax-3)+(x^2+1)(2x+a)$이므로

$f'(1)=2(a-2)+2(a+2)=4a$

$f'(2)=4(2a+1)+5(a+4)=13a+24$

이때 $f'(2)=f'(1)+60$이므로
$13a+24=4a+60$, $9a=36$
따라서 $a=4$

답 ④

08

$\lim_{x\to1}\frac{f(x)-2}{x-1}=3$에서 $x\to1$일 때 (분모) $\to0$이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\to0$이어야 한다.
즉, $\lim_{x\to1}\{f(x)-2\}=f(1)-2=0$이므로 $f(1)=2$
이때 $\lim_{x\to1}\frac{f(x)-2}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=f'(1)$이므로 $f'(1)=3$
한편, $g(x)=(3x^2+2)f(x)$에서
$g'(x)=6xf(x)+(3x^2+2)f'(x)$이므로
$g(1)=5f(1)=5\times2=10$
$g'(1)=6f(1)+5f'(1)=6\times2+5\times3=27$
따라서 $g(1)+g'(1)=10+27=37$

답 ④

09

$\frac{1}{x}=t$라 하면 $x\to\infty$일 때, $t\to0+$이므로
$\lim_{x\to\infty}x\left\{f\left(2+\frac{3}{x}\right)-21\right\}=\lim_{t\to0+}\frac{f(2+3t)-21}{t}=f(2)$ …… ㉠
㉠에서 $t\to0+$일 때 (분모) $\to0$이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\to0$이어야 한다.
즉, $\lim_{t\to0+}\{f(2+3t)-21\}=f(2)-21=0$이므로 $f(2)=21$
이때 $\lim_{t\to0+}\frac{f(2+3t)-21}{t}=3\lim_{t\to0+}\frac{f(2+3t)-f(2)}{3t}=3f'(2)$
이므로 $3f'(2)=f(2)=21$에서 $f'(2)=7$
한편, $f(x)=2x^3+ax^2-5x+b$에서
$f(2)=16+4a-10+b=21$이므로
$4a+b=15$ …… ㉡
$f'(x)=6x^2+2ax-5$에서
$f'(2)=24+4a-5=7$이므로 $4a=-12$, $a=-3$
$a=-3$을 ㉡에 대입하면
$-12+b=15$, $b=27$
따라서 $a+b=(-3)+27=24$

답 ②

필수 유형 ❹

함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하므로 닫힌구간 $[1, 5]$에서 연속이고 열린구간 $(1, 5)$에서 미분가능하다.
그러므로 평균값 정리에 의하여 $\frac{f(5)-f(1)}{5-1}=f'(c)$인 c가 열린구간 $(1, 5)$에 적어도 하나 존재한다.
조건 (가)에 의하여 $f(1)=3$이므로 $f'(c)=\frac{f(5)-3}{4}$이고, 조건 (나)에 의하여 $1<x<5$인 모든 실수 x에 대하여 $f'(x)\ge5$이므로
$f'(c)=\frac{f(5)-3}{4}\ge5$
따라서 $f(5)\ge23$이므로 구하는 $f(5)$의 최솟값은 23이다.

답 ③

참고
$f(x)=5x-2$이면 $f(5)=23$이고 주어진 조건을 만족시킨다.

10

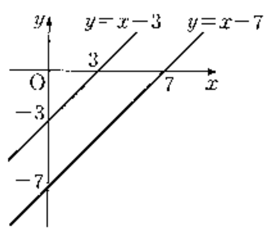
다항함수 $f(x)$는 실수 전체의 집합에서 미분가능하므로 닫힌구간 $[2, 4]$에서 연속이고 열린구간 $(2, 4)$에서 미분가능하다.
그러므로 평균값 정리에 의하여 $\frac{f(4)-f(2)}{4-2}=f'(c)$인 c가 열린구간 $(2, 4)$에 적어도 하나 존재한다.
조건 (가)에 의하여 $f(4)=10$이므로 $f'(c)=\frac{10-f(2)}{2}$이고, 조건 (나)에 의하여 $2<x<4$인 모든 실수 x에 대하여 $|f'(x)|\le6$이므로
$|f'(c)|=\left|\frac{10-f(2)}{2}\right|\le6$
$|10-f(2)|\le12$, $-12\le10-f(2)\le12$, $-2\le f(2)\le22$
따라서 $M=22$, $m=-2$이므로
$M-m=22-(-2)=24$

답 ④

참고
$f(x)=-6x+34$이면 $f(2)=22$이면서 조건을 만족시키고,
$f(x)=6x-14$이면 $f(2)=-2$이면서 조건을 만족시킨다.

11

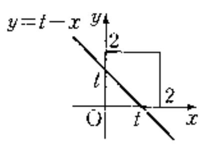
$y=x^3-2x-5$에서 $y'=3x^2-2$이므로, 곡선 $y=x^3-2x-5$의 접선 중 기울기가 1인 접선의 접점의 x좌표를 t라 하면
$3t^2-2=1$
$t=1$ 또는 $t=-1$
(i) $t=1$일 때, 접점의 좌표가 $(1, -6)$이므로 접선의 방정식은
$y+6=x-1$, 즉 $y=x-7$
(ii) $t=-1$일 때, 접점의 좌표가 $(-1, -4)$이므로 접선의 방정식은
$y+4=x+1$, 즉 $y=x-3$
(i), (ii)에 의하여 두 직선 l_1, l_2와 x축, y축으로 둘러싸인 사각형은 그림과 같다.
따라서 구하는 사각형의 넓이는
$\frac{1}{2}\times7^2-\frac{1}{2}\times3^2=\frac{40}{2}=20$



답 ⑤

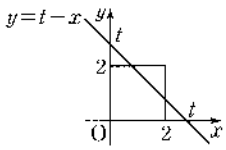
12

(i) $t\le0$일 때, $f(t)=0$
(ii) $0<t\le2$일 때,
$f(t)=\frac{1}{2}t^2$



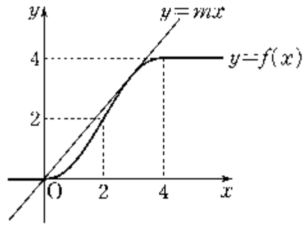
(iii) $2<t<4$일 때,

$f(t)=4-\frac{1}{2}(4-t)^2$



(iv) $t\geq 4$일 때, $f(t)=4$

(i)~(iv)에 의하여 함수 $y=f(x)$의 그래프는 그림과 같다.



그림과 같이 직선 $y=mx$가 $2<x<4$인 점에서 곡선 $y=f(x)$에 접할 때의 기울기 m의 값을 구해 보자.

$2<x<4$일 때, $f(x)=-\frac{1}{2}x^2+4x-4$이므로 접점의 x좌표를 s라 하면

$-\frac{1}{2}s^2+4s-4=ms$ ······ ㉠

$f'(x)=-x+4$이므로

$-s+4=m$ ······ ㉡

㉡을 ㉠에 대입하면

$-\frac{1}{2}s^2+4s-4=-s^2+4s$, $s^2=8$

$2<s<4$이므로 $s=2\sqrt{2}$이고 $m=4-2\sqrt{2}$

즉, 함수 $|f(x)-mx|$가 $x=0$에서만 미분가능하지 않으려면

$m<0$ 또는 $m\geq 4-2\sqrt{2}$

이어야 하므로 조건을 만족시키는 양수 m의 최솟값은 $4-2\sqrt{2}$이다.

따라서 $a=4$, $b=-2$이므로

$a^2+b^2=4^2+(-2)^2=20$

답 20

필수 유형 5

$f(x)=x^3+ax^2-(a^2-8a)x+3$에서

$f'(x)=3x^2+2ax-(a^2-8a)$

함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 증가하려면 모든 실수 x에 대하여 $f'(x)\geq 0$이어야 한다.

즉, 이차방정식 $f'(x)=0$의 판별식을 D라 하면 $D\leq 0$이어야 하므로

$\frac{D}{4}=a^2+3(a^2-8a)\leq 0$

$4a(a-6)\leq 0$

$0\leq a\leq 6$

따라서 구하는 실수 a의 최댓값은 6이다.

답 6

13

함수 $f(x)$가 구간 $(-3, 0)$에서 감소하므로 이 구간에서 $f'(x)\leq 0$이고, 구간 $(0, \infty)$에서 증가하므로 이 구간에서 $f'(x)\geq 0$이다.

그러므로 $f'(0)=0$이어야 한다.

$f(x)=x^3+ax^2+bx+1$에서

$f'(x)=3x^2+2ax+b$이므로 $f'(0)=b=0$

즉, $f'(x)=3x^2+2ax$

이때 구간 $(-3, 0)$에서 $f'(x)\leq 0$이고 $f(x)$는 다항함수이므로 $f'(-3)\leq 0$이어야 한다.

그러므로 $f'(-3)=27-6a\leq 0$에서 $a\geq\frac{9}{2}$

따라서 $f(x)=x^3+ax^2+1$에서

$f(1)=2+a\geq 2+\frac{9}{2}=\frac{13}{2}$

이므로 구하는 $f(1)$의 최솟값은 $\frac{13}{2}$이다.

답 ③

14

닫힌구간 $[n, n+2]$에서 정의된 함수 $f(x)$가 일대일함수가 되려면 이 구간에서 $f(x)$가 증가하거나 감소해야 한다. 즉, 구간 $[n, n+2]$에 속하는 모든 실수 x에 대하여 $f'(x)\geq 0$이거나 $f'(x)\leq 0$이어야 한다.

이때 $f(x)=x^3-9x^2+24x+5$에서

$$\begin{aligned}f'(x)&=3x^2-18x+24\\&=3(x^2-6x+8)\\&=3(x-2)(x-4)\end{aligned}$$

이므로 구간 $(-\infty, 2]$에서 $f'(x)\geq 0$, 구간 $[2, 4]$에서 $f'(x)\leq 0$, 구간 $[4, \infty)$에서 $f'(x)\geq 0$이다.

따라서 조건을 만족시키는 10 이하의 자연수 n의 값은

2, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10

이므로 구하는 합은 51이다.

답 51

15

함수 $f(x)$의 역함수가 존재하려면 $f(x)$의 최고차항의 계수가 양수이므로 $x\neq a$인 모든 실수 x에 대하여 $f'(x)\geq 0$이어야 한다.

이때

$$f(x)=\begin{cases}x^3+x^2+x-a+2 & (x\geq a)\\ x^3+x^2-x+a+2 & (x<a)\end{cases}$$

에서

$$f'(x)=\begin{cases}3x^2+2x+1 & (x>a)\\ 3x^2+2x-1 & (x<a)\end{cases}$$

$x>a$일 때,

$f'(x)=3x^2+2x+1$이고 이차방정식 $3x^2+2x+1=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=1^2-3\times 1=-2<0$

이므로 실수 a의 값에 관계없이 $x>a$인 모든 실수 x에 대하여 $f'(x)>0$이다.

$x<a$일 때,

$f'(x)=3x^2+2x-1=(x+1)(3x-1)$

이므로 $x<a$인 모든 실수 x에 대하여 $f'(x)\geq 0$이려면 $a\leq -1$이어야 한다.

따라서 구하는 실수 a의 최댓값은 -1이다.

답 ②

필수 유형 ❻

$f(x)=x^4+ax^2+b$에서

$f'(x)=4x^3+2ax$

함수 $f(x)$가 $x=1$에서 극소이므로

$f'(1)=0$에서

$4+2a=0$, $a=-2$

이때 $f'(x)=4x^3-4x=4x(x+1)(x-1)$이므로

$f'(x)=0$에서

$x=0$ 또는 $x=-1$ 또는 $x=1$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	극소	↗	극대	↘	극소	↗

즉, 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 극댓값을 갖고 주어진 조건에 의하여 극댓값이 4이므로

$f(0)=b=4$

따라서 $a+b=(-2)+4=2$

답 2

16

삼차함수 $f(x)=x^3+ax^2+bx$가 주어진 조건을 만족시키려면 함수 $f(x)$가 $x=1$에서 극대, $x=5$에서 극소이어야 한다.

즉, $f'(x)=3x^2+2ax+b$에서

$f'(1)=0$이므로

$3+2a+b=0$ ...... ㉠

또 $f'(5)=0$에서

$75+10a+b=0$ ...... ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

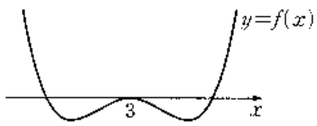
$a=-9$, $b=15$

따라서 $a+b=(-9)+15=6$

답 ③

17

조건 (가), (나)에 의하여 함수 $y=f(x)$의 그래프는 그림과 같다.



조건 (나)에 의하여 방정식 $f(x)=0$의 한 실근을 $3+a$라 하면 다른 한 실근은 $3-a$이므로

$f(x)=(x-3+a)(x-3-a)(x-3)^2$ (단, a는 양의 상수)

로 놓을 수 있다.

즉, $f(x)=\{(x-3)^2-a^2\}(x-3)^2=(x^2-6x+9-a^2)(x^2-6x+9)$

이므로

$$\begin{aligned}f'(x)&=(2x-6)(x^2-6x+9)+(x^2-6x+9-a^2)(2x-6)\\&=2(x-3)\{2(x^2-6x+9)-a^2\}\\&=2(x-3)\{2(x-3)^2-a^2\}\end{aligned}$$

$f'(x)=0$에서 $x=3$ 또는 $x=3\pm\frac{a}{\sqrt{2}}$이므로 함수 $f(x)$는

$x=3\pm\frac{a}{\sqrt{2}}$에서 극솟값을 갖는다.

이때 함수 $f(x)$의 극솟값이 -16이므로

$f(x)=(x-3)^4-a^2(x-3)^2$에서

$f\left(3+\frac{a}{\sqrt{2}}\right)=\left(\frac{a}{\sqrt{2}}\right)^4-a^2\left(\frac{a}{\sqrt{2}}\right)^2=\frac{a^4}{4}-\frac{a^4}{2}=-\frac{a^4}{4}=-16$,

$f\left(3-\frac{a}{\sqrt{2}}\right)=\left(-\frac{a}{\sqrt{2}}\right)^4-a^2\left(-\frac{a}{\sqrt{2}}\right)^2=\frac{a^4}{4}-\frac{a^4}{2}=-\frac{a^4}{4}=-16$

즉, $a^4=64$에서 $a^2=8$이므로

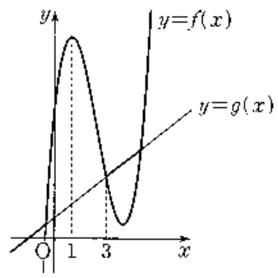
$f(x)=(x-3)^4-8(x-3)^2$

따라서 $f(0)=3^4-8\times3^2=81-72=9$

답 ⑤

18

조건 (가)에 의하여 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프는 서로 다른 세 점에서 만나야 한다. 또 조건 (나)를 만족시키려면 그림과 같이 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 극대이고, 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프는 $x=3$인 점에서 만나야 한다.



$f(x)=2x^3+ax^2+bx+18$에서

$f'(x)=6x^2+2ax+b$이고

$f'(1)=0$이어야 하므로

$6+2a+b=0$ ...... ㉠

$f(3)=g(3)$이어야 하므로

$54+9a+3b+18=9$에서

$3a+b=-21$ ...... ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=-15$, $b=24$이므로

$f(x)=2x^3-15x^2+24x+18$이고

$f'(x)=6x^2-30x+24=6(x-1)(x-4)$

$f'(x)=0$에서

$x=1$ 또는 $x=4$

따라서 함수 $f(x)$의 극댓값과 극솟값의 합은

$f(1)+f(4)=29+2=31$

답 ①

필수 유형 ❼

$f(x)=x^3-3x^2-9x-12$에서

$f'(x)=3x^2-6x-9=3(x+1)(x-3)$

이므로 $f'(x)=0$에서

$x=-1$ 또는 $x=3$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

즉, 함수 $f(x)$는 $x=-1$에서 극댓값 $f(-1)=-7$을 갖고, $x=3$에서 극솟값 $f(3)=-39$를 갖는다.

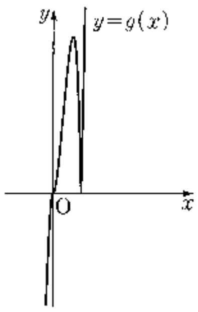
한편, 조건 (가)에서 $xg(x)=|xf(x-p)+qx|$이므로

$$g(x)=\begin{cases} |f(x-p)+q| & (x>0) \\ -|f(x-p)+q| & (x<0) \end{cases}$$

함수 $g(x)$가 $x=0$에서 연속이므로

$|f(-p)+q|=-|f(-p)+q|$

즉, $f(-p)+q=0$



이때 함수 $y=|f(x-p)+q|$의 그래프는 함수 $y=f(x)$의 그래프를 x축의 방향으로 p만큼, y축의 방향으로 q만큼 평행이동시킨 후 $y<0$인 부분을 x축에 대하여 대칭이동시킨 것인데, 조건 (나)에서 함수 $g(x)$가 $x=a$에서 미분가능하지 않은 실수 a의 개수가 1이어야 하므로 $p=1$, $q=7$이고, 함수 $y=g(x)$의 그래프는 그림과 같다.

따라서 $p+q=1+7=8$

답 ③

19

ㄱ. 실수 전체의 집합에서 도함수 $f'(x)$가 정의되어 있으므로 함수 $f(x)$는 실수 전체의 집합에서 미분가능하다. (참)

ㄴ. $f'(1)=0$이고 $x=1$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 양에서 음으로 바뀌므로 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 극대이다. (참)

ㄷ. (i) $x\le1$일 때 $f'(x)\ge0$이고 $x=-1$에서만 $f'(x)=0$이므로 함수 $f(x)$는 증가한다.

(ii) $1<x<3$일 때 $f'(x)<0$이므로 함수 $f(x)$는 감소한다.

(iii) $x\ge3$일 때 $f'(x)\ge0$이고 $x=3$에서만 $f'(x)=0$이므로 함수 $f(x)$는 증가한다.

(i), (ii), (iii)에 의하여 $x\ge1$일 때 함수 $f(x)$는 $x=3$에서 극소이면서 최소이므로 $f(3)>0$이면 $x\ge1$일 때 함수 $y=f(x)$의 그래프는 x축과 만나지 않는다.

한편, $x\le-1$일 때 $f'(x)=-x-1$이므로 이 구간에서 함수 $f(x)$는 최고차항의 계수가 음수인 이차함수이다.

즉, $\lim_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$이므로 $f(c)<0$인 c가 구간 $(-\infty, -1)$에 존재한다. 이때 $f(1)>f(3)>0$이므로 사잇값의 정리에 의하여 $f(x)=0$인 x가 구간 $(c, 1)$에 존재한다. 그런데 $x\le1$일 때 함수 $f(x)$는 증가하므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 x축과 오직 한 점에서만 만난다. (참)

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

답 ⑤

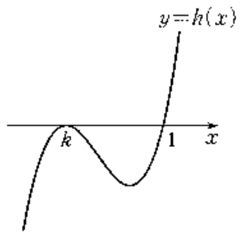
20

$h(x)=f(x)-g(x)$라 하면 함수 $h(x)$는 최고차항의 계수가 1인 삼차함수이고, 조건 (가)에 의하여 방정식 $h(x)=0$의 서로 다른 실근의 개수는 2이다. 또 조건 (나)에 의하여 $h(1)=0$이므로

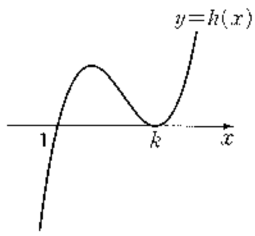
$h(x)=(x-1)(x-k)^2$ (단, k는 1이 아닌 상수)

로 놓을 수 있다.

즉, 함수 $y=h(x)$의 그래프는 다음 두 가지 중 하나이다.



[그림 1]



[그림 2]

이때 조건 (다)를 만족시키려면 함수 $y=h(x)$의 그래프는 [그림 1]과 같아야 하며 함수 $h(x)$는 $x=0$에서 극솟값을 가져야 한다.

$h'(x)=(x-k)^2+2(x-1)(x-k)$

$\quad=(x-k)(3x-k-2)$

이고 $h'(x)=0$에서

$x=k$ 또는 $x=\dfrac{k+2}{3}$이므로 $\dfrac{k+2}{3}=0$

$k=-2$

따라서 $h(x)=(x-1)(x+2)^2$이고

$f(x)=h(x)+g(x)=(x-1)(x+2)^2+x+3$

이므로

$f(2)=1\times16+5=21$

답 ①

21

$f(x)=3x^4-4x^3-12x^2+k$에서

$f'(x)=12x^3-12x^2-24x$

$\quad=12x(x^2-x-2)$

$\quad=12x(x+1)(x-2)$

이므로 $f'(x)=0$에서

$x=-1$ 또는 $x=0$ 또는 $x=2$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	극소	↗	극대	↘	극소	↗

이때 조건 (가)를 만족시키려면

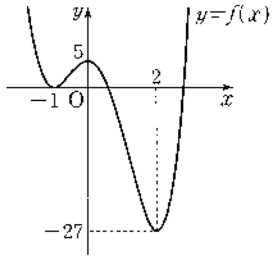
$f(-1)=0$ 또는 $f(0)=0$ 또는 $f(2)=0$

이어야 한다.

(i) $f(-1)=0$인 경우

$f(-1)=k-5=0$에서 $k=5$이므로

$f(x)=3x^4-4x^3-12x^2+5$이고, 함수 $y=f(x)$의 그래프는 [그림 1]과 같다.



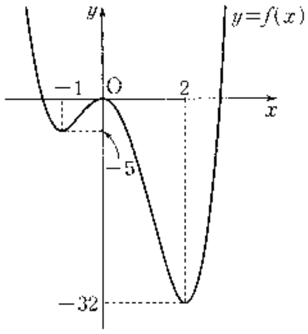
[그림 1]

이 경우 조건 (나)를 만족시킨다.

(ii) $f(0)=0$인 경우

$f(0)=k=0$이므로

$f(x)=3x^4-4x^3-12x^2$이고, 함수 $y=f(x)$의 그래프는 [그림 2]와 같다.



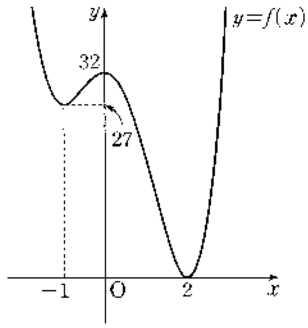
[그림 2]

이 경우 조건 (나)를 만족시킨다.

(iii) $f(2)=0$인 경우

$f(2)=k-32=0$에서 $k=32$이므로

$f(x)=3x^4-4x^3-12x^2+32$이고, 함수 $y=f(x)$의 그래프는 [그림 3]과 같다.



[그림 3]

이 경우 조건 (나)를 만족시키지 않는다.

ㄱ. ㉠에서 방정식 $f'(x)=0$은 서로 다른 세 실근을 갖는다. (참)

ㄴ. (i)에서 $k=5$인 경우 두 조건 (가), (나)를 모두 만족시키지만 함수 $f(x)$의 극댓값은 0이 아니다. (거짓)

ㄷ. (i), (ii), (iii)에서 조건을 만족시키는 모든 k의 값은

$k=5$ 또는 $k=0$

이므로 그 합은 5이다. (참)

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

답 ③

필수 유형 ❸

$f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ (a, b, c는 상수)라 하면

$f'(x)=3x^2+2ax+b$

함수 $g(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하므로 $g(x)$는 $x=0$에서 연속이다.

즉, $\lim_{x\to 0-} g(x)=\lim_{x\to 0+} g(x)=g(0)$이어야 한다.

이때

$\lim_{x\to 0-} g(x)=\lim_{x\to 0-} \frac{1}{2}=\frac{1}{2}$

$\lim_{x\to 0+} g(x)=\lim_{x\to 0+} f(x)=f(0)=c$

$g(0)=f(0)=c$이므로 $c=\frac{1}{2}$

한편, 함수 $g(x)$가 $x=0$에서 미분가능하므로

$\lim_{x\to 0-} \frac{g(x)-g(0)}{x}=\lim_{x\to 0+} \frac{g(x)-g(0)}{x}$이어야 한다.

이때

$\lim_{x\to 0-} \frac{g(x)-g(0)}{x}=\lim_{x\to 0-} \frac{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}}{x}=0$

$\lim_{x\to 0+} \frac{g(x)-g(0)}{x}=\lim_{x\to 0+} \frac{f(x)-f(0)}{x}=f'(0)=b$

이므로 $b=0$

그러므로 $f(x)=x^3+ax^2+\frac{1}{2}$, $f'(x)=3x^2+2ax$

ㄱ. $g(0)+g'(0)=f(0)+f'(0)=\frac{1}{2}+0=\frac{1}{2}$ (참)

ㄴ. $f'(x)=x(3x+2a)=0$에서

$x=0$ 또는 $x=-\frac{2}{3}a$

이때 $-\frac{2}{3}a<0$이면 함수 $g(x)$의 최솟값이 $\frac{1}{2}$이므로 조건을 만족시키지 않는다. 즉, $-\frac{2}{3}a>0$이므로 $a<0$

그러므로 $g(1)=f(1)=1+a+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}+a<\frac{3}{2}$ (참)

ㄷ. $x\geq 0$일 때 함수 $g(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	$\cdots$	$-\frac{2}{3}a$	$\cdots$
$g'(x)$		$-$	0	$+$
$g(x)$	$\frac{1}{2}$	↘	극소	↗

즉, 함수 $g(x)$는 $x=-\frac{2}{3}a$에서 극소이면서 최소이므로

$g\left(-\frac{2}{3}a\right)=f\left(-\frac{2}{3}a\right)=-\frac{8}{27}a^3+\frac{4}{9}a^3+\frac{1}{2}=\frac{4}{27}a^3+\frac{1}{2}=0$

에서

$a^3=-\frac{27}{8}$, $a=-\frac{3}{2}$

따라서 $f(x)=x^3-\frac{3}{2}x^2+\frac{1}{2}$이므로

$g(2)=f(2)=8-\frac{3}{2}\times 4+\frac{1}{2}=\frac{5}{2}$ (참)

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

답 ⑤

22

$f(x)=2x^3-3x^2-12x+a$에서

$f'(x)=6x^2-6x-12=6(x+1)(x-2)$

$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=2$이므로 닫힌구간 $[0,\ 4]$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	$\cdots$	2	$\cdots$	4
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	a	↘	$a-20$	↗	$a+32$

그러므로 닫힌구간 $[0,\ 4]$에서 함수 $f(x)$는 $x=2$일 때 최솟값 $a-20$을 갖고, $x=4$일 때 최댓값 $a+32$를 갖는다.

즉, $a-20=-18$이므로 $a=2$

이때 $M=a+32=2+32=34$

따라서 $a+M=2+34=36$

답 ③

23

$y=2x^4-3x^2-2x+4$에서 $y'=8x^3-6x-2$이므로 x좌표가 양수인 점에서 곡선 C에 접하는 접선의 접점의 x좌표를 t, 접선의 기울기를 $f(t)$라 하면

$f(t)=8t^3-6t-2\ (t>0)$

이때 $f'(t)=24t^2-6=0$에서 $t=\frac{1}{2}$이므로 함수 $f(t)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

t	(0)	$\cdots$	$\frac{1}{2}$	$\cdots$
$f'(t)$		$-$	0	$+$
$f(t)$	(-2)	↘	-4	↗

그러므로 함수 $f(t)$는 $t>0$에서 $t=\frac{1}{2}$일 때 최솟값 -4를 갖는다.

즉, 기울기가 최소인 접선의 접점은 점 $\left(\frac{1}{2},\ \frac{19}{8}\right)$이고 기울기는 -4이므로 접선의 방정식은

$y-\frac{19}{8}=-4\left(x-\frac{1}{2}\right)$

$y=-4x+\frac{35}{8}$

따라서 구하는 접선의 y절편은 $\frac{35}{8}$이므로

$p+q=8+35=43$

답 ③

24

$g(x)=x^2-6x+10$이라 하자.

$g(t)=g(t+2)$에서

$t^2-6t+10=(t+2)^2-6(t+2)+10$

$4t=8,\ t=2$

(i) $0<t<2$일 때,

$g(t)>g(t+2)$이므로

$f(t)=t\times g(t+2)=t\{(t+2)^2-6(t+2)+10\}=t^3-2t^2+2t$

이때 $f'(t)=3t^2-4t+2$이고 이차방정식 $f'(t)=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=4-6=-2<0$

이므로 $f'(t)>0$이다.

즉, $0<t<2$에서 함수 $f(t)$는 증가한다.

(ii) $t>2$일 때,

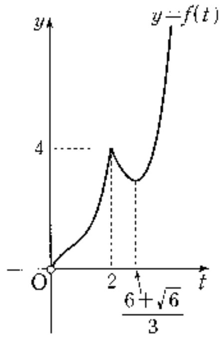
$g(t)\le g(t+2)$이므로

$f(t)=t\times g(t)=t^3-6t^2+10t$

이때 $f'(t)=3t^2-12t+10$이고 $f'(t)=0$에서 $t=\frac{6+\sqrt{6}}{3}$이며,

$t=\frac{6+\sqrt{6}}{3}$의 좌우에서 $f'(t)$의 부호가 음에서 양으로 바뀌므로 함수 $f(t)$는 $t=\frac{6+\sqrt{6}}{3}$에서 극소이다.

$f(2)=4$이므로 (i), (ii)에 의하여 함수 $y=f(t)$의 그래프는 그림과 같다.



이때 $f(2)=4$이고 $t>2$에서 $f(t)=4$이면

$t^3-6t^2+10t=4$에서

$t^3-6t^2+10t-4=0$

$(t-2)(t^2-4t+2)=0$

$t>2$이므로 $t=2+\sqrt{2}$

그러므로 구간 $(0,\ a]$에서 함수 $f(t)$의 최댓값이 4가 되도록 하는 양수 a의 값의 범위는

$2\le a\le 2+\sqrt{2}$

따라서 $M=2+\sqrt{2}$, $m=2$이므로

$M+m=4+\sqrt{2}$

답 ②

25

$f(x)=x^3-5x^2+2x+13$에서

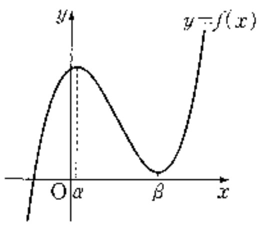
$f'(x)=3x^2-10x+2$이므로

$f'(x)=0$에서 $x=\frac{5\pm\sqrt{19}}{3}$

이때 $\alpha=\frac{5-\sqrt{19}}{3}$, $\beta=\frac{5+\sqrt{19}}{3}$라 하고, 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	α	$\cdots$	β	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

즉, 함수 $y=f(x)$의 그래프는 그림과 같다.



$k<\beta$, $k+2>\beta$일 때, $f(k)=f(k+2)$이면

$k^3-5k^2+2k+13=(k+2)^3-5(k+2)^2+2(k+2)+13$

$6k^2-8k-8=0$

$2(3k+2)(k-2)=0$

$\beta-2<k<\beta$이므로 $k=2$

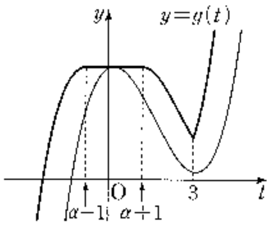
(i) $t+1\le\alpha$, 즉 $t\le\alpha-1$일 때,
  $g(t)=f(t+1)$

(ii) $t-1\le\alpha\le t+1$, 즉 $\alpha-1\le t\le\alpha+1$일 때,
  $g(t)=f(\alpha)$

(iii) $\alpha\le t-1\le 2$, 즉 $\alpha+1\le t\le 3$일 때,
  $g(t)=f(t-1)$

(iv) $t-1\ge 2$, 즉 $t\ge 3$일 때,
  $g(t)=f(t+1)$

(i)~(iv)에 의하여 함수 $y=g(t)$의 그래프는 그림과 같다.



즉, 함수 $g(t)$는 $t=3$에서 미분가능하지 않으므로 $a=3$

$t=2$일 때, $g(t)=f(t-1)$이므로

$g'(a-1)=g'(2)=f'(1)=3-10+2=-5$

$t=4$일 때, $g(t)=f(t+1)$이므로

$g'(a+1)=g'(4)=f'(5)=3\times5^2-10\times5+2=27$

따라서 $g'(a-1)+g'(a+1)=-5+27=22$

답 ②

필수 유형 ❾

$f(x)=2x^3-3x^2-12x+k$라 하면

$f'(x)=6x^2-6x-12=6(x+1)(x-2)$

이므로 $f'(x)=0$에서

$x=-1$ 또는 $x=2$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

이때 방정식 $f(x)=0$이 서로 다른 세 실근을 가지려면 (극댓값)>0이고 (극솟값)<0이어야 한다.

즉, $f(-1)=7+k>0$에서 $k>-7$이고

$f(2)=k-20<0$에서 $k<20$이므로

$-7<k<20$

따라서 조건을 만족시키는 정수 k는

$-6, -5, -4, \cdots, 17, 18, 19$

이므로 그 개수는 26이다.

답 ③

26

$f(x)=3x^4-8x^3-6x^2+24x$라 하자.

$f'(x)=12x^3-24x^2-12x+24=12(x+1)(x-1)(x-2)$

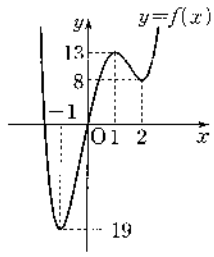
이므로 $f'(x)=0$에서

$x=-1$ 또는 $x=1$ 또는 $x=2$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	-19	↗	13	↘	8	↗

그러므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 그림과 같다.



이때 방정식 $f(x)-k=0$이 서로 다른 세 실근을 가지려면 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=k$가 서로 다른 세 점에서 만나야 한다.

따라서 $k=8$ 또는 $k=13$이므로 조건을 만족시키는 모든 상수 k의 값의 합은

$8+13=21$

답 ①

27

$f(x)=x^3-3x+n-2$라 하자.

$f'(x)=3x^2-3=3(x+1)(x-1)$

이므로 $f'(x)=0$에서

$x=-1$ 또는 $x=1$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	n	↘	$n-4$	↗

(i) $n>0$이므로 $n-4<0$이면 함수 $f(x)$의 극댓값이 양수이고 극솟값이 음수이다. 즉, 함수 $y=f(x)$의 그래프가 x축과 서로 다른 세 점에서 만나므로 방정식 $f(x)=0$의 서로 다른 실근의 개수는 3이다.
  그러므로 $n<4$일 때, $a_n=3$이다.

(ii) $n-4=0$이면 함수 $f(x)$의 극솟값이 0이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프가 x축과 접한다. 즉, 방정식 $f(x)=0$의 서로 다른 실근의 개수는 2이다.
  그러므로 $n=4$일 때, $a_n=2$이다.

(iii) $n-4>0$이면 함수 $f(x)$의 극댓값과 극솟값이 모두 양수이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 x축과 오직 한 점에서만 만난다.

즉, 방정식 $f(x)=0$의 실근의 개수는 1이다.

그러므로 $n>4$일 때, $a_n=1$이다.

(i), (ii), (iii)에 의하여

$$a_n=\begin{cases} 3\ (n<4) \\ 2\ (n=4) \\ 1\ (n>4) \end{cases}$$

이므로

$$\sum_{n=1}^{10} a_n=3\times3+2+1\times6=17$$

답 ②

28

방정식 $f(x)=g(x)$에서

$2x^3+5x^2-7x=2x^2+5x+a$

$2x^3+3x^2-12x=a$

$h(x)=2x^3+3x^2-12x$라 하면

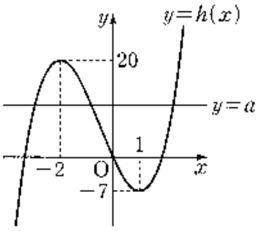
$h'(x)=6x^2+6x-12=6(x+2)(x-1)$

이므로 $h'(x)=0$에서

$x=-2$ 또는 $x=1$

함수 $h(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	1	$\cdots$
$h'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$h(x)$	$\nearrow$	20	$\searrow$	-7	$\nearrow$



그러므로 함수 $y=h(x)$의 그래프는 그림과 같다.

이때 방정식 $f(x)=g(x)$의 실근은 함수 $y=h(x)$의 그래프와 직선 $y=a$가 만나는 점의 x좌표이므로 주어진 조건을 만족시키려면 함수 $y=h(x)$의 그래프가 직선 $y=a$와 서로 다른 세 점에서 만나야 하고, 세 실근이 모두 양수일 수는 없으므로 그림과 같이 음의 실근 두 개와 양의 실근 한 개를 가져야 한다.

따라서 $0<a<20$이어야 하므로 조건을 만족시키는 모든 정수 a의 개수는 19이다.

답 ④

29

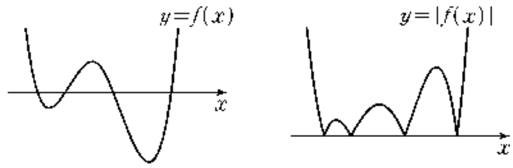
삼차방정식 $f'(x)=0$의 서로 다른 실근의 개수가 2 이하이면 함수 $|f(x)|$가 서로 다른 세 점에서 극소일 수 없으므로 방정식 $f'(x)=0$은 서로 다른 세 실근을 가져야 한다.

이때 함수 $f(x)$의 극솟값 중 양수인 것이 있으면 이 값이 함수 $|f(x)|$의 극솟값이기도 하므로 함수 $|f(x)|$의 극솟값이 모두 0이라는 조건을 만족시키지 않는다.

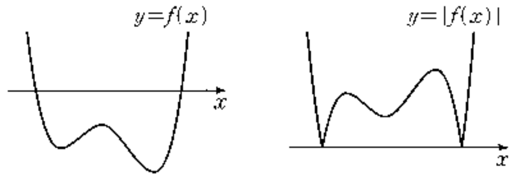
즉, 함수 $f(x)$의 극솟값은 모두 0보다 작거나 같아야 한다.

(i) 함수 $f(x)$의 극솟값이 모두 음수인 경우

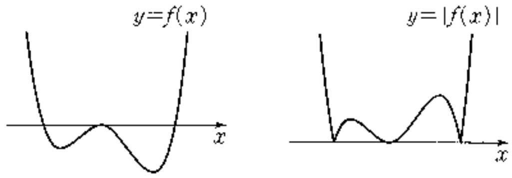
㉠ 함수 $f(x)$의 극댓값이 양수이면 다음 그림과 같이 함수 $|f(x)|$가 극소인 서로 다른 x의 값이 4개이므로 조건을 만족시키지 않는다.



㉡ 함수 $f(x)$의 극댓값이 음수이면 다음 그림과 같이 함수 $|f(x)|$의 0이 아닌 극솟값이 존재하므로 조건을 만족시키지 않는다.

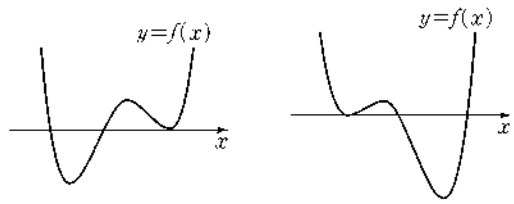


㉢ 함수 $f(x)$의 극댓값이 0이면 다음 그림과 같이 조건을 모두 만족시킨다.

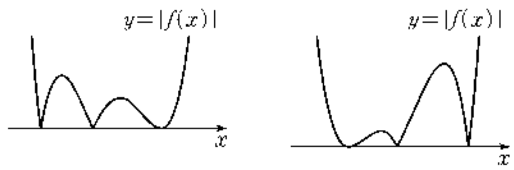


(ii) 함수 $f(x)$의 극솟값이 하나는 0이고 다른 하나는 음수인 경우

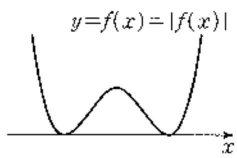
함수 $y=f(x)$의 그래프는 다음 두 가지 경우 중 하나이다.



두 경우 모두 함수 $y=|f(x)|$의 그래프가 다음과 같으므로 조건을 모두 만족시킨다.



(iii) 함수 $f(x)$의 극솟값이 모두 0인 경우



함수 $y=|f(x)|$의 그래프는 함수 $y=f(x)$의 그래프와 같다. 즉, 함수 $|f(x)|$가 극소인 서로 다른 x의 값이 2개이므로 조건을 만족시키지 않는다.

ㄱ. 조건을 만족시키는 (i)의 ㉢과 (ii)의 경우 모두 함수 $|f(x)|$가 극대인 서로 다른 x의 값이 2개이다. (참)

ㄴ. 조건을 만족시키는 (i)의 ㉢과 (ii)의 경우 모두 함수 $f(x)$의 극댓값은 0보다 크거나 같다. (참)

ㄷ. 조건을 만족시키는 (i)의 ㉢과 (ii)의 경우 모두 함수 $y=f(x)$의 그래프가 x축과 서로 다른 세 점에서 만나므로 방정식 $f(x)=0$의 서로 다른 실근의 개수는 3이다. (참)

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

답 ⑤

30

함수 $f(x)$의 최고차항의 계수를 a $(a>0)$이라 하면 조건 (가)에 의하여

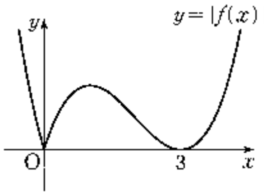
$f(x)=ax(x-3)^2$ 또는 $f(x)=ax^2(x-3)$

으로 놓을 수 있다.

이때 조건 (나)를 만족시키려면 함수 $y=|f(x)|$의 그래프와 직선 $y=mx$가 서로 다른 세 점에서 만나도록 하는 실수 m의 값이 $\frac{9}{2}$뿐이어야 한다.

(i) $f(x)=ax(x-3)^2$인 경우

함수 $y=|f(x)|$의 그래프는 [그림 1]과 같다.



[그림 1]

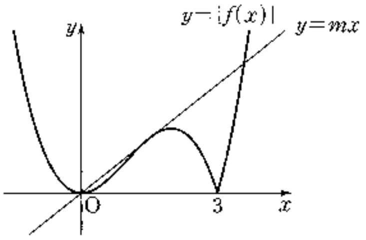
$f(x)=ax(x-3)^2=ax^3-6ax^2+9ax$에서

$f'(x)=3ax^2-12ax+9a$이고 $f'(0)=9a$이므로 함수 $y=|f(x)|$의 그래프와 직선 $y=mx$는 $m=9a$일 때 서로 다른 두 점에서 만나고, $0<m<9a$일 때 서로 다른 세 점에서 만난다.

그러므로 조건 (나)를 만족시키지 않는다.

(ii) $f(x)=ax^2(x-3)$인 경우

함수 $y=|f(x)|$의 그래프는 [그림 2]와 같다.



[그림 2]

[그림 2]와 같이 직선 $y=mx$가 제1사분면에서 함수 $y=-f(x)$의 그래프와 접할 때 m의 값을 m_1이라 하면 함수 $y=|f(x)|$의 그래프와 직선 $y=mx$는 $m=m_1$일 때 서로 다른 세 점에서 만나고, $m>m_1$일 때 서로 다른 두 점에서, $0<m<m_1$일 때 서로 다른 네 점에서, $m\le 0$일 때 서로 다른 두 점에서 만나므로 조건 (나)를 만족시킨다. 이때 $m_1=\frac{9}{2}$이어야 한다.

(i), (ii)에 의하여

$f(x)=ax^2(x-3)$ (단, a는 0보다 큰 상수)

로 놓을 수 있고, 직선 $y=\frac{9}{2}x$가 제1사분면에서 곡선 $y=-ax^2(x-3)$에 접해야 한다.

$y=-ax^2(x-3)=-ax^3+3ax^2$에서

$y'=-3ax^2+6ax$이므로 접점의 x좌표를 t $(t>0)$이라 하면

$-at^3+3at^2=\frac{9}{2}t$ …… ㉠

$-3at^2+6at=\frac{9}{2}$ …… ㉡

이어야 한다. $t>0$이므로 ㉠에서

$-at^2+3at=\frac{9}{2}$ …… ㉢

㉡, ㉢에서 $-3at^2+6at=-at^2+3at$

$2at^2-3at=0$, $at(2t-3)=0$

$a\ne 0$, $t>0$이므로 $t=\frac{3}{2}$

이것을 ㉢에 대입하면

$-\frac{9}{4}a+\frac{9}{2}a=\frac{9}{2}$

$\frac{9}{4}a=\frac{9}{2}$, $a=2$

그러므로 $f(x)=2x^2(x-3)$이고

$f'(x)=6x^2-12x=6x(x-2)$이므로 $f'(x)=0$에서

$x=0$ 또는 $x=2$

따라서 함수 $|f(x)|$는 $x=2$에서 극대이므로 구하는 극댓값은

$|f(2)|=|2\times 4\times(-1)|=8$

답 ③

참고

직선 $y=\frac{9}{2}x$가 제1사분면에서 곡선 $y=-ax^2(x-3)$에 접하도록 하는 실수 a의 값은 다음과 같이 구할 수도 있다.

조건을 만족시키려면 방정식 $\frac{9}{2}x=-ax^2(x-3)$, 즉

$x\left(ax^2-3ax+\frac{9}{2}\right)=0$의 실근이 0과 양수인 중근이어야 하므로

이차방정식 $ax^2-3ax+\frac{9}{2}=0$의 판별식을 D라 하면

$D=9a^2-18a=9a(a-2)=0$이어야 한다.

따라서 $a=2$

필수 유형 ⑩

$h(x)=f(x)-g(x)$라 하면

$h(x)=x^3-x^2-x+6-a$

이때 $h'(x)=3x^2-2x-1=(3x+1)(x-1)$이므로

$h'(x)=0$에서 $x=-\frac{1}{3}$ 또는 $x=1$

함수 $h(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	$-\frac{1}{3}$	$\cdots$	1	$\cdots$
$h'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$h(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

즉, $x\ge 0$일 때 함수 $h(x)$의 최솟값은 $h(1)$이다.

이때 $x\ge 0$인 모든 실수 x에 대하여 $f(x)\ge g(x)$, 즉 $h(x)\ge 0$이려면 $h(1)\ge 0$이어야 하므로

$h(1)=5-a\ge 0$

따라서 $a\le 5$이므로 조건을 만족시키는 실수 a의 최댓값은 5이다.

답 ⑤

31

$f(x)=x^4+2x^3+x^2-12x+a$라 하면

$f'(x)=4x^3+6x^2+2x-12=2(x-1)(2x^2+5x+6)$

모든 실수 x에 대하여 $2x^2+5x+6>0$이므로 $f'(x)=0$에서 $x=1$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	$a-8$	$\nearrow$

즉, 함수 $f(x)$의 최솟값이 $a-8$이므로 주어진 부등식이 모든 실수 x에 대하여 성립하려면 $a-8\geq 0$이어야 한다.
따라서 $a\geq 8$이므로 구하는 실수 a의 최솟값은 8이다.

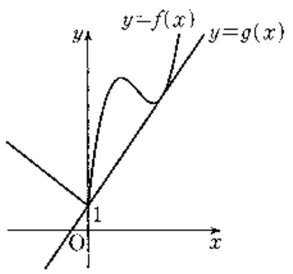
답 ③

32

$y=2x^3-9x^2+12x+1$에서
$y'=6x^2-18x+12=6(x-1)(x-2)$
$y'=0$에서 $x=1$ 또는 $x=2$
$x\geq 0$에서 함수 $y=2x^3-9x^2+12x+1$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	$\cdots$	1	$\cdots$	2	$\cdots$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$
y	1	$\nearrow$	6	$\searrow$	5	$\nearrow$

그러므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 그림과 같다.



그림과 같이 직선 $y=g(x)$가 제1사분면에서 곡선 $y=f(x)$에 접할 때의 m의 값을 구해 보자.
접점의 x좌표를 t $(t>0)$이라 하면 $f(t)=g(t)$이므로
$2t^3-9t^2+12t+1=mt+1$ ⋯⋯ ㉠
$f'(t)=m$이므로
$6t^2-18t+12=m$ ⋯⋯ ㉡
㉡을 ㉠에 대입하면
$2t^3-9t^2+12t+1=6t^3-18t^2+12t+1$
$4t^3-9t^2=0$
$t^2(4t-9)=0$
$t>0$이므로 $t=\frac{9}{4}$
이때 ㉡에서
$m=6\times\frac{81}{16}-18\times\frac{9}{4}+12=\frac{15}{8}$
따라서 모든 실수 x에 대하여 부등식 $f(x)\geq g(x)$가 성립하도록 하는 실수 m의 최댓값은 $\frac{15}{8}$이고, 최솟값은 직선 $y=1-x$의 기울기와 같은 -1이므로 구하는 합은
$\frac{15}{8}+(-1)=\frac{7}{8}$

답 ④

33

$g(x)=f(x)-f'(x)$에서 $f(0)=g(0)=0$이므로 $f'(0)=0$이다.
그러므로 $f(x)=x^3+ax^2$ (a는 상수)로 놓을 수 있다.
이때
$g(x)=x^3+ax^2-3x^2-2ax$
$\quad=x^3+(a-3)x^2-2ax$
$\quad=x\{x^2+(a-3)x-2a\}$
이차방정식 $x^2+(a-3)x-2a=0$의 판별식을 D라 하면
$D=(a-3)^2+8a=a^2+2a+9=(a+1)^2+8>0$
이므로 이차방정식 $x^2+(a-3)x-2a=0$은 서로 다른 두 실근을 갖는다.
이 두 실근을 α, β라 하자.
만약 $\alpha\beta=0$이면 $a=0$이고 이차방정식 $x^2-3x=0$의 두 실근은 0, 3이므로 조건을 만족시키지 않는다. 따라서 $\alpha\beta\neq 0$이고 조건을 만족시키려면 $\alpha+\beta>0$, $\alpha\beta>0$이어야 한다. 즉, $-a+3>0$, $-2a>0$이어야 하므로 $a<0$이다.
이때 함수 $f(x)$의 모든 항의 계수가 정수이므로 $a\leq -1$이어야 한다.
따라서 $f(3)=27+9a\leq 18$이므로 구하는 $f(3)$의 최댓값은 18이다.

답 ④

필수 유형 ⑪

점 P의 시각 t $(t\geq 0)$에서의 위치 x가
$x=-\frac{1}{3}t^3+3t^2+k$
이므로 시각 t $(t\geq 0)$에서의 속도를 v, 가속도를 a라 하면
$v=-t^2+6t$
$a=-2t+6$
점 P의 가속도가 0일 때
$-2t+6=0$에서 $t=3$이고 이때 점 P의 위치가 40이므로
$-\frac{1}{3}\times 3^3+3\times 3^2+k=40$
따라서 $k=40+9-27=22$

답 22

34

두 점 P, Q의 시각 t $(t\geq 0)$에서의 속도를 각각 v_1, v_2, 가속도를 각각 a_1, a_2라 하면
$v_1=6t^2-6t-4$, $v_2=2t+4$
$a_1=12t-6$, $a_2=2$
$v_1=v_2$에서
$6t^2-6t-4=2t+4$
$6t^2-8t-8=0$
$2(3t+2)(t-2)=0$
$t\geq 0$이므로 $t=2$
$t=2$일 때,
$a_1=12\times 2-6=18$, $a_2=2$
이므로 구하는 두 점 P, Q의 가속도의 합은
$18+2=20$

답 ⑤

35

점 P의 시각 t $(t\geq 0)$에서의 속도를 v, 가속도를 a라 하면

$v=t^3-12t+9$

$a=3t^2-12$

ㄱ. $v=(t-3)(t^2+3t-3)=0$에서 $t\geq 0$이므로

$t=3$ 또는 $t=\dfrac{-3+\sqrt{21}}{2}$ ⋯⋯ ㉠

이고 이 값의 좌우에서 v의 부호가 바뀌므로 점 P는 운동 방향을 두 번 바꾼다. (참)

ㄴ. $a=3t^2-12=3(t+2)(t-2)$이므로 $a=0$일 때 $t=2$

$1\leq t\leq 3$에서 함수 v의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

t	1	⋯	2	⋯	3
a		$-$	0	$+$	
v	-2	↘	-7	↗	0

그러므로 점 P의 속력 $|v|$는 $t=2$에서 최댓값 7을 갖는다. (참)

ㄷ. ㉠에서 $\dfrac{-3+\sqrt{21}}{2}<3$이므로 점 P는 $t=3$에서 마지막으로 운동 방향을 바꾼다. 이때 가속도는

$a=3\times 3^2-12=15$ (참)

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

답 ⑤

36

점 P의 시각 t $(t\geq 0)$에서의 속도를 v라 하면

$v=3t^2-2at+b=3\left(t-\dfrac{a}{3}\right)^2+b-\dfrac{a^2}{3}$

이때 조건 (가)에 의하여 점 P가 운동 방향을 바꾸지 않으므로 0 이상의 모든 실수 t에 대하여 $v\geq 0$이어야 한다. 이때 $a>0$이므로

$b-\dfrac{a^2}{3}\geq 0$, 즉 $b\geq\dfrac{a^2}{3}$

한편, $t\geq 0$일 때 $v\geq 0$이므로 점 P의 속력은

$|v|=v=3\left(t-\dfrac{a}{3}\right)^2+b-\dfrac{a^2}{3}$

이다. 조건 (나)에 의하여 $|v|$이 $t=\dfrac{2}{3}$일 때 최소이므로

$\dfrac{a}{3}=\dfrac{2}{3}$, 즉 $a=2$

그러므로 $b\geq\dfrac{a^2}{3}=\dfrac{4}{3}$

따라서 $x=t^3-2t^2+bt$ $\left(b\geq\dfrac{4}{3}\right)$이고 점 P의 시각 $t=3$에서의 위치는

$27-2\times 9+3b=3b+9\geq 3\times\dfrac{4}{3}+9=13$

이므로 구하는 최솟값은 13이다.

답 13

06 다항함수의 적분법

정답 본문 66~75쪽

필수 유형 ❶ 4	01 ③	02 ③	03 ②
	04 ②	05 ②	
필수 유형 ❷ ①	06 ①	07 ①	08 ⑤
	09 ②	10 80	11 ③
필수 유형 ❸ 14	12 ③	13 ①	14 32
필수 유형 ❹ ①	15 ⑤	16 14	17 ①
	18 27	19 ③	20 ②
필수 유형 ❺ 5	21 ④	22 ③	23 ④
필수 유형 ❻ 36	24 8	25 ②	26 ③
	27 ③	28 ④	29 40
필수 유형 ❼ ②	30 ④	31 12	
필수 유형 ❽ ③	32 ②	33 ⑤	34 63

필수 유형 ❶

$f(x)=\int(3x^2+2x)\,dx=x^3+x^2+C$ (C는 적분상수)

이고, $f(0)=C=2$

따라서 $f(x)=x^3+x^2+2$이므로

$f(1)=1+1+2=4$

답 4

01

$f(x)=\int(4x+3)\,dx=2x^2+3x+C$ (C는 적분상수)

$f(1)=2+3+C=0$에서 $C=-5$

따라서 $f(x)=2x^2+3x-5$이므로

$f(2)=8+6-5=9$

답 ③

02

$f(x)=\int(5x-k)\,dx-\int(x+k)\,dx$

$=\int\{(5x-k)-(x+k)\}\,dx$

$=\int(4x-2k)\,dx=2x^2-2kx+C$ (C는 적분상수)

에서 $f'(x)=4x-2k$

$f'(1)=2$에서 $4-2k=2$이므로 $k=1$

$f(1)=0$에서 $2-2k+C=0$이므로 $C=0$

따라서 $f(x)=2x^2-2x$이므로

$f(2)=8-4=4$

답 ③

03

$G(x)=x^2f(x)-2x^6+3x^5$ ...... ㉠

이때 $2xf(x)$의 한 부정적분이 $G(x)$이므로

$G'(x)=2xf(x)$

㉠의 양변을 x에 대하여 미분하면

$2xf(x)=2xf(x)+x^2f'(x)-12x^5+15x^4$

$x^2f'(x)=12x^5-15x^4$

$f(x)$는 다항함수이므로 $f'(x)=12x^3-15x^2$

$$f(x)=\int(12x^3-15x^2)dx$$

$$=3x^4-5x^3+C\ (C\text{는 적분상수})$$

㉠에서 $G(1)=f(1)+1$이고, $G(1)=4$이므로

$4=f(1)+1$, $f(1)=3$

$f(1)=3-5+C=3$에서 $C=5$

따라서 $f(x)=3x^4-5x^3+5$이므로

$f(2)=48-40+5=13$

답 ②

04

조건 (가)에서 $f'(x)=kx(x-2)$이므로

$$f(x)=\int f'(x)\,dx=\int kx(x-2)\,dx=\int(kx^2-2kx)\,dx$$

$$=\frac{1}{3}kx^3-kx^2+C\ (C\text{는 적분상수})$$

이고, $f(0)=2$이므로 $C=2$

함수 $f(x)$는 $x=0$, $x=2$에서 극값을 갖고, 조건 (나)에서

$f(0)+f(2)=0$이므로

$$2+\left(\frac{8}{3}k-4k+2\right)=0$$

$-\frac{4}{3}k+4=0$에서 $k=3$

따라서 $f(x)=x^3-3x^2+2$이므로

$f(-1)=-2$

답 ②

05

$f(x)=\int(3x^2+ax)\,dx=x^3+\frac{a}{2}x^2+C$ (C는 적분상수)

$\lim\limits_{x\to1}\frac{f(x)}{x^2-1}=\frac{1}{2}$에서 $x\to1$일 때, 극한값이 존재하고 (분모) $\to0$이므로 (분자) $\to0$이어야 한다.

즉, $\lim\limits_{x\to1}f(x)=f(1)=0$이므로

$1+\frac{a}{2}+C=0$ ...... ㉠

$$\lim_{x\to1}\frac{f(x)}{x^2-1}=\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{(x-1)(x+1)}=\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}\times\lim_{x\to1}\frac{1}{x+1}$$

$$=\frac{1}{2}f'(1)=\frac{1}{2}$$

에서 $f'(1)=1$

$f'(x)=3x^2+ax$에서 $f'(1)=3+a=1$이므로 $a=-2$

$a=-2$를 ㉠에 대입하면 $C=0$

따라서 $f(x)=x^3-x^2$이므로 $f(2)=8-4=4$

답 ②

필수 유형 ❷

$$\int_0^2(3x^2+6x)\,dx=\Big[x^3+3x^2\Big]_0^2=(2^3+3\times2^2)-0=20$$

답 ①

06

$$\int_0^3(x^2+x|1-x|)dx$$

$$=\int_0^1(x^2+x|1-x|)dx+\int_1^3(x^2+x|1-x|)dx$$

$$=\int_0^1\{x^2+x(1-x)\}\,dx+\int_1^3\{x^2-x(1-x)\}\,dx$$

$$=\int_0^1 x\,dx+\int_1^3(2x^2-x)\,dx=\Big[\frac{1}{2}x^2\Big]_0^1+\Big[\frac{2}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2\Big]_1^3$$

$$=\frac{1}{2}+\frac{40}{3}=\frac{83}{6}$$

답 ①

07

$\int_0^1\left(\frac{2}{3}x^2+\frac{1}{9}x+\frac{k}{6}\right)dx=-\frac{1}{18}$의 양변에 18을 곱하면

$18\int_0^1\left(\frac{2}{3}x^2+\frac{1}{9}x+\frac{k}{6}\right)dx=-1$이므로

$$18\int_0^1\left(\frac{2}{3}x^2+\frac{1}{9}x+\frac{k}{6}\right)dx=\int_0^1 18\left(\frac{2}{3}x^2+\frac{1}{9}x+\frac{k}{6}\right)dx$$

$$=\int_0^1(12x^2+2x+3k)\,dx$$

$$=\Big[4x^3+x^2+3kx\Big]_0^1=5+3k=-1$$

따라서 $k=-2$

답 ①

08

$$\int_0^1\{f(x)+x^2\}\,dx=\int_0^1\{(2x^2+6ax+10)+x^2\}\,dx$$

$$=\int_0^1(3x^2+6ax+10)dx$$

$$=\Big[x^3+3ax^2+10x\Big]_0^1=3a+11$$

$f(1)=6a+12$

따라서 $3a+11=6a+12$이므로 $a=-\frac{1}{3}$

답 ⑤

09

$\int_0^a(3x^2+x+5)\,dx=\int_0^a(x+9)\,dx$에서

$$\int_0^a(3x^2+x+5)\,dx-\int_0^a(x+9)\,dx=0$$

$$\int_0^a \{(3x^2+x+5)-(x+9)\}\,dx=0$$

$$\int_0^a (3x^2-4)\,dx=0$$

$$\Big[x^3-4x\Big]_0^a=a^3-4a=0,\ a(a-2)(a+2)=0$$

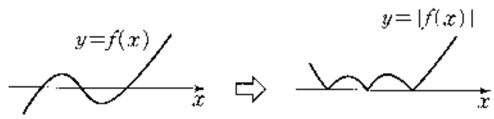
따라서 $a>0$이므로 $a=2$

답 ②

10

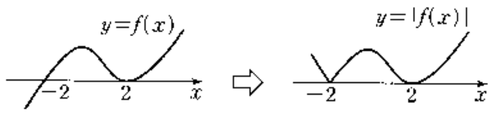
실수 a의 값에 따라 삼차함수 $y=f(x)$의 그래프는 그림과 같다.

(i) $a\neq-2$이고 $a\neq 2$일 때



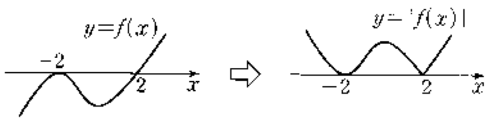
$f(x)=(x-2)(x+2)(x+a)$이므로
함수 $y=|f(x)|$는 세 개의 x의 값에서 미분가능하지 않으므로 조건을 만족시키지 않는다.

(ii) $a=-2$일 때



$f(x)=(x-2)^2(x+2)$이므로
함수 $y=|f(x)|$는 $x=-2$에서만 미분가능하지 않다.
즉, 음수인 한 개의 x의 값에서만 미분가능하지 않으므로 조건을 만족시키지 않는다.

(iii) $a=2$일 때



$f(x)=(x-2)(x+2)^2$이므로
함수 $y=|f(x)|$는 $x=2$에서만 미분가능하지 않다.
즉, 양수인 한 개의 x의 값에서만 미분가능하지 않으므로 조건을 만족시킨다.

따라서 $a=2$이고, $f(x)=(x-2)(x+2)^2$이므로

$$\int_0^{2a} f'(x)\,dx=\int_0^4 f'(x)\,dx=\Big[(x-2)(x+2)^2\Big]_0^4$$
$$=72-(-8)=80$$

답 80

11

조건 (가)에서 $x\to 1$일 때, 극한값이 존재하고 (분모) $\to 0$이므로 (분자) $\to 0$이어야 한다. 즉,

$\lim_{x\to 1} f(x)=f(1)=0$

조건 (나)에서 $f(a)-f(0)=f(a)-f(1)=0$이므로

$f(a)=f(0)=f(1)=0$

즉, $f(x)=x(x-1)(x-a)$이므로

$$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{x(x-1)(x-a)}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to 1}x(x-a)=1-a=-3$$

에서 $a=4$

따라서 $f(x)=x(x-1)(x-4)=x^3-5x^2+4x$이므로

$$\int_0^1 f(x)\,dx=\int_0^1 (x^3-5x^2+4x)\,dx=\Big[\frac{1}{4}x^4-\frac{5}{3}x^3+2x^2\Big]_0^1$$
$$=\frac{1}{4}-\frac{5}{3}+2=\frac{7}{12}$$

답 ③

《 필수 유형 ❸ 》

$$\int_{-a}^a 3x(x+1)^2dx=\int_{-a}^a (3x^3+6x^2+3x)\,dx$$
$$=\int_{-a}^a 6x^2dx+\int_{-a}^a (3x^3+3x)\,dx$$
$$=2\int_0^a 6x^2dx+0=2\Big[2x^3\Big]_0^a$$
$$=2\times 2a^3=56$$

따라서 $a^3=14$

답 14

12

$$\int_{-1}^1 (4x^3+ax^2+ax)\,dx=\int_{-1}^1 ax^2dx+\int_{-1}^1 (4x^3+ax)\,dx$$
$$=2\int_0^1 ax^2dx+0=2\Big[\frac{a}{3}x^3\Big]_0^1=2\times\frac{a}{3}=2$$

따라서 $a=3$

답 ③

13

$$\int_{-1}^1 f(x)\,dx=2\int_0^1 ax^2dx=2\Big[\frac{a}{3}x^3\Big]_0^1=\frac{2}{3}a$$

$$\int_{-1}^1 xf(x)\,dx=2\int_0^1 (x^4+bx^2)\,dx=2\Big[\frac{1}{5}x^5+\frac{b}{3}x^3\Big]_0^1=\frac{2}{5}+\frac{2}{3}b$$

이므로 조건 (가)에서

$$4\int_{-1}^1 f(x)\,dx+5\int_{-1}^1 xf(x)\,dx=4\times\frac{2}{3}a+5\times\Big(\frac{2}{5}+\frac{2}{3}b\Big)=0$$

$4a+5b+3=0$ …… ㉠

$f'(x)=3x^2+2ax+b$이므로 조건 (나)에서

$f'(1)=3+2a+b=0$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-2$, $b=1$

따라서 $f(x)=x^3-2x^2+x$이므로

$f(3)=27-18+3=12$

답 ①

14

$f'(x)=4x^3+ax^2+bx+c$ (a, b, c는 상수)라 하면

조건 (가)에서 $\int_{-a}^a f'(x)\,dx=2\int_0^a (ax^2+c)\,dx=0$

즉, $a=0$, $c=0$이므로 $f'(x)=4x^3+bx$

조건 (나)에서 $f(1)=0$, $f'(1)=0$이므로

$f'(1)=4+b=0$에서 $b=-4$

즉, $f'(x)=4x^3-4x$

$f(x)=x^4-2x^2+d$ (d는 상수)라 하면

$f(1)=1-2+d=0$에서 $d=1$

즉, $f(x)=x^4-2x^2+1$이므로

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx=2\int_0^1 (x^4-2x^2+1)\,dx=2\left[\frac{1}{5}x^5-\frac{2}{3}x^3+x\right]_0^1$$

$$=2\left(\frac{1}{5}-\frac{2}{3}+1\right)=\frac{16}{15}$$

따라서 $30\times\int_{-1}^{1} f(x)\,dx=30\times\frac{16}{15}=32$

답 32

《 필수 유형 ❹ 》

$f(x)=4x^3+x\int_0^1 f(t)\,dt$에서

$\int_0^1 f(t)\,dt=k$ (k는 상수) …… ㉠

라 하면

$f(x)=4x^3+kx$

㉠에서

$$\int_0^1 f(t)\,dt=\int_0^1 (4t^3+kt)\,dt=\left[t^4+\frac{k}{2}t^2\right]_0^1=1+\frac{k}{2}=k$$

이므로 $k=2$

따라서 $f(x)=4x^3+2x$이므로

$f(1)=4+2=6$

답 ①

15

$f(x)=4x^2-6x+\int_0^1 tf(t)\,dt$에서

$\int_0^1 tf(t)\,dt=k$ (k는 상수) …… ㉠

라 하면

$f(x)=4x^2-6x+k$

㉠에서

$$\int_0^1 tf(t)\,dt=\int_0^1 t(4t^2-6t+k)\,dt=\int_0^1 (4t^3-6t^2+kt)\,dt$$

$$=\left[t^4-2t^3+\frac{k}{2}t^2\right]_0^1=-1+\frac{k}{2}=k$$

이므로 $k=-2$

따라서 $f(x)=4x^2-6x-2$이므로

$f(-1)=8$

답 ⑤

16

$f(x)=ax^2+\int_1^x (t-1)(t-5)\,dt$ …… ㉠

㉠의 양변에 $x=1$을 대입하면

$f(1)=a+\int_1^1 (t-1)(t-5)\,dt=a+0=3$

에서 $a=3$

㉠의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f'(x)=2ax+(x-1)(x-5)$이므로

$f'(3)=6a+2\times(-2)=6\times3-4=14$

답 14

17

$$f(x)=\int_0^x x(2t+a)\,dt=x\int_0^x (2t+a)\,dt$$

의 양변을 x에 대하여 미분하면

$$f'(x)=\int_0^x (2t+a)\,dt+x(2x+a)$$

따라서

$$f'(1)=\int_0^1 (2t+a)\,dt+(2+a)=\left[t^2+at\right]_0^1+(2+a)$$

$$=(1+a)+(2+a)=2a+3=5$$

이므로 $a=1$

답 ①

18

$\lim\limits_{x\to1}\frac{f(x)-3}{x^2-1}=b$에서 $x\to1$일 때, 극한값이 존재하고 (분모) → 0이므로 (분자) → 0이어야 한다.

즉, $\lim\limits_{x\to1}\{f(x)-3\}=f(1)-3=0$에서 $f(1)=3$

함수 $f(x)=\int_0^x (3t^2+a)\,dt$의 양변에 $x=1$을 대입하면

$$f(1)=\int_0^1 (3t^2+a)\,dt=\left[t^3+at\right]_0^1=1+a=3$$

에서 $a=2$

$$\lim_{x\to1}\frac{f(x)-3}{x^2-1}=\lim_{x\to1}\left\{\frac{1}{x+1}\times\frac{f(x)-f(1)}{x-1}\right\}$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{1}{x+1}\times\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\frac{1}{2}f'(1)$$

함수 $f(x)=\int_0^x (3t^2+2)\,dt$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f'(x)=3x^2+2$이므로

$\frac{1}{2}f'(1)=\frac{1}{2}\times(3+2)=\frac{5}{2}$

따라서 $b=\frac{5}{2}$이므로

$a+10b=2+10\times\frac{5}{2}=27$

답 27

참고

$f(x)=\int_0^x (3t^2+2)\,dt=\left[t^3+2t\right]_0^x=x^3+2x$이므로

$$\lim_{x\to1}\frac{f(x)-3}{x^2-1}=\lim_{x\to1}\frac{x^3+2x-3}{x^2-1}$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)(x^2+x+3)}{(x-1)(x+1)}$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{x^2+x+3}{x+1}=\frac{5}{2}$$

따라서 $b=\frac{5}{2}$

19

$$\int_1^x f(t)\,dt=(x+1)f(x)+x^3-3x \quad \cdots\cdots ㉠$$

㉠의 양변에 $x=1$을 대입하면

$$\int_1^1 f(t)\,dt=2f(1)-2$$

$0=2f(1)-2$이므로

$f(1)=1 \quad \cdots\cdots ㉡$

한편, ㉠의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x)=f(x)+(x+1)f'(x)+3x^2-3$

$(x+1)f'(x)=-3x^2+3=-3(x-1)(x+1)$

이 등식은 모든 실수 x에 대하여 성립하므로

$f'(x)=-3x+3$

$$f(x)=\int f'(x)\,dx=\int(-3x+3)\,dx$$

$$=-\frac{3}{2}x^2+3x+C \ (C\text{는 적분상수})$$

㉡에서 $f(1)=1$이므로

$-\frac{3}{2}+3+C=1$, $C=-\frac{1}{2}$

따라서 $f(x)=-\frac{3}{2}x^2+3x-\frac{1}{2}$이므로

$f(2)=-6+6-\frac{1}{2}=-\frac{1}{2}$

답 ③

20

조건 (가)에서 주어진 등식의 양변에 $x=1$을 대입하면

$0=1+a+b+1$

$a+b=-2 \quad \cdots\cdots ㉠$

조건 (가)에서 주어진 등식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f'(x)=3x^2+2ax+b$

조건 (나)에서 $f'(3)=0$이므로

$f'(3)=27+6a+b=0$

$6a+b=-27 \quad \cdots\cdots ㉡$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=-5$, $b=3$

즉, $f'(x)=3x^2-10x+3$이므로

$$\int_1^3 f'(x)\,dx=\int_1^3(3x^2-10x+3)\,dx$$

$$=\Big[x^3-5x^2+3x\Big]_1^3$$

$$=(27-45+9)-(1-5+3)=-8$$

답 ②

필수 유형 ❺

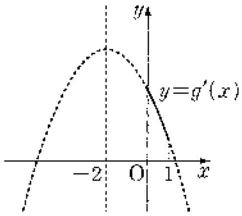
$g(x)=\int_0^x f(t)\,dt$에서

$$g'(x)=\frac{d}{dx}\left\{\int_0^x f(t)\,dt\right\}=f(x)$$

$$=-x^2-4x+a$$

$$=-(x+2)^2+a+4$$

함수 $g(x)$가 닫힌구간 $[0, 1]$에서 증가하려면 닫힌구간 $[0, 1]$에서 $g'(x)\geq 0$이어야 한다.



즉, $g'(1)=a-5\geq 0$이어야 하므로

$a\geq 5$

따라서 a의 최솟값은 5이다.

답 5

21

$$f(x)=\int_0^x(3t^2-4)\,dt=\Big[t^3-4t\Big]_0^x$$

$$=x^3-4x=x(x+2)(x-2)$$

이때 $g'(x)=0$이면 $f(x)=0$이므로 $x=-2$ 또는 $x=0$ 또는 $x=2$이고, 함수 $g(x)$는 사차함수이므로 $x=0$에서 극댓값을 갖는다.

$$g(x)=\int(x^3-4x)\,dx=\frac{1}{4}x^4-2x^2+C \ (C\text{는 적분상수})$$

에서 $g(2)=0$이므로 $C=4$

따라서 함수 $g(x)$의 극댓값은 $g(0)=4$

답 ④

22

$f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ (a, b, c는 상수)라 하면

$f'(x)=3x^2+2ax+b$

주어진 조건에서 함수 $g(x)$가 $x=0$에서 극솟값 3을 가지므로

$$g(0)=\int_0^0 f'(t)\,dt+(0+1)f(0)+1=f(0)+1=3$$

즉, $f(0)=2$이므로 $c=2$

$g'(x)=f'(x)+f(x)+(x+1)f'(x)$에서

$g'(0)=f'(0)+f(0)+(0+1)f'(0)=2f'(0)+2=0$

이므로 $f'(0)=-1$

즉, $b=-1$

주어진 조건에서 $g(1)=8$이고 $f(x)=x^3+ax^2-x+2$이므로

$$g(1)=\int_0^1 f'(t)\,dt+(1+1)f(1)+1$$

$$=\Big[f(t)\Big]_0^1+2f(1)+1$$

$$=f(1)-f(0)+2f(1)+1$$

$$=3f(1)-1$$

$$=3(1+a-1+2)-1$$

$$=3a+5=8$$

에서 $a=1$

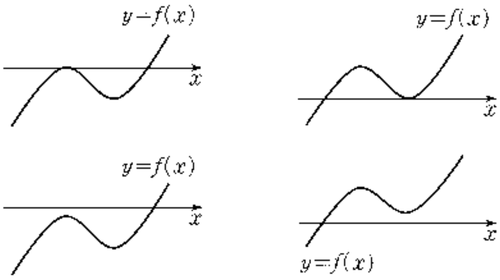
따라서 $f(x)=x^3+x^2-x+2$이므로

$f(-1)=-1+1+1+2=3$

답 ③

23

함수 $h(k)$의 최댓값이 2가 되려면 사차함수 $g(x)$가 극솟값을 갖는 x의 값이 오직 하나이어야 하므로 $g(x)$의 도함수인 삼차함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형은 다음과 같아야 한다.



즉, 방정식 $f(x)=0$의 서로 다른 실근의 개수가 1 또는 2이어야 한다.

$f(x)=x^3-3x^2+a$에서

$f'(x)=3x^2-6x=3x(x-2)$

$f(0)f(2)\geq 0$이어야 하므로

$a(a-4)\geq 0$

$a\leq 0$ 또는 $a\geq 4$에서 양수 a의 최솟값은 4이다.

답 ④

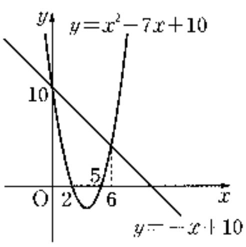
필수 유형 ❻

곡선 $y=x^2-7x+10$과 직선 $y=-x+10$의 교점의 x좌표는

$x^2-7x+10=-x+10$에서 $x^2-6x=0$, $x(x-6)=0$

$x=0$ 또는 $x=6$

따라서 곡선 $y=x^2-7x+10$과 직선 $y=-x+10$은 그림과 같으므로 구하는 넓이를 S라 하면



$$S=\int_0^6 |(-x+10)-(x^2-7x+10)|\,dx$$

$$=\int_0^6 (-x^2+6x)\,dx=\left[-\frac{1}{3}x^3+3x^2\right]_0^6$$

$$=-72+108=36$$

답 36

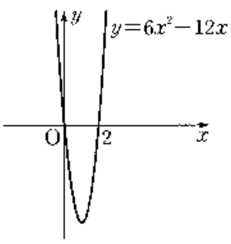
24

곡선 $y=6x^2-12x$와 x축의 교점의 x좌표는

$6x^2-12x=0$에서 $6x(x-2)=0$

$x=0$ 또는 $x=2$

따라서 구하는 넓이를 S라 하면



$$S=\int_0^2 |6x^2-12x|\,dx$$

$$=\int_0^2 (-6x^2+12x)\,dx$$

$$=\left[-2x^3+6x^2\right]_0^2$$

$$=8$$

답 8

25

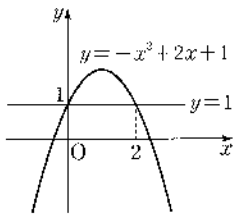
곡선 $y=-x^2+2x+1$과 직선 $y=1$의 교점의 x좌표는

$-x^2+2x+1=1$에서 $x^2-2x=0$

$x(x-2)=0$

$x=0$ 또는 $x=2$

곡선 $y=-x^2+2x+1$과 직선 $y=1$은 그림과 같다.



따라서 구하는 넓이는

$$\int_0^2 \{(-x^2+2x+1)-1\}\,dx=\int_0^2 (-x^2+2x)\,dx$$

$$=\left[-\frac{1}{3}x^3+x^2\right]_0^2$$

$$=-\frac{8}{3}+4=\frac{4}{3}$$

답 ②

26

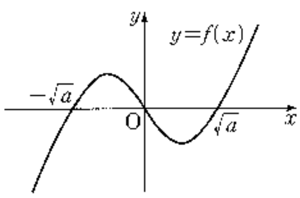
함수 $f(x)=x^3-ax$의 그래프와 x축의 교점의 x좌표는

$x^3-ax=0$에서 a가 양수이므로

$x(x+\sqrt{a})(x-\sqrt{a})=0$

$x=0$ 또는 $x=-\sqrt{a}$ 또는 $x=\sqrt{a}$

함수 $f(x)=x^3-ax$의 그래프는 그림과 같다.



따라서 모든 실수 x에 대하여 $f(-x)=-f(x)$이므로

구하는 넓이는

$$\int_{-\sqrt{a}}^{\sqrt{a}} |x^3-ax|\,dx=2\int_{-\sqrt{a}}^{0} (x^3-ax)\,dx=2\left[\frac{1}{4}x^4-\frac{a}{2}x^2\right]_{-\sqrt{a}}^{0}$$

$$=2\left(-\frac{1}{4}a^2+\frac{1}{2}a^2\right)=\frac{1}{2}a^2=18$$

$a^2=36$

$a>0$이므로 $a=6$

따라서 $f(x)=x^3-6x$이므로 $f(-1)=5$

답 ③

27

$f(x)=x^3-2x^2+k$에서 $f'(x)=3x^2-4x$이므로

$f'(x)=0$에서 $x(3x-4)=0$

$x=0$ 또는 $x=\frac{4}{3}$

즉, $x=0$에서 극댓값을 가지므로 곡선 $y=x^3-2x^2+k$ 위의 점 $(0, k)$에서의 접선의 방정식은 $y=k$이다.

곡선 $y=x^3-2x^2+k$와 직선 $y=k$의 교점의 x좌표는

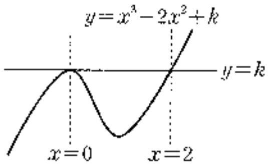
$x^3-2x^2+k=k$에서 $x^3-2x^2=0$이므로

$x^2(x-2)=0$

$x=0$ 또는 $x=2$

따라서 곡선 $y=x^3-2x^2+k$와 직선 $y=k$로 둘러싸인 부분의 넓이를 S라 하면

$$S=\int_0^2 |k-(x^3-2x^2+k)|\,dx$$
$$=\int_0^2 (-x^3+2x^2)\,dx$$
$$=\left[-\frac{1}{4}x^4+\frac{2}{3}x^3\right]_0^2$$
$$=\frac{4}{3}$$



답 ③

28

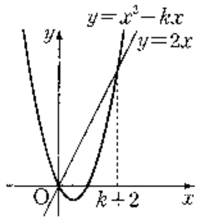
곡선 $y=x^2-kx$와 직선 $y=2x$의 교점의 x좌표는

$x^2-kx=2x$에서 $x^2-(k+2)x=0$

$x\{x-(k+2)\}=0$

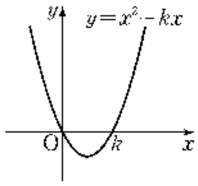
$x=0$ 또는 $x=k+2$

따라서 곡선 $y=x^2-kx$와 직선 $y=2x$로 둘러싸인 부분의 넓이 S_1은



$$S_1=\int_0^{k+2}\{2x-(x^2-kx)\}\,dx$$
$$=\int_0^{k+2}\{-x^2+(k+2)x\}\,dx$$
$$=\left[-\frac{1}{3}x^3+\frac{k+2}{2}x^2\right]_0^{k+2}=\frac{(k+2)^3}{6}$$

곡선 $y=x^2-kx$와 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이 S_2는



$$S_2=\int_0^k(-x^2+kx)\,dx$$
$$=\left[-\frac{1}{3}x^3+\frac{k}{2}x^2\right]_0^k=\frac{k^3}{6}$$

$S_1=8S_2$이므로 $(k+2)^3=(2k)^3$에서 $k+2=2k$

따라서 $k=2$

답 ④

29

조건 (나)에서 $x \to 0$일 때 극한값이 존재하고 (분모) $\to$ 0이므로 (분자) $\to$ 0이어야 한다.

즉, $\lim\limits_{x\to 0}\{f(x)-1\}=0$에서 $f(0)=1$

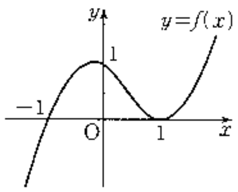
이때 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-1}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=f'(0)=-1$이므로 $a=-1$

즉, $f'(x)=3x^2-2x-1$에서

$f(x)=x^3-x^2-x+C$ (C는 적분상수)이고, $f(0)=1$이므로 $C=1$

따라서 $f(x)=x^3-x^2-x+1=(x+1)(x-1)^2$이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이 S는

$$S=\int_{-1}^1(x^3-x^2-x+1)\,dx$$
$$=\int_{-1}^1(-x^2+1)\,dx+\int_{-1}^1(x^3-x)\,dx$$
$$=2\int_0^1(-x^2+1)\,dx+0$$
$$=2\left[-\frac{1}{3}x^3+x\right]_0^1=\frac{4}{3}$$



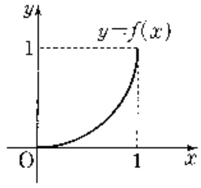
따라서 $30S=30\times\dfrac{4}{3}=40$

답 40

필수 유형 ⑦

주어진 조건에서 $f(0)=0$, $f(1)=1$, $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx=\frac{1}{6}$

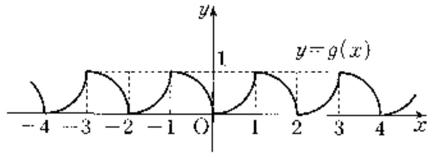
이므로 $0\le x\le 1$일 때, 함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형이 그림과 같다고 하자.



또한 조건 (가)에서

$-1<x<0$일 때, 함수 $y=g(x)$의 그래프는 $0<x<1$일 때의 함수 $y=f(x)$의 그래프를 x축에 대하여 대칭이동한 후 x축의 방향으로 -1만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것과 같다.

이때 조건 (나)에서 함수 $g(x)$는 주기가 2인 주기함수이므로 함수 $y=g(x)$의 그래프의 개형은 그림과 같이 나타낼 수 있다.



한편, $\displaystyle\int_0^1 g(x)\,dx=\int_0^1 f(x)\,dx=\frac{1}{6}$이고

$$\int_{-1}^0 g(x)\,dx=1-\int_0^1 f(x)\,dx=1-\frac{1}{6}=\frac{5}{6}$$
$$\int_{-1}^1 g(x)\,dx=\int_{-1}^0 g(x)\,dx+\int_0^1 f(x)\,dx=\frac{5}{6}+\frac{1}{6}=1$$

이때 함수 $g(x)$의 주기는 2이므로

$$\int_{-3}^2 g(x)\,dx=\int_{-3}^{-1} g(x)\,dx+\int_{-1}^1 g(x)\,dx+\int_1^2 g(x)\,dx$$
$$=\int_{-1}^1 g(x)\,dx+\int_{-1}^1 g(x)\,dx+\int_{-1}^0 g(x)\,dx$$
$$=1+1+\frac{5}{6}=\frac{17}{6}$$

답 ②

30

조건 (가)에서 함수 $f(x)$가 $x=0$에서 연속이므로

$\lim\limits_{x\to 0-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0+} f(x)=f(0)$

에서 $b=3$

조건 (나)에서 $x=0$일 때, $f(-3)=f(3)$이고

$f(-3)=\lim\limits_{x\to 3-} f(x)=0$이므로

$0=9+3a+b$

$b=3$이므로 $a=-4$

따라서 $f(x)=\begin{cases} x+3 & (-3<x<0) \\ x^2-4x+3 & (0\le x\le 3)\end{cases}$이고

$f(x-3)=f(x+3)$에서 $f(x)=f(x+6)$

즉, $f(x)$는 주기가 6인 주기함수이므로

$$\int_{-33}^{-29} f(x)\,dx=\int_{-3}^1 f(x)\,dx$$
$$\int_{57}^{60} f(x)\,dx=\int_3^6 f(x)\,dx$$

따라서

$$\int_{-33}^{29} f(x)\,dx-\int_{57}^{60} f(x)\,dx=\int_{-3}^{1} f(x)\,dx-\int_{3}^{0} f(x)\,dx$$
$$=\int_{0}^{1} f(x)\,dx=\int_{0}^{1}(x^2-4x+3)\,dx$$
$$=\left[\frac{1}{3}x^3-2x^2+3x\right]_0^1$$
$$=\frac{1}{3}-2+3=\frac{4}{3}$$

답 ④

31

함수 $f(x)=-x^3+ax^2-3ax+10$의 도함수는

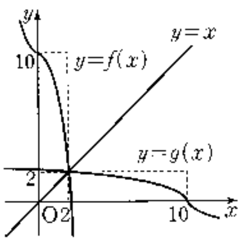
$f'(x)=-3x^2+2ax-3a$

이때 삼차함수 $f(x)=-x^3+ax^2-3ax+10$의 역함수가 존재하려면 극값을 갖지 않아야 한다. 즉, 이차방정식 $f'(x)=0$이 서로 다른 두 실근을 갖지 않아야 하므로 이차방정식 $f'(x)=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=a^2-9a=a(a-9)\le 0$

$0\le a\le 9$

따라서 a의 최솟값은 0이므로 $f(x)=-x^3+10$이고, 그 역함수인 $y=g(x)$의 그래프는 그림과 같다.



따라서

$$\int_{2}^{10} g(x)\,dx=\int_{0}^{2} f(x)\,dx-2\times 2=\int_{0}^{2}(-x^3+10)\,dx-4$$
$$=\left[-\frac{1}{4}x^4+10x\right]_0^2-4=16-4=12$$

답 12

필수 유형 8

$t\ge 3$일 때, $v(t)=2t-6\ge 0$이므로

$$\int_{3}^{k}|v(t)|\,dt=\int_{3}^{k}(2t-6)\,dt=\left[t^2-6t\right]_3^k=(k^2-6k)-(9-18)$$
$$=k^2-6k+9=25$$

$k^2-6k-16=0$, $(k+2)(k-8)=0$

따라서 $k>3$이므로 $k=8$

답 ③

32

시각 $t=0$에서의 위치를 a라 하면 시각 $t=4$에서의 위치는

$$a+\int_{0}^{4} v(t)\,dt=a+\int_{0}^{4}(-2t+10)\,dt=a+\left[-t^2+10t\right]_0^4$$
$$=a+(-16+40)=a+24$$

이때 시각 $t=4$에서의 위치가 30이므로

$a+24=30$, $a=6$

따라서 시각 $t=1$에서의 위치는

$$6+\int_{0}^{1} v(t)\,dt=6+\int_{0}^{1}(-2t+10)\,dt=6+\left[-t^2+10t\right]_0^1$$
$$=6+(-1+10)=15$$

답 ②

다른 풀이

점 P의 시각 $t=1$에서의 위치를 a라 하면 시각 $t=4$에서의 위치는

$$a+\int_{1}^{4} v(t)\,dt=a+\int_{1}^{4}(-2t+10)\,dt=a+\left[-t^2+10t\right]_1^4=a+15$$

이므로 $a+15=30$에서 $a=15$

따라서 점 P의 시각 $t=1$에서의 위치는 15이다.

33

시각 $t=1$에서의 점 P의 위치가 -5이므로

$$0+\int_{0}^{1} v(t)\,dt=\int_{0}^{1}(3t^2-4t+k)dt=\left[t^3-2t^2+kt\right]_0^1$$
$$=k-1=-5$$

에서 $k=-4$

즉, $v(t)=3t^2-4t-4$

점 P가 움직이는 방향이 바뀔 때 속도 $v(t)=0$이므로

$3t^2-4t-4=0$에서 $(3t+2)(t-2)=0$

$t>0$이므로 $t=2$

$0<t<2$일 때 $v(t)<0$이고 $t>2$일 때 $v(t)>0$이므로

시각 $t=2$일 때 점 P가 움직이는 방향을 바꾼다.

따라서 시각 $t=0$에서 시각 $t=2$까지 점 P가 움직인 거리는

$$\int_{0}^{2}|v(t)|\,dt=\int_{0}^{2}|3t^2-4t-4|\,dt=\int_{0}^{2}(-3t^2+4t+4)\,dt$$
$$=\left[-t^3+2t^2+4t\right]_0^2=8$$

답 ⑤

34

두 점 P, Q가 동시에 원점을 출발한 후 다시 만나는 위치 x가 $x=k$일 때의 시각을 $t=a$ $(a>0)$이라 하면

$$0+\int_{0}^{a} v_1\,dt=0+\int_{0}^{a} v_2\,dt$$
$$\int_{0}^{a}(3t^2+t)\,dt=\int_{0}^{a}(2t^2+3t)\,dt$$
$$\left[t^3+\frac{1}{2}t^2\right]_0^a=\left[\frac{2}{3}t^3+\frac{3}{2}t^2\right]_0^a$$
$$a^3+\frac{1}{2}a^2=\frac{2}{3}a^3+\frac{3}{2}a^2$$
$$\frac{1}{3}a^3-a^2=\frac{1}{3}a^2(a-3)=0$$

$a>0$이므로 $a=3$

따라서 시각 $t=3$에서의 점 P의 위치(또는 점 Q의 위치) $x=k$에서

$k=3^3+\frac{1}{2}\times 3^2=\frac{63}{2}$이므로

$2k=2\times\frac{63}{2}=63$

답 63

07 수열의 극한

정답 본문 78~85쪽

필수 유형 ❶ ③	01 ③	02 ②	03 ②
필수 유형 ❷ ⑤	04 ①	05 ④	06 8
필수 유형 ❸ 15	07 ②	08 ③	09 4
필수 유형 ❹ ⑤	10 ⑤	11 ③	12 ②
필수 유형 ❺ 16	13 ①	14 ④	15 ③
필수 유형 ❻ ③	16 ④	17 4	18 ④
필수 유형 ❼ ②	19 ①	20 ⑤	21 4
필수 유형 ❽ ③	22 ①		

필수 유형 ❶

수열 $\{a_n\}$이 수렴하므로 $\lim_{n\to\infty} a_n=k$ (k는 상수)라 하자.

$k=-1$이면

$\lim_{n\to\infty}(a_n+1)=\lim_{n\to\infty} a_n+\lim_{n\to\infty} 1=(-1)+1=0$

$\lim_{n\to\infty}(2a_n-3)=2\lim_{n\to\infty} a_n-\lim_{n\to\infty} 3=2\times(-1)-3=-5$

이므로 수열 $\left\{\frac{2a_n-3}{a_n+1}\right\}$은 발산한다.

즉, $k\neq-1$이다.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2a_n-3}{a_n+1}=\frac{\lim_{n\to\infty}(2a_n-3)}{\lim_{n\to\infty}(a_n+1)}=\frac{2\lim_{n\to\infty} a_n-\lim_{n\to\infty} 3}{\lim_{n\to\infty} a_n+\lim_{n\to\infty} 1}=\frac{2k-3}{k+1}=\frac{3}{4}$$

에서

$3(k+1)=4(2k-3)$, $5k=15$, $k=3$

따라서 $\lim_{n\to\infty} a_n=3$

답 ③

01

$\lim_{n\to\infty} a_n=k$ (k는 실수)라 하면

$k\neq1$인 경우 $\lim_{n\to\infty}\frac{2a_n+1}{a_n-1}=\frac{2k+1}{k-1}$이므로

수열 $\left\{\frac{2a_n+1}{a_n-1}\right\}$은 수렴하고

$k=1$인 경우 $\lim_{n\to\infty}(a_n-1)=1-1=0$,

$\lim_{n\to\infty}(2a_n+1)=2\times1+1=3$이므로

수열 $\left\{\frac{2a_n+1}{a_n-1}\right\}$은 발산한다.

따라서 $\lim_{n\to\infty} a_n=1$이고,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n^3-1}{a_n-1}=\lim_{n\to\infty}\frac{(a_n-1)(a_n^2+a_n+1)}{a_n-1}$$
$$=\lim_{n\to\infty}(a_n^2+a_n+1)$$
$$=\lim_{n\to\infty} a_n^2+\lim_{n\to\infty} a_n+\lim_{n\to\infty} 1$$
$$=1^2+1+1=3$$

답 ③

02

$f(m)=2$이면

$\lim_{n\to\infty}(a_n-2)=\lim_{n\to\infty} a_n-\lim_{n\to\infty} 2=2-2=0$

$\lim_{n\to\infty}(-a_n+3)=-\lim_{n\to\infty} a_n+\lim_{n\to\infty} 3=-2+3=1$

이므로 수열 $\left\{\frac{-a_n+3}{a_n-2}\right\}$은 발산한다.

즉, $f(m)\neq2$이다.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{-a_n+3}{a_n-2}=\frac{\lim_{n\to\infty}(-a_n+3)}{\lim_{n\to\infty}(a_n-2)}=\frac{-\lim_{n\to\infty} a_n+\lim_{n\to\infty} 3}{\lim_{n\to\infty} a_n-\lim_{n\to\infty} 2}=\frac{-f(m)+3}{f(m)-2}=m$$

에서 $m\{f(m)-2\}=-f(m)+3$

$(m+1)f(m)=2m+3$

즉, $f(m)=\frac{2m+3}{m+1}$이고 $f(m)<\frac{32}{15}$에서

$\frac{2m+3}{m+1}<\frac{32}{15}$

$\frac{2m+3}{m+1}=\frac{2(m+1)+1}{m+1}=2+\frac{1}{m+1}<2+\frac{2}{15}$에서

$m+1>\frac{15}{2}$, $m>\frac{13}{2}$

따라서 자연수 m의 최솟값은 7이다.

답 ②

03

$a_n+b_n=p_n$, $c_n+d_n=q_n$이라 하면 두 수열 $\{p_n\}$, $\{q_n\}$은 각각 수렴한다.

ㄱ. 수열 $\{b_n\}$이 수렴한다고 가정하면 $a_n=p_n-b_n$에서 두 수열 $\{p_n\}$, $\{b_n\}$이 각각 수렴하므로 수열 $\{a_n\}$ 또한 수렴하고 이는 조건을 만족시키지 않는다. 따라서 수열 $\{b_n\}$은 발산한다. (참)

ㄴ. $b_n=p_n-a_n$, $d_n=q_n-c_n$에서

$b_n+d_n=(p_n-a_n)+(q_n-c_n)=p_n+q_n-(a_n+c_n)$

이때 세 수열 $\{p_n\}$, $\{q_n\}$, $\{a_n+c_n\}$이 각각 수렴하므로 수열 $\{b_n+d_n\}$도 수렴한다. (참)

ㄷ. $\{a_n\}$: 1, -1, 1, -1, 1, -1, $\cdots$

$\{b_n\}$: 1, 3, 1, 3, 1, 3, $\cdots$

$\{c_n\}$: 2, -2, 2, -2, 2, -2, $\cdots$

$\{d_n\}$: 2, 6, 2, 6, 2, 6, $\cdots$

이면

$\{a_n+b_n\}$: 2, 2, 2, 2, 2, 2, ⋯

$\{c_n+d_n\}$: 4, 4, 4, 4, 4, 4, ⋯

$\{a_n\times c_n\}$: 2, 2, 2, 2, 2, 2, ⋯

$\{b_n\times d_n\}$: 2, 18, 2, 18, 2, 18, ⋯

이때 두 수열 $\{a_n\}$, $\{c_n\}$은 각각 발산하고,

두 수열 $\{a_n+b_n\}$, $\{c_n+d_n\}$은 각각 수렴하며,

수열 $\{a_n\times c_n\}$이 수렴하지만 수열 $\{b_n\times d_n\}$은 발산한다. (거짓)

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

답 ②

필수 유형 ❷

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{5}{n}+\frac{3}{n^2}}{\frac{1}{n}-\frac{2}{n^3}}=\lim_{n\to\infty}\frac{5+\frac{3}{n}}{1-\frac{2}{n^2}}=\frac{5+0}{1-0}=5$$

답 ⑤

04

$$\lim_{n\to\infty}(\sqrt{an^2+6n+5}-\sqrt{bn^2+2n+3})$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(a-b)n^2+4n+2}{\sqrt{an^2+6n+5}+\sqrt{bn^2+2n+3}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(a-b)n+4+\frac{2}{n}}{\sqrt{a+\frac{6}{n}+\frac{5}{n^2}}+\sqrt{b+\frac{2}{n}+\frac{3}{n^2}}}$$

한편, $a\neq b$이면

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(a-b)n+4+\frac{2}{n}}{\sqrt{a+\frac{6}{n}+\frac{5}{n^2}}+\sqrt{b+\frac{2}{n}+\frac{3}{n^2}}}\right|=\infty\text{이므로}$$

$a=b$

따라서

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(a-b)n+4+\frac{2}{n}}{\sqrt{a+\frac{6}{n}+\frac{5}{n^2}}+\sqrt{b+\frac{2}{n}+\frac{3}{n^2}}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{4+\frac{2}{n}}{\sqrt{a+\frac{6}{n}+\frac{5}{n^2}}+\sqrt{a+\frac{2}{n}+\frac{3}{n^2}}}$$

$$=\frac{4}{\sqrt{a}+\sqrt{a}}=\frac{2}{\sqrt{a}}=\frac{2}{5}$$

에서 $\sqrt{a}=5$, $a=b=25$이므로

$a+b=25+25=50$

답 ①

05

(ⅰ) 다항함수 $f(x)$가 상수함수이거나 일차함수인 경우

$f(n)-n^2$은 최고차항의 계수가 -1인 n에 대한 이차식이고,

$f(n)-2n^2$은 최고차항의 계수가 -2인 n에 대한 이차식이므로

$\{f(n)-n^2\}\times\{f(n)-2n^2\}$은 최고차항의 계수가 2인 n에 대한 사차식이다.

따라서 $\lim_{n\to\infty}\frac{\{f(n)-n^2\}\times\{f(n)-2n^2\}}{n^4+n^2+1}=2$이고

조건 (가)를 만족시킨다.

(ⅱ) 다항함수 $f(x)$가 이차함수인 경우

함수 $f(x)$의 이차항의 계수를 p $(p\neq 0)$이라 하자.

① $p=1$인 경우

$f(n)-n^2$은 n에 대한 일차 이하의 식이므로

$\{f(n)-n^2\}\times\{f(n)-2n^2\}$은 n에 대한 삼차 이하의 식이다.

따라서 $\lim_{n\to\infty}\frac{\{f(n)-n^2\}\times\{f(n)-2n^2\}}{n^4+n^2+1}=0$이고

조건 (가)를 만족시키지 않는다.

② $p=2$인 경우

$f(n)-2n^2$은 n에 대한 일차 이하의 식이므로

$\{f(n)-n^2\}\times\{f(n)-2n^2\}$은 n에 대한 삼차 이하의 식이다.

따라서 $\lim_{n\to\infty}\frac{\{f(n)-n^2\}\times\{f(n)-2n^2\}}{n^4+n^2+1}=0$이고

조건 (가)를 만족시키지 않는다.

③ $p\neq 1$, $p\neq 2$인 경우

$f(n)-n^2$은 최고차항의 계수가 $p-1$인 n에 대한 이차식이고,

$f(n)-2n^2$은 최고차항의 계수가 $p-2$인 n에 대한 이차식이므로 $\{f(n)-n^2\}\times\{f(n)-2n^2\}$은 최고차항의 계수가 $(p-1)(p-2)$인 n에 대한 사차식이다.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\{f(n)-n^2\}\times\{f(n)-2n^2\}}{n^4+n^2+1}$$

$=(p-1)(p-2)$

$=p^2-3p+2=2$

에서

$p^2-3p=0$, $p(p-3)=0$

$p\neq 0$이므로 $p=3$

(ⅲ) 다항함수 $f(x)$의 차수가 삼차 이상인 경우

두 식 $f(n)-n^2$, $f(n)-2n^2$은 모두 n에 대한 삼차 이상의 식이므로 $\{f(n)-n^2\}\times\{f(n)-2n^2\}$은 n에 대한 육차 이상의 식이다.

따라서 $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\{f(n)-n^2\}\times\{f(n)-2n^2\}}{n^4+n^2+1}\right|=\infty$이고

조건 (가)를 만족시키지 않는다.

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에서

$f(x)=ax+b$ 또는 $f(x)=3x^2+cx+d$ (a, b, c, d는 실수)이고

조건 (나)에서 $f'(0)=1$이다.

$f(x)=ax+b$인 경우 $f'(x)=a$에서

$f'(0)=a=1$이고 $f(0)=b$이므로

$f(x)=x+b=x+f(0)$

$f(x)=3x^2+cx+d$인 경우 $f'(x)=6x+c$에서

$f'(0)=c=1$이고 $f(0)=d$이므로

$f(x)=3x^2+x+d=3x^2+x+f(0)$

따라서 $g(x)=f(x)-f(0)$에서

$g(x)=x$ 또는 $g(x)=3x^2+x$이고

서로 다른 $g(3)$의 값의 합은

$3+(3\times 3^2+3)=3+30=33$

답 ④

06

$$\sqrt{a_n+\frac{a_n}{n^2}}-\sqrt{a_n-\frac{a_n}{n^2}}=\frac{\left(a_n+\frac{a_n}{n^2}\right)-\left(a_n-\frac{a_n}{n^2}\right)}{\sqrt{a_n+\frac{a_n}{n^2}}+\sqrt{a_n-\frac{a_n}{n^2}}}$$

$$=\frac{\sqrt{a_n}}{n^2}\times\frac{2}{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}+\sqrt{1-\frac{1}{n^2}}}$$

이고

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2}{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}+\sqrt{1-\frac{1}{n^2}}}=\frac{2}{\sqrt{1}+\sqrt{1}}=1\text{이므로}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{a_n}}{n^2}=1$$

$$n^p\times\left\{\sqrt{1+\left(\frac{1}{a_n}\right)^2}-\sqrt{1-\left(\frac{1}{a_n}\right)^2}\right\}$$

$$=n^p\times\frac{\left\{1+\left(\frac{1}{a_n}\right)^2\right\}-\left\{1-\left(\frac{1}{a_n}\right)^2\right\}}{\sqrt{1+\left(\frac{1}{a_n}\right)^2}+\sqrt{1-\left(\frac{1}{a_n}\right)^2}}$$

$$=\frac{n^p}{(a_n)^2}\times\frac{2}{\sqrt{1+\left(\frac{1}{a_n}\right)^2}+\sqrt{1-\left(\frac{1}{a_n}\right)^2}}$$

$$=n^{p-8}\times\left(\frac{n^2}{\sqrt{a_n}}\right)^4\times\frac{2}{\sqrt{1+\left(\frac{1}{a_n}\right)^2}+\sqrt{1-\left(\frac{1}{a_n}\right)^2}}\quad\cdots\cdots\ ㉠$$

한편, $a_n\ge1$, $\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{a_n}}{n^2}=1$이므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{\sqrt{a_n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\frac{\sqrt{a_n}}{n^2}}=\frac{1}{1}=1\quad\cdots\cdots\ ㉡$$

$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{a_n}}{n^2}=1$에서 $\lim_{n\to\infty}a_n=\infty$이므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2}{\sqrt{1+\left(\frac{1}{a_n}\right)^2}+\sqrt{1-\left(\frac{1}{a_n}\right)^2}}=\frac{2}{\sqrt{1}+\sqrt{1}}=1\quad\cdots\cdots\ ㉢$$

㉠, ㉡, ㉢에서 수열 $\left\{n^p\times\left(\sqrt{1+\left(\frac{1}{a_n}\right)^2}-\sqrt{1-\left(\frac{1}{a_n}\right)^2}\right)\right\}$이 수렴하기 위해서는

$p-8\le0$, $p\le8$

따라서 자연수 p의 최댓값은 8이다.

답 8

필수 유형 ❸

$3n^2+2n<a_n<3n^2+3n$의 각 변을 n^2으로 나누면

$n^2>0$이므로 $3+\frac{2}{n}<\frac{a_n}{n^2}<3+\frac{3}{n}$

$$\lim_{n\to\infty}\left(3+\frac{2}{n}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(3+\frac{3}{n}\right)=3$$

이므로 수열의 극한의 대소 관계에 의하여

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n^2}=3$$

따라서 $\lim_{n\to\infty}\frac{5a_n}{n^2+2n}=\lim_{n\to\infty}\frac{5\times\frac{a_n}{n^2}}{1+\frac{2}{n}}=\frac{5\times3}{1+0}=15$

답 15

07

모든 자연수 n에 대하여 $n^2+n+1>0$이므로 각 변을 n^2+n+1로 나누면

$$\frac{5n^2+3n}{n^2+n+1}<a_n<\frac{7n^2+4n+2}{n^2+n+1}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{5n^2+3n}{n^2+n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{5+\frac{3}{n}}{1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}=\frac{5+0}{1+0+0}=5$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{7n^2+4n+2}{n^2+n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{7+\frac{4}{n}+\frac{2}{n^2}}{1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}=\frac{7+0+0}{1+0+0}=7$$

이므로 수열의 극한의 대소 관계에 의하여

$5\le\alpha\le7$

α가 자연수이므로 가능한 모든 α의 값은 5, 6, 7

따라서 가능한 모든 α의 값의 합은

$5+6+7=18$

답 ②

참고

$a_n=\frac{5n^2+3n+1}{n^2+n+1}$일 때,

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{5n^2+3n+1}{n^2+n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{5+\frac{3}{n}+\frac{1}{n^2}}{1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}=5$$

$a_n=\frac{6n^2+3n+1}{n^2+n+1}$일 때,

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{6n^2+3n+1}{n^2+n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{6+\frac{3}{n}+\frac{1}{n^2}}{1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}=6$$

$a_n=\frac{7n^2+4n+1}{n^2+n+1}$일 때,

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{7n^2+4n+1}{n^2+n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{7+\frac{4}{n}+\frac{1}{n^2}}{1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}=7$$

08

조건 (가)에서

$$(5n+1)\times\left(n+\frac{1}{3}\right)<(5n+1)a_n<(5n+1)\times\sqrt{n^2+2n+2}$$

$\cdots\cdots$ ㉠

조건 (나)에서

$$\frac{1}{2n^2+4n}<\frac{1}{b_n}<\frac{1}{\sqrt{4n^4+n^3}}$$

$$\frac{1}{7(2n^2+4n)}<\frac{1}{7b_n}<\frac{1}{7\sqrt{4n^4+n^3}}\quad\cdots\cdots\ ㉡$$

㉠, ㉡에서

$$\frac{(5n+1)\times\left(n+\frac{1}{3}\right)}{7(2n^2+4n)}<\frac{(5n+1)a_n}{7b_n}<\frac{(5n+1)\times\sqrt{n^2+2n+2}}{7\sqrt{4n^4+n^3}}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(5n+1)\times\left(n+\frac{1}{3}\right)}{7(2n^2+4n)}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(5+\frac{1}{n}\right)\times\left(1+\frac{1}{3n}\right)}{7\left(2+\frac{4}{n}\right)}$$

$$=\frac{5\times1}{7\times2}=\frac{5}{14}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(5n+1)\times\sqrt{n^2+2n+2}}{7\sqrt{4n^4+n^3}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(5+\frac{1}{n}\right)\times\sqrt{1+\frac{2}{n}+\frac{2}{n^2}}}{7\sqrt{4+\frac{1}{n}}}$$

$$=\frac{5\times1}{7\times2}=\frac{5}{14}$$

이므로 수열의 극한의 대소 관계에 의하여

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(5n+1)a_n}{7b_n}=\frac{5}{14}$$

답 ③

09

$$S_n=\frac{n\{2\times1+(n-1)d_1\}}{2}=\frac{d_1}{2}n^2+\left(1-\frac{d_1}{2}\right)n$$

$$T_n=\frac{n\{2\times1+(n-1)d_2\}}{2}=\frac{d_2}{2}n^2+\left(1-\frac{d_2}{2}\right)n$$

$$S_n\times T_n=\frac{d_1d_2}{4}n^4+\left(\frac{d_1}{2}+\frac{d_2}{2}-\frac{d_1d_2}{2}\right)n^3+\left(1-\frac{d_1}{2}\right)\left(1-\frac{d_2}{2}\right)n^2$$

$S_n\times T_n<n^4\times a_n<S_n\times T_n+n^3$에서

$$\frac{d_1d_2}{4}n^4+\left(\frac{d_1}{2}+\frac{d_2}{2}-\frac{d_1d_2}{2}\right)n^3+\left(1-\frac{d_1}{2}\right)\left(1-\frac{d_2}{2}\right)n^2$$
$$<n^4\times a_n$$
$$<\frac{d_1d_2}{4}n^4+\left(\frac{d_1}{2}+\frac{d_2}{2}-\frac{d_1d_2}{2}+1\right)n^3+\left(1-\frac{d_1}{2}\right)\left(1-\frac{d_2}{2}\right)n^2 \quad \cdots\cdots ㉠$$

부등식 ㉠의 각 변을 n^4으로 나누면

$$\frac{d_1d_2}{4}+\left(\frac{d_1}{2}+\frac{d_2}{2}-\frac{d_1d_2}{2}\right)\times\frac{1}{n}+\left(1-\frac{d_1}{2}\right)\left(1-\frac{d_2}{2}\right)\times\frac{1}{n^2}$$
$$<a_n$$
$$<\frac{d_1d_2}{4}+\left(\frac{d_1}{2}+\frac{d_2}{2}-\frac{d_1d_2}{2}+1\right)\times\frac{1}{n}+\left(1-\frac{d_1}{2}\right)\left(1-\frac{d_2}{2}\right)\times\frac{1}{n^2}$$

이고

$$\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{d_1d_2}{4}+\left(\frac{d_1}{2}+\frac{d_2}{2}-\frac{d_1d_2}{2}\right)\times\frac{1}{n}+\left(1-\frac{d_1}{2}\right)\left(1-\frac{d_2}{2}\right)\times\frac{1}{n^2}\right\}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{d_1d_2}{4}+\left(\frac{d_1}{2}+\frac{d_2}{2}-\frac{d_1d_2}{2}+1\right)\times\frac{1}{n}+\left(1-\frac{d_1}{2}\right)\left(1-\frac{d_2}{2}\right)\times\frac{1}{n^2}\right\}$$
$$=\frac{d_1d_2}{4}$$

이므로 수열의 극한의 대소 관계에 의하여

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\frac{d_1d_2}{4}$$

$\lim_{n\to\infty}a_n=1$이므로 $\frac{d_1d_2}{4}=1$

따라서 $d_1d_2=4$

답 4

필수 유형 ❹

등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공비를 r라 하자.

$ar=0$이면 $\lim_{n\to\infty}a_n=0$이므로 $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n+1}{3^n+2^{2n-1}}=0$

즉, $ar\neq0$이고 $a_n=ar^{n-1}=\frac{a}{r}\times r^n$이다.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n+1}{3^n+2^{2n-1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{a}{r}\times r^n+1}{3^n+\frac{1}{2}\times4^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{a}{r}\times\left(\frac{r}{4}\right)^n+\left(\frac{1}{4}\right)^n}{\left(\frac{3}{4}\right)^n+\frac{1}{2}}$$

(i) $|r|<4$, $r\neq0$일 때

$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{r}{4}\right)^n=0$이므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{a}{r}\times\left(\frac{r}{4}\right)^n+\left(\frac{1}{4}\right)^n}{\left(\frac{3}{4}\right)^n+\frac{1}{2}}=\frac{0+0}{0+\frac{1}{2}}=0$$

(ii) $r=4$일 때

$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{r}{4}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{4}{4}\right)^n=\lim_{n\to\infty}1^n=1$이므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{a}{r}\times\left(\frac{r}{4}\right)^n+\left(\frac{1}{4}\right)^n}{\left(\frac{3}{4}\right)^n+\frac{1}{2}}=\frac{\frac{a}{4}+0}{0+\frac{1}{2}}=\frac{a}{2}$$

$\frac{a}{2}=3$에서 $a=6$

(iii) $r\leq-4$일 때

수열 $\left\{\frac{\frac{a}{r}\times\left(\frac{r}{4}\right)^n+\left(\frac{1}{4}\right)^n}{\left(\frac{3}{4}\right)^n+\frac{1}{2}}\right\}$은 진동한다.

(iv) $r>4$일 때

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{a}{r}\times\left(\frac{r}{4}\right)^n+\left(\frac{1}{4}\right)^n}{\left(\frac{3}{4}\right)^n+\frac{1}{2}}\right|=\infty$$

(i)~(iv)에서 $a=6$, $r=4$이므로

$a_n=6\times4^{n-1}$

따라서 $a_2=6\times4^{2-1}=24$

답 ⑤

10

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2^n(4^{n+1}-2^n)}{(2^n+1)(4^n-2^n+1)}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{4\times2^n\times4^n-2^n\times2^n}{(2^n)^3+1^3}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{4\times(2\times4)^n-(2\times2)^n}{(2^3)^n+1}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{4\times8^n-4^n}{8^n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{4-\frac{4^n}{8^n}}{1+\frac{1}{8^n}}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{4-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1+\left(\frac{1}{8}\right)^n}=\frac{4-0}{1+0}=4$$

답 ⑤

11

$0<a<1$이면 $a^2<a$이므로

$$f(a)=\lim_{n\to\infty}\frac{a^{2n}-a^n}{a^{2n}+a^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{a^2}{a}\right)^n-1}{\left(\frac{a^2}{a}\right)^n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{a^n-1}{a^n+1}$$

$$=\frac{0-1}{0+1}=-1$$

$a=1$이면 $a^2=a=1$이므로 $f(a)=\lim_{n\to\infty}\frac{1^n-1^n}{1^n+1^n}=0$

$a>1$이면 $a^2>a$이므로

$$f(a)=\lim_{n\to\infty}\frac{a^{2n}-a^n}{a^{2n}+a^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1-\left(\frac{a}{a^2}\right)^n}{1+\left(\frac{a}{a^2}\right)^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1-\left(\frac{1}{a}\right)^n}{1+\left(\frac{1}{a}\right)^n}$$

$$=\frac{1-0}{1+0}=1$$

조건 (가)에서 $f(a_1)\times f(a_2)\times f(a_3)\times f(a_4)=1$이므로

(i) $f(a_1)$, $f(a_2)$, $f(a_3)$, $f(a_4)$의 값은 모두 1

(ii) $f(a_1)$, $f(a_2)$, $f(a_3)$, $f(a_4)$의 값은 모두 -1

(iii) $f(a_1)$, $f(a_2)$, $f(a_3)$, $f(a_4)$의 값 중 두 개의 값은 1, 두 개의 값은 -1의 세 가지 경우로 구분할 수 있다.

(i)의 경우 a_1, a_2, a_3, a_4의 값은 모두 1보다 크므로

$a_1\times a_2\times a_3\times a_4>1$이 되어 조건 (나)를 만족시키지 않는다.

(ii)의 경우 a_1, a_2, a_3, a_4의 값은 모두 1보다 작은 양수이므로

$a_1\times a_2\times a_3\times a_4<1$이 되어 조건 (나)를 만족시키지 않는다.

(iii)의 경우 a_1, a_2, a_3, a_4의 값 중 두 개의 값은 1보다 크고, 두 개의 값은 1보다 작은 양수이므로 조건 (나)를 만족시키는 a_1, a_2, a_3, a_4가 존재한다.

따라서 두 조건 (가), (나)를 모두 만족시키는 경우는 (iii)의 경우이므로

$f(a_1)+f(a_2)+f(a_3)+f(a_4)=1\times2+(-1)\times2=0$

답 ③

12

$$p=\lim_{n\to\infty}\frac{a^n+b^{n-1}}{a^{n+1}+b^n}=\begin{cases}\frac{1}{a} & (a>b)\\ 1 & (a=b)\\ b & (a<b)\end{cases}$$

$$q=\lim_{n\to\infty}\frac{b^n+c^{n+1}}{b^{n+1}+c^n}=\begin{cases}\frac{1}{b} & (b>c)\\ 1 & (b=c)\\ c & (b<c)\end{cases}$$

ㄱ. $a>b$, $b=c$이면 $p=\frac{1}{a}$, $q=1$이므로 $p\times q=\frac{1}{a}<1$ (참)

ㄴ. $p=\frac{1}{a}$, $q=\frac{1}{b}$이면 $p\times q=\frac{1}{ab}<c$

$p=\frac{1}{a}$, $q=1$이면 $p\times q=\frac{1}{a}<c$

$p=\frac{1}{a}$, $q=c$이면 $p\times q=\frac{c}{a}<c$

$p=1$, $q=\frac{1}{b}$이면 $p\times q=\frac{1}{b}<c$

$p=1$, $q=1$이면 $p\times q=1<c$

$p=1$, $q=c$이면 $p\times q=c$

$p=b$, $q=\frac{1}{b}$이면 $p\times q=1<c$

$p=b$, $q=1$이면 $p\times q=b=c$

$p=b$, $q=c$이면 $p\times q=bc>c$

이므로 $p\times q>c$인 경우는 $p=b$, $q=c$인 경우뿐이고, 이때 $a<b<c$이다. (참)

ㄷ. $p\times q=1$인 경우는

(i) $a>b$, $b<c$인 경우

$p\times q=\frac{1}{a}\times c=\frac{c}{a}$이고 $a=c$이면 $p\times q=1$

즉, $a>b$, $a=c$

(ii) $a=b=c$인 경우 $p\times q=1\times1=1$

(iii) $a<b$, $b>c$인 경우 $p\times q=b\times\frac{1}{b}=1$

이때 (iii)에서 $a\neq c$인 경우 $a\neq b$, $b\neq c$, $c\neq a$이므로

$(a-b)(b-c)(c-a)\neq0$ (거짓)

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

답 ③

참고

$a=2$, $b=5$, $c=3$이면

$p=5$, $q=\frac{1}{5}$, $p\times q=5\times\frac{1}{5}=1$이지만

$(a-b)(b-c)(c-a)=(2-5)\times(5-3)\times(3-2)\neq0$

필수 유형 5

$P_n(4^n,\ 2^n)$, $P_{n+1}(4^{n+1},\ 2^{n+1})$이므로

$L_n=\sqrt{(4^{n+1}-4^n)^2+(2^{n+1}-2^n)^2}$

$=\sqrt{(3\times4^n)^2+(2^n)^2}=\sqrt{9\times16^n+4^n}$

따라서

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{L_{n+1}}{L_n}\right)^2=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sqrt{9\times16^{n+1}+4^{n+1}}}{\sqrt{9\times16^n+4^n}}\right)^2$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{9\times16^{n+1}+4^{n+1}}{9\times16^n+4^n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{9\times16+4\times\left(\frac{1}{4}\right)^n}{9+\left(\frac{1}{4}\right)^n}$$

$$=\frac{9\times16+4\times0}{9+0}=16$$

답 16

13

$f(x)=2x^3-9nx^2+12n^2x$라 하면

$f'(x)=6x^2-18nx+12n^2=6(x-n)(x-2n)$

$f'(x)=0$에서 $x=n$ 또는 $x=2n$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	n	$\cdots$	$2n$	$\cdots$
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	↗	$5n^3$	↘	$4n^3$	↗

따라서 $a_1=0$, $n\ge2$일 때 x에 대한 방정식 $2x^3-9nx^2+12n^2x=k$의 서로 다른 실근의 개수가 3이 되도록 하는 모든 자연수 k는

$4n^3+1,\ 4n^3+2,\ \cdots,\ 5n^3-2,\ 5n^3-1$이고

그 개수는 $(5n^3-1)-(4n^3+1)+1=n^3-1$

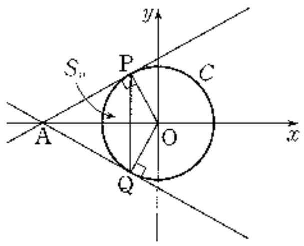
$a_n=n^3-1$이므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n^3+n^2+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^3-1}{n^3+n^2+1}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1-\frac{1}{n^3}}{1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^3}}=\frac{1-0}{1+0+0}=1$$

답 ①

14



원 C: $x^2+y^2=4^n$의 중심은 원점 O이고, 반지름의 길이는 2^n이다.

직각삼각형 OPA에서 $\overline{\text{OA}}=2^{n+1}$, $\overline{\text{OP}}=2^n$

$\cos(\angle\text{AOP})=\frac{\overline{\text{OP}}}{\overline{\text{OA}}}=\frac{2^n}{2^{n+1}}=\frac{1}{2}$이므로

$\angle\text{AOP}=\frac{\pi}{3}$

$\angle\text{POQ}=2\times\angle\text{AOP}=2\times\frac{\pi}{3}=\frac{2}{3}\pi$

부채꼴 OPQ의 넓이는

$\frac{1}{2}\times2^n\times2^n\times\frac{2}{3}\pi=\frac{\pi}{3}\times4^n$ $\cdots\cdots$ ㉠

삼각형 OPQ의 넓이는

$\frac{1}{2}\times2^n\times2^n\times\sin\frac{2}{3}\pi=\frac{1}{2}\times4^n\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{3}}{4}\times4^n$ $\cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡에서

$S_n=\frac{\pi}{3}\times4^n-\frac{\sqrt{3}}{4}\times4^n=\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{4}\right)\times4^n$

따라서

$$\lim_{n\to\infty}\frac{S_n}{4^{n+1}+4}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{4}\right)\times4^n}{4^{n+1}+4}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{4}}{4+\frac{1}{4^{n-1}}}$$

$$=\frac{\frac{\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{4}}{4}=\frac{\pi}{12}-\frac{\sqrt{3}}{16}$$

답 ④

15

(i) $n=1$인 경우

1, 2, 3, 4, 5 중 서로 다른 세 개 이상의 수를 택한 후 크기 순으로 나열한 수열이 공차가 1인 등차수열이 되는 경우는

1, 2, 3, 4, 5 / 1, 2, 3, 4 / 2, 3, 4, 5 / 1, 2, 3 / 2, 3, 4 / 3, 4, 5

의 6가지이므로 $a_1=6$

(ii) $n\ge2$인 경우

1부터 $3n+2$까지의 자연수 중 서로 다른 세 개 이상의 수를 택한 후 크기 순으로 나열한 수열이 공차가 n인 등차수열이 되는 경우는

$1,\ n+1,\ 2n+1,\ 3n+1$ / $2,\ n+2,\ 2n+2,\ 3n+2$ /

$1,\ n+1,\ 2n+1$ / $2,\ n+2,\ 2n+2$ / $\cdots$ / $n+1,\ 2n+1,\ 3n+1$ / $n+2,\ 2n+2,\ 3n+2$

의 $2+(n+2)=n+4$(가지)이므로

$a_n=n+4$ $(n\ge2)$

따라서

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_1a_n}{n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{6(n+4)}{n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{6n+24}{n+1}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{6+\frac{24}{n}}{1+\frac{1}{n}}=\frac{6+0}{1+0}=6$$

답 ③

필수 유형 6

급수 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a_n}{n}-\frac{3n+7}{n+2}\right)$이 수렴하므로

$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_n}{n}-\frac{3n+7}{n+2}\right)=0$

등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d라 하면

$a_n=4+(n-1)d=dn+(4-d)$이므로

$$\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{dn+(4-d)}{n}-\frac{3n+7}{n+2}\right\}=\lim_{n\to\infty}\left\{\left(d+\frac{4-d}{n}\right)-\frac{3+\frac{7}{n}}{1+\frac{2}{n}}\right\}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(d+\frac{4-d}{n}\right)-\lim_{n\to\infty}\frac{3+\frac{7}{n}}{1+\frac{2}{n}}$$

$$=(d+0)-\frac{3+0}{1+0}$$

$$=d-3=0$$

즉, $d=3$이고 $a_n=3n+1$이다.

따라서

$$S=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3n+1}{n}-\frac{3n+7}{n+2}\right)$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\left(3+\frac{1}{n}\right)-\left(3+\frac{1}{n+2}\right)\right\}$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+2}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left\{\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n+1}\right)+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}\right)\right\}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)$$

$$=1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$$

답 ③

16

두 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$이 각각 상수에 수렴하므로

$$f(x)=x^2+\sum_{n=1}^{\infty} x(a_n+b_n)+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n-b_n)$$
$$=x^2+\left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n+\sum_{n=1}^{\infty} b_n\right)x+\left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n-\sum_{n=1}^{\infty} b_n\right)$$

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n=S$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n=T$라 하면

$f(x)=x^2+(S+T)x+(S-T)$ ...... ㉠

한편, 함수 $f(x)$는 $x=-2$에서 최솟값 -2를 가지므로

$f(x)=(x+2)^2-2=x^2+4x+2$ ...... ㉡

㉠, ㉡에서 $S+T=4$, $S-T=2$이므로 $S=3$, $T=1$

따라서

$$\sum_{n=1}^{\infty}(2a_n+b_n)=2\sum_{n=1}^{\infty} a_n+\sum_{n=1}^{\infty} b_n=2S+T$$
$$=2\times 3+1=7$$

답 ④

17

$$a_{n+p-1}\times a_{n+p+1}=\frac{5}{n+p-1}\times\frac{5}{n+p+1}$$
$$=\frac{25}{2}\left(\frac{1}{n+p-1}-\frac{1}{n+p+1}\right)$$

이므로

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_{n+p-1}\times a_{n+p+1})$$
$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{25}{2}\left(\frac{1}{n+p-1}-\frac{1}{n+p+1}\right)$$
$$=\frac{25}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n+p-1}-\frac{1}{n+p+1}\right)$$
$$=\frac{25}{2}\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k+p-1}-\frac{1}{k+p+1}\right)$$
$$=\frac{25}{2}\lim_{n\to\infty}\left\{\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{p+2}\right)+\left(\frac{1}{p+1}-\frac{1}{p+3}\right)+\cdots\right.$$
$$\left.+\left(\frac{1}{n+p-2}-\frac{1}{n+p}\right)+\left(\frac{1}{n+p-1}-\frac{1}{n+p+1}\right)\right\}$$
$$=\frac{25}{2}\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{p+1}-\frac{1}{n+p}-\frac{1}{n+p+1}\right)$$
$$=\frac{25}{2}\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{p+1}\right)=\frac{25(2p+1)}{2p(p+1)}$$

$\frac{25(2p+1)}{2p(p+1)}=\frac{45}{8}$이므로 $9p^2-31p-20=0$

$(9p+5)(p-4)=0$

p는 자연수이므로 $p=4$

답 4

18

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{n+p}=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} a_{k+p}=\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n+p} a_k-\sum_{k=1}^{p} a_k\right)$$
$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n+p} a_k-\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{p} a_k=\sum_{n=1}^{\infty} a_n-\sum_{k=1}^{p} a_k$$
$$=2-\sum_{k=1}^{p} a_k$$

$2-\sum_{k=1}^{p} a_k=\frac{2}{p+1}$, $\sum_{k=1}^{p} a_k=2-\frac{2}{p+1}=\frac{2p}{p+1}$

수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 하면

$S_p=\frac{2p}{p+1}$, $S_{p-1}=\frac{2(p-1)}{(p-1)+1}=\frac{2p-2}{p}$ $(p=2, 3, 4, \cdots)$

$a_p=S_p-S_{p-1}=\frac{2p}{p+1}-\frac{2p-2}{p}=\frac{2}{p(p+1)}$ $(p=2, 3, 4, \cdots)$

$a_1=S_1=\frac{2\times 1}{1+1}=1$

따라서 $a_n=\frac{2}{n(n+1)}$ $(n=1, 2, 3, \cdots)$이므로

$a_3+a_5=\frac{2}{3\times 4}+\frac{2}{5\times 6}=\frac{1}{6}+\frac{1}{15}=\frac{7}{30}$

답 ④

필수 유형 ❼

등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공비를 r라 하자.

수열 $\{a_n^2\}$은 첫째항이 a^2, 공비가 r^2인 등비수열이고

등비급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$이 0이 아닌 값에 수렴하므로

$0\le r^2<1$, $-1<r<1$

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2=\frac{a^2}{1-r^2}=\frac{a}{1-r}\times\frac{a}{1+r}$이므로

$\frac{a}{1-r}\times\frac{a}{1+r}=6$ ...... ㉠

수열 $\{a_{2n-1}\}$은 첫째항이 a, 공비가 r^2인 등비수열이고

수열 $\{a_{2n}\}$은 첫째항이 ar, 공비가 r^2인 등비수열이므로

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_{2n-1}-a_{2n})=\sum_{n=1}^{\infty} a_{2n-1}-\sum_{n=1}^{\infty} a_{2n}$$
$$=\frac{a}{1-r^2}-\frac{ar}{1-r^2}$$
$$=\frac{a(1-r)}{1-r^2}=\frac{a}{1+r}$$

에서 $\frac{a}{1+r}=3$ ...... ㉡

㉠, ㉡에서 $\frac{a}{1-r}=2$

따라서 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n=\frac{a}{1-r}=2$

답 ②

19

두 등비수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$의 공비를 각각 r_1, r_2 $(r_1r_2\ne 0)$이라 하면

두 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$이 각각 수렴하므로

$-1<r_1<1$, $-1<r_2<1$, $-1<r_1r_2<1$

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n=\frac{a_1}{1-r_1}$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n=\frac{b_1}{1-r_2}$

수열 $\{a_nb_n\}$은 첫째항이 a_1b_1, 공비가 r_1r_2인 등비수열이므로

$\sum_{n=1}^{\infty} a_nb_n=\frac{a_1b_1}{1-r_1r_2}$

$\sum_{n=1}^{\infty} a_nb_n=\sum_{n=1}^{\infty} a_n\times\sum_{n=1}^{\infty} b_n$에서

$\frac{a_1b_1}{1-r_1r_2}=\frac{a_1}{1-r_1}\times\frac{b_1}{1-r_2}$

$a_1b_1\ne 0$이므로

$1-r_1r_2=(1-r_1)\times(1-r_2)$

$r_1r_2-\frac{1}{2}r_1-\frac{1}{2}r_2=0$ …… ㉠

$r_1=\frac{a_2}{a_1}$, $r_2=\frac{b_2}{b_1}$이고 ㉠에 의하여

$$\left(\frac{1}{2}-\frac{a_2}{a_1}\right)\times\left(\frac{1}{2}-\frac{b_2}{b_1}\right)=\left(\frac{1}{2}-r_1\right)\times\left(\frac{1}{2}-r_2\right)$$
$$=\frac{1}{4}-\frac{1}{2}r_1-\frac{1}{2}r_2+r_1r_2$$
$$=\frac{1}{4}+\left(r_1r_2-\frac{1}{2}r_1-\frac{1}{2}r_2\right)$$
$$=\frac{1}{4}+0=\frac{1}{4}$$

답 ①

20

두 등비수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$의 공비 r, r'이

$-1<r<1$, $-1<r'<1$이므로

두 급수 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$은 각각 수렴하고,

$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\frac{a_1}{1-r}$, $\sum_{n=1}^{\infty}b_n=\frac{b_1}{1-r'}$

$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n+\sum_{n=1}^{\infty}b_n=\frac{a_1}{1-r}+\frac{b_1}{1-r'}$

조건 (가)에서

$(1-r)\times\left(\frac{a_1}{1-r}+\frac{b_1}{1-r'}\right)=a_1+\frac{1-r}{1-r'}\times b_1=a_1+b_1$

$\frac{1-r}{1-r'}\times b_1=b_1$에서 $b_1\neq0$이므로 $\frac{1-r}{1-r'}=1$

즉, $r=r'$

조건 (나)에서 $r+r'=1$이므로

$r=r'=\frac{1}{2}$

따라서 $rr'=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$

답 ⑤

21

등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공비를 r라 하면

수열 $\{|a_n|\}$의 첫째항은 $|a|$, 공비는 $|r|$이다.

급수 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$이 수렴하므로 $-1<r<1$, $r\neq0$이고,

$0<|r|<1$이므로 급수 $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ 또한 수렴한다.

$a\neq0$, $\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\frac{a}{1-r}$이므로 급수 $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$, $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+|a_n|)$의 값은 a, r의 값의 부호에 따라 다음과 같다.

(i) $a>0$, $0<r<1$일 때

$\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|=\frac{|a|}{1-|r|}=\frac{a}{1-r}$

$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+|a_n|)=\frac{a}{1-r}+\frac{a}{1-r}=\frac{2a}{1-r}\neq0$

(ii) $a>0$, $-1<r<0$일 때

$\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|=\frac{|a|}{1-|r|}=\frac{a}{1+r}$

$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+|a_n|)=\frac{a}{1-r}+\frac{a}{1+r}=\frac{2a}{1-r^2}\neq0$

(iii) $a<0$, $0<r<1$일 때

$\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|=\frac{|a|}{1-|r|}=-\frac{a}{1-r}$

$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+|a_n|)=\frac{a}{1-r}+\left(-\frac{a}{1-r}\right)=0$

(iv) $a<0$, $-1<r<0$일 때

$\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|=\frac{|a|}{1-|r|}=-\frac{a}{1+r}$

$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+|a_n|)=\frac{a}{1-r}+\left(-\frac{a}{1+r}\right)=\frac{2ar}{1-r^2}\neq0$

조건 (나)에서 $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+|a_n|)=0$이므로

$a<0$, $0<r<1$

수열 $\{|a_{2n}|\}$의 첫째항은 $|ar|$, 공비는 r^2이고

수열 $\{|a_{3n}|\}$의 첫째항은 $|ar^2|$, 공비는 $|r|^3$이다.

이때 $a<0$, $0<r<1$이므로

$\sum_{n=1}^{\infty}|a_{2n}|=\frac{|ar|}{1-r^2}=-\frac{ar}{1-r^2}$

$\sum_{n=1}^{\infty}|a_{3n}|=\frac{|ar^2|}{1-|r|^3}=-\frac{ar^2}{1-r^3}$

조건 (다)에서 $3\times\left(-\frac{ar}{1-r^2}\right)=7\times\left(-\frac{ar^2}{1-r^3}\right)$

$(-3)\times\frac{ar}{(1-r)(1+r)}=(-7)\times\frac{ar^2}{(1-r)(1+r+r^2)}$

$\frac{3}{1+r}=\frac{7r}{1+r+r^2}$

$4r^2+4r-3=0$, $(2r-1)(2r+3)=0$

$0<r<1$이므로 $r=\frac{1}{2}$

즉, $a<0$, $r=\frac{1}{2}$

따라서

$$\frac{|a_1|+a_2}{a_1}=\frac{|a_1|}{a_1}+\frac{a_2}{a_1}$$
$$=\frac{|a|}{a}+\frac{ar}{a}$$
$$=\left(-\frac{a}{a}\right)+r$$
$$=(-1)+\frac{1}{2}=-\frac{1}{2}$$

$k=-\frac{1}{2}$이므로

$16k^2=16\times\left(-\frac{1}{2}\right)^2=16\times\frac{1}{4}=4$

답 4

참고

조건 (나)에서 $a_n+|a_n|$의 값은 $a_n>0$이면 $2a_n>0$, $a_n<0$이면 0이고 $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+|a_n|)=0$이므로 모든 자연수 n에 대하여 $a_n<0$이다.

따라서 $a<0$, $r>0$임을 알 수 있다.

필수 유형 ❽

$S_1=\frac{1}{2}\times1^2\times\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{8}$

그림 R_2에서 $\angle O_1A_2O_2=\frac{\pi}{4}$이므로

삼각형 $O_1A_2O_2$에서 사인법칙에 의하여

$$\frac{\overline{O_2A_2}}{\sin\frac{\pi}{6}}=\frac{\overline{O_1O_2}}{\sin\frac{\pi}{4}}$$

$\dfrac{\overline{O_2A_2}}{\frac{1}{2}}=\dfrac{1}{\frac{\sqrt{2}}{2}}$에서 $\overline{O_2A_2}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

그러므로 부채꼴 $O_1A_1O_2$와 부채꼴 $O_2A_2O_3$은 서로 닮음이고 닮음비는 $1:\dfrac{1}{\sqrt{2}}$이다.

따라서 $\lim_{n\to\infty}S_n$의 값은 첫째항이 $\dfrac{\pi}{8}$이고 공비가 $\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^2=\dfrac{1}{2}$인 등비급수의 합과 같으므로

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\frac{\frac{\pi}{8}}{1-\frac{1}{2}}=\frac{\pi}{4}$$

답 ③

22

선분 A_1B_1의 중점을 O라 하면 점 O는 선분 A_1B_1을 지름으로 하는 반원의 중심이므로

$\overline{OB_1}=\overline{OC_1}=1$

중심각과 원주각의 관계에 의하여

$\angle C_1OB_1=2\times\angle C_1A_1B_1=2\times\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{\pi}{3}$

부채꼴 C_1OB_1의 넓이는

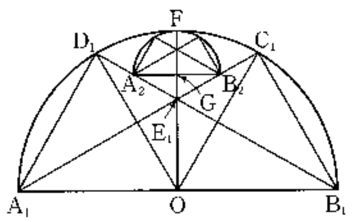
$\dfrac{1}{2}\times1^2\times\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{\pi}{6}$

삼각형 C_1OB_1의 넓이는

$\dfrac{1}{2}\times1^2\times\sin\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{\sqrt{3}}{4}$

두 부채꼴 C_1OB_1, D_1OA_1, 두 삼각형 C_1OB_1, D_1OA_1은 각각 서로 합동이므로

$S_1=2\times\left(\dfrac{\pi}{6}-\dfrac{\sqrt{3}}{4}\right)=\dfrac{\pi}{3}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$



선분 A_2B_2와 선분 E_1F의 교점을 G라 하면

점 G는 선분 A_2B_2를 지름으로 하는 반원의 중심이므로

$\overline{A_2G}=\overline{B_2G}=\overline{FG}$

$\overline{A_2G}=\overline{B_2G}=\overline{FG}=x\ (x>0)$이라 하면

직각삼각형 B_2GE_1에서 $\angle GE_1B_2=\dfrac{\pi}{3}$이므로

$\overline{GE_1}=\dfrac{x}{\tan\frac{\pi}{3}}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}x$

직각삼각형 E_1OB_1에서

$\overline{E_1O}=\overline{B_1O}\times\tan\dfrac{\pi}{6}=1\times\dfrac{\sqrt{3}}{3}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

$\overline{FG}+\overline{GE_1}+\overline{E_1O}=1$이므로

$x+\dfrac{\sqrt{3}}{3}x+\dfrac{\sqrt{3}}{3}=1$

$x=2-\sqrt{3}$

그러므로 선분 A_nB_n을 지름으로 하는 반원과 선분 $A_{n+1}B_{n+1}$을 지름으로 하는 반원은 서로 닮음이고 닮음비가 $1:2-\sqrt{3}$이다.

따라서 $\lim_{n\to\infty}S_n$의 값은 첫째항이 $\dfrac{\pi}{3}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$이고 공비가 $(2-\sqrt{3})^2$인 등비급수의 합과 같으므로

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}S_n&=\frac{\frac{\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{2}}{1-(2-\sqrt{3})^2}\\&=\frac{\frac{\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{2}}{4\sqrt{3}-6}\\&=\frac{1}{12\sqrt{3}-18}\pi-\frac{\sqrt{3}}{8\sqrt{3}-12}\\&=\frac{2\sqrt{3}+3}{18}\pi-\frac{2+\sqrt{3}}{4}\end{aligned}$$

답 ①

08 미분법

정답 본문 89~99쪽

필수 유형 ❶ ④	01 ①	02 ④	03 ②
필수 유형 ❷ 4	04 ⑤	05 ①	06 ③
필수 유형 ❸ ②	07 ③	08 2	09 ⑤
필수 유형 ❹ ③	10 ③	11 ②	12 2
필수 유형 ❺ ④	13 ②	14 ⑤	15 ③
필수 유형 ❻ ①	16 ④	17 ①	18 3
필수 유형 ❼ ⑤	19 ①	20 ④	21 ④
필수 유형 ❽ ⑤	22 ②	23 ④	24 ④
필수 유형 ❾ ②	25 ④	26 ①	27 ④
필수 유형 ❿ ④	28 ④	29 ③	30 ③
필수 유형 ⓫ 4	31 ②	32 ④	33 ④

필수 유형 ❶

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(x+1)}{\sqrt{x+4}-2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\left\{\frac{\ln(x+1)}{(\sqrt{x+4}-2)(\sqrt{x+4}+2)}\times(\sqrt{x+4}+2)\right\}$$

$$=\lim_{x\to 0}\left\{\frac{\ln(x+1)}{x}\times(\sqrt{x+4}+2)\right\}$$

$$=1\times(2+2)=4$$

답 ④

01

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log_5(1+x^2)}{x(5^x-1)}=\lim_{x\to 0}\left\{\frac{\log_5(1+x^2)}{x^2}\times\frac{x}{5^x-1}\right\}$$

$$=\frac{1}{\ln 5}\times\frac{1}{\ln 5}=\frac{1}{(\ln 5)^2}$$

답 ①

02

두 이차함수 $f(x)$, $g(x)$는 각각 $x=2$에서 연속이고, $g(2)=0$이므로

$\lim_{x\to 2}f(x)=f(2)$, $\lim_{x\to 2}f(x)g(x)=f(2)g(2)=0$

조건 (나)에서

$$\lim_{x\to 2}\frac{e^{f(x)g(x)}-1}{g(x)}=\lim_{x\to 2}\left\{\frac{e^{f(x)g(x)}-1}{f(x)g(x)}\times f(x)\right\}$$

$$=1\times f(2)=f(2)=3$$

즉, $f(2)=3$

조건 (다)에서 $x\to 1$일 때 (분모) $\to 0$이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\to 0$이어야 한다.

$$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)}{g(x)}=0$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{\ln\left(1+\frac{f(x)}{g(x)}\right)}{f(x)}=\lim_{x\to 1}\left\{\frac{\ln\left(1+\frac{f(x)}{g(x)}\right)}{\frac{f(x)}{g(x)}}\times\frac{1}{g(x)}\right\}$$

$\lim_{x\to 1}g(x)=0$이면 $\lim_{x\to 1}\left|\frac{\ln\left(1+\frac{f(x)}{g(x)}\right)}{\frac{f(x)}{g(x)}}\times\frac{1}{g(x)}\right|=\infty$이므로

$\lim_{x\to 1}g(x)\neq 0$이다.

또한 이차함수 $g(x)$가 $x=1$에서 연속이므로

$$\lim_{x\to 1}\left\{\frac{\ln\left(1+\frac{f(x)}{g(x)}\right)}{\frac{f(x)}{g(x)}}\times\frac{1}{g(x)}\right\}=\frac{1}{g(1)}=-\frac{1}{3}$$

즉, $g(1)=-3$

$f(1)=0$, $f(2)=3$이므로 $f(x)=(x-1)(x+a)$ (a는 상수)라 하면

$f(2)=2+a=3$에서 $a=1$

$f(x)=(x-1)(x+1)=x^2-1$

$g(1)=-3$, $g(2)=0$이므로 $g(x)=(x-2)(x+b)$ (b는 상수)라 하면 $g(1)=-(1+b)=-3$에서 $b=2$

$g(x)=(x-2)(x+2)=x^2-4$

따라서

$f(3)+g(3)=(3^2-1)+(3^2-4)=8+5=13$

답 ④

03

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{6x}+1-e^{mx}-e^{nx}}{x^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\left\{\left(\frac{e^{6x}-1}{x}-\frac{e^{mx}-1}{x}-\frac{e^{nx}-1}{x}\right)\times\frac{1}{x}\right\}$$

$$=\lim_{x\to 0}\left\{\left(6\times\frac{e^{6x}-1}{6x}-m\times\frac{e^{mx}-1}{mx}-n\times\frac{e^{nx}-1}{nx}\right)\times\frac{1}{x}\right\}$$

$$\lim_{x\to 0}\left(6\times\frac{e^{6x}-1}{6x}-m\times\frac{e^{mx}-1}{mx}-n\times\frac{e^{nx}-1}{nx}\right)=6-m-n$$

$\lim_{x\to 0}\left|\frac{1}{x}\right|=\infty$이므로

$m+n\neq 6$이면 주어진 조건을 만족시키지 않는다.

$m+n=6$이면

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{6x}+1-e^{mx}-e^{nx}}{x^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{e^{(m+n)x}+1-e^{mx}-e^{nx}}{x^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{(e^{mx}-1)(e^{nx}-1)}{x^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\left\{\left(m\times\frac{e^{mx}-1}{mx}\right)\times\left(n\times\frac{e^{nx}-1}{nx}\right)\right\}=mn$$

$m+n=6$을 만족시키는 두 자연수 m, n의 모든 순서쌍 (m, n)은

$(1, 5)$, $(2, 4)$, $(3, 3)$이므로

$k=mn$에서 $k=5$ 또는 $k=8$ 또는 $k=9$

따라서 모든 실수 k의 값의 합은

$5+8+9=22$

답 ②

《필수 유형 ❷》

$f(x)=x^3 \ln x$에서

$f'(x)=3x^2\times\ln x+x^3\times\frac{1}{x}=3x^2\ln x+x^2$

$f'(e)=3e^2\ln e+e^2=3e^2\times1+e^2=4e^2$

따라서 $\frac{f'(e)}{e^2}=\frac{4e^2}{e^2}=4$

답 4

04

$f(x)=\ln x^3=3\ln x$이므로

$f'(x)=3\times\frac{1}{x}=\frac{3}{x}$

따라서 $f'(2)=\frac{3}{2}$

답 ⑤

05

$f'(x)=e^x$, $g'(x)=\frac{1}{x\ln a}$

조건 (가)에서 $e^t=\log_a t=\frac{\ln t}{\ln a}$ ...... ㉠

조건 (나)에서 $e^t=\frac{1}{t\ln a}$ ...... ㉡

㉠, ㉡에서 $\frac{\ln t}{\ln a}=\frac{1}{t\ln a}$

$\ln a\neq0$이므로 $\ln t=\frac{1}{t}$

따라서 $t\times\ln t=1$

답 ①

06

$t=t^{\ln e}=e^{\ln t}$이고 $y=te^x=e^{\ln t}\times e^x=e^{x+\ln t}$이므로

곡선 $y=te^x$은 곡선 $y=e^x$을 x축의 방향으로 $-\ln t$만큼 평행이동한 곡선이다.

$\overline{\mathrm{AC}}=\overline{\mathrm{BD}}=\ln t$이고 두 직선 $y=t$, $y=t^2+t$는 서로 평행하므로 사각형 ABDC는 평행사변형이다.

따라서 $S(t)=\ln t\times\{(t^2+t)-t\}=t^2\ln t$

$S'(t)=2t\ln t+t^2\times\frac{1}{t}=2t\ln t+t$

$S'(2)=4\ln 2+2$

답 ③

《필수 유형 ❸》

$2\cos\alpha=3\sin\alpha$에서 $\cos\alpha\neq0$이므로

양변을 $\cos\alpha$로 나누면 $\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\frac{2}{3}$

즉, $\tan\alpha=\frac{2}{3}$

삼각함수의 덧셈정리에 의하여

$1=\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}=\frac{\frac{2}{3}+\tan\beta}{1-\frac{2}{3}\times\tan\beta}$

$1-\frac{2}{3}\tan\beta=\frac{2}{3}+\tan\beta$

$\frac{5}{3}\tan\beta=\frac{1}{3}$

따라서 $\tan\beta=\frac{1}{5}$

답 ②

07

$\sin\theta=2\cos\theta$에서

$\cos\theta\neq0$이므로 양변을 $\cos\theta$로 나누면

$\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=2$

즉, $\tan\theta=2$

따라서 $\sec^2\theta=1+\tan^2\theta=1+2^2=5$

답 ③

08

$0<x<\frac{\pi}{2}$이므로

$\sin x=\sqrt{1-\left(\frac{\sqrt{5}}{5}\right)^2}=\sqrt{\frac{4}{5}}=\frac{2}{\sqrt{5}}=\frac{2\sqrt{5}}{5}$

$$\begin{aligned}\cos(x-y)&=\cos x\cos y+\sin x\sin y\\&=\frac{\sqrt{5}}{5}\cos y+\frac{2\sqrt{5}}{5}\sin y\\&=\frac{2\sqrt{5}}{25}\end{aligned}$$

에서 $2\sin y+\cos y=\frac{2}{5}$

따라서

$$\begin{aligned}10\sin y+5\cos y&=5(2\sin y+\cos y)\\&=5\times\frac{2}{5}=2\end{aligned}$$

답 2

09

$$\begin{aligned}\sin(x+y)&=\sin x\cos y+\cos x\sin y\\&=\frac{3\sqrt{2}}{10}+\frac{2\sqrt{2}}{5}=\frac{7\sqrt{2}}{10}\end{aligned}$$

$0\le x+y\le\frac{\pi}{2}$이므로

$\cos(x+y)=\sqrt{1-\left(\frac{7\sqrt{2}}{10}\right)^2}=\frac{\sqrt{2}}{10}$

$$\begin{aligned}\sin(x-y)&=\sin x\cos y-\cos x\sin y\\&=\frac{3\sqrt{2}}{10}-\frac{2\sqrt{2}}{5}=-\frac{\sqrt{2}}{10}\end{aligned}$$

$-\frac{\pi}{4}\le x-y\le\frac{\pi}{4}$이므로

$\cos(x-y)=\sqrt{1-\left(-\frac{\sqrt{2}}{10}\right)^2}=\frac{7\sqrt{2}}{10}$

따라서

$$\begin{aligned}\sin 2x&=\sin\{(x+y)+(x-y)\}\\&=\sin(x+y)\cos(x-y)+\cos(x+y)\sin(x-y)\\&=\frac{7\sqrt{2}}{10}\times\frac{7\sqrt{2}}{10}+\frac{\sqrt{2}}{10}\times\left(-\frac{\sqrt{2}}{10}\right)\\&=\frac{24}{25}\end{aligned}$$

답 ⑤

필수 유형 ❹

선분 AB가 반원의 지름이고 점 P가 호 AB 위의 점이므로

$\angle APB=\frac{\pi}{2}$이다.

직각삼각형 PAB에서

$l(\theta)=\overline{AB}\times\sin\theta=2\sin\theta$

$\overline{PA}=\overline{AB}\times\cos\theta=2\cos\theta$

삼각형 PAQ에서 $\angle PQA=\pi-\theta-\frac{\theta}{3}=\pi-\frac{4}{3}\theta$이므로

사인법칙에 의하여

$$\frac{\overline{PA}}{\sin(\angle PQA)}=\frac{\overline{AQ}}{\sin(\angle APQ)}$$

$$\frac{2\cos\theta}{\sin\left(\pi-\frac{4}{3}\theta\right)}=\frac{\overline{AQ}}{\sin\frac{\theta}{3}}$$

$$\overline{AQ}=\frac{2\cos\theta\times\sin\frac{\theta}{3}}{\sin\frac{4}{3}\theta}$$

$$\begin{aligned}S(\theta)&=\frac{1}{2}\times\overline{PA}\times\overline{AQ}\times\sin\theta\\&=\frac{1}{2}\times2\cos\theta\times\frac{2\cos\theta\times\sin\frac{\theta}{3}}{\sin\frac{4}{3}\theta}\times\sin\theta\\&=\frac{2\sin\theta\times\sin\frac{\theta}{3}}{\sin\frac{4}{3}\theta}\times\cos^2\theta\end{aligned}$$

따라서

$$\begin{aligned}\lim_{\theta\to0+}\frac{S(\theta)}{l(\theta)}&=\lim_{\theta\to0+}\frac{\frac{2\sin\theta\times\sin\frac{\theta}{3}}{\sin\frac{4}{3}\theta}\times\cos^2\theta}{2\sin\theta}\\&=\lim_{\theta\to0+}\left(\frac{\sin\frac{\theta}{3}}{\frac{\theta}{3}}\times\frac{\frac{4}{3}\theta}{\sin\frac{4}{3}\theta}\times\frac{1}{4}\times\cos^2\theta\right)\\&=1\times1\times\frac{1}{4}\times1=\frac{1}{4}\end{aligned}$$

답 ③

10

$0<x<\frac{\pi}{2}$에서

$\sin x>0$, $\cos x>0$, $\sin x\cos x>0$이므로

$$\begin{aligned}f(x)&=\sin x\cos x\\f'(x)&=(\sin x)'\cos x+\sin x(\cos x)'\\&=\cos x\cos x+\sin x\times(-\sin x)\\&=\cos^2 x-\sin^2 x\\&=\cos^2 x-(1-\cos^2 x)=2\cos^2 x-1\end{aligned}$$

$\frac{\pi}{2}<x<\pi$에서

$\sin x>0$, $\cos x<0$, $\sin x\cos x<0$이므로

$$\begin{aligned}f(x)&=-\sin x\cos x\\f'(x)&=-\{(\sin x)'\cos x+\sin x(\cos x)'\}\\&=-\{\cos x\cos x+\sin x\times(-\sin x)\}\\&=-\cos^2 x+\sin^2 x\\&=-\cos^2 x+(1-\cos^2 x)=1-2\cos^2 x\end{aligned}$$

조건 (가)에서

$f'(a)=2\cos^2 a-1$, $f'(b)=1-2\cos^2 b$이므로

$(2\cos^2 a-1)+(1-2\cos^2 b)=2(\cos^2 a-\cos^2 b)=0$

$\cos^2 a-\cos^2 b=0$

$(\cos a+\cos b)(\cos a-\cos b)=0$에서

$\cos a>0$, $\cos b<0$이므로

$\cos a+\cos b=0$

$\frac{a+b}{2}=\frac{\pi}{2}$

$a+b=\pi$ …… ㉠

조건 (나)에서

$b-a=\frac{3}{5}\pi$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=\frac{\pi}{5}$, $b=\frac{4}{5}\pi$

따라서 $\frac{b}{a}=\frac{\frac{4}{5}\pi}{\frac{\pi}{5}}=4$

답 ③

11

$$\begin{aligned}a_1&=\lim_{x\to0}\frac{1-\cos^2 x}{x^2}\\&=\lim_{x\to0}\frac{\sin^2 x}{x^2}=\lim_{x\to0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2\\&=1^2=1\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}a_{n+1}&=\lim_{x\to0}\frac{1-(\cos x)^{2^{n+1}}}{x^2}\\&=\lim_{x\to0}\left[\frac{1-(\cos x)^{2^n}}{x^2}\times\{1+(\cos x)^{2^n}\}\right]\\&=a_n\times2=2a_n\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)\end{aligned}$$

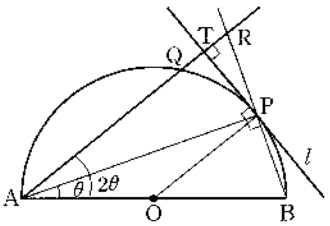
이므로 수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 1이고, 공비가 2인 등비수열이다.

따라서 $a_3=1\times2^2=4$, $a_5=1\times2^4=16$이므로

$a_3+a_5=4+16=20$

답 ②

12



선분 AB의 중점을 O, 직선 AQ와 직선 BP의 교점을 R, 직선 AQ와 직선 l의 교점을 T라 하자.

두 삼각형 PAB, PAR에서

$\angle PAB=\theta$, $\angle PAR=\angle RAB-\angle PAB=2\theta-\theta=\theta$

삼각형 PAB에서 선분 AB가 반원의 지름이고 점 P가 반원 위의 점이므로

$\angle BPA=\frac{\pi}{2}$, $\angle RPA=\pi-\angle BPA=\pi-\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{2}$

선분 PA는 공통이므로 두 삼각형 PAB, PAR는 서로 합동이다.

$\overline{PB}=\overline{AB}\times\sin\theta=2\sin\theta$이므로 $\overline{PR}=2\sin\theta$

$\angle PBA=\frac{\pi}{2}-\theta$이므로 $\angle PRA=\angle PRT=\frac{\pi}{2}-\theta$

직선 l이 반원 위의 점 P에서의 접선이므로 $\angle OPT=\frac{\pi}{2}$

원주각과 중심각의 관계에 의하여 $\angle POB=2\times\angle PAB=2\theta$이므로 두 직선 AQ와 OP는 서로 평행하다.

$\angle OPT$와 $\angle RTP$는 서로 엇각이므로

$\angle RTP=\angle OPT=\frac{\pi}{2}$

즉, 직각삼각형 RTP에서

$\overline{PT}=\overline{PR}\times\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=2\sin\theta\cos\theta$

$\overline{RT}=\overline{PR}\times\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=2\sin^2\theta$

따라서

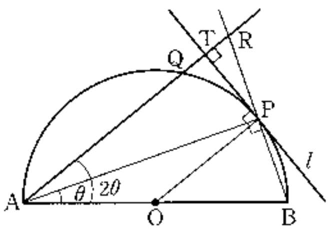
$$S(\theta)=\frac{1}{2}\times\overline{PT}\times\overline{RT}=\frac{1}{2}\times2\sin\theta\cos\theta\times2\sin^2\theta=2\sin^3\theta\cos\theta$$

이므로

$$\lim_{\theta\to0+}\frac{S(\theta)}{\theta^3}=\lim_{\theta\to0+}\frac{2\sin^3\theta\cos\theta}{\theta^3}=\lim_{\theta\to0+}\left\{2\cos\theta\times\left(\frac{\sin\theta}{\theta}\right)^3\right\}=2\times1\times1^3=2$$

답 2

다른 풀이①



선분 AB의 중점을 O, 직선 AQ와 직선 BP의 교점은 R, 직선 AQ와 직선 l의 교점을 T라 하자.

두 삼각형 PAB, PAR에서

$\angle PAB=\theta$, $\angle PAR=\angle RAB-\angle PAB=2\theta-\theta=\theta$

삼각형 PAB에서 선분 AB가 반원의 지름이고 점 P가 반원 위의 점이므로

$\angle BPA=\frac{\pi}{2}$, $\angle RPA=\pi-\angle BPA=\pi-\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{2}$

선분 PA는 공통이므로 두 삼각형 PAB, PAR는 서로 합동이다.

$\overline{PB}=\overline{AB}\times\sin\theta=2\sin\theta$이므로 $\overline{PR}=2\sin\theta$

$\angle PBA=\frac{\pi}{2}-\theta$이므로 $\angle PRA=\angle PRT=\frac{\pi}{2}-\theta$

직선 l이 반원 위의 점 P에서의 접선이므로

$\angle OPT=\frac{\pi}{2}$

$\angle OPA=\angle OAP=\theta$이므로

$\angle APT=\angle OPT-\angle OPA=\frac{\pi}{2}-\theta$

$\angle RPT=\angle RPA-\angle APT=\frac{\pi}{2}-\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\theta$

$\angle RTP=\pi-\angle RPT-\angle PRT=\pi-\theta-\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\frac{\pi}{2}$

즉, 직각삼각형 RTP에서

$\overline{PT}=\overline{PR}\times\cos\theta=2\sin\theta\cos\theta$, $\overline{RT}=\overline{PR}\times\sin\theta=2\sin^2\theta$

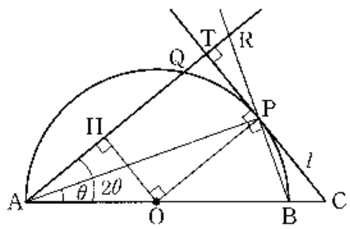
따라서

$$S(\theta)=\frac{1}{2}\times\overline{PT}\times\overline{RT}=\frac{1}{2}\times2\sin\theta\cos\theta\times2\sin^2\theta=2\sin^3\theta\cos\theta$$

이므로

$$\lim_{\theta\to0+}\frac{S(\theta)}{\theta^3}=\lim_{\theta\to0+}\frac{2\sin^3\theta\cos\theta}{\theta^3}=\lim_{\theta\to0+}\left\{2\cos\theta\times\left(\frac{\sin\theta}{\theta}\right)^3\right\}=2\times1\times1^3=2$$

다른 풀이②



선분 AB의 중점을 O, 직선 AB와 직선 l의 교점을 C, 직선 AQ와 직선 BP의 교점을 R, 직선 AQ와 직선 l의 교점을 T, 점 O에서 직선 AQ에 내린 수선의 발을 H라 하자.

원주각과 중심각의 관계에 의하여

$\angle POB=2\times\angle PAB=2\theta$이므로

$\angle QAB=\angle POB=2\theta$이고 두 직선 AQ와 OP는 서로 평행하다.

$\angle AHO$와 $\angle HOP$는 서로 엇각이고,

$\angle AHO=\angle THO=\frac{\pi}{2}$이므로 $\angle THO=\angle HOP=\frac{\pi}{2}$

또한 직선 l이 반원 위의 점 P에서의 접선이므로 두 직선 OP와 l은 서로 수직이다.

그러므로 사각형 OPTH는 직사각형이고

$\angle PTH=\frac{\pi}{2}$에서 $\angle RTP=\frac{\pi}{2}$

$\overline{PT}=\overline{OH}=\overline{OA}\times\sin2\theta=\sin2\theta$

삼각형 ABP에서 선분 AB가 반원의 지름이고 점 P가 반원 위의 점이므로 $\angle BPA=\frac{\pi}{2}$이고

$$\angle TPR=\angle CPB=\frac{\pi}{2}-\angle BPO=\angle BPA-\angle BPO$$
$$=\angle OPA=\angle PAB=\theta$$

이므로 직각삼각형 RTP에서 $\overline{RT}=\overline{PT}\times\tan\theta=\sin 2\theta\tan\theta$

따라서

$S(\theta)=\frac{1}{2}\times\overline{PT}\times\overline{RT}=\frac{1}{2}\times\sin 2\theta\times\sin 2\theta\tan\theta$

이므로

$$\lim_{\theta\to 0+}\frac{S(\theta)}{\theta^3}=\lim_{\theta\to 0+}\frac{\sin 2\theta\times\sin 2\theta\tan\theta}{2\theta^3}$$
$$=\lim_{\theta\to 0+}\left(\frac{\sin 2\theta}{2\theta}\times\frac{\sin 2\theta}{2\theta}\times 2\times\frac{\tan\theta}{\theta}\right)$$
$$=1\times1\times2\times1=2$$

필수 유형 ❺

$f(x^3+x)=e^x$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f'(x^3+x)\times(x^3+x)'=(e^x)'$

$f'(x^3+x)\times(3x^2+1)=e^x$

$x=1$을 대입하면 $f'(2)\times4=e$

따라서 $f'(2)=\frac{e}{4}$

답 ④

13

$$f'(x)=\frac{(x)'\times\ln x-x\times(\ln x)'}{(\ln x)^2}=\frac{1\times\ln x-x\times\frac{1}{x}}{(\ln x)^2}$$
$$=\frac{\ln x-1}{(\ln x)^2}$$

따라서 $f'(e^2)=\frac{\ln e^2-1}{(\ln e^2)^2}=\frac{2-1}{2^2}=\frac{1}{4}$

답 ②

14

$g'(x)=f'(\sin x)\times(\sin x)'=f'(\sin x)\times\cos x$이므로

$g'(x)=0$에서 $f'(\sin x)=0$ 또는 $\cos x=0$

$0<x<2\pi$에서 $\cos x=0$을 만족시키는 x의 값은 $\frac{\pi}{2}$, $\frac{3}{2}\pi$이고

$f'(x)=x+a$이므로 $f'(\sin x)=0$에서 $\sin x=-a$

(i) $|a|>1$일 때

$0<x<2\pi$에서 $\sin x=-a$를 만족시키는 x는 존재하지 않으므로

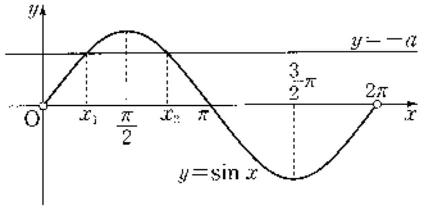
방정식 $g'(x)=0$의 서로 다른 실근은 $\frac{\pi}{2}$, $\frac{3}{2}\pi$이다.

(ii) $a=-1$일 때

$0<x<2\pi$에서 $\sin x=1$을 만족시키는 x의 값은 $\frac{\pi}{2}$이므로

방정식 $g'(x)=0$의 서로 다른 실근은 $\frac{\pi}{2}$, $\frac{3}{2}\pi$이다.

(iii) $|a|<1$, $a\neq0$일 때



$0<x<2\pi$에서 곡선 $y=\sin x$와 직선 $y=-a$가 만나는 두 점의 x좌표를 각각 x_1, x_2 $(x_1<x_2)$라 하면

$0<x<2\pi$에서 $\sin x=-a$를 만족시키는 x의 값은 x_1, x_2이므로

방정식 $g'(x)=0$의 서로 다른 실근은 x_1, x_2, $\frac{\pi}{2}$, $\frac{3}{2}\pi$이다.

(iv) $a=0$일 때

$0<x<2\pi$에서 $\sin x=0$을 만족시키는 x의 값은 π이므로

방정식 $g'(x)=0$의 서로 다른 실근은 $\frac{\pi}{2}$, π, $\frac{3}{2}\pi$이다.

(v) $a=1$일 때

$0<x<2\pi$에서 $\sin x=-1$을 만족시키는 x의 값은 $\frac{3}{2}\pi$이므로

방정식 $g'(x)=0$의 서로 다른 실근은 $\frac{\pi}{2}$, $\frac{3}{2}\pi$이다.

(i)~(v)에서 $0<x<2\pi$에서 방정식 $g'(x)=0$의 서로 다른 실근의 개수가 3이 되도록 하는 a의 값은 0이고, 이때 모든 실근은 $\frac{\pi}{2}$, π, $\frac{3}{2}\pi$이다.

따라서 모든 실근의 합은

$\frac{\pi}{2}+\pi+\frac{3}{2}\pi=3\pi$

답 ⑤

15

조건 (가)에서 $f(a)-g(a)=0$이므로 $f(a)=g(a)$이고

조건 (나)에서 $f(a)=a$이므로 $f(a)=g(a)=a$

함수 $h(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하므로

함수 $h(x)$는 $x=a$에서 미분가능하다.

함수 $h(x)$는 $x=a$에서 연속이고 $\lim_{x\to a+}f(x)g(x)=f(a)g(a)$이므로

$f(g(a))=f(a)g(a)$, $f(a)=a\times a$, $a=a^2$

$a=0$ 또는 $a=1$

$a>0$이므로 $a=1$

또한 함수 $h(x)$는 $x=1$에서 미분가능하므로

$$\lim_{h\to0-}\frac{f(g(1+h))-f(g(1))}{h}=\lim_{h\to0+}\frac{f(1+h)g(1+h)-f(1)g(1)}{h}$$

한편, 합성함수의 미분법에 의하여

$\lim_{h\to0}\frac{f(g(1+h))-f(g(1))}{h}=f'(g(1))\times g'(1)$이고,

$$\lim_{h\to0+}\frac{f(1+h)g(1+h)-f(1)g(1)}{h}$$
$$=\lim_{h\to0+}\left\{\frac{f(1+h)-f(1)}{h}\times g(1+h)+f(1)\times\frac{g(1+h)-g(1)}{h}\right\}$$
$$=f'(1)g(1)+f(1)g'(1)$$

이므로

$f'(g(1))\times g'(1)=f'(1)g(1)+f(1)g'(1)$

$f(1)=g(1)=1$, $f'(1)=3$이므로

$f'(1)\times g'(1)=f'(1)+g'(1)$, $3g'(1)=3+g'(1)$

$g'(1)=\frac{3}{2}$

따라서 $g'(a)=g'(1)=\frac{3}{2}$

답 ③

참고

$f(x)=3x-2$, $g(x)=\frac{3}{2}x-\frac{1}{2}$, $a=1$은 주어진 조건을 만족시키는 한 예이다.

필수 유형 6

$x^2-y\ln x+x=e$에서 y를 x에 대한 함수로 보고 양변을 x에 대하여 미분하면

$$2x-\left(\frac{dy}{dx}\times\ln x+y\times\frac{1}{x}\right)+1=0$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{2x-\frac{y}{x}+1}{\ln x}\ (x\neq 1)$$

따라서 곡선 $x^2-y\ln x+x=e$ 위의 점 (e, e^2)에서의 접선의 기울기는

$$\frac{2e-\frac{e^2}{e}+1}{\ln e}=\frac{2e-e+1}{1}=e+1$$

답 ①

16

$$\frac{dx}{dt}=1+\frac{1}{2\sqrt{t}}=\frac{2\sqrt{t}+1}{2\sqrt{t}}$$

$\frac{dy}{dt}=2t+\frac{4}{t^2}=\frac{2t^3+4}{t^2}$이므로

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{\frac{2t^3+4}{t^2}}{\frac{2\sqrt{t}+1}{2\sqrt{t}}}=\frac{4\sqrt{t}(t^3+2)}{t^2(2\sqrt{t}+1)}$$

따라서 $t=1$일 때

$$\frac{dy}{dx}=\frac{4\times(1+2)}{2+1}=4$$

답 ④

17

$e^y\ln x=x$에서 진수의 조건에 의하여 $x>0$이고, $e^y>0$이므로

$\ln x>0$이다. 즉, $x>1$

점 (a, b)가 곡선 $e^y\ln x=x$ 위의 점이므로

$e^b\ln a=a$ …… ㉠

$e^y\ln x=x$에서 y를 x에 대한 함수로 보고 양변을 x에 대하여 미분하면

$$\left(e^y\times\frac{dy}{dx}\right)\times\ln x+e^y\times\frac{1}{x}=1$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{e^y\ln x}\times\left(1-\frac{e^y}{x}\right)$$

곡선 $e^y\ln x=x$ 위의 점 (a, b)에서의 접선의 기울기가 0이므로

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{e^b\ln a}\times\left(1-\frac{e^b}{a}\right)=0$$

$a=e^b$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=e$, $b=1$

따라서 $a+b=e+1$

답 ①

18

$x^2+xy+\frac{7}{3}y^2=1$에서 y를 x에 대한 함수로 보고 양변을 x에 대하여 미분하면

$$2x+\left(y+x\times\frac{dy}{dx}\right)+\frac{14}{3}y\times\frac{dy}{dx}=0$$

$\left(x+\frac{14}{3}y\right)\times\frac{dy}{dx}=-(2x+y)$ …… ㉠

점 P는 곡선 C와 직선 $y=kx$가 만나는 점이므로 $y=kx$를 ㉠에 대입하면

$$\left(x+\frac{14}{3}kx\right)\times\frac{dy}{dx}=-(2x+kx)$$

$x>0$, $k>0$, $x+\frac{14}{3}kx>0$이므로

양변을 $x+\frac{14}{3}kx$로 나누면

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{2x+kx}{x+\frac{14}{3}kx}=-\frac{2+k}{1+\frac{14}{3}k}=-\frac{6+3k}{3+14k}$$

한편, 점 O와 직선 l 사이의 거리가 선분 OP의 길이와 같으므로 직선 $y=kx$와 직선 l은 서로 수직이다.

즉, $k\times\left(-\frac{6+3k}{3+14k}\right)=-\frac{6k+3k^2}{3+14k}=-1$

$3k^2+6k=14k+3$, $3k^2-8k-3=0$

$(3k+1)(k-3)=0$

$k>0$이므로 $k=3$

답 3

필수 유형 7

$f(x)=\frac{1\times e^x}{(1+e^{-x})\times e^x}=\frac{e^x}{e^x+1}$이므로

$$f'(x)=\frac{e^x(e^x+1)-e^x\times e^x}{(e^x+1)^2}=\frac{e^x}{(e^x+1)^2}$$

$f(-1)=\frac{1}{1+e}$ 에서

$$\begin{aligned}g'\left(\frac{1}{1+e}\right)&=\frac{1}{f'(-1)}\\&=\frac{1}{\frac{e^{-1}}{(e^{-1}+1)^2}}\\&=e(e^{-1}+1)^2\\&=e\left(\frac{1}{e}+1\right)^2\\&=\frac{(1+e)^2}{e}\end{aligned}$$

따라서 $g'(f(-1))=g'\left(\frac{1}{1+e}\right)=\frac{(1+e)^2}{e}$

답 ⑤

19

$f'(x)=3x^2+1>0$이므로 함수 $f(x)$는 실수 전체의 집합에서 증가하고, 역함수가 존재한다.

$f(g(t))=\{g(t)\}^3+g(t)=t$이므로

$g(t)$는 $f(t)$의 역함수이다.

또한 함수 $f(t)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하고 $f'(t)\neq 0$이므로 함수 $g(t)$는 실수 전체의 집합에서 연속이고 미분가능하다.

$\lim_{t\to 2}\frac{g(t)+a}{t-2}=b$에서 $t\to 2$일 때 (분모) $\to 0$이므로

(분자) $\to 0$이어야 한다.

$\lim_{t\to 2}\{g(t)+a\}=g(2)+a=0$

$g(2)=-a$에서 $f(-a)=2$

$f(x)=x^3+x$에서

$f(-a)=-a^3-a=2$

$a^3+a+2=0$

$(a+1)(a^2-a+2)=0$

모든 실수 a에 대하여 $a^2-a+2>0$이므로

$a=-1$, 즉 $g(2)=1$

$$\lim_{t\to 2}\frac{g(t)+a}{t-2}=\lim_{t\to 2}\frac{g(t)-g(2)}{t-2}$$
$$=g'(2)$$
$$=\frac{1}{f'(g(2))}$$
$$=\frac{1}{f'(1)}$$

$f'(x)=3x^2+1$이므로 $f'(1)=4$

즉, $b=\frac{1}{4}$

따라서 $\frac{a}{b}=-4$

답 ①

20

두 함수 $f(x)$, $f'(x)$는 모두 미분가능하고 연속이다.

$\lim_{h\to 0}\frac{f'(2+h)}{h}=0$에서

$h\to 0$일 때 (분모) $\to 0$이므로 (분자) $\to 0$이어야 한다.

$\lim_{h\to 0}f'(2+h)=0$이므로

$f'(2)=0$ …… ㉠

$\lim_{h\to 0}\frac{f'(2+h)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f'(2+h)-f'(2)}{h}=f''(2)$

이므로 $f''(2)=0$ …… ㉡

$f(x)=\frac{x^2+ax+b}{e^x}=(x^2+ax+b)e^{-x}$에서

$f'(x)=(2x+a)e^{-x}-(x^2+ax+b)e^{-x}$

$=-\{x^2+(a-2)x-a+b\}e^{-x}$ …… ㉢

$f''(x)=(-2x-a+2)e^{-x}+\{x^2+(a-2)x-a+b\}e^{-x}$

$=\{x^2+(a-4)x-2a+b+2\}e^{-x}$ …… ㉣

㉠, ㉢에서

$4+(a-2)\times 2-a+b=0$

$a+b=0$ …… ㉤

㉡, ㉣에서

$4+(a-4)\times 2-2a+b+2=0$

$b-2=0$ …… ㉥

㉤, ㉥에서

$a=-2$, $b=2$

따라서 $ab=-4$

답 ①

21

$f(x)=ax+\tan\frac{\pi}{4}x$

$f'(x)=a+\frac{\pi}{4}\sec^2\frac{\pi}{4}x$이고 $-2<x<2$에서 $f'(x)>0$이므로 함수 $f(x)$의 역함수 $g(x)$는 미분가능하다.

$\lim_{x\to 3}\frac{g(x)-1}{x-3}=b$에서 $x\to 3$일 때 (분모) $\to 0$이므로

(분자) $\to 0$이어야 한다.

$\lim_{x\to 3}\{g(x)-1\}=0$에서 $g(3)=1$이고

$g(x)$는 $f(x)$의 역함수이므로

$f(1)=3$

$f(1)=a\times 1+\tan\frac{\pi}{4}=a+1$

$a+1=3$에서 $a=2$

$f'(1)=2+\frac{\pi}{4}\times 2=2+\frac{\pi}{2}$

$b=\lim_{x\to 3}\frac{g(x)-1}{x-3}=g'(3)=\frac{1}{f'(1)}=\frac{1}{2+\frac{\pi}{2}}=\frac{2}{4+\pi}$

따라서 $ab=2\times\frac{2}{4+\pi}=\frac{4}{4+\pi}$

답 ④

필수 유형 ❸

y를 x에 대한 함수로 보고

$e^y\ln x=2y+1$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$e^y\times\frac{dy}{dx}\times\ln x+e^y\times\frac{1}{x}=2\times\frac{dy}{dx}$

이 식에 $x=e$, $y=0$을 대입하면

$\frac{dy}{dx}+\frac{1}{e}=2\times\frac{dy}{dx}$

$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{e}$

그러므로 곡선 $e^y\ln x=2y+1$ 위의 점 $(e, 0)$에서의 접선의 방정식은

$y=\frac{1}{e}(x-e)=\frac{1}{e}x-1$

따라서 $a=\frac{1}{e}$, $b=-1$이므로

$ab=-\frac{1}{e}$

답 ⑤

22

$f'(x)=\dfrac{3(x^2+2)-3x\times 2x}{(x^2+2)^2}=\dfrac{-3x^2+6}{(x^2+2)^2}$

$f'(2)=\dfrac{-6}{6^2}=-\dfrac{1}{6}$

그러므로 접선의 방정식은

$y=-\dfrac{1}{6}(x-2)+1$

$y=-\dfrac{1}{6}x+\dfrac{4}{3}$

$0=-\dfrac{1}{6}x+\dfrac{4}{3}$에서 $x=8$이므로 $\mathrm{A}(8,\ 0)$

또, $y=-\dfrac{1}{6}\times 0+\dfrac{4}{3}$에서 $y=\dfrac{4}{3}$이므로 $\mathrm{B}\left(0,\ \dfrac{4}{3}\right)$

따라서 삼각형 OAB의 넓이는

$\dfrac{1}{2}\times 8\times\dfrac{4}{3}=\dfrac{16}{3}$

답 ②

23

y를 x에 대한 함수로 보고 $x^2+2xy-y^2=4$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$2x+2\left(y+x\times\dfrac{dy}{dx}\right)-2y\times\dfrac{dy}{dx}=0$

$(x-y)\dfrac{dy}{dx}=-x-y$

$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{-x-y}{x-y}$ (단, $x-y\neq 0$)

$\dfrac{-x-y}{x-y}=3$에서

$-x-y=3x-3y,\ y=2x$

$x^2+2xy-y^2=4$에서 $y=2x$일 때

$x^2+4x^2-4x^2=4$

$x^2=4$

$x=2$ 또는 $x=-2$

따라서 접점의 좌표는 $(2,\ 4)$ 또는 $(-2,\ -4)$

점 $(2,\ 4)$가 접점일 때 접선의 방정식은

$y=3(x-2)+4,\ y=3x-2$

점 $(-2,\ -4)$가 접점일 때 접선의 방정식은

$y=3(x+2)-4,\ y=3x+2$

따라서 $a=-2,\ b=2$이므로

$a^2+b^2=(-2)^2+2^2=8$

답 ④

24

$\dfrac{dx}{dt}=1+\dfrac{1}{t^2},\ \dfrac{dy}{dt}=2t+1$

$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{\dfrac{dy}{dt}}{\dfrac{dx}{dt}}=\dfrac{2t+1}{1+\dfrac{1}{t^2}}=\dfrac{2t^3+t^2}{t^2+1}$

원점에서 그은 접선이 곡선과 접하는 점의 좌표를

$\left(t-\dfrac{1}{t},\ t^2+t\right)$ $(t>0)$으로 놓으면 이 점에서의 접선의 방정식은

$y=\dfrac{2t^3+t^2}{t^2+1}\left(x-t+\dfrac{1}{t}\right)+t^2+t$

$x=0,\ y=0$을 대입하면

$0=\dfrac{2t^3+t^2}{t^2+1}\left(0-t+\dfrac{1}{t}\right)+t^2+t$

$\dfrac{2t^3+t^2}{t^2+1}\left(t-\dfrac{1}{t}\right)=t^2+t$

$\dfrac{t^2(2t+1)}{t^2+1}\times\dfrac{(t+1)(t-1)}{t}=t(t+1)$

$t>0$이므로 $\dfrac{(2t+1)(t-1)}{t^2+1}=1$

$2t^2-t-1=t^2+1,\ t^2-t-2=0$

$(t-2)(t+1)=0$

$t>0$이므로 $t=2$

따라서 구하는 접선의 기울기는

$\dfrac{2\times 2^3+2^2}{2^2+1}=4$

답 ④

필수 유형 ❸

$f(x)=(x^2-8)e^{-x+1}$에서

$f'(x)=2xe^{-x+1}-(x^2-8)e^{-x+1}$

$\quad=-(x^2-2x-8)e^{-x+1}$

$\quad=-(x+2)(x-4)e^{-x+1}$

$f'(x)=0$에서 $x=-2$ 또는 $x=4$

x의 값에 따른 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	4	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘	극소	↗	극대	↘

함수 $f(x)$는 $x=-2$에서 극솟값 a, $x=4$에서 극댓값 b를 가지므로

$a=f(-2)=(4-8)e^3=-4e^3$

$b=f(4)=(16-8)e^{-3}=8e^{-3}$

따라서 $ab=(-4e^3)\times 8e^{-3}=-32$

답 ②

25

함수 $f(x)$의 역함수가 존재하려면 모든 실수 x에 대하여 $f'(x)\geq 0$이거나 $f'(x)\leq 0$이어야 한다.

$f'(x)=(2x+a)e^{-x}-(x^2+ax-a+4)e^{-x}$

$\quad=-\{x^2+(a-2)x-2a+4\}e^{-x}$

이므로 모든 실수 x에 대하여

$x^2+(a-2)x-2a+4\geq 0$

이어야 한다.

이차방정식 $x^2+(a-2)x-2a+4=0$의 판별식을 D라 하면

$D=(a-2)^2-4(-2a+4)\le 0$

$a^2+4a-12\le 0$, $(a+6)(a-2)\le 0$

$-6\le a\le 2$

따라서 조건을 만족시키는 정수 a는 -6, -5, $\cdots$, 1, 2이고, 그 개수는 9이다.

답 ④

26

$f'(x)=\sin x+\left(x-\frac{2}{3}\pi\right)\cos x-\sin x$

$\quad=\left(x-\frac{2}{3}\pi\right)\cos x$

$f'(x)=0$에서 $x=\frac{\pi}{2}$ 또는 $x=\frac{2}{3}\pi$

x의 값에 따른 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	(0)	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$	$\cdots$	$\frac{2}{3}\pi$	$\cdots$	(π)
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$		↘	극소	↗	극대	↘	

$f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\left(\frac{\pi}{2}-\frac{2}{3}\pi\right)\sin\frac{\pi}{2}+\cos\frac{\pi}{2}=-\frac{\pi}{6}$

$f\left(\frac{2}{3}\pi\right)=\left(\frac{2}{3}\pi-\frac{2}{3}\pi\right)\sin\frac{2}{3}\pi+\cos\frac{2}{3}\pi=-\frac{1}{2}$

따라서 $M=-\frac{1}{2}$, $m=-\frac{\pi}{6}$이므로

$M\times m=\frac{\pi}{12}$

답 ①

27

$f(0)=0$에서

$a\ln b=0$

$a=0$이면 $f(x)=x^3$이고 $f'(x)=3x^2$이므로 $f'(-1)=6$이라는 조건을 만족시키지 않는다.

즉, $a\neq 0$이므로 $b=1$

$f(x)=x^3+a\ln(x^2+1)$에서

$f'(x)=3x^2+a\times\frac{2x}{x^2+1}$

$f'(-1)=3+a\times\frac{-2}{2}=3-a$

$3-a=6$에서 $a=-3$

$f(x)=x^3-3\ln(x^2+1)$

$f'(x)=3x^2-\frac{6x}{x^2+1}=\frac{3x^4+3x^2-6x}{x^2+1}$

$\quad=\frac{3x(x-1)(x^2+x+2)}{x^2+1}$

$f'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=1$

x의 값에 따른 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

$f(1)=1-3\ln 2$

따라서 함수 $f(x)$의 극솟값은 $1-3\ln 2$이다.

답 ④

필수 유형 ⑩

$y'=-2e^{-x}$이므로 점 P에서의 접선의 방정식은

$y-2e^{-t}=-2e^{-t}(x-t)$

$x=0$을 대입하면

$y=2(1+t)e^{-t}$이므로

$B(0,\ 2(1+t)e^{-t})$

이때 $A(0,\ 2e^{-t})$이므로

$\overline{AB}=2te^{-t}$

삼각형 APB의 넓이를 $S(t)$라 하면

$S(t)=\frac{1}{2}\times 2te^{-t}\times t=t^2e^{-t}$

$S'(t)=2te^{-t}-t^2e^{-t}=t(2-t)e^{-t}$

t의 값에 따른 함수 $S(t)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

t	(0)	$\cdots$	2	$\cdots$
$S'(t)$		$+$	0	$-$
$S(t)$		↗	극대	↘

따라서 함수 $S(t)$는 $t=2$일 때 극대이면서 최대이므로 구하는 t의 값은 2이다.

답 ④

28

$f'(x)=e^{-x}-xe^{-x}$

$f''(x)=-e^{-x}-(e^{-x}-xe^{-x})=(x-2)e^{-x}$

$f''(x)=0$에서 $x=2$

$x=2$의 좌우에서 $f''(x)$의 부호가 음에서 양으로 바뀌므로

점 $(2,\ 2e^{-2})$은 함수 $y=f(x)$의 그래프의 변곡점이다.

이때 점 $(2,\ 2e^{-2})$에서의 접선의 기울기는 $f'(2)=e^{-2}-2e^{-2}=-e^{-2}$이므로 접선의 방정식은

$y=-e^{-2}(x-2)+2e^{-2}$

$y=-e^{-2}x+4e^{-2}$

따라서 $A(4,\ 0)$, $B(0,\ 4e^{-2})$이므로 삼각형 OAB의 넓이는

$\frac{1}{2}\times 4\times 4e^{-2}=8e^{-2}$

답 ④

29

$f(x)=2x-\sin x$에서

$f'(x)=2-\cos x$

$f''(x)=\sin x$

$0<x<3\pi$이므로 $f''(x)=0$에서 $x=\pi$ 또는 $x=2\pi$

$x=\pi$의 좌우에서 $f''(x)$의 부호가 바뀌므로 점 $(\pi,\ f(\pi))$는 변곡점이다.

또한 $x=2\pi$의 좌우에서 $f''(x)$의 부호가 바뀌므로 점 $(2\pi, f(2\pi))$는 변곡점이다.

$\alpha<\beta$이므로 $\alpha=\pi$, $\beta=2\pi$

역함수의 미분법에 의하여

$$g'(f(\pi))=\frac{1}{f'(\pi)}=\frac{1}{2-\cos\pi}=\frac{1}{3}$$

$$g'(f(2\pi))=\frac{1}{f'(2\pi)}=\frac{1}{2-\cos 2\pi}=1$$

따라서 $g'(f(\alpha))+g'(f(\beta))=\frac{1}{3}+1=\frac{4}{3}$

답 ③

30

$P(t, (\ln t)^2)$이므로

$\overline{OQ}=t$, $\overline{OR}=(\ln t)^2$

사각형 OQPR의 넓이를 $S(t)$라 하면

$S(t)=t(\ln t)^2$

$$S'(t)=(\ln t)^2+t\times 2\ln t\times\frac{1}{t}$$
$$=(\ln t)^2+2\ln t=(\ln t)\times(\ln t+2)$$

$0<t<1$이므로

$S'(t)=0$에서 $t=e^{-2}$

t의 값에 따른 함수 $S(t)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

t	(0)	$\cdots$	e^{-2}	$\cdots$	(1)
$S'(t)$		$+$	0	$-$	
$S(t)$		$\nearrow$	극대	$\searrow$	

$t=e^{-2}$일 때 함수 $S(t)$는 극대이면서 최대이므로 사각형 OQPR의 넓이의 최댓값은

$S(e^{-2})=e^{-2}\times(\ln e^{-2})^2=4e^{-2}$

답 ③

필수 유형 ⑪

$x=1-\cos 4t$에서

$\frac{dx}{dt}=4\sin 4t$이고 $\frac{d^2x}{dt^2}=16\cos 4t$

$y=\frac{1}{4}\sin 4t$에서

$\frac{dy}{dt}=\cos 4t$이고 $\frac{d^2y}{dt^2}=-4\sin 4t$

시각 t에서의 점 P의 속력을 $f(t)$로 놓으면

$$f(t)=\sqrt{(4\sin 4t)^2+\cos^2 4t}$$
$$=\sqrt{16\sin^2 4t+\cos^2 4t}$$
$$=\sqrt{15\sin^2 4t+1}$$

이므로 $\sin^2 4t=1$일 때, 점 P의 속력이 최대이다.

시각 t에서의 점 P의 가속도의 크기를 $g(t)$로 놓으면

$$g(t)=\sqrt{(16\cos 4t)^2+(-4\sin 4t)^2}$$
$$=\sqrt{256\cos^2 4t+16\sin^2 4t}$$
$$=\sqrt{240\cos^2 4t+16}$$

한편, $\sin^2 4t=1$일 때

$\cos^2 4t=1-\sin^2 4t=0$

따라서 점 P의 속력이 최대일 때, 가속도의 크기는 $\sqrt{16}=4$

답 4

31

$x^2>0$이므로

$k\geq\frac{\ln x}{x^2}$

$f(x)=\frac{\ln x}{x^2}$라 하면

$$f'(x)=\frac{\frac{1}{x}\times x^2-\ln x\times 2x}{x^4}=\frac{1-2\ln x}{x^3}$$

$f'(x)=0$에서 $\ln x=\frac{1}{2}$, $x=\sqrt{e}$

x의 값에 따른 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	(0)	$\cdots$	$\sqrt{e}$	$\cdots$
$f'(x)$		$+$	0	$-$
$f(x)$		$\nearrow$	극대	$\searrow$

함수 $f(x)$는 $x=\sqrt{e}$에서 극대이면서 최대이므로 최댓값은

$$f(\sqrt{e})=\frac{\frac{1}{2}}{e}=\frac{1}{2e}$$

따라서 $k\geq\frac{1}{2e}$이어야 하므로 k의 최솟값은 $\frac{1}{2e}$이다.

답 ②

32

$k\sqrt{x}=|\ln x|$에서

$\sqrt{x}>0$이므로 $\frac{|\ln x|}{\sqrt{x}}=k$

$h(x)=\frac{|\ln x|}{\sqrt{x}}$라 하면

$$h(x)=\begin{cases}-\frac{\ln x}{\sqrt{x}} & (0<x<1)\\ \frac{\ln x}{\sqrt{x}} & (x\geq 1)\end{cases}$$

(i) $0<x<1$일 때

$$h'(x)=-\frac{\frac{1}{x}\times\sqrt{x}-\ln x\times\frac{1}{2\sqrt{x}}}{x}$$
$$=-\frac{2-\ln x}{2x\sqrt{x}}<0$$

이므로 함수 $h(x)$는 감소한다.

(ii) $x>1$일 때

$$h'(x)=\frac{\frac{1}{x}\times\sqrt{x}-\ln x\times\frac{1}{2\sqrt{x}}}{x}=\frac{2-\ln x}{2x\sqrt{x}}$$

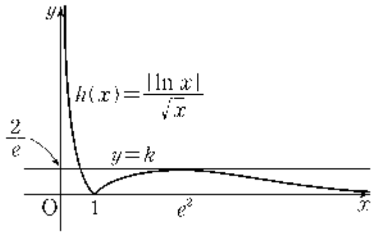
$h'(x)=0$에서 $\ln x=2$, 즉 $x=e^2$

(ⅰ), (ⅱ)에 의하여 x의 값에 따른 함수 $h(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	(0)	$\cdots$	1	$\cdots$	e^2	$\cdots$
$h'(x)$		$-$		$+$	0	$-$
$h(x)$		↘	0	↗	극대	↘

$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}=0$, $\lim\limits_{x\to 0+}\left(-\dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}\right)=\infty$, $h(e^2)=\dfrac{2}{e}$

이므로 함수 $h(x)=\dfrac{|\ln x|}{\sqrt{x}}$의 그래프는 그림과 같다.



방정식 $f(x)=g(x)$의 서로 다른 실근의 개수가 2이려면 곡선 $y=h(x)$와 직선 $y=k$가 서로 다른 두 점에서 만나야 하므로 구하는 k의 값은 $\dfrac{2}{e}$이다.

답 ④

33

$\dfrac{dx}{dt}=e^{-t}+(t+1)(-e^{-t})=-te^{-t}$

$\dfrac{dy}{dt}=2e^{-t}-2te^{-t}=2(1-t)e^{-t}$

이므로 점 P의 속력은

$$\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}=\sqrt{(-te^{-t})^2+\{2(1-t)e^{-t}\}^2}$$
$$=\sqrt{t^2e^{-2t}+4(t-1)^2e^{-2t}}$$
$$=\sqrt{(5t^2-8t+4)e^{-2t}}$$

그러므로 $f(t)=(5t^2-8t+4)e^{-2t}$

$f'(t)=(10t-8)e^{-2t}+(5t^2-8t+4)(-2e^{-2t})$

$=(-10t^2+26t-16)e^{-2t}$

$=-2(t-1)(5t-8)e^{-2t}$

$f'(t)=0$에서 $t=1$ 또는 $t=\dfrac{8}{5}$

t의 값에 따른 함수 $f(t)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

t	(0)	$\cdots$	1	$\cdots$	$\frac{8}{5}$	$\cdots$
$f'(t)$		$-$	0	$+$	0	
$f(t)$		↘	극소	↗	극대	↘

따라서 함수 $f(t)$가 $t=\dfrac{8}{5}$에서 극대이므로

$a=\dfrac{8}{5}$

답 ④

09 적분법

정답				본문 102~111쪽
필수 유형 ❶	②	01 10	02 ③	03 160
필수 유형 ❷	④	04 ③	05 ④	06 13
필수 유형 ❸	⑤	07 6	08 ①	09 16
필수 유형 ❹	②	10 14	11 ④	12 ②
필수 유형 ❺	⑤	13 ②	14 ④	15 ②
필수 유형 ❻	③	16 12	17 ③	18 ①
필수 유형 ❼	③	19 ①	20 ③	21 ②
필수 유형 ❽	②	22 ①	23 ①	24 ④
필수 유형 ❾	④	25 ②	26 ③	27 ⑤
필수 유형 ❿	①	28 ③	29 ②	30 ⑤

필수 유형 ❶

$x>0$에서 $f'(x)=2-\dfrac{3}{x^2}$

$f(x)=2x+\dfrac{3}{x}+C_1$ (단, C_1은 적분상수)

이때 $f(1)=5$이므로

$2+3+C_1=5$

$C_1=0$

즉, $f(x)=2x+\dfrac{3}{x}$

한편, $x<0$에서 $g'(x)=f'(-x)=2-\dfrac{3}{x^2}$이므로

$g(x)=2x+\dfrac{3}{x}+C_2$ (단, C_2는 적분상수)

이때 $f(2)+g(-2)=9$이므로

$\left(4+\dfrac{3}{2}\right)+\left(-4-\dfrac{3}{2}+C_2\right)=9$

$C_2=9$

따라서 $g(x)=2x+\dfrac{3}{x}+9$이므로

$g(-3)=-6-1+9=2$

답 ②

01

$F(x)=xf(x)-(x-1)e^x$을 x에 대하여 미분하면

$f(x)=f(x)+xf'(x)-\{e^x+(x-1)e^x\}$

$xf'(x)=xe^x$

$x>0$이므로

$f'(x)=e^x$

$f(x)=e^x+C$ (단, C는 적분상수)

$f(\ln 2)=2+C=4$에서 $C=2$

따라서 $f(x)=e^x+2$이므로

$f(3\ln 2)=8+2=10$

답 10

02

(i) $0<x<\frac{\pi}{2}$일 때

$f'(x)=\sin x$

$f(x)=\int \sin x\,dx=-\cos x+C_1$ (단, C_1은 적분상수)

$f\left(\frac{\pi}{3}\right)=-\cos\frac{\pi}{3}+C_1=-\frac{1}{2}+C_1$

$-\frac{1}{2}+C_1=\frac{3}{2}$에서 $C_1=2$

$f(x)=-\cos x+2$

(ii) $-\frac{\pi}{2}<x<0$일 때

$f'(x)=\tan^2 x=\sec^2 x-1$

$f(x)=\int(\sec^2 x-1)dx=\tan x-x+C_2$ (단, C_2는 적분상수)

$f(x)$는 $x=0$에서 미분가능하므로 연속이다.

$\lim_{x\to 0-} f(x)=\lim_{x\to 0-}(\tan x-x+C_2)=C_2$

$\lim_{x\to 0+} f(x)=\lim_{x\to 0+}(-\cos x+2)=1$

이므로 $f(0)=1=C_2$

$f(x)=\tan x-x+1$

따라서

$f\left(-\frac{\pi}{4}\right)=\tan\left(-\frac{\pi}{4}\right)-\left(-\frac{\pi}{4}\right)+1=-1+\frac{\pi}{4}+1=\frac{\pi}{4}$

답 ③

03

$e^x f(x)+e^x f'(x)=2x+1$에 $x=0$을 대입하면

$f(0)+f'(0)=1$

$f'(0)=-3$이므로 $f(0)=4$

$y=e^x f(x)$에 대하여 $y'=e^x f(x)+e^x f'(x)$이므로

$e^x f(x)=\int(2x+1)dx=x^2+x+C$ (단, C는 적분상수)

$x=0$을 대입하면

$f(0)=C=4$

따라서 $e^x f(x)=x^2+x+4$, $f(x)=(x^2+x+4)e^{-x}$

$f(3)=(9+3+4)e^{-3}=16e^{-3}$

$f(-3)=(9-3+4)e^3=10e^3$

따라서 $f(3)\times f(-3)=16e^{-3}\times 10e^3=160$

답 160

필수 유형 ❷

$f(x)=\int_0^x \frac{1}{1+e^{-t}}\,dt=\int_0^x \frac{e^t}{1+e^t}\,dt$

에서 $1+e^t=s$로 놓으면

$e^t=\frac{ds}{dt}$

이고, $t=0$일 때 $s=2$, $t=x$일 때 $s=1+e^x$이므로

$f(x)=\int_2^{1+e^x}\frac{1}{s}\,ds$

$=\Big[\ln|s|\Big]_2^{1+e^x}=\ln(1+e^x)-\ln 2=\ln\frac{1+e^x}{2}$

$(f\circ f)(a)=f(f(a))=\ln 5$에서

$\ln\frac{1+e^{f(a)}}{2}=\ln 5$

$\frac{1+e^{f(a)}}{2}=5$

$e^{f(a)}=9$, $f(a)=\ln 9$

$f(a)=\ln\frac{1+e^a}{2}=\ln 9$

이므로 $e^a=17$

따라서 $a=\ln 17$

답 ④

04

$1+\ln x=t$라 하면 $\frac{1}{x}=\frac{dt}{dx}$이고

$x=e$일 때 $t=2$, $x=e^3$일 때 $t=4$이므로

$\int_e^{e^3}\frac{\ln(1+\ln x)}{x(1+\ln x)}\,dx=\int_2^4\frac{\ln t}{t}\,dt$

$\ln t=s$라 하면 $\frac{1}{t}=\frac{ds}{dt}$이고

$t=2$일 때 $s=\ln 2$, $t=4$일 때 $s=\ln 4$이므로

$\int_2^4\frac{\ln t}{t}\,dt=\int_{\ln 2}^{\ln 4}s\,ds=\left[\frac{1}{2}s^2\right]_{\ln 2}^{\ln 4}$

$=\frac{1}{2}\{(\ln 4)^2-(\ln 2)^2\}$

$=\frac{1}{2}\times(\ln 4+\ln 2)\times(\ln 4-\ln 2)$

$=\frac{1}{2}\times 3\ln 2\times\ln 2$

$=\frac{3}{2}(\ln 2)^2$

답 ③

05

$0<\alpha<\frac{\pi}{2}$이고 $\tan\alpha=\frac{3}{4}$이므로

$\sin\alpha=\frac{3}{5}$, $\cos\alpha=\frac{4}{5}$

$0<\alpha<\frac{\pi}{2}$에서 $0<\frac{\pi}{2}-\alpha<\frac{\pi}{2}$이고 열린구간 $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$에서 $\sin x>0$이므로

$\int_\alpha^{\frac{\pi}{2}-\alpha}\frac{\sin^3 x}{\cos^2 x-\cos^4 x}\,dx$

$=\int_\alpha^{\frac{\pi}{2}-\alpha}\frac{\sin^3 x}{\cos^2 x(1-\cos^2 x)}\,dx$

$=\int_\alpha^{\frac{\pi}{2}-\alpha}\frac{\sin^3 x}{\cos^2 x\sin^2 x}\,dx$

$=\int_\alpha^{\frac{\pi}{2}-\alpha}\frac{\sin x}{\cos^2 x}\,dx$

$\cos x=t$라 하면 $-\sin x=\frac{dt}{dx}$이고

$\cos\alpha=\frac{4}{5}$, $\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\sin\alpha=\frac{3}{5}$이므로

$\int_\alpha^{\frac{\pi}{2}-\alpha}\frac{\sin x}{\cos^2 x}\,dx=\int_{\frac{4}{5}}^{\frac{3}{5}}\left(-\frac{1}{t^2}\right)dt=\left[\frac{1}{t}\right]_{\frac{4}{5}}^{\frac{3}{5}}$

$=\frac{5}{3}-\frac{5}{4}=\frac{5}{12}$

답 ④

06

$f(x)=x^2+ax+b$ (a, b는 상수)라 하면

$f'(x)=2x+a$

조건 (가)에서

$4+2a+b=4+a$

$a+b=0$ …… ㉠

조건 (나)에서

$\int_0^1 \frac{f'(x)}{f(x)}dx=\Big[\ln|f(x)|\Big]_0^1=\Big[\ln f(x)\Big]_0^1=\ln f(1)-\ln f(0)$

$\ln f(1)-\ln f(0)=\ln f(1)$

$\ln f(0)=0$이므로

$f(0)=1$

$f(0)=b=1$이고 ㉠에서 $a=-1$

따라서 $f(x)=x^2-x+1$이므로

$f(4)=4^2-4+1=13$

답 13

필수 유형 ❸

$\int_e^{e^2} \frac{\ln x-1}{x^2}dx$에서

$u(x)=\ln x-1$, $v'(x)=\frac{1}{x^2}$로 놓으면

$u'(x)=\frac{1}{x}$, $v(x)=-\frac{1}{x}$

따라서

$\int_e^{e^2} \frac{\ln x-1}{x^2}dx$

$=\Big[-\frac{\ln x-1}{x}\Big]_e^{e^2}+\int_e^{e^2}\frac{1}{x^2}dx$

$=\Big[-\frac{\ln x-1}{x}\Big]_e^{e^2}+\Big[-\frac{1}{x}\Big]_e^{e^2}$

$=-\frac{1}{e^2}+\left(-\frac{1}{e^2}+\frac{1}{e}\right)$

$=\frac{e-2}{e^2}$

답 ⑤

07

$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f'(x)\cos x\,dx$

$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\{\cos x\times f'(x)\}dx$

$=\Big[\cos x\times f(x)\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\{(-\sin x)\times f(x)\}dx$

$=\cos\frac{\pi}{2}\times f\left(\frac{\pi}{2}\right)-\cos 0\times f(0)+\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\sin x\,dx$

이므로

$-1=-f(0)+5$에서

$f(0)=6$

답 6

〈다른 풀이〉

$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f'(x)\cos x\,dx=-1$

$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\sin x\,dx=5$

위의 두 식을 변끼리 빼면

$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\{f'(x)\cos x-f(x)\sin x\}dx=-6$

$y=f(x)\cos x$에 대하여

$y'=f'(x)\cos x-f(x)\sin x$이므로

$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\{f'(x)\cos x-f(x)\sin x\}dx$

$=\Big[f(x)\cos x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}$

$=f\left(\frac{\pi}{2}\right)\times 0-f(0)\times 1$

$=-f(0)$

즉, $-6=-f(0)$이므로

$f(0)=6$

08

$f(x)=\int_0^x te^t\,dt=\Big[te^t\Big]_0^x-\int_0^x e^t\,dt$

$=xe^x-\Big[e^t\Big]_0^x=xe^x-e^x+1$

$=(x-1)e^x+1$

$\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1\{(x-1)e^x+1\}dx$

$=\int_0^1 (x-1)e^x\,dx+\int_0^1 1\,dx$

$=\Big[(x-1)e^x\Big]_0^1-\int_0^1 e^x\,dx+\Big[x\Big]_0^1$

$=\Big[(x-1)e^x\Big]_0^1-\Big[e^x\Big]_0^1+\Big[x\Big]_0^1$

$=0-(-1)-(e-1)+(1-0)$

$=-e+3$

답 ①

09

n이 홀수이면 $\cos n\pi=-1$이고,

n이 짝수이면 $\cos n\pi=1$이다.

$\int_{-n\pi}^{(2n+1)\pi} x\sin x\,dx$

$=\Big[x(-\cos x)\Big]_{-n\pi}^{(2n+1)\pi}-\int_{-n\pi}^{(2n+1)\pi}1\times(-\cos x)dx$

$=\Big[x(-\cos x)\Big]_{-n\pi}^{(2n+1)\pi}+\Big[\sin x\Big]_{-n\pi}^{(2n+1)\pi}$

$=-(2n+1)\pi\times\cos(2n+1)\pi+(-n\pi)\times\cos(-n\pi)$

$=(2n+1)\pi-n\pi\cos n\pi$

(i) n이 홀수일 때

$(2n+1)\pi-n\pi\cos n\pi$

$=(2n+1)\pi+n\pi=(3n+1)\pi$

이므로 $(3n+1)\pi\le 25\pi$에서

$3n+1\le 25$, $n\le 8$

따라서 조건을 만족시키는 홀수 n은

1, 3, 5, 7이고, 그 개수는 4이다.

(ii) n이 짝수일 때

$(2n+1)\pi-n\pi\cos n\pi$

$=(2n+1)\pi-n\pi=(n+1)\pi$

이므로 $(n+1)\pi\le 25\pi$에서

$n+1\le 25$, $n\le 24$

따라서 조건을 만족시키는 짝수 n은

2, 4, 6, ⋯, 24이고, 그 개수는 12이다.

(i), (ii)에서 구하는 모든 n의 개수는

$4+12=16$

답 16

《 필수 유형 ❹ 》

$\int_1^x f(t)dt=x^2-a\sqrt{x}$의 양변에 $x=1$을 대입하면

$0=1-a$에서 $a=1$

즉, $\int_1^x f(t)dt=x^2-\sqrt{x}$ ⋯⋯ ㉠

㉠의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x)=2x-\frac{1}{2\sqrt{x}}$

따라서 $f(1)=2-\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$

답 ③

10

$g(x)=\int_0^x f(t)dt$에서

$g'(x)=f(x)$이므로

$$\int_0^3 xf'(x)dx=\Big[xf(x)\Big]_0^3-\int_0^3 f(x)dx$$
$$=3f(3)-\int_0^3 f(x)dx$$
$$=3g'(3)-g(3)$$
$$=3\times 8-10=14$$

답 14

11

$\int_1^x f(t)dt=xe^{-x}+a\int_0^2 f(t)dt$의 양변에 $x=1$을 대입하면

$0=\frac{1}{e}+a\int_0^2 f(t)dt$

$a\int_0^2 f(t)dt=-\frac{1}{e}$ ⋯⋯ ㉠

주어진 식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x)=e^{-x}+x(-e^{-x})=(-x+1)e^{-x}$ ⋯⋯ ㉡

㉠, ㉡에 의하여

$a\int_0^2(-t+1)e^{-t}dt=-\frac{1}{e}$

$\int_0^2(t-1)e^{-t}dt=\frac{1}{ae}$

$\Big[(t-1)(-e^{-t})\Big]_0^2-\int_0^2(-e^{-t})dt=\frac{1}{ae}$

$-e^{-2}-1-\Big[e^{-t}\Big]_0^2=\frac{1}{ae}$

$-e^{-2}-1-e^{-2}+1=\frac{1}{ae}$

$-\frac{2}{e^2}=\frac{1}{ae}$

따라서 $a=-\frac{e}{2}$

답 ④

12

$f'(x)=\sin x+k\cos x=0$에서

$\sin x=-k\cos x$

$\cos x=0$이면 $x=\frac{\pi}{2}$ 또는 $x=\frac{3}{2}\pi$인데 이때 $\sin x\ne 0$이므로 조건을 만족시키지 않는다. 즉,

$\cos x\ne 0$이므로 양변을 $\cos x$로 나누면

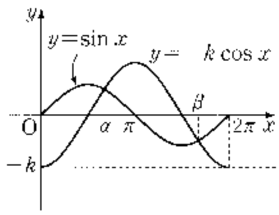
$\tan x=-k<0$

$f'(x)=0$을 만족시키는 x의 값은 제2사분면 또는 제4사분면의 각이다. $f'(\alpha)=0$, $f'(\beta)=0$, $\alpha<\beta$라 하면

$0<x<\alpha$에서 $\sin x>-k\cos x$, 즉 $f'(x)>0$이고

$\alpha<x<\beta$에서 $\sin x<-k\cos x$, 즉 $f'(x)<0$이고

$\beta<x<2\pi$에서 $\sin x>-k\cos x$, 즉 $f'(x)>0$이다.



따라서 $0<x<\alpha$에서 함수 $f(x)=\int_0^x(\sin t+k\cos t)dt$는 증가하고,

$\alpha<x<\beta$에서 함수 $f(x)=\int_0^x(\sin t+k\cos t)dt$는 감소하고

$\beta<x<2\pi$에서 함수 $f(x)=\int_0^x(\sin t+k\cos t)dt$는 증가한다.

따라서 함수 $f(x)=\int_0^x(\sin t+k\cos t)dt$는 $x=\alpha$에서 극댓값,

$x=\beta$에서 극솟값을 갖는다.

x의 값에 따른 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	(0)	⋯	α	⋯	β	⋯	(2π)
$f'(x)$		+	0	−	0	+	
$f(x)$		↗	극대	↘	극소	↗	

제2사분면의 각 α에 대하여 $\tan\alpha=-k$이면

$\cos\alpha=-\frac{1}{\sqrt{k^2+1}}$, $\sin\alpha=\frac{k}{\sqrt{k^2+1}}$

$$f(\alpha)=\int_0^\alpha(\sin t+k\cos t)dt$$
$$=\Big[-\cos t+k\sin t\Big]_0^\alpha$$
$$=-\cos\alpha+k\sin\alpha-(-\cos 0+k\sin 0)$$
$$=\frac{1}{\sqrt{k^2+1}}+\frac{k^2}{\sqrt{k^2+1}}+1$$

$=\sqrt{k^2+1}+1$

$\sqrt{k^2+1}+1=3$에서 $k^2=3$

$k>0$이므로 $k=\sqrt{3}$

제4사분면의 각 β에 대하여 $\tan\beta=-\sqrt{3}$이면

$\cos\beta=\frac{1}{2}$, $\sin\beta=-\frac{\sqrt{3}}{2}$

따라서 함수 $f(x)$의 극솟값은

$$f(\beta)=\int_0^{\beta}(\sin t+\sqrt{3}\cos t)dt$$
$$=\Big[-\cos t+\sqrt{3}\sin t\Big]_0^{\beta}$$
$$=-\cos\beta+\sqrt{3}\sin\beta-(-\cos 0+\sqrt{3}\sin 0)$$
$$=-\frac{1}{2}-\frac{3}{2}+1=-1$$

답 ②

필수 유형 ⑤

$f(t)$의 한 부정적분을 $F(t)$라 하면

$$\lim_{x\to0}\left\{\frac{x^2+1}{x}\int_1^{x+1}f(t)\,dt\right\}=\lim_{x\to0}\left\{\frac{x^2+1}{x}\Big[F(t)\Big]_1^{x+1}\right\}$$
$$=\lim_{x\to0}\left\{(x^2+1)\times\frac{F(x+1)-F(1)}{x}\right\}$$
$$=\lim_{x\to0}(x^2+1)\times\lim_{x\to0}\frac{F(x+1)-F(1)}{x}$$
$$=(0+1)\times F'(1)=1\times f(1)$$
$$=f(1)=3$$

$f(x)=a\cos(\pi x^2)$에서

$f(1)=a\cos\pi=-a=3$

즉, $a=-3$이므로 $f(x)=-3\cos(\pi x^2)$

따라서 $f(a)=f(-3)=-3\cos 9\pi=-3\times(-1)=3$

답 ⑤

13

$$\lim_{h\to0}\frac{1}{h}\int_{1-h}^{1+h}f'(x)dx$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{1}{h}\Big[f(x)\Big]_{1-h}^{1+h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{f(1+h)-f(1-h)}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}+\lim_{h\to0}\frac{f(1-h)-f(1)}{-h}$$
$$=2f'(1)$$

$f(x)=(x+1)e^{-x}$에서

$f'(x)=e^{-x}-(x+1)e^{-x}=-xe^{-x}$

따라서 $2f'(1)=2\times(-e^{-1})=-\frac{2}{e}$

답 ②

14

$f(x)=(ax+b)\ln x$에서

$f'(x)=a\ln x+\frac{ax+b}{x}$

$f'(e)=a+\frac{ae+b}{e}=2a+\frac{b}{e}$

조건 (가)에서 $f'(e)=2$이므로

$2a+\frac{b}{e}=2$

$2ae+b=2e$ ...... ㉠

조건 (나)에서 $f(e)=3e$이므로

$ae+b=3e$ ...... ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=-1$, $b=4e$

따라서 $ab=-4e$

답 ④

15

$$\lim_{x\to1}\frac{1}{(x-1)^2}\int_1^x f(t)\cos\frac{\pi}{2}x\,dt$$
$$=\lim_{x\to1}\left\{\frac{\cos\frac{\pi}{2}x}{x-1}\times\frac{1}{x-1}\int_1^x f(t)dt\right\}$$
$$=\lim_{x\to1}\frac{\cos\frac{\pi}{2}x}{x-1}\times\lim_{x\to1}\frac{1}{x-1}\int_1^x f(t)dt$$
$$=\lim_{t\to0}\frac{\cos\frac{\pi}{2}(t+1)}{t}\times\lim_{x\to1}\frac{1}{x-1}\int_1^x f(t)dt$$
$$=\lim_{t\to0}\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}t\right)}{t}\times\lim_{x\to1}\frac{1}{x-1}\int_1^x f(t)dt$$
$$=\lim_{t\to0}\frac{-\sin\frac{\pi}{2}t}{t}\times\lim_{x\to1}\frac{1}{x-1}\int_1^x f(t)dt$$
$$=-\frac{\pi}{2}\times f(1)$$
$$=-\frac{\pi}{2}\times\sin a$$

$-\frac{\pi}{2}\times\sin a=\frac{\pi}{4}$에서 $\sin a=-\frac{1}{2}$

$-\frac{\pi}{2}<a<\frac{\pi}{2}$이므로 $a=-\frac{\pi}{6}$

$f(x)=\sin ax=\sin\left(-\frac{\pi}{6}x\right)=-\sin\frac{\pi}{6}x$

$f'(x)=-\frac{\pi}{6}\cos\frac{\pi}{6}x$

$f'(2)=-\frac{\pi}{6}\cos\frac{\pi}{3}=-\frac{\pi}{12}$

답 ②

필수 유형 ⑥

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k^2+2kn}{k^3+3k^2n+n^3}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left\{\frac{\left(\frac{k}{n}\right)^2+2\times\frac{k}{n}}{\left(\frac{k}{n}\right)^3+3\times\left(\frac{k}{n}\right)^2+1}\times\frac{1}{n}\right\}$$
$$=\int_0^1\frac{x^2+2x}{x^3+3x^2+1}dx$$
$$=\frac{1}{3}\int_0^1\frac{3x^2+6x}{x^3+3x^2+1}dx$$

$=\frac{1}{3}\left[\ln|x^3+3x^2+1|\right]_0^1$

$=\frac{1}{3}(\ln 5-\ln 1)=\frac{\ln 5}{3}$

답 ③

16

$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}f\left(1+\frac{2k}{n}\right)\frac{1}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}f\left(1+\frac{2k}{n}\right)\frac{2}{n}$

$=\frac{1}{2}\int_1^3 f(x)dx$

$\frac{1}{2}\int_1^3 f(x)dx=3$에서

$\int_1^3 f(x)dx=6$

$\int_1^5 f\left(\frac{x+1}{2}\right)dx$에서 $\frac{x+1}{2}=t$라 하면

$\frac{1}{2}=\frac{dt}{dx}$, $x=1$일 때 $t=1$, $x=5$일 때 $t=3$이므로

$\int_1^5 f\left(\frac{x+1}{2}\right)dx=\int_1^3 2f(t)dt$

$=2\int_1^3 f(t)dt$

$=2\times 6=12$

답 12

17

$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{\frac{n+3k}{n^3}}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{\frac{n+3k}{n}}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{1+\frac{3k}{n}}$

$=\frac{1}{3}\lim_{n\to\infty}\frac{3}{n}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{1+\frac{3k}{n}}$

$=\frac{1}{3}\int_1^4\sqrt{x}\,dx$

$=\frac{1}{3}\times\left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right]_1^4$

$=\frac{2}{9}\times(8-1)=\frac{14}{9}$

답 ③

18

O를 원점이라 하면 선분 OP_k $(1\le k\le n-1)$이 $\angle\mathrm{AOB}\left(=\frac{\pi}{2}\right)$를 n 등분하므로

$\angle\mathrm{AOP}_k=\frac{\pi}{2}\times\frac{k}{n}$

부채꼴 AOP_k의 넓이는

$\frac{1}{2}\times 1^2\times\frac{k\pi}{2n}=\frac{1}{2}\times\frac{k\pi}{2n}$

$\angle\mathrm{COP}_k=\pi-\frac{k\pi}{2n}$이므로

삼각형 COP_k의 넓이는

$\frac{1}{2}\times 1^2\times\sin\left(\pi-\frac{k\pi}{2n}\right)=\frac{1}{2}\times\sin\frac{k\pi}{2n}$

구하는 도형의 넓이는 부채꼴 AOP_k의 넓이와 삼각형 COP_k의 넓이의 합이므로

$S(k)=\frac{1}{2}\times\frac{k\pi}{2n}+\frac{1}{2}\times\sin\frac{k\pi}{2n}$

따라서

$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}S(k)$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{2}\times\frac{k\pi}{2n}+\frac{1}{2}\times\sin\frac{k\pi}{2n}\right)$

$=\frac{2}{\pi}\lim_{n\to\infty}\frac{\pi}{2n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{2}\times\frac{k\pi}{2n}+\frac{1}{2}\times\sin\frac{k\pi}{2n}\right)$

$=\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1}{2}\times x+\frac{1}{2}\times\sin x\right)dx$

$=\frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(x+\sin x)dx$

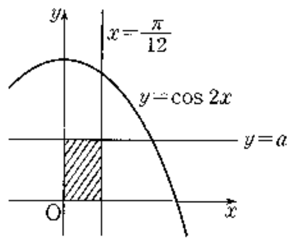
$=\frac{1}{\pi}\left[\frac{x^2}{2}-\cos x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$

$=\frac{1}{\pi}\left\{\frac{\pi^2}{8}-0-(0-1)\right\}$

$=\frac{\pi}{8}+\frac{1}{\pi}$

답 ①

필수 유형 ❼



함수 $y=\cos 2x$의 그래프와 x축, y축 및 직선 $x=\frac{\pi}{12}$로 둘러싸인 영역의 넓이는

$\int_0^{\frac{\pi}{12}}\cos 2x\,dx=\left[\frac{1}{2}\sin 2x\right]_0^{\frac{\pi}{12}}=\frac{1}{4}$

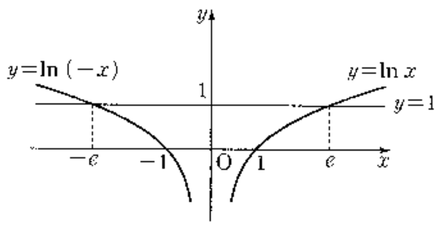
이 영역의 넓이가 직선 $y=a$에 의하여 이등분되므로

$\frac{1}{2}\times\frac{1}{4}=\frac{\pi}{12}\times a$

따라서 $a=\frac{3}{2\pi}$

답 ③

19



$\ln|x|=1$에서

$|x|=e$

이므로 $x=e$ 또는 $x=-e$

곡선 $y=\ln|x|$는 y축에 대하여 대칭이므로 구하는 넓이는

$2\times\left(e\times1-\int_1^e \ln x\,dx\right)$

$=2\times\left(e\times1-\left[x\ln x-x\right]_1^e\right)$

$=2(e-1)$

답 ①

20

곡선 위의 접점의 좌표를 $\left(t, \frac{\ln t}{t}\right)$라 하면

$y'=\frac{1-\ln x}{x^2}$

이므로 접선의 방정식은

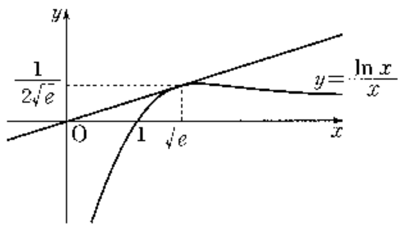
$y=\frac{1-\ln t}{t^2}(x-t)+\frac{\ln t}{t}$ …… ㉠

㉠에 $x=0$, $y=0$을 대입하면

$0=\frac{1-\ln t}{t^2}(0-t)+\frac{\ln t}{t}$

$2\ln t-1=0$에서 $\ln t=\frac{1}{2}$, $t=\sqrt{e}$

이때 접선의 기울기는 $\frac{1-\ln\sqrt{e}}{(\sqrt{e})^2}=\frac{1}{2e}$



따라서 접선의 방정식은 $y=\frac{1}{2e}x$이고 접점의 좌표는 $\left(\sqrt{e}, \frac{1}{2\sqrt{e}}\right)$이므로 구하는 넓이는

$\frac{1}{2}\times\sqrt{e}\times\frac{1}{2\sqrt{e}}-\int_1^{\sqrt{e}}\frac{\ln x}{x}\,dx$ …… ㉡

$\ln x=t$라 하면 $\frac{1}{x}=\frac{dt}{dx}$이고

$x=1$일 때 $t=0$, $x=\sqrt{e}$일 때 $t=\frac{1}{2}$이므로

$\int_1^{\sqrt{e}}\frac{\ln x}{x}\,dx=\int_0^{\frac{1}{2}}t\,dt=\left[\frac{1}{2}t^2\right]_0^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{8}$

따라서 구하는 넓이는 ㉡에서

$\frac{1}{4}-\frac{1}{8}=\frac{1}{8}$

답 ③

21

$f(\pi)=a\pi-\sin\pi=a\pi=2\pi$에서

$a=2$이므로

$f(x)=2x-\sin x$

모든 실수 x에 대하여 $f'(x)=2-\cos x>0$이므로 함수 $f(x)$의 역함수가 존재하고, $f(g(t))=t$이므로 $g(x)$는 $f(x)$의 역함수이다.

$f(g(t))=t$에서 양변을 t에 대하여 미분하면

$f'(g(t))g'(t)=1$ …… ㉠

㉠에 t 대신 $2x$를 대입하면

$f'(g(2x))g'(2x)=1$

$\int_0^{\pi}\frac{x}{f'(g(2x))}\,dx=\int_0^{\pi}xg'(2x)\,dx$

$2x=s$라 하면 $2=\frac{ds}{dx}$, $x=\frac{s}{2}$이고

$x=0$일 때 $s=0$, $x=\pi$일 때 $s=2\pi$이므로

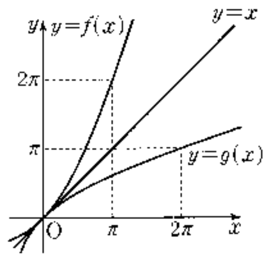
$\int_0^{\pi}xg'(2x)\,dx$

$=\int_0^{2\pi}\frac{s}{2}g'(s)\frac{1}{2}\,ds$

$=\frac{1}{4}\int_0^{2\pi}sg'(s)\,ds$

$=\frac{1}{4}\left(\left[sg(s)\right]_0^{2\pi}-\int_0^{2\pi}g(s)\,ds\right)$ …… ㉡

$f(x)$의 역함수가 $g(x)$이고 두 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로 그림과 같이 정적분의 값을 구할 수 있다.



즉, $\int_0^{2\pi}g(s)\,ds=\pi\times2\pi-\int_0^{\pi}f(s)\,ds$

따라서 ㉡에서

$\int_0^{\pi}xg'(2x)\,dx=\frac{1}{4}\left\{2\pi\times g(2\pi)-\left(\pi\times2\pi-\int_0^{\pi}f(s)\,ds\right)\right\}$

$=\frac{1}{4}\int_0^{\pi}f(x)\,dx=\frac{1}{4}\int_0^{\pi}(2x-\sin x)\,dx$

$=\frac{1}{4}\left[x^2+\cos x\right]_0^{\pi}$

$=\frac{\pi^2-2}{4}$

답 ②

필수 유형 ❽

$0<x<1$에서 $\sin\frac{\pi}{2}x>0$이고 $\sin\frac{\pi}{2}x>2^x-1$이므로 두 곡선 $y=2^x-1$, $y=\left|\sin\frac{\pi}{2}x\right|$로 둘러싸인 부분의 넓이는

$\int_0^1\left|\left|\sin\frac{\pi}{2}x\right|-(2^x-1)\right|dx$

$=\int_0^1\left\{\sin\frac{\pi}{2}x-(2^x-1)\right\}dx$

$=\left[-\frac{2}{\pi}\cos\frac{\pi}{2}x-\frac{2^x}{\ln 2}+x\right]_0^1$

$=\left(0-\frac{2}{\ln 2}+1\right)-\left(-\frac{2}{\pi}-\frac{1}{\ln 2}+0\right)$

$=\frac{2}{\pi}-\frac{1}{\ln 2}+1$

답 ②

22

$e^x=-2e^{-x}+3$에서

$e^{2x}-3e^x+2=0$

$(e^x-1)(e^x-2)=0$

$e^x=1$ 또는 $e^x=2$

$x=0$ 또는 $x=\ln 2$

$0\le x\le \ln 2$에서 $e^x\le -2e^{-x}+3$이므로

구하는 넓이는

$$\int_0^{\ln 2}(-2e^{-x}+3-e^x)dx$$

$$=\Big[2e^{-x}+3x-e^x\Big]_0^{\ln 2}$$

$$=\left(2\times\frac{1}{2}+3\ln 2-2\right)-(2+0-1)$$

$$=3\ln 2-2$$

답 ①

23

$f(x)=g(x)$에서

$\tan x=2\sin x$

$$\sin x\left(\frac{1}{\cos x}-2\right)=0$$

$\sin x=0$ 또는 $\cos x=\frac{1}{2}$

그러므로 $x=0$, $x=\frac{\pi}{3}$에서 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$가 만난다.

$0\le x\le \frac{\pi}{3}$에서 $f(x)\le g(x)$이므로 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$로 둘러싸인 부분의 넓이는

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}}|f(x)-g(x)|dx$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\{g(x)-f(x)\}dx$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{3}}(2\sin x-\tan x)dx$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\left(2\sin x-\frac{\sin x}{\cos x}\right)dx$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\left\{2\sin x+\frac{(\cos x)'}{\cos x}\right\}dx$$

$$=\Big[-2\cos x+\ln|\cos x|\Big]_0^{\frac{\pi}{3}}$$

$$=-2\cos\frac{\pi}{3}+\ln\left|\cos\frac{\pi}{3}\right|-(-2\cos 0+\ln|\cos 0|)$$

$$=-2\times\frac{1}{2}+\ln\frac{1}{2}+2$$

$$=1-\ln 2$$

답 ①

24

$S_1=S_2$이면

$$\int_0^1\{e^x-1-m(x-1)\}dx=0$$

$$\left[e^x-x-\frac{m}{2}x^2+mx\right]_0^1=\left(e-1-\frac{m}{2}+m\right)-(1-0-0+0)$$

$$=\frac{m}{2}+e-2=0$$

$\frac{m}{2}=2-e$

따라서 $m=4-2e$

답 ④

필수 유형 9

$0\le t<\frac{\pi}{3}$인 실수 t에 대하여 직선 $x=t$를 포함하고 x축에 수직인 평면으로 자른 단면의 넓이를 $S(t)$라 하면

$S(t)=(\sqrt{\sec^2 t+\tan t})^2=\sec^2 t+\tan t$

이므로 구하는 입체도형의 부피는

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}}(\sec^2 t+\tan t)dt$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\left(\sec^2 x+\frac{\sin x}{\cos x}\right)dx$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\left\{\sec^2 x-\frac{(\cos x)'}{\cos x}\right\}dx$$

$$=\Big[\tan x-\ln|\cos x|\Big]_0^{\frac{\pi}{3}}$$

$$=\tan\frac{\pi}{3}-\ln\cos\frac{\pi}{3}$$

$$=\sqrt{3}-\ln\frac{1}{2}$$

$$=\sqrt{3}+\ln 2$$

답 ④

25

x좌표가 t일 때의 단면의 넓이를 $S(t)$라 하면

$S(t)=(e^t-t)^2=e^{2t}-2te^t+t^2$

입체도형의 부피를 V라 하면

$$V=\int_0^1 S(t)dt$$

$$=\int_0^1(e^{2t}-2te^t+t^2)dt$$

$$=\int_0^1 e^{2t}dt-2\int_0^1 te^t dt+\int_0^1 t^2 dt$$

$$=\left[\frac{1}{2}e^{2t}\right]_0^1-2\left(\Big[te^t\Big]_0^1-\int_0^1 e^t dt\right)+\left[\frac{1}{3}t^3\right]_0^1$$

$$=\left[\frac{1}{2}e^{2t}\right]_0^1-2\left(\Big[te^t\Big]_0^1-\Big[e^t\Big]_0^1\right)+\left[\frac{1}{3}t^3\right]_0^1$$

$$=\frac{1}{2}(e^2-1)-2\{(e-0)-(e-1)\}+\frac{1}{3}(1-0)$$

$$=\frac{1}{2}e^2-\frac{13}{6}$$

답 ②

26

$x^2+\ln(x+1)=\int_0^x S(t)dt$이므로

양변을 x에 대하여 미분하면

$$2x+\frac{1}{x+1}=S(x)$$

$S(a)=\{S(1)\}^2$이므로

$$2a+\frac{1}{a+1}=\left(2+\frac{1}{1+1}\right)^2=\left(\frac{5}{2}\right)^2=\frac{25}{4}$$

$$\frac{2a^2+2a+1}{a+1}=\frac{25}{4}$$

$8a^2-17a-21=0$

$(a-3)(8a+7)=0$

$a\ge 0$이므로 $a=3$

답 ③

27

x축 위의 점 $(t, 0)\left(0\le t\le \frac{\pi}{2}\right)$를 지나고 x축에 수직인 평면으로 자른 단면의 넓이를 $S(t)$라 하면

$S(t)=(\sin t+\cos t+1)^2$

$=\sin^2 t+\cos^2 t+1+2\sin t\cos t+2\sin t+2\cos t$

$=2+2\sin t\cos t+2\sin t+2\cos t$

입체도형의 부피를 V라 하면

$V=\int_0^{\frac{\pi}{2}} S(t)dt$

$=\int_0^{\frac{\pi}{2}} (2+2\sin t\cos t+2\sin t+2\cos t)dt$ …… ㉠

$\int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\sin x\cos x\,dx$에서

$\sin x=t$라 하면 $\cos x=\frac{dt}{dx}$

$x=0$일 때 $t=0$

$x=\frac{\pi}{2}$일 때 $t=1$이므로

$\int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\sin x\cos x\,dx=\int_0^1 2t\,dt=\left[t^2\right]_0^1=1-0=1$

따라서 구하는 부피는 ㉠에서

$\int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\sin t\cos t\,dt+\left[2t-2\cos t+2\sin t\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$

$=1+(\pi+2)-(-2)$

$=\pi+5$

답 ⑤

필수 유형 ⑩

곡선 $y=x^2$과 직선 $y=t^2x-\frac{\ln t}{8}$가 만나는 두 점의 x좌표를 각각 α, β라 하면 두 점의 좌표는

(α, α^2), (β, β^2)

이므로 이 두 점의 중점의 좌표는

$\left(\frac{\alpha+\beta}{2}, \frac{\alpha^2+\beta^2}{2}\right)$ …… ㉠

이다. 두 식 $y=x^2$, $y=t^2x-\frac{\ln t}{8}$를 연립하면

$x^2=t^2x-\frac{\ln t}{8}$

$x^2-t^2x+\frac{\ln t}{8}=0$

이 이차방정식의 두 근이 α, β이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=t^2$, $\alpha\beta=\frac{\ln t}{8}$

따라서 $\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=t^4-\frac{\ln t}{4}$

이므로 ㉠에서 중점의 좌표는 $\left(\frac{1}{2}t^2, \frac{1}{2}t^4-\frac{\ln t}{8}\right)$이다.

그러므로 점 P의 시각 t에서의 위치는

$x=\frac{1}{2}t^2$, $y=\frac{1}{2}t^4-\frac{\ln t}{8}$이다.

이때 $\frac{dx}{dt}=t$, $\frac{dy}{dt}=2t^3-\frac{1}{8t}$이므로

$\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}=\sqrt{t^2+\left(2t^3-\frac{1}{8t}\right)^2}$

$=\sqrt{t^2+4t^6-\frac{1}{2}t^2+\frac{1}{64t^2}}$

$=\sqrt{4t^6+\frac{1}{2}t^2+\frac{1}{64t^2}}=\sqrt{\left(2t^3+\frac{1}{8t}\right)^2}$

$=2t^3+\frac{1}{8t}$

따라서 시각 $t=1$에서 $t=e$까지 점 P가 움직인 거리는

$\int_1^e \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt=\int_1^e\left(2t^3+\frac{1}{8t}\right)dt$

$=\left[\frac{1}{2}t^4+\frac{1}{8}\ln|t|\right]_1^e$

$=\frac{1}{2}e^4+\frac{1}{8}-\left(\frac{1}{2}+0\right)=\frac{e^4}{2}-\frac{3}{8}$

답 ①

28

$\frac{dx}{dt}=\frac{4}{\sqrt{t}}$, $\frac{dy}{dt}=1-\frac{4}{t}$이므로

$\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}=\sqrt{\left(\frac{4}{\sqrt{t}}\right)^2+\left(1-\frac{4}{t}\right)^2}$

$=\sqrt{\frac{16}{t}+\left(1-\frac{8}{t}+\frac{16}{t^2}\right)}$

$=\sqrt{1+\frac{8}{t}+\frac{16}{t^2}}$

$=\sqrt{\left(1+\frac{4}{t}\right)^2}$

$=1+\frac{4}{t}$

따라서 시각 $t=1$에서 $t=e$까지 점 P가 움직인 거리는

$\int_1^e \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt=\int_1^e\left(1+\frac{4}{t}\right)dt$

$=\left[t+4\ln|t|\right]_1^e$

$=e+4-1=e+3$

답 ③

29

$\int_0^{\ln a}\sqrt{1+\{f'(x)\}^2}\,dx$

$=\int_0^{\ln a}\sqrt{1+\left(e^{2x}-\frac{1}{4}e^{-2x}\right)^2}\,dx$

$=\int_0^{\ln a}\sqrt{\left(e^{2x}+\frac{1}{4}e^{-2x}\right)^2}\,dx$

$=\int_0^{\ln a}\left(e^{2x}+\frac{1}{4}e^{-2x}\right)dx$

$=\left[\frac{1}{2}e^{2x}-\frac{1}{8}e^{-2x}\right]_0^{\ln a}$

$=\frac{1}{2}a^2-\frac{1}{8}\times\frac{1}{a^2}-\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{8}\right)$

$=\frac{1}{2}a^2-\frac{1}{8a^2}-\frac{3}{8}$

$\frac{1}{2}a^2-\frac{1}{8a^2}-\frac{3}{8}=\frac{13}{12}$에서

$\frac{1}{2}a^2-\frac{1}{8a^2}-\frac{35}{24}=0$

$12a^4-35a^2-3=0$

$(a^2-3)(12a^2+1)=0$

$a>1$이므로 $a=\sqrt{3}$

답 ②

30

$f(x)=2\ln(4-x^2)$에서

$f'(x)=\frac{-4x}{4-x^2}$

$$\sqrt{1+\{f'(x)\}^2}=\sqrt{1+\left(\frac{-4x}{4-x^2}\right)^2}$$
$$=\sqrt{\left(\frac{4+x^2}{4-x^2}\right)^2}=\frac{4+x^2}{4-x^2}$$
$$=-1+\frac{8}{4-x^2}=-1+\frac{2}{2+x}+\frac{2}{2-x}$$

따라서 $x=-1$에서 $x=1$까지의 곡선 $y=f(x)$의 길이는

$$\int_{-1}^{1}\sqrt{1+\{f'(x)\}^2}\,dx$$
$$=\int_{-1}^{1}\frac{4+x^2}{4-x^2}\,dx=2\int_{0}^{1}\frac{4+x^2}{4-x^2}\,dx$$
$$=2\int_{0}^{1}\left(-1+\frac{2}{2+x}+\frac{2}{2-x}\right)dx$$
$$=2\Big[-x+2\ln|2+x|-2\ln|2-x|\Big]_{0}^{1}$$
$$=2\{(-1+2\ln 3-2\ln 1)-(-0+2\ln 2-2\ln 2)\}$$
$$=4\ln 3-2$$

답 ⑤

실전편

실전 모의고사 1회 본문 114~125쪽

01 ①	02 ②	03 ④	04 ⑤	05 ③
06 ④	07 ④	08 ①	09 ④	10 ①
11 ②	12 ⑤	13 ⑤	14 ⑤	15 ①
16 97	17 16	18 20	19 3	20 15
21 39	22 320	23 ②	24 ⑤	25 ①
26 ③	27 ④	28 ①	29 4	30 35

01

$2^{\log_2 5}=5$, $(\sqrt{5})^{-2}=\frac{1}{(\sqrt{5})^2}=\frac{1}{5}$이므로

$2^{\log_2 5}\times(\sqrt{5})^{-2}=5\times\frac{1}{5}=1$

답 ①

02

$f(x)=2x^3+4x^2-5x+1$에서

$f'(x)=6x^2+8x-5$

따라서 $f'(1)=6+8-5=9$

답 ②

03

등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d라 하면

$a_5-a_2=3d=12$에서 $d=4$

따라서 $a_4=a_1+3d=3+3\times4=15$

답 ④

다른 풀이

$a_5-a_2=a_4-a_1=12$이고

$a_1=3$이므로 $a_4=15$

04

$\lim_{x\to0-}f(x)=3$

$\lim_{x\to2+}\{xf(x)\}=\lim_{x\to2+}x\times\lim_{x\to2+}f(x)=2\times2=4$

따라서 $\lim_{x\to0-}f(x)+\lim_{x\to2+}\{xf(x)\}=3+4=7$

답 ⑤

05

$\lim_{x\to1}\frac{f(x)}{x-1}=3$에서 $x\to1$일 때 (분모) $\to0$이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\to0$이어야 한다.

즉, $\lim_{x\to1}f(x)=0$에서 $f(1)=0$

또한 다항함수 $f(x)$는 $x=1$에서 미분가능하므로

$\lim_{x\to1}\frac{f(x)}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=f'(1)=3$

한편, $g(x)=xf(x)+2$에서 $g'(x)=f(x)+xf'(x)$이므로

$g'(1)=f(1)+1\times f'(1)=0+1\times3=3$

답 ③

06

$\tan\theta-\frac{4}{1+\tan\theta}=2$에서

$\tan\theta(1+\tan\theta)-4=2(1+\tan\theta)$

$\tan^2\theta-\tan\theta-6=0$, $(\tan\theta+2)(\tan\theta-3)=0$

$\pi<\theta<\frac{3}{2}\pi$에서 $\tan\theta>0$이므로

$\tan\theta=3$

즉, $\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=3$에서

$\sin\theta=3\cos\theta$ …… ㉠

이때 $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$이므로

$9\cos^2\theta+\cos^2\theta=1$, $\cos^2\theta=\frac{1}{10}$

$\pi<\theta<\frac{3}{2}\pi$에서 $\cos\theta<0$이므로

$\cos\theta=-\frac{1}{\sqrt{10}}$

$\cos\theta=-\frac{1}{\sqrt{10}}$을 ㉠에 대입하면

$\sin\theta=-\frac{3}{\sqrt{10}}$

따라서 $\sin\theta+\cos\theta=-\frac{3}{\sqrt{10}}+\left(-\frac{1}{\sqrt{10}}\right)=-\frac{2\sqrt{10}}{5}$

답 ④

07

$t^3-12t^2+36t=t^2-6t$에서

$t^3-13t^2+42t=0$, $t(t-6)(t-7)=0$

$t=0$ 또는 $t=6$ 또는 $t=7$

두 점 P, Q가 출발한 후 처음으로 속도가 같아지는 시각은 $t=6$이다.

즉, $a=6$이고 $\frac{a}{2}=3$

따라서 시각 $t=3$에서 $t=6$까지 점 Q가 움직인 거리는

$$\int_3^6|t^2-6t|\,dt=\int_3^6(6t-t^2)\,dt=\left[3t^2-\frac{1}{3}t^3\right]_3^6$$
$$=(108-72)-(27-9)=18$$

답 ④

08

$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)-x^3}{3x^2}=-1$에서

$f(x)-x^3=-3x^2+ax+b$ (a, b는 상수)

로 놓을 수 있다.

즉, $f(x)=x^3-3x^2+ax+b$

$\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{9x}=-1$에서 $x\to0$일 때 (분모) $\to0$이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\to0$이어야 한다.

즉, $\lim_{x\to0}f(x)=0$에서 $f(0)=b=0$

이때 $\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{9x}=\lim_{x\to0}\frac{x^3-3x^2+ax}{9x}=\lim_{x\to0}\frac{x^2-3x+a}{9}=\frac{a}{9}$ 이므로

$\frac{a}{9}=-1$에서 $a=-9$

$f(x)=x^3-3x^2-9x$에서

$f'(x)=3x^2-6x-9=3(x+1)(x-3)$

$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=3$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	극대	$\searrow$	극소	$\nearrow$

따라서 함수 $f(x)$의 극댓값은

$f(-1)=-1-3+9=5$

답 ①

09

$\sum_{k=1}^{n}S_k=T_n=2n^3+4n^2+2n$이라 하면

$T_n-T_{n-1}=S_n\ (n\ge2)$에서

$S_n=(2n^3+4n^2+2n)-\{2(n-1)^3+4(n-1)^2+2(n-1)\}$
$\quad=6n^2+2n\ (n\ge2)$

한편, $\sum_{k=1}^{n}a_k=S_n$이므로

$a_3=S_3-S_2=(6\times3^2+2\times3)-(6\times2^2+2\times2)$
$\quad=60-28=32$

답 ④

10

삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이가 $\sqrt{7}$이므로 사인법칙에 의하여

$\frac{\overline{BC}}{\sin\frac{2}{3}\pi}=2\sqrt{7}$

$\overline{BC}=2\sqrt{7}\times\sin\frac{2}{3}\pi=2\sqrt{7}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{21}$

삼각형 ABD의 외접원의 반지름의 길이가 $\sqrt{7}$이므로 사인법칙에 의하여

$\frac{\overline{AB}}{\sin(\angle BDA)}=2\sqrt{7}$

$\overline{AB}=2\sqrt{7}\sin(\angle BDA)=2\sqrt{7}\times\frac{\sqrt{21}}{7}=2\sqrt{3}$

삼각형 ABC에서 $\overline{AC}=x\ (x>0)$이라 하면 코사인법칙에 의하여

$\overline{BC}^2=\overline{AB}^2+\overline{AC}^2-2\times\overline{AB}\times\overline{AC}\times\cos\frac{2}{3}\pi$

$(\sqrt{21})^2=(2\sqrt{3})^2+x^2-2\times2\sqrt{3}\times x\times\left(-\frac{1}{2}\right)$

$x^2+2\sqrt{3}x-9=0,\ (x+3\sqrt{3})(x-\sqrt{3})=0$

$x>0$이므로 $x=\sqrt{3}$

직선 AD가 $\angle$BAC를 이등분하므로 $\overline{AB}:\overline{AC}=\overline{BE}:\overline{CE}$

즉, $2\sqrt{3}:\sqrt{3}=\overline{BE}:\overline{CE}$에서 $\overline{BE}=2\overline{CE}$

따라서 $\overline{BE}=\frac{2}{3}\overline{BC}=\frac{2\sqrt{21}}{3}$, $\overline{CE}=\frac{1}{3}\overline{BC}=\frac{\sqrt{21}}{3}$이므로

$\overline{BE}^2+\overline{CE}^2=\left(\frac{2\sqrt{21}}{3}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{21}}{3}\right)^2=\frac{35}{3}$

답 ①

11

$f(x)=3x^2+ax-(2x-1)\int_0^1 f(t)\,dt$이고

$f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{7}{4}$이므로 $f\left(\frac{1}{2}\right)=3\times\frac{1}{4}+a\times\frac{1}{2}=\frac{7}{4}$에서 $a=2$

$\int_0^1 f(t)\,dt=k$ (k는 상수)라 하면 $f(x)=3x^2+2x-(2x-1)k$

$f(x)=3x^2+2(1-k)x+k$이고

$\int_0^1\{3x^2+2(1-k)x+k\}\,dx=k$

이때

$\int_0^1\{3x^2+2(1-k)x+k\}\,dx=\Big[x^3+(1-k)x^2+kx\Big]_0^1$
$\qquad=1+(1-k)+k=2$

이므로 $k=2$

따라서 $f(x)=3x^2-2x+2$이므로

$f(2)=3\times4-2\times2+2=10$

답 ②

12

함수 $f(x)=a\cos\frac{\pi x}{b}$의 주기는 $\frac{2\pi}{\frac{\pi}{b}}=2b$이고, 최댓값은 a, 최솟값은 $-a$이다.

$f(x)=-a$에서

$a\cos\frac{\pi x}{b}=-a$, $\cos\frac{\pi x}{b}=-1$

$\frac{\pi x}{b}=\pi$, $x=b$

즉, 점 A의 좌표는 $(b,\ -a)$이다.

$f(x)=\frac{a}{2}$에서

$a\cos\frac{\pi x}{b}=\frac{a}{2}$, $\cos\frac{\pi x}{b}=\frac{1}{2}$

$\frac{\pi x}{b}=\frac{\pi}{3}$ 또는 $\frac{\pi x}{b}=\frac{5\pi}{3}$

$x=\frac{b}{3}$ 또는 $x=\frac{5b}{3}$

$\overline{OB}<\overline{OC}$이므로 두 점 B, C의 좌표는 $B\left(\frac{b}{3},\ \frac{a}{2}\right)$, $C\left(\frac{5b}{3},\ \frac{a}{2}\right)$이다.

함수 $y=f(x)$의 그래프가 직선 $x=b$에 대하여 대칭이므로

$\overline{AB}=\overline{AC}$

이때 $\overline{AB}=\overline{BC}$이므로 삼각형 ABC는 정삼각형이다.

점 A에서 선분 BC에 내린 수선의 발을 H라 하면 직각삼각형 ABH에서

$\overline{BH}=\frac{1}{2}\left(\frac{5b}{3}-\frac{b}{3}\right)=\frac{2}{3}b$, $\overline{AH}=\frac{a}{2}-(-a)=\frac{3}{2}a$이므로

$\tan\frac{\pi}{3}=\frac{\overline{AH}}{\overline{BH}}=\frac{\frac{3}{2}a}{\frac{2}{3}b}=\sqrt{3}$, $a=\frac{4\sqrt{3}}{9}b$

따라서 직선 OA의 기울기는 $-\frac{a}{b}$이고, 직선 OB의 기울기는 $\frac{3a}{2b}$이므로 직선 OA의 기울기와 직선 OB의 기울기의 곱은

$-\frac{a}{b}\times\frac{3a}{2b}=-\frac{3a^2}{2b^2}=-\frac{3}{2b^2}\times\left(\frac{4\sqrt{3}}{9}b\right)^2=-\frac{8}{9}$

답 ⑤

13

수열 $\{a_n\}$이 $a_1=2$, $a_na_{n+1}=(-1)^n$을 만족시키므로 각 항을 차례로 구하면

$a_1a_2=-1$에서 $a_2=-\frac{1}{2}$

$a_2a_3=1$에서 $a_3=-2$

$a_3a_4=-1$에서 $a_4=\frac{1}{2}$

$a_4a_5=1$에서 $a_5=2$

$\vdots$

$a_1=2$이므로 $b_1=1-2$

$a_2=-\frac{1}{2}$이므로 $b_2=2-\left(-\frac{1}{2}\right)=2+\frac{1}{2}$

$a_3=-2$이므로 $b_3=3-(-2)=3+2$

$a_4=\frac{1}{2}$이므로 $b_4=4-\frac{1}{2}$

$a_5=2$이므로 $b_5=5-2$

$\vdots$

따라서

$$b_n=\begin{cases} n-2 & (n=4m-3) \\ n+\frac{1}{2} & (n=4m-2) \\ n+2 & (n=4m-1) \\ n-\frac{1}{2} & (n=4m) \end{cases} \text{ (단, } m\text{은 자연수)}$$

자연수 k에 대하여 b_{2k}는 수열 $\{b_n\}$의 짝수번째 항을 의미하므로

$$b_{2k}=\begin{cases} 2k+\frac{1}{2} & (2k=4m-2) \\ 2k-\frac{1}{2} & (2k=4m) \end{cases} \text{ (단, } m\text{은 자연수)}$$

$b_{2k}+b_{2k+2}=\left(2k+\frac{1}{2}\right)+\left(2k+2-\frac{1}{2}\right)=4k+2$

또는 $b_{2k}+b_{2k+2}=\left(2k-\frac{1}{2}\right)+\left(2k+2+\frac{1}{2}\right)=4k+2$

따라서 $\sum_{k=1}^{10}(b_{2k}+b_{2k+2})=\sum_{k=1}^{10}(4k+2)=4\times\frac{10\times 11}{2}+2\times 10=240$

답 ⑤

다른 풀이

조건 (가)에 의하여 $a_2=-\frac{1}{2}$이고

자연수 n에 대하여

$a_{2n}a_{2n+1}=(-1)^{2n}=1$, $a_{2n+1}a_{2n+2}=(-1)^{2n+1}=-1$이므로

$a_{2n+2}=\frac{-1}{a_{2n+1}}=-a_{2n}$을 만족시킨다.

따라서 $a_{2n}=\frac{(-1)^n}{2}$

조건 (나)에 의하여 $a_{2n}+b_{2n}=2n$에서

$b_{2n}=2n-a_{2n}=2n-\frac{(-1)^n}{2}$이므로

$$\sum_{k=1}^{10}(b_{2k}+b_{2k+2})=\sum_{k=1}^{10}\left\{2k-\frac{(-1)^k}{2}+2k+2-\frac{(-1)^{k+1}}{2}\right\}$$
$$=\sum_{k=1}^{10}(4k+2)$$
$$=240$$

14

ㄱ. $f(x)+xf'(x)=-4x^3+6x$에서 $\{xf(x)\}'=-4x^3+6x$이므로

$xf(x)=\int(-4x^3+6x)\,dx$

$=-x^4+3x^2+C$ (단, C는 적분상수) …… ㉠

㉠의 양변에 $x=0$을 대입하면

$0\times f(0)=C$, 즉 $C=0$

$C=0$을 ㉠에 대입하면

$xf(x)=-x^4+3x^2$

$f(x)$가 다항함수이므로 $f(x)=-x^3+3x$

따라서 $f(-1)=-2$ (참)

ㄴ. $f'(x)=-3x^2+3=-3(x+1)(x-1)$

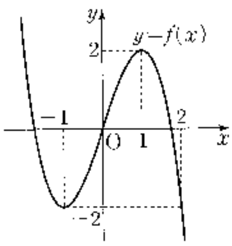
$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=1$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘	극소	↗	극대	↘

함수 $f(x)$는 $x=-1$에서 극소이고, $x=1$에서 극대이다.

$f(-1)=-2$, $f(1)=2$이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 그림과 같다.



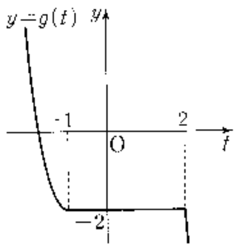
$f(x)=-2$에서

$-x^3+3x=-2$

$(x+1)^2(x-2)=0$

$x=-1$ 또는 $x=2$

함수 $g(t)=\begin{cases} f(t) & (t\le -1 \text{ 또는 } t\ge 2) \\ f(-1) & (-1<t<2) \end{cases}$이므로 함수 $y=g(t)$의 그래프는 그림과 같다.



따라서 함수 $g(t)$는 $t=2$에서만 미분가능하지 않다. (참)

ㄷ. $|f(t)-g(t)|=\begin{cases} 0 & (t\le -1 \text{ 또는 } t\ge 2) \\ f(t)+2 & (-1<t<2) \end{cases}$

따라서 $|f(t)-g(t)|$는 $t=1$일 때 최댓값 $f(1)+2=2+2=4$를 갖는다. (참)

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

답 ⑤

15

첫째항이 2이고 공차가 3인 등차수열 $\{a_n\}$의 일반항은 $a_n=3n-1$이므로 집합 A의 원소는 3으로 나눈 나머지가 2인 자연수로만 이루어져 있다.

한편, 수열 $\{b_n\}$의 일반항은 $b_n=2n-1$이므로 수열 $\{b_n\}$의 각 항 중에서 3으로 나눈 나머지가 2가 아닌 수가 집합 $B-A$의 원소가 된다.

(i) $n=3k-2$ (k는 자연수)일 때

$b_{3k-2}=2(3k-2)-1$에서

$2(3k-2)-1=6k-5=3(2k-1)-2$이므로

$n=3k-2$일 때 b_n은 3으로 나눈 나머지가 1인 자연수이다.

따라서 b_{3k-2}는 집합 $B-A$의 원소이다.

(ii) $n=3k-1$ (k는 자연수)일 때

$b_{3k-1}=2(3k-1)-1$에서

$2(3k-1)-1=6k-3=3(2k-1)$이므로

$n=3k-1$일 때 b_n은 3의 배수이다.

따라서 b_{3k-1}은 집합 $B-A$의 원소이다.

(iii) $n=3k$ (k는 자연수)일 때

$b_{3k}=2\times 3k-1$에서

$2\times 3k-1=3\times 2k-1$이므로

$n=3k$일 때 b_n은 3으로 나눈 나머지가 2인 자연수이다.

따라서 b_{3k}는 집합 $B-A$의 원소가 아니다.

(i), (ii), (iii)에서 $B-A=\{b_1, b_2, b_4, b_5, b_7, b_8, \cdots\}$

이때 $d_n=b_{3n-2}+b_{3n-1}$이라 하면 $d_1=b_1+b_2=4$이고

$$\begin{aligned} d_{n+1}-d_n &= (b_{3n+1}+b_{3n+2})-(b_{3n-2}+b_{3n-1}) \\ &= \{2(3n+1)-1+2(3n+2)-1\} \\ &\qquad -\{2(3n-2)-1+2(3n-1)-1\} \\ &= (12n+4)-(12n-8)=12 \end{aligned}$$

이므로 수열 $\{d_n\}$은 첫째항이 4이고 공차가 12인 등차수열이다.

이때 수열 $\{d_n\}$의 첫째항부터 제k항까지의 합을 S_k라 하면

$S_k=\dfrac{k\{2\times 4+12(k-1)\}}{2}>140$에서

$k(12k-4)>280$, $3k^2-k-70>0$, $(3k+14)(k-5)>0$

$k>0$에서 $k>5$이므로 부등식을 만족시키는 자연수 k의 최솟값은 6이다.

이때 $S_6=(b_1+b_2)+(b_4+b_5)+\cdots+(b_{16}+b_{17})=\sum_{k=1}^{12}c_k=204$

한편, $b_{17}=2\times 17-1=33$에서 $S_6-b_{17}=171$이다. 집합 $B-A$에 속하는 모든 원소를 작은 것부터 크기순으로 나열할 때, 첫번째 원소부터 n번째 원소까지의 합이 처음으로 140보다 큰 경우는

$b_1+b_2+b_4+b_5+\cdots+b_{16}=\sum_{k=1}^{11}c_k$인 경우이므로 자연수 n의 최솟값은 11이다.

답 ①

다른 풀이

조건을 만족시키는 집합 $B-A$의 원소는 $b_1, b_2, b_4, b_5, b_7, b_8, \cdots$이다.

수열 $\{b_n\}$의 첫째항부터 제$3n$항까지의 합에서 수열 $\{b_{3n}\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 뺀 것을 S_n이라 하자.

수열 $\{b_{3n}\}$은 첫째항이 $b_3=5$이고 공차가 6인 등차수열이므로

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=1}^{3n}b_k-\sum_{k=1}^{n}b_{3k} \\ &= \frac{3n\{2+2(3n-1)\}}{2}-\frac{n\{10+6(n-1)\}}{2}=\frac{18n^2}{2}-\frac{6n^2+4n}{2} \\ &= 6n^2-2n=2n(3n-1) \end{aligned}$$

$2n(3n-1)>140$에서 $3n^2-n-70>0$이고

$(3n+14)(n-5)>0$에서 n은 자연수이므로 $n>5$이고, 자연수 n의 최솟값은 6이다.

이때 $S_6=b_1+b_2+b_4+b_5+\cdots+b_{16}+b_{17}=\sum_{k=1}^{12}c_k=204$이고

$b_{17}=2\times 17-1=33$이므로

$b_1+b_2+b_4+b_5+\cdots+b_{16}=\sum_{k=1}^{11}c_k=171>140$이 성립한다.

따라서 집합 $B-A$에 속하는 모든 원소를 작은 것부터 크기순으로 나열할 때. 첫번째 원소부터 n번째 원소까지의 합이 처음으로 140보다 큰 경우는 $b_1+b_2+b_4+b_5+\cdots+b_{16}=\sum_{k=1}^{11}c_k$인 경우이므로 자연수 n의 최솟값은 11이다.

16

$$\sum_{k=1}^{10}(k+2a_k)=\sum_{k=1}^{10}k+2\sum_{k=1}^{10}a_k=\frac{10\times 11}{2}+2\times 21=97$$

답 97

17

$f(x)=\int(3x^2+2x+a)\,dx=x^3+x^2+ax+C$ (C는 적분상수)이고,

함수 $f(x)$는 삼차함수이므로 $x=0$에서 연속이고 미분가능하다.

$\lim_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=2$에서 $x\to 0$일 때 (분모) $\to 0$이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\to 0$이어야 한다.

$\lim_{x\to 0}f(x)=f(0)=0$

즉, $C=0$이고 $f(x)=x^3+x^2+ax$

또한 $\lim_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=\lim_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=f'(0)=2$이므로

$f'(x)=3x^2+2x+a$에서 $a=2$

따라서 $f(x)=x^3+x^2+2x$이므로 $f(2)=8+4+4=16$

답 16

18

조건 (가)에서 $\log_8 a+\log_8 b=\log_2 12-\log_2 3$이므로

$\log_8 ab=\log_2 4$, $\log_8 ab=2$

$ab=64$ ⋯⋯ ㉠

조건 (나)에서 $\log_3 16\times\log_2 9=\dfrac{4\log 2}{\log 3}\times\dfrac{2\log 3}{\log 2}=8$이므로

$\log_2 a\times\log_2 b=8$ ⋯⋯ ㉡

㉠에서 $b=\dfrac{64}{a}$이므로 이를 ㉡에 대입하면

$\log_2 a\times\log_2\dfrac{64}{a}=8$, $\log_2 a\times(6-\log_2 a)=8$

$(\log_2 a)^2-6\log_2 a+8=0$, $(\log_2 a-2)(\log_2 a-4)=0$

$\log_2 a=2$ 또는 $\log_2 a=4$

$a=4$ 또는 $a=16$

$a=4$일 때 $b=16$이고, $a=16$일 때 $b=4$이다.

따라서 $a+b=4+16=20$

답 20

19

$f'(x)=x^2-2ax+1$에서 함수 $f(x)$가 극값이 존재하지 않으려면 이차방정식 $f'(x)=0$이 중근 또는 허근을 가져야 한다.

즉, 이차방정식 $x^2-2ax+1=0$의 판별식을 D라 하면

$\dfrac{D}{4}=(-a)^2-1\le 0$, $a^2\le 1$, $-1\le a\le 1$

따라서 정수 a의 값은 -1, 0, 1이고, 그 개수는 3이다.

답 3

20

조건 (가)에서 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=2x$가 만나는 두 점의 x좌표를 각각 α, β $(\alpha<\beta)$라 하자.

또 함수 $|f(x)-2x|$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하므로

$f(x)-2x=(x-\alpha)^2(x-\beta)^2$, 즉 $f(x)=(x-\alpha)^2(x-\beta)^2+2x$

로 놓을 수 있다.

조건 (나)에서

$$\lim_{x\to 0}\frac{(x-\alpha)^2(x-\beta)^2}{x^2}=16 \quad \cdots\cdots ㉠$$

$x\to 0$일 때 (분모) $\to 0$이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\to 0$이어야 한다.

즉, $\lim_{x\to 0}(x-\alpha)^2(x-\beta)^2=\alpha^2\beta^2=0$에서 $\alpha=0$ 또는 $\beta=0$

(i) $\alpha=0$일 때, ㉠에서

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2(x-\beta)^2}{x^2}=\lim_{x\to 0}(x-\beta)^2=\beta^2=16$$

$\beta>0$이므로 $\beta=4$이고 $f(x)=x^2(x-4)^2+2x$

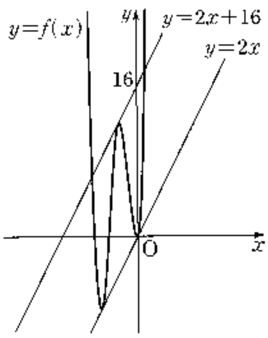
이때 $f(1)=11<15$이므로 조건 (다)를 만족시키지 못한다.

(ii) $\beta=0$일 때, ㉠에서

$$\lim_{x\to 0}\frac{(x-\alpha)^2x^2}{x^2}=\lim_{x\to 0}(x-\alpha)^2=\alpha^2=16$$

$\alpha<0$이므로 $\alpha=-4$이고 $f(x)=x^2(x+4)^2+2x$

이때 $f(1)=27>15$이므로 조건 (다)를 만족시킨다.



(i), (ii)에서

$f(x)=x^2(x+4)^2+2x$

$\quad =x^4+8x^3+16x^2+2x$

$f'(x)=4x^3+24x^2+32x+2$

$f'(x)=2$에서

$4x^3+24x^2+32x+2=2$

$4x(x+4)(x+2)=0$

$x=-4$ 또는 $x=-2$ 또는 $x=0$

$f(-2)=12$이므로 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(-2,\ 12)$에서의 접선의 방정식은

$y-12=2(x+2)$, 즉 $y=2x+16$

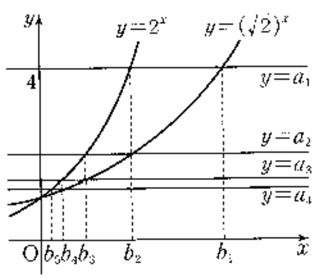
곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=2x+k$가 서로 다른 네 점에서 만나도록 하는 k의 값의 범위는

$0<k<16$

따라서 정수 k는 $1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ 15$이고, 그 개수는 15이다.

답 15

21



위의 그림에서 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$의 각 항을 구하면 다음과 같다.

(i) 직선 $y=a_1=4$가 곡선 $y=(\sqrt{2})^x$과 만나는 점의 x좌표가 b_1이므로

$4=(\sqrt{2})^x$에서 $x=b_1=4$이고 곡선 $y=2^x$과 만나는 점의 x좌표가 b_2이므로 $4=2^x$에서 $x=b_2=2$

직선 $y=a_2$가 곡선 $y=(\sqrt{2})^x$과 만나는 점의 x좌표가 b_2이므로

$b_2=2$에서 $a_2=(\sqrt{2})^2=2$

따라서 $\dfrac{a_1}{b_1}=\dfrac{4}{4}=1$, $\dfrac{a_2}{b_2}=\dfrac{2}{2}=1$

(ii) 직선 $y=a_2=2$가 곡선 $y=2^x$과 만나는 점의 x좌표가 b_3이므로

$2=2^x$에서 $x=b_3=1$

$a_3=(\sqrt{2})^1=\sqrt{2}$

따라서 $\dfrac{a_3}{b_3}=\dfrac{\sqrt{2}}{1}=\sqrt{2}=2^{\frac{1}{2}}$

(iii) 직선 $y=a_3=\sqrt{2}$가 곡선 $y=2^x$과 만나는 점의 x좌표가 b_4이므로

$\sqrt{2}=2^x$에서 $x=b_4=\dfrac{1}{2}=2^{-1}$

$a_4=(\sqrt{2})^{\frac{1}{2}}=2^{\frac{1}{4}}$

따라서 $\dfrac{a_4}{b_4}=\dfrac{2^{\frac{1}{4}}}{2^{-1}}=2^{\frac{5}{4}}$

(iv) 직선 $y=a_4=2^{\frac{1}{4}}$이 곡선 $y=2^x$과 만나는 점의 x좌표가 b_5이므로

$2^{\frac{1}{4}}=2^x$에서 $x=b_5=\dfrac{1}{4}=2^{-2}$

$a_5=(\sqrt{2})^{\frac{1}{4}}=2^{\frac{1}{8}}$

따라서 $\dfrac{a_5}{b_5}=\dfrac{2^{\frac{1}{8}}}{2^{-2}}=2^{\frac{17}{8}}$

(i)~(iv)에서

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{5}\log_2\frac{a_n}{b_n}&=\log_2\frac{a_1}{b_1}+\log_2\frac{a_2}{b_2}+\log_2\frac{a_3}{b_3}+\log_2\frac{a_4}{b_4}+\log_2\frac{a_5}{b_5}\\&=\log_2\left(\frac{a_1}{b_1}\times\frac{a_2}{b_2}\times\frac{a_3}{b_3}\times\frac{a_4}{b_4}\times\frac{a_5}{b_5}\right)\\&=\log_2\left(1\times1\times2^{\frac{1}{2}}\times2^{\frac{5}{4}}\times2^{\frac{17}{8}}\right)\\&=\log_2 2^{\frac{1}{2}+\frac{5}{4}+\frac{17}{8}}=\frac{31}{8}\end{aligned}$$

따라서 $p=8$, $q=31$이므로 $p+q=8+31=39$

답 39

다른 풀이

$a_n=(\sqrt{2})^{b_n}=2^{b_{n+1}}$에서 $2^{\frac{1}{2}b_n}=2^{b_{n+1}}$이므로

$b_{n+1}=\dfrac{1}{2}b_n$이고

$a_1=(\sqrt{2})^{b_1}=4$에서 $b_1=4$

따라서 수열 $\{b_n\}$은 첫째항이 4이고 공비가 $\dfrac{1}{2}$인 등비수열이다.

즉, $b_n=4\times\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}=2^{3-n}$

한편, $2^{b_{n+1}}=a_n$에서 $b_{n+1}=2^{2-n}$이므로 $a_n=2^{2^{2-n}}$

따라서 $\log_2\dfrac{a_n}{b_n}=\log_2\dfrac{2^{2^{2-n}}}{2^{3-n}}=2^{2-n}+(n-3)$

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{5}(2^{2-n}+n-3)&=\frac{2\times\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^5\right\}}{1-\frac{1}{2}}+\frac{5\times6}{2}-3\times5\\&=4-4\times\left(\frac{1}{2}\right)^5+15-15\\&=4-\frac{1}{8}=\frac{31}{8}\end{aligned}$$

즉, $p=8$, $q=31$이므로 $p+q=8+31=39$

22

방정식 $f(x)=0$의 두 실근을 α, β $(\alpha<\beta)$라 하면

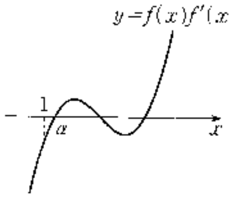
$f(x)=(x-\alpha)(x-\beta)$, $f'(x)=2x-\alpha-\beta$이므로

$f(x)f'(x)=2(x-\alpha)(x-\beta)\left(x-\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right)$

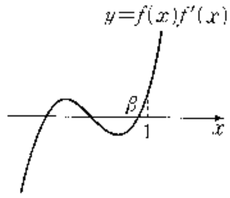
이때 $\alpha<\dfrac{\alpha+\beta}{2}<\beta$이다.

(i) $\alpha>1$ 또는 $\beta<1$일 때

함수 $y=f(x)f'(x)$의 그래프의 개형은 그림과 같다.

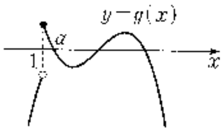


[$\alpha>1$일 때]

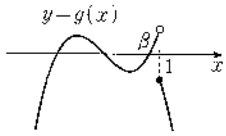


[$\beta<1$일 때]

함수 $y=g(x)$의 그래프의 개형은 그림과 같다.



[$\alpha>1$일 때]

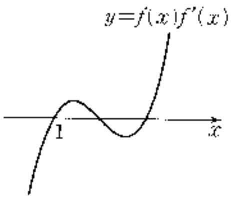


[$\beta<1$일 때]

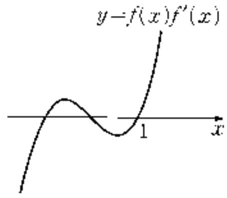
이때 함수 $g(x)$는 $x=1$에서 불연속이므로 조건 (나)를 만족시키지 못한다.

(ii) $\alpha=1$ 또는 $\beta=1$일 때

함수 $y=f(x)f'(x)$의 그래프의 개형은 그림과 같다.

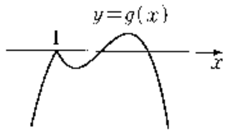


[$\alpha=1$일 때]

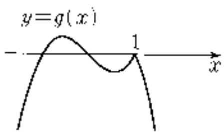


[$\beta=1$일 때]

함수 $y=g(x)$의 그래프의 개형은 그림과 같다.



[$\alpha=1$일 때]

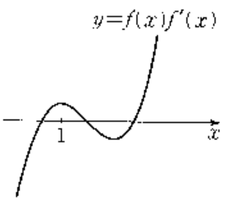


[$\beta=1$일 때]

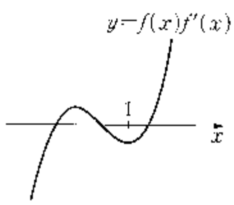
함수 $g(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이므로 조건 (나)를 만족시키지만 $h(k)=2$이고 $\lim\limits_{t\to k-}h(t)>\lim\limits_{t\to k+}h(t)$를 만족시키는 실수 k가 존재하지 않으므로 조건 (다)를 만족시키지 못한다.

(iii) $\alpha<1<\dfrac{\alpha+\beta}{2}$ 또는 $\dfrac{\alpha+\beta}{2}<1<\beta$일 때

함수 $y=f(x)f'(x)$의 그래프의 개형은 그림과 같다.

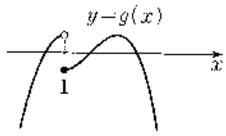


$\left[\alpha<1<\dfrac{\alpha+\beta}{2}\text{일 때}\right]$

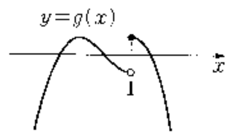


$\left[\dfrac{\alpha+\beta}{2}<1<\beta\text{일 때}\right]$

함수 $y=g(x)$의 그래프의 개형은 그림과 같다.



$\left[\alpha<1<\dfrac{\alpha+\beta}{2}\text{일 때}\right]$

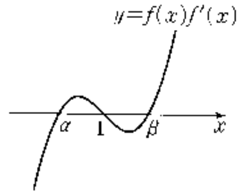


$\left[\dfrac{\alpha+\beta}{2}<1<\beta\text{일 때}\right]$

이때 함수 $g(x)$는 $x=1$에서 불연속이므로 조건 (나)를 만족시키지 못한다.

(iv) $\dfrac{\alpha+\beta}{2}=1$일 때

함수 $y=f(x)f'(x)$의 그래프의 개형은 그림과 같다.

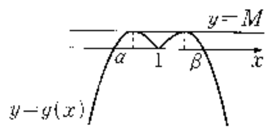


$i(x)=f(x+1)f'(x+1)$이라 하면

$i(x)=2x(x-\alpha+1)(x+\alpha-1)$이므로 $i(-x)=-i(x)$이다.

즉, 함수 $y=i(x)$의 그래프는 원점에 대하여 대칭이므로 $i(x)$의 극댓값을 M이라 하면 $i(x)$의 극솟값은 $-M$이다.

따라서 함수 $y=f(x)f'(x)$의 그래프는 점 $(1,\ 0)$에 대하여 대칭이고, 극댓값은 M, 극솟값은 $-M$이므로 함수 $y=g(x)$의 그래프의 개형은 그림과 같다.



함수 $g(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이므로 조건 (나)를 만족시킨다.

또 $h(k)=2$이고 $\lim\limits_{t\to k-}h(t)>\lim\limits_{t\to k+}h(t)$를 만족시키는 실수 $k=M$이 존재하므로 조건 (다)를 만족시킨다.

(i)~(iv)에서 $\dfrac{\alpha+\beta}{2}=1$이므로 $f(x)=x^2-2x+a$ (a는 상수)로 놓을 수 있다.

$f'(x)=2(x-1)$이므로

$x<1$일 때 $g(x)=2(x-1)(x^2-2x+a)$

$g(-1)=2\times(-2)\times(3+a)=20$에서 $a=-8$이므로

$g(x)=2(x-1)(x^2-2x-8)$

$\quad=2(x+2)(x-1)(x-4)$

한편, $x\ge1$일 때 $g(x)=-2(x+2)(x-1)(x-4)$이므로

$$g(x)=\begin{cases}2(x+2)(x-1)(x-4) & (x<1)\\ -2(x+2)(x-1)(x-4) & (x\ge1)\end{cases}$$

따라서

$g(0)=2\times2\times(-1)\times(-4)=16$,

$g(3)=-2\times5\times2\times(-1)=20$

이므로

$g(0)\times g(3)=16\times20$

$\quad=320$

답 320

23

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{4n^2+8n}-2n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{4n^2+8n}+2n}{(\sqrt{4n^2+8n}-2n)(\sqrt{4n^2+8n}+2n)}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{4n^2+8n}+2n}{8n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{4+\frac{8}{n}}+2}{8}$$
$$=\frac{\sqrt{4}+2}{8}=\frac{1}{2}$$

답 ②

24

$\tan\alpha=\sqrt{2}$에서 $\sin\alpha=\sqrt{2}\cos\alpha$이므로

$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=3\cos^2\alpha=1$

이때 $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$이므로 $\cos\alpha=\frac{\sqrt{3}}{3}$, $\sin\alpha=\sqrt{1-\cos^2\alpha}=\frac{\sqrt{6}}{3}$

한편, $\sin\beta=\frac{1}{3}$이고, $0<\beta<\frac{\pi}{2}$이므로 $\cos\beta=\sqrt{1-\sin^2\beta}=\frac{2\sqrt{2}}{3}$

따라서

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$$
$$=\frac{\sqrt{6}}{3}\times\frac{2\sqrt{2}}{3}+\frac{\sqrt{3}}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{5\sqrt{3}}{9}$$

답 ⑤

25

$\frac{dx}{dt}=-2e^{-2t}+4e^{2t}$, $\frac{dy}{dt}=6\cos t-3\sin t$이므로

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{6\cos t-3\sin t}{-2e^{-2t}+4e^{2t}}\ (\text{단, } e^{-2t}\neq 2e^{2t})$$

따라서 $t=0$일 때, $\frac{dy}{dx}$의 값은 $\frac{6\cos 0-3\sin 0}{-2e^0+4e^0}=\frac{6-0}{-2+4}=3$

답 ①

26

$0<t\le\pi$인 실수 t에 대하여 직선 $x=t$를 포함하고 x축에 수직인 평면으로 자른 단면은 한 변의 길이가 $\sqrt{t\sin t}$인 정삼각형이므로 이 정삼각형의 넓이를 $S(t)$라 하면

$$S(t)=\frac{\sqrt{3}}{4}(\sqrt{t\sin t})^2=\frac{\sqrt{3}}{4}t\sin t$$

따라서 이 입체도형의 부피는

$$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5}{6}\pi}\frac{\sqrt{3}}{4}t\sin t\,dt=\frac{\sqrt{3}}{4}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5}{6}\pi}t\sin t\,dt$$

이때

$$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5}{6}\pi}t\sin t\,dt=\Big[t\times(-\cos t)\Big]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5}{6}\pi}-\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5}{6}\pi}(-\cos t)\,dt$$
$$=\frac{5}{6}\pi\times\left(-\cos\frac{5}{6}\pi\right)-\frac{\pi}{6}\times\left(-\cos\frac{\pi}{6}\right)+\Big[\sin t\Big]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5}{6}\pi}$$
$$=\frac{5\sqrt{3}}{12}\pi+\frac{\sqrt{3}}{12}\pi=\frac{6\sqrt{3}}{12}\pi=\frac{\sqrt{3}}{2}\pi$$

이므로 구하는 입체도형의 부피는 $\frac{\sqrt{3}}{4}\times\frac{\sqrt{3}}{2}\pi=\frac{3}{8}\pi$이다.

답 ③

27

직각삼각형 $A_1B_1E_1$에서

$\overline{A_1E_1}=\sqrt{\overline{A_1B_1}^2+\overline{B_1E_1}^2}=\sqrt{4^2+3^2}=5$

$\angle A_1E_1B_1=\theta$라 하면 $\sin\theta=\frac{4}{5}$, $\cos\theta=\frac{3}{5}$

직각삼각형 $F_1E_1B_1$에서 $\angle F_1E_1B_1=\alpha$라 하면 $\alpha=\theta-\frac{\pi}{4}$이므로

$$\cos\alpha=\cos\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)=\cos\theta\cos\frac{\pi}{4}+\sin\theta\sin\frac{\pi}{4}$$
$$=\frac{3}{5}\times\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{4}{5}\times\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{7\sqrt{2}}{10}$$

$$\overline{F_1E_1}=\frac{\overline{B_1E_1}}{\cos\alpha}=\frac{3}{\frac{7\sqrt{2}}{10}}=\frac{15\sqrt{2}}{7}$$

삼각형 $A_1E_1F_1$의 넓이는

$$\frac{1}{2}\times\overline{A_1E_1}\times\overline{F_1E_1}\times\sin\frac{\pi}{4}=\frac{1}{2}\times5\times\frac{15\sqrt{2}}{7}\times\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{75}{14}$$

삼각형 $A_1E_1F_1$과 삼각형 $D_1E_1G_1$이 합동이므로

$S_1=2\times\frac{75}{14}=\frac{75}{7}$

한편, $\overline{A_2B_2}:\overline{B_2E_2}=4:3$이므로

$\overline{A_2B_2}=4k$, $\overline{B_2E_2}=3k\ (k>0)$으로 놓을 수 있다.

$\overline{E_1E_2}=4-4k$이고, 직각삼각형 $B_2E_2E_1$에서 $\overline{B_2E_2}:\overline{E_1E_2}=3:4$이므로

$3k:(4-4k)=3:4$, $12k=3(4-4k)$, $k=\frac{1}{2}$

이때 $\overline{A_2B_2}=2$, $\overline{B_2E_2}=\frac{3}{2}$

직사각형 $A_1B_1C_1D_1$과 직사각형 $A_2B_2C_2D_2$는 서로 닮음이고 닮음비는 $2:1$이다.

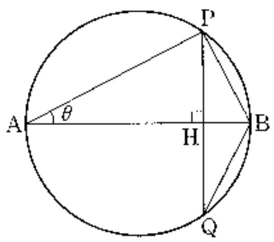
같은 방법으로 직사각형 $A_nB_nC_nD_n$과 직사각형 $A_{n+1}B_{n+1}C_{n+1}D_{n+1}$은 서로 닮음이고 닮음비가 $2:1$이므로 넓이의 비는 $4:1$이다.

따라서

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\frac{\frac{75}{7}}{1-\frac{1}{4}}=\frac{100}{7}$$

답 ④

28



선분 AB와 선분 PQ가 만나는 점을 H라 하자.

삼각형 ABP는 $\angle APB=\frac{\pi}{2}$인 직각삼각형이므로

$\overline{AP}=2\cos\theta$

삼각형 AHP는 직각삼각형이므로

$\overline{AH}=\overline{AP}\cos\theta=2\cos^2\theta$

그러므로 $\overline{BH}=2-2\cos^2\theta=2\sin^2\theta$

또한 $\overline{PH}=\overline{AP}\sin\theta=2\sin\theta\cos\theta$이므로

$\overline{PQ}=2\overline{PH}=4\sin\theta\cos\theta$

$$S(\theta)=\frac{1}{2}\times\overline{PQ}\times\overline{BH}=\frac{1}{2}\times4\sin\theta\cos\theta\times2\sin^2\theta$$
$$=4\sin^3\theta\cos\theta$$

이므로 $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} S(\theta)\,d\theta=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} 4\sin^3\theta\cos\theta\,d\theta$

$\sin\theta=t$로 놓으면 $\cos\theta=\frac{dt}{d\theta}$이고

$\theta=\frac{\pi}{6}$일 때 $t=\frac{1}{2}$, $\theta=\frac{\pi}{3}$일 때 $t=\frac{\sqrt{3}}{2}$이므로

$$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} 4\sin^3\theta\cos\theta\,d\theta=\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} 4t^3\,dt=\Big[t^4\Big]_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{9}{16}-\frac{1}{16}=\frac{1}{2}$$

답 ①

29

$f(x)=\frac{-x^2+ax+b}{e^x}$에서

$$f'(x)=\frac{(-2x+a)e^x-(-x^2+ax+b)e^x}{e^{2x}}=\frac{x^2-(a+2)x+a-b}{e^x}$$

$f'(x)=0$에서 $x^2-(a+2)x+a-b=0$ …… ㉠

조건 (가)에서 x_1, x_2는 ㉠의 실근이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$x_1+x_2=a+2$, 즉 $2=a+2$이므로 $a=0$

이차방정식 ㉠의 판별식을 D_1이라 하면 이차방정식 ㉠이 서로 다른 두 실근을 가져야 하므로

$D_1=(a+2)^2-4(a-b)=4+4b>0$에서 $b>-1$

이때 $f'(x)=\frac{x^2-2x-b}{e^x}$이므로

$$f''(x)=\frac{(2x-2)e^x-(x^2-2x-b)e^x}{e^{2x}}=\frac{-x^2+4x+b-2}{e^x}$$

$f''(x)=0$에서 $-x^2+4x+b-2=0$ …… ㉡

조건 (나)에서 x_3, x_4는 ㉡의 실근이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$x_3+x_4=4$, $x_3\times x_4=-b+2$

이므로 $(x_3)^2+(x_4)^2=14$에서

$(x_3+x_4)^2-2x_3x_4=14$, $4^2-2(-b+2)=14$, $b=1$

이차방정식 ㉡의 판별식을 D_2라 하면

$\frac{D_2}{4}=2^2-(-1)\times(b-2)=3>0$

이므로 이차방정식 ㉡은 서로 다른 두 실근을 갖는다.

그러므로 $f(x)=\frac{-x^2+1}{e^x}$, $f'(x)=\frac{x^2-2x-1}{e^x}$,

$f''(x)=\frac{-x^2+4x-1}{e^x}$이다.

$f'(x)=0$에서 $x^2-2x-1=0$이므로 $x=1-\sqrt{2}$ 또는 $x=1+\sqrt{2}$

$f''(x)=0$에서 $-x^2+4x-1=0$

즉, $x^2-4x+1=0$이므로 $x=2-\sqrt{3}$ 또는 $x=2+\sqrt{3}$

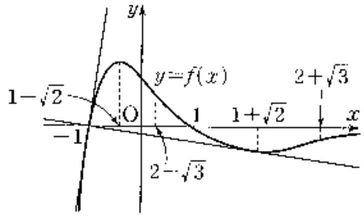
함수 $f(x)$의 증가와 감소, 곡선 $y=f(x)$의 오목과 볼록을 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	$1-\sqrt{2}$	$\cdots$	$2-\sqrt{3}$	$\cdots$	$1+\sqrt{2}$	$\cdots$	$2+\sqrt{3}$	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$f''(x)$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$
$f(x)$	↗	극댓값	↘	변곡점	↘	극솟값	↗	변곡점	↗

$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{e^x}=0$이므로 $\lim_{x\to\infty}f(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{-x^2+1}{e^x}=0$이다.

즉, 함수 $y=f(x)$의 그래프의 점근선은 x축이다.

한편, $f(-1)=f(1)=0$이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 그림과 같다.



$t>-1$일 때, $g(t)=\frac{f(t)}{t+1}$의 값은 두 점 $(-1, 0)$, $(t, f(t))$를 지나는 직선의 기울기이고 $g(-1)=f'(-1)$이므로 구간 $[-1, \infty)$에서 함수 $g(t)$의 최댓값은 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(-1, 0)$에서의 접선의 기울기이고, 함수 $g(t)$의 최솟값은 두 점 $(-1, 0)$, $(t, f(t))$ $(t>-1)$을 지나는 직선이 곡선 $y=f(x)$에 접할 때 이 접선의 기울기이다.

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(t, f(t))$에서의 접선의 방정식은

$$y-\frac{-t^2+1}{e^t}=\frac{t^2-2t-1}{e^t}(x-t)$$

이 직선이 점 $(-1, 0)$을 지나므로

$$0-\frac{-t^2+1}{e^t}=\frac{t^2-2t-1}{e^t}(-1-t),\ (t+1)^2(t-2)=0$$

$t>-1$이므로 $t=2$

이때 $f'(2)=-\frac{1}{e^2}$이므로 구간 $[-1, \infty)$에서 함수 $g(t)$의 최솟값은 $-\frac{1}{e^2}$이다.

한편, $f(-1)=0$이고 $\lim_{t\to-1+}g(t)=\lim_{t\to-1+}\frac{f(t)}{t+1}=f'(-1)=2e$이므로 구간 $[-1, \infty)$에서 함수 $g(t)$의 최댓값은 $2e$이다.

따라서 $m=-\frac{1}{e^2}$, $M=2e$이므로

$$(emM)^2=\left\{e\times\left(-\frac{1}{e^2}\right)\times 2e\right\}^2=4$$

답 4

다른 풀이

$f(x)=\frac{-x^2+1}{e^x}$, $f'(x)=\frac{x^2-2x-1}{e^x}$ (위의 풀이 참조)

한편,

$$g(t)=\begin{cases}\frac{-t^2+1}{(t+1)e^t} & (t\neq-1)\\ f'(-1) & (t=-1)\end{cases}=\begin{cases}\frac{1-t}{e^t} & (t\neq-1)\\ 2e & (t=-1)\end{cases}$$

이때 $\lim_{t\to-1}g(t)=\frac{1-(-1)}{e^{-1}}=2e$, $g(-1)=2e$이므로

$g(t)=\frac{1-t}{e^t}$

$$g'(t)=\frac{-e^t-(1-t)e^t}{e^{2t}}=\frac{t-2}{e^t},\ g''(t)=\frac{e^t-(t-2)e^t}{e^{2t}}=\frac{3-t}{e^t}$$

$g'(t)=0$에서 $t=2$이고, $g''(t)=0$에서 $t=3$

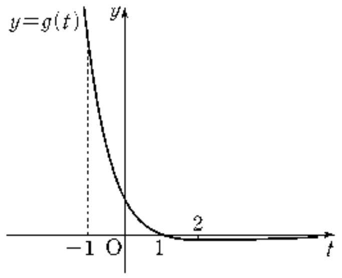
함수 $g(t)$의 증가와 감소, 곡선 $y=g(t)$의 오목과 볼록을 표로 나타내면 다음과 같다.

t	$\cdots$	2	$\cdots$	3	$\cdots$
$g'(t)$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$g''(t)$	$+$	$+$	$+$	0	$-$
$g(t)$	↘	극솟값	↗	변곡점	↗

$\lim_{t\to\infty}\frac{t^2}{e^t}=0$이므로 $\lim_{t\to\infty}g(t)=\lim_{t\to\infty}\frac{1-t}{e^t}=0$이다.

즉, 함수 $y=g(t)$의 그래프의 점근선은 x축이다.

한편, $g(1)=0$이므로 함수 $y=g(t)$의 그래프는 그림과 같다.



구간 $[-1, \infty)$에서 함수 $g(t)$는 $t=-1$일 때 최댓값 $g(-1)=2e$를 갖고 $t=2$일 때 최솟값 $g(2)=-\frac{1}{e^2}$을 갖는다.

따라서 $M=2e$, $m=-\frac{1}{e^2}$이므로 $(emM)^2=\left\{e\times\left(-\frac{1}{e^2}\right)\times 2e\right\}^2=4$

30

삼차함수 $g(x)$를

$g(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ (단, a, b, c, d는 상수이고 $a<0$이다.)

라 하면 조건 (나)에 의하여

$g(-x)=-ax^3+bx^2-cx+d$

$-g(x)=-ax^3-bx^2-cx-d$

이므로 $g(-x)=-g(x)$에서 $b=d=0$이고

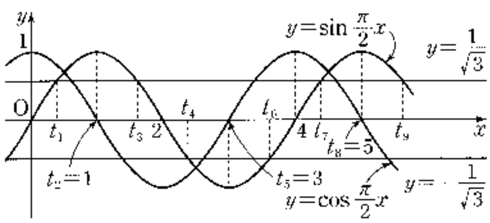
조건 (가)에서 $g(1)=0$이므로 $c=-a$

그러므로 $g(x)=ax^3-ax$ $(a<0)$이고 $g'(x)=3ax^2-a$

두 함수 $f(x)$, $g(x)$는 실수 전체의 집합에서 미분가능하므로 함수 $h(x)=(g\circ f)(x)$는 실수 전체의 집합에서 미분가능하다.

$$h'(x)=g'(f(x))f'(x)=\left(3a\sin^2\frac{\pi}{2}x-a\right)\times\frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi}{2}x$$

$$=\frac{a}{2}\pi\cos\frac{\pi}{2}x\left(\sqrt{3}\sin\frac{\pi}{2}x+1\right)\left(\sqrt{3}\sin\frac{\pi}{2}x-1\right)$$



그림과 같이 $h'(t)=0$을 만족시키는 $t>0$인 실수 t의 값을 작은 수부터 크기순으로 나열한 것을 $t_1, t_2, t_3, \cdots$이라 하면 모든 자연수 n에 대하여 $h'(t_n)=0$에서

$\cos\frac{\pi}{2}t_n=0$ 또는 $\sin\frac{\pi}{2}t_n=\pm\frac{1}{\sqrt{3}}$이고

$\sin\frac{\pi}{2}t_1=\sin\frac{\pi}{2}t_3=\frac{1}{\sqrt{3}}$, $\cos\frac{\pi}{2}t_2=\cos\frac{\pi}{2}t_5=0$,

$\sin\frac{\pi}{2}t_4=\sin\frac{\pi}{2}t_6=-\frac{1}{\sqrt{3}}$

함수 $h(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	t_1	$\cdots$	t_2	$\cdots$	t_3	$\cdots$	t_4	$\cdots$	t_5	$\cdots$	t_6	$\cdots$
$h'(x)$	+	0	−	0	+	0	−	0	+	0	-	0	+
$h(x)$	↗	극대	↘	극소	↗	극대	↘	극소	↗	극대	↘	극소	↗

이때 조건 (다)에서 $a_1=t_1$, $a_2=t_3$, $a_3=t_5$, $\cdots$, $a_n=t_{2n-1}$이다.

$h(a_2)=h(t_3)$이고 $\sin\frac{\pi}{2}t_3=\frac{1}{\sqrt{3}}$이므로

$h(a_2)=h(t_3)=a\sin^3\frac{\pi}{2}t_3-a\sin\frac{\pi}{2}t_3=\frac{a}{3\sqrt{3}}-\frac{a}{\sqrt{3}}=\frac{8\sqrt{3}}{9}$

$-\frac{2a}{3\sqrt{3}}=\frac{8\sqrt{3}}{9}$, $a=-4$

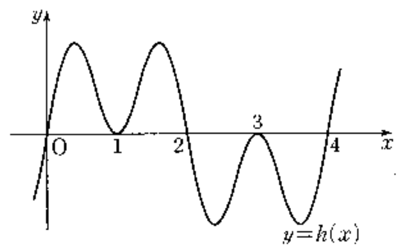
그러므로 $h(x)=-4\sin^3\frac{\pi}{2}x+4\sin\frac{\pi}{2}x$

$\cos\frac{\pi}{2}t_2=\cos\frac{\pi}{2}t_5=0$에서 $t_2=1$, $t_5=3$

$h(t_1)=h(t_3)=\frac{8\sqrt{3}}{9}$이고 $h(t_2)=h(1)=0$

$h(t_4)=h(t_6)=-\frac{8\sqrt{3}}{9}$이고 $h(t_5)=h(3)=0$

이를 종합하면 $0\le x\le 4$일 때, 함수 $y=h(x)$의 그래프의 개형은 그림과 같다.



한편, $f(-x)=-f(x)$이고 조건 (나)에 의하여

$f(g(-x))=f(-g(x))=-f(g(x))$, 즉 $h(-x)=-h(x)$이다.

그러므로 함수 $y=h(x)$의 그래프는 원점에 대하여 대칭이다.

또한 $\sin\left\{\frac{\pi}{2}(x+4)\right\}=\sin\left(2\pi+\frac{\pi}{2}x\right)=\sin\frac{\pi}{2}x$에서

$h(x+4)=h(x)$이므로 $2\le x\le 4$에서 함수 $y=h(x)$의 그래프는 $-2\le x\le 0$에서 함수 $y=h(x)$의 그래프와 일치한다.

$$\int_0^4|h(x)|\,dx=\int_0^2 h(x)\,dx+\int_2^4\{-h(x)\}\,dx$$

$$=\int_0^2 h(x)\,dx+\int_{-2}^0\{-h(x)\}\,dx=2\int_0^2 h(x)\,dx$$

$$\int_0^2 h(x)\,dx=\int_0^2\left(-4\sin^3\frac{\pi}{2}x+4\sin\frac{\pi}{2}x\right)dx$$

$$=4\int_0^2\sin\frac{\pi}{2}x\left(1-\sin^2\frac{\pi}{2}x\right)dx$$

$$=4\int_0^2\sin\frac{\pi}{2}x\cos^2\frac{\pi}{2}x\,dx$$

$\cos\frac{\pi}{2}x=t$로 놓으면 $-\frac{\pi}{2}\sin\frac{\pi}{2}x=\frac{dt}{dx}$이고

$x=0$일 때 $t=1$, $x=2$일 때 $t=-1$이므로

$$4\int_0^2\sin\frac{\pi}{2}x\cos^2\frac{\pi}{2}x\,dx=-\frac{8}{\pi}\int_1^{-1}t^2\,dt=\frac{8}{\pi}\int_{-1}^1 t^2\,dt$$

$$=\frac{16}{\pi}\int_0^1 t^2\,dt=\frac{16}{\pi}\left[\frac{1}{3}t^3\right]_0^1$$

$$=\frac{16}{\pi}\times\frac{1}{3}=\frac{16}{3\pi}$$

따라서 $\int_0^4|h(x)|\,dx=2\times\frac{16}{3\pi}=\frac{32}{3\pi}$에서 $p=3$, $q=32$이므로

$p+q=35$

답 35

실전 모의고사 2회 본문 126~137쪽

01 ④	02 ②	03 ⑤	04 ①	05 ②
06 ③	07 ④	08 ③	09 ②	10 ④
11 ⑤	12 ⑤	13 ⑤	14 ①	15 ②
16 7	17 127	18 124	19 581	20 42
21 14	22 109	23 ⑤	24 ①	25 ③
26 ③	27 ①	28 ③	29 13	30 17

01

$9^{\sqrt{2}}\times3^{1-2\sqrt{2}}=(3^2)^{\sqrt{2}}\times3^{1-2\sqrt{2}}=3^{2\sqrt{2}}\times3^{1-2\sqrt{2}}=3^{2\sqrt{2}+(1-2\sqrt{2})}=3$

답 ①

02

$f(x)=(3x^2-2)(x^2+2x+5)$에서

$f'(x)=6x(x^2+2x+5)+(3x^2-2)(2x+2)$

따라서 $f'(1)=6\times8+1\times4=52$

답 ②

03

$\lim_{x\to-1-}f(x)=2,\ \lim_{x\to2+}f(x)=3$

따라서 $\lim_{x\to-1-}f(x)+\lim_{x\to2+}f(x)=2+3=5$

답 ⑤

04

등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공차를 d라 하면

$a_3=8$에서 $a+2d=8$ …… ㉠

$a_2+a_6=\frac{1}{2}a_{15}$에서 $(a+d)+(a+5d)=\frac{1}{2}(a+14d)$

$4a+12d=a+14d,\ 3a=2d$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=2,\ d=3$

즉, 수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 2이고 공차가 3인 등차수열이므로

$a_k=2+(k-1)\times3=3k-1$

$a_k=3k-1>100$에서 $k>\frac{101}{3}$

따라서 조건을 만족시키는 자연수 k의 최솟값은 34이다.

답 ①

05

$\sum_{k=1}^{10}(a_k+2b_k)=30$에서

$\sum_{k=1}^{10}a_k+2\sum_{k=1}^{10}b_k=30$ …… ㉠

$\sum_{k=1}^{10}\left(b_k-\frac{1}{2}\right)=\frac{11}{2}$에서

$\sum_{k=1}^{10}b_k-\frac{1}{2}\times10=\frac{11}{2},\ \sum_{k=1}^{10}b_k=\frac{11}{2}+5=\frac{21}{2}$ …… ㉡

㉡을 ㉠에 대입하면 $\sum_{k=1}^{10}a_k+21=30$

따라서 $\sum_{k=1}^{10}a_k=30-21=9$

답 ②

06

시각 $t=1$에서 $t=3$까지 점 P의 위치의 변화량은

$\int_1^3 v(t)\,dt=\int_1^3(2t^2+at+2)\,dt=\left[\frac{2}{3}t^3+\frac{a}{2}t^2+2t\right]_1^3$

$=\left(18+\frac{9}{2}a+6\right)-\left(\frac{2}{3}+\frac{a}{2}+2\right)=4a+\frac{64}{3}$

이므로 $4a+\frac{64}{3}=\frac{100}{3}$에서 $4a=12$

따라서 $a=3$

답 ③

07

직각삼각형 AOH에서 $\overline{AH}=\sqrt{\overline{OA}^2-\overline{OH}^2}=\sqrt{10^2-6^2}=8$이므로

$\angle AOH=\alpha$라 하면 $\sin\alpha=\frac{4}{5},\ \cos\alpha=\frac{3}{5}$

직선 l과 x축의 교점을 B라 하면 직각삼각형 AOH와 직각삼각형 ABO는 서로 닮음이므로

$\angle ABO=\angle AOH=\alpha$

이때 $\theta=\pi-\alpha$이므로

$\sin\theta=\sin(\pi-\alpha)=\sin\alpha=\frac{4}{5}$

$\cos\theta=\cos(\pi-\alpha)=-\cos\alpha=-\frac{3}{5}$

따라서 $\sin\theta+\cos\theta=\frac{4}{5}+\left(-\frac{3}{5}\right)=\frac{1}{5}$

답 ④

08

$f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ ($a,\ b,\ c$는 상수)라 하면

$f'(x)=3x^2+2ax+b$

곡선 $y=f(x)$가 점 $(1,\ 3)$에서 직선 $y=4x-1$에 접하므로

$f(1)=3,\ f'(1)=4$

함수 $f(x)$가 $x=\frac{1}{3}$에서 극소이므로 $f'\left(\frac{1}{3}\right)=0$

$f'(1)=3+2a+b=4$에서 $2a+b=1$ …… ㉠

$f'\left(\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{3}+\frac{2}{3}a+b=0$에서 $2a+3b=-1$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=1,\ b=-1$이므로

$f'(x)=3x^2+2x-1=(3x-1)(x+1)$

$f'(x)=0$에서 $x=\frac{1}{3}$ 또는 $x=-1$이므로 함수 $f(x)$는 $x=-1$에서 극대이다.

한편, $f(x)=x^3+x^2-x+c$이고 $f(1)=3$이므로

$1+1-1+c=3$에서 $c=2$

따라서 $f(x)=x^3+x^2-x+2$이므로 구하는 함수 $f(x)$의 극댓값은

$f(-1)=-1+1-(-1)+2=3$

답 ③

09

$\log_2 f(1)+\log_2(1-3)^2=5$에서 $\log_2 f(1)=3$이므로 $f(1)=8$

$f(1)-8=0$ …… ㉠

또한 $\log_2 f(5)+\log_2(5-3)^2=5$에서 $\log_2 f(5)=3$이므로 $f(5)=8$

$f(5)-8=0$ …… ㉡

㉠, ㉡에서

$f(x)-8=a(x-1)(x-5)$ (a는 양수)

$f(x)=a(x-1)(x-5)+8=a(x-3)^2-4a+8$

이차함수 $f(x)$는 $x=3$에서 최솟값 4를 가져야 하므로

$-4a+8=4$에서 $a=1$

따라서 $f(x)=(x-1)(x-5)+8$이므로

$f(0)=(-1)\times(-5)+8=13$

답 ②

10

$f(0)=5$이므로

$f(x)=ax^3+bx^2+cx+5$ (a, b, c는 상수이고 $a\neq0$)이라 하면

$$g(x)=\int_{-x}^{x} f(t)\,dt=\int_{-x}^{x}(at^3+bt^2+ct+5)\,dt$$

$$=2\int_0^x(bt^2+5)\,dt=2\left[\frac{b}{3}t^3+5t\right]_0^x=\frac{2b}{3}x^3+10x$$

$g(1)=12$이므로

$\frac{2b}{3}+10=12$, $b=3$

따라서 $g(x)=2x^3+10x$이므로

$$\int_0^2 g(x)\,dx=\int_0^2(2x^3+10x)\,dx=\left[\frac{1}{2}x^4+5x^2\right]_0^2=8+20=28$$

답 ④

11

함수 $f(x)$의 최댓값과 최솟값은 각각 $a+c$, $-a+c$이므로

조건 (가)에 의하여

$(a+c)+(-a+c)=2c=6$에서 $c=3$

함수 $f(x)$의 주기는 $\frac{2\pi}{|b\pi|}=\frac{2}{b}$

또한 $g(x)=\left|\cos\left(3\pi x-\frac{1}{2}\right)\right|+1=\left|\cos 3\pi\left(x-\frac{1}{6\pi}\right)\right|+1$이므로

함수 $g(x)$의 주기는 $\frac{\pi}{3\pi}=\frac{1}{3}$

조건 (나)에 의하여 두 함수 $f(x)$와 $g(x)$의 주기가 서로 같으므로

$\frac{2}{b}=\frac{1}{3}$에서 $b=6$

즉, $f(x)=a\sin(6\pi x)+3$이고 $f\left(\frac{1}{4}\right)=1$이므로

$f\left(\frac{1}{4}\right)=a\sin\left(\frac{3}{2}\pi\right)+3=-a+3=1$에서 $a=2$

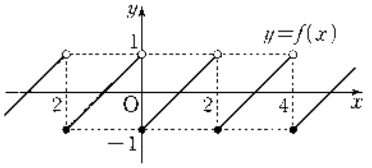
따라서 $f(x)=2\sin(6\pi x)+3$이므로

$f\left(\frac{1}{9}\right)=2\sin\left(\frac{2}{3}\pi\right)+3=2\times\frac{\sqrt{3}}{2}+3=3+\sqrt{3}$

답 ⑤

12

함수 $y=f(x)$의 그래프는 그림과 같다.



ㄱ. $-2\le x<0$일 때, $f(x)=x+1$이므로

$\lim_{x\to0-}f(x)=\lim_{x\to0-}(x+1)=1$

$2\le x<4$일 때, $f(x)=x-3$이므로

$\lim_{x\to2+}f(x)=\lim_{x\to2+}(x-3)=-1$

그러므로 $\lim_{x\to0-}f(x)+\lim_{x\to2+}f(x)=1+(-1)=0$ (참)

ㄴ. 함수 $f(x)$가 $x=2n$ (n은 정수)에서만 불연속이므로 함수 $|f(x)|$가 $x=2n$ (n은 정수)에서 연속이면 실수 전체의 집합에서 연속이다.

앞의 그림에 의하면 모든 정수 n에 대하여

$\lim_{x\to2n-}f(x)=1$이므로 $\lim_{x\to2n-}|f(x)|=1$

$\lim_{x\to2n+}f(x)=-1$이므로 $\lim_{x\to2n+}|f(x)|=1$

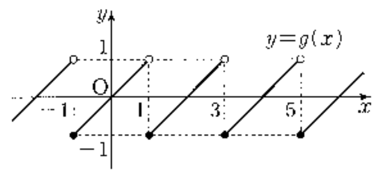
$|f(2n)|=|-1|=1$

즉, $\lim_{x\to2n-}|f(x)|=\lim_{x\to2n+}|f(x)|=|f(2n)|$이므로 함수 $|f(x)|$는 $x=2n$ (n은 정수)에서 연속이다.

그러므로 함수 $|f(x)|$는 실수 전체의 집합에서 연속이다. (참)

ㄷ. 모든 정수 n에 대하여 함수 $f(x)$는 $x=2n$에서만 불연속이고, 함수 $f(x+1)$은 $x=2n-1$에서만 불연속이므로 함수 $f(x)f(x+1)$이 $x=n$ (n은 정수)에서 연속이면 실수 전체의 집합에서 연속이다.

$g(x)=f(x+1)$이라 하면 $-1\le x<1$일 때 $g(x)=x$이고, 모든 실수 x에 대하여 $g(x)=g(x+2)$이므로 함수 $y=g(x)$의 그래프는 그림과 같다.



정수 n에 대하여

(i) $\lim_{x\to2n-}f(x)f(x+1)=\lim_{x\to2n-}f(x)g(x)=1\times0=0$

$\lim_{x\to2n+}f(x)f(x+1)=\lim_{x\to2n+}f(x)g(x)=(-1)\times0=0$

$f(2n)f(2n+1)=f(2n)g(2n)=(-1)\times0=0$

즉, 모든 정수 n에 대하여

$\lim_{x\to2n-}f(x)f(x+1)=\lim_{x\to2n+}f(x)f(x+1)$

$=f(2n)f(2n+1)$

이므로 함수 $f(x)f(x+1)$은 $x=2n$ (n은 정수)에서 연속이다.

(ii) $\lim_{x\to(2n-1)-}f(x)f(x+1)=\lim_{x\to(2n-1)-}f(x)g(x)=0\times1=0$

$\lim_{x\to(2n-1)+}f(x)f(x+1)=\lim_{x\to(2n-1)+}f(x)g(x)=0\times(-1)=0$

$f(2n-1)f(2n)=f(2n-1)g(2n-1)=0\times(-1)=0$

즉, 모든 정수 n에 대하여

$\lim_{x\to(2n-1)-}f(x)f(x+1)=\lim_{x\to(2n-1)+}f(x)f(x+1)$

$=f(2n-1)f(2n)$

이므로 함수 $f(x)f(x+1)$은 $x=2n-1$ (n은 정수)에서 연속이다.

(i), (ii)에 의하여 함수 $f(x)f(x+1)$은 $x=n$ (n은 정수)에서 연속이므로 실수 전체의 집합에서 연속이다. (참)

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

답 ⑤

13

두 점 A, B의 좌표는 각각

$A(t, \log_2 t)$, $B(t, \log_2 16t)$

점 C의 y좌표는 점 A의 y좌표와 같으므로 점 C의 x좌표를 a라 하면

$\log_2 16a = \log_2 t$에서 $16a = t$, 즉 $a = \frac{t}{16}$

점 D의 y좌표는 점 B의 y좌표와 같으므로 점 D의 x좌표를 b라 하면

$\log_2 b = \log_2 16t$에서 $b = 16t$

즉, $C\left(\frac{t}{16}, \log_2 t\right)$, $D(16t, \log_2 16t)$이므로 삼각형 ABC의 무게중심 G_1의 좌표는

$$G_1\left(\frac{t+t+\frac{t}{16}}{3}, \frac{\log_2 t+\log_2 16t+\log_2 t}{3}\right)$$

즉, $G_1\left(\frac{11}{16}t, \frac{4}{3}+\log_2 t\right)$

이고, 삼각형 ADB의 무게중심 G_2의 좌표는

$$G_2\left(\frac{t+16t+t}{3}, \frac{\log_2 t+\log_2 16t+\log_2 16t}{3}\right)$$

즉, $G_2\left(6t, \frac{8}{3}+\log_2 t\right)$

이므로 직선 G_1G_2의 기울기는

$$\frac{\left(\frac{8}{3}+\log_2 t\right)-\left(\frac{4}{3}+\log_2 t\right)}{6t-\frac{11}{16}t} = \frac{\frac{4}{3}}{\frac{85}{16}t} = \frac{64}{255t}$$

즉, $\frac{64}{255t} = \frac{16}{255}$이므로 $t=4$

따라서 $A(4, 2)$, $B(4, 6)$, $D(64, 6)$이므로 삼각형 ADB의 넓이는

$$\frac{1}{2}\times(64-4)\times(6-2) = \frac{1}{2}\times 60\times 4 = 120$$

답 ⑤

14

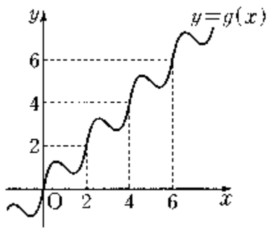
삼차함수 $f(x)$의 최고차항의 계수를 a라 하면 방정식 $f(x)-x=0$의 세 실근이 0, 1, 2이므로

$f(x)-x = ax(x-1)(x-2)\ (a>0)$

으로 놓을 수 있다.

즉, $f(x)=ax(x-1)(x-2)+x$이고, $f(0)=0$, $f(1)=1$, $f(2)=2$이다.

한편, 함수 $g(x)$는 $0\le x\le 2$일 때 $g(x)=f(x)$이고, 모든 실수 x에 대하여 $g(x+2)=g(x)+2$를 만족시키므로 함수 $y=g(x)$의 그래프는 그림과 같이 생각할 수 있다.



이때

$$\int_0^2 f(x)\,dx = \int_0^2 \{ax(x-1)(x-2)+x\}\,dx$$
$$= \int_0^2 \{ax^3-3ax^2+(2a+1)x\}\,dx$$
$$= \left[\frac{a}{4}x^4-ax^3+\frac{2a+1}{2}x^2\right]_0^2$$
$$= 4a-8a+4a+2 = 2$$

이고, 자연수 k에 대하여

$$\int_{2k-2}^{2k} g(x)\,dx = 2\times(2k-2)+\int_0^2 g(x)\,dx = (4k-4)+\int_0^2 f(x)\,dx$$
$$= (4k-4)+2 = 4k-2$$

이므로

$$\int_0^{2n} g(x)\,dx = \int_0^2 g(x)\,dx+\int_2^4 g(x)\,dx+\cdots+\int_{2n-2}^{2n} g(x)\,dx$$
$$= \sum_{k=1}^{n}(4k-2) = 4\times\frac{n(n+1)}{2}-2n = 2n^2$$

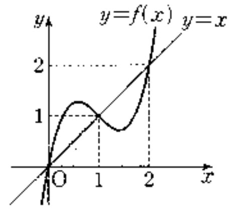
따라서 $2n^2=72$에서 $n^2=36$

n은 자연수이므로 $n=6$

답 ①

참고

함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x$가 세 점 (0, 0), (1, 1), (2, 2)에서 만나므로 함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형은 그림과 같다.



$f(x)=ax(x-1)(x-2)+x$에서

$$f(x+1)-1 = ax(x+1)(x-1)+x$$
$$= ax^3+(1-a)x$$

이므로 함수 $y=f(x+1)-1$의 그래프는 원점에 대하여 대칭이다.

이때 함수 $y=f(x)$의 그래프는 함수 $y=f(x+1)-1$의 그래프를 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 점 (1, 1)에 대하여 대칭이다.

따라서 그림의 색칠된 부분의 넓이는 한 변의 길이가 2인 정사각형의 넓이의 $\frac{1}{2}$이므로 2이다.

즉, $\int_0^2 f(x)\,dx = 2$

15

선분 CD가 원의 지름이므로 $\angle CPD = \frac{\pi}{2}$

직각삼각형 PCD에서 $\overline{CD}^2 = \overline{PC}^2+\overline{PD}^2$이므로

$\overline{PD} = \sqrt{\overline{CD}^2-\overline{PC}^2} = \sqrt{(2\sqrt{5})^2-4^2} = 2$

삼각형 APD의 넓이가 $\frac{\sqrt{5}}{3}$이므로 $\angle APD=\theta$라 하면

$\frac{1}{2}\times\overline{PA}\times\overline{PD}\times\sin\theta = \frac{\sqrt{5}}{3}$

$\frac{1}{2}\times 1\times 2\times\sin\theta = \frac{\sqrt{5}}{3}$, $\sin\theta = \frac{\sqrt{5}}{3}$

선분 AB가 원의 지름이므로 $\angle APB = \frac{\pi}{2}$

직각삼각형 PAB에서 $\overline{AB}^2 = \overline{PA}^2+\overline{PB}^2$이므로

$\overline{PB} = \sqrt{\overline{AB}^2-\overline{PA}^2} = \sqrt{(\sqrt{10})^2-1^2} = 3$

삼각형 BPC에서 $\angle BPC = \pi-\theta$이고 $\frac{\pi}{2}<\theta<\pi$이므로

$$\cos(\pi-\theta) = -\cos\theta = \sqrt{1-\sin^2\theta} = \sqrt{1-\left(\frac{\sqrt{5}}{3}\right)^2} = \frac{2}{3}$$

코사인법칙에 의하여

$$\overline{BC}^2 = \overline{PB}^2+\overline{PC}^2-2\times\overline{PB}\times\overline{PC}\times\cos(\pi-\theta)$$
$$= 3^2+4^2-2\times 3\times 4\times\frac{2}{3} = 9+16-16 = 9$$

$\overline{BC}>0$이므로 $\overline{BC}=3$

답 ②

16

함수 $f(x)=2x^3-x+1$에 대하여 x의 값이 -2에서 2까지 변할 때의 함수 $f(x)$의 평균변화율은

$$\frac{f(2)-f(-2)}{2-(-2)}=\frac{(16-2+1)-(-16+2+1)}{4}=\frac{28}{4}=7$$

답 7

17

$\log_2\frac{128}{n}=m$ (m은 자연수)로 놓으면

$\frac{128}{n}=2^m$에서 $2^{7-m}=n$

n이 자연수이므로 $7-m\ge 0$

즉, m은 $1\le m\le 7$인 자연수이므로 조건을 만족시키는 n은

2^0, 2^1, 2^2, 2^3, 2^4, 2^5, 2^6

따라서 모든 n의 값의 합은 $\frac{1\times(2^7-1)}{2-1}=2^7-1=127$

답 127

18

함수 $f(x)$의 차수가 3 이상이면

$\lim_{x\to\infty}\frac{f(2x)+3x^2}{x^2-1}=\infty$ 또는 $\lim_{x\to\infty}\frac{f(2x)+3x^2}{x^2-1}=-\infty$

이므로 조건을 만족시키지 않고, 함수 $f(x)$의 차수가 1 이하이면

$\lim_{x\to\infty}\frac{f(2x)+3x^2}{x^2-1}=3$

이므로 조건을 만족시키지 않는다. 그러므로 함수 $f(x)$는 이차함수이다.

$f(x)=ax^2+bx+c$ (a, b, c는 상수, $a\neq 0$)이라 하면

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(2x)+3x^2}{x^2-1}=\lim_{x\to\infty}\frac{4ax^2+2bx+c+3x^2}{x^2-1}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{4a+3+\frac{2b}{x}+\frac{c}{x^2}}{1-\frac{1}{x^2}}=4a+3$$

이므로 $4a+3=7$에서 $a=1$

즉, $f(x)=x^2+bx+c$이고

$\lim_{x\to\infty}f\left(\frac{1}{x}\right)=\lim_{t\to 0+}f(t)=\lim_{t\to 0+}(t^2+bt+c)=c$

이므로 $c=4$

그러므로 $f(x)=x^2+bx+4$이고

$f(x)=\left(x+\frac{b}{2}\right)^2+4-\frac{b^2}{4}$

이므로 함수 $f(x)$는 $x=-\frac{b}{2}$일 때 최솟값을 갖는다.

즉, $-\frac{b}{2}=-1$에서 $b=2$

따라서 $f(x)=x^2+2x+4$이므로 $f(10)=100+20+4=124$

답 124

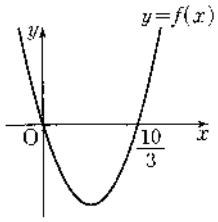
19

$\int_0^1 f(t)\,dt=k$ (k는 상수)로 놓으면 $f(x)=x^2+(k-2)x$이고

$\int_0^1\{t^2+(k-2)t\}\,dt=\left[\frac{1}{3}t^3+\frac{k-2}{2}t^2\right]_0^1=\frac{1}{3}+\frac{k-2}{2}=\frac{k}{2}-\frac{2}{3}$

이므로 $\frac{k}{2}-\frac{2}{3}=k$에서 $k=-\frac{4}{3}$

즉, $f(x)=x^2-\frac{10}{3}x$이고 함수 $y=f(x)$의 그래프는 그림과 같다.



따라서 곡선 $y=f(x)$와 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이는

$$\int_0^{\frac{10}{3}}|f(x)|\,dx=\int_0^{\frac{10}{3}}\{-f(x)\}\,dx$$

$$=\int_0^{\frac{10}{3}}\left(-x^2+\frac{10}{3}x\right)dx$$

$$=\left[-\frac{1}{3}x^3+\frac{5}{3}x^2\right]_0^{\frac{10}{3}}=-\frac{1000}{81}+\frac{500}{27}=\frac{500}{81}$$

즉, $p=81$, $q=500$이므로 $p+q=81+500=581$

답 581

20

조건 (다)에서 n이 홀수이면 $n+2$가 홀수이므로 $f(n)$의 값에 상관없이 $a_n=1$

n이 짝수이면 $n+2$가 짝수이므로

$f(n)>0$이면 $a_n=2$

$f(n)=0$이면 $a_n=1$, $f(n)<0$이면 $a_n=0$

$\sum_{n=1}^{10}a_n=10$에서 $\sum_{n=1}^{10}a_n=\sum_{n=1}^{5}a_{2n-1}+\sum_{n=1}^{5}a_{2n}=5+\sum_{n=1}^{5}a_{2n}=10$

즉, $\sum_{n=1}^{5}a_{2n}=5$ …… ㉠

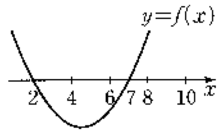
조건 (나)에서 $f(n)=0$인 10 이하의 자연수 n의 값이 2개 이하이므로 ㉠을 만족시키려면 a_2, a_4, a_6, a_8, a_{10} 중에서 $a_n=1$인 짝수 n이 반드시 1개 존재해야 하고 $a_n=2$인 짝수 n이 2개, $a_n=0$인 짝수 n이 2개 존재해야 한다.

즉, 10 이하의 자연수 n 중에서 $f(n)=0$인 짝수 n이 1개, $f(n)>0$인 짝수 n이 2개, $f(n)<0$인 짝수 n이 2개 존재한다.

이때 이차방정식 $f(x)=0$은 서로 다른 두 실근을 갖고 조건 (나)에 의하여 $f(n)=0$인 10 이하의 홀수 n이 하나 존재한다.

(i) $f(2)=0$인 경우

조건 (가)에서 $f(1)>0$이므로 $f(4)$와 $f(6)$의 값이 모두 음수이고 $f(8)$과 $f(10)$의 값이 모두 양수이어야 한다.



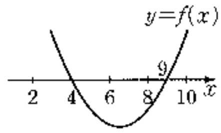
조건 (나)에 의하여 $f(7)=0$이므로

$f(x)=(x-2)(x-7)$

(ii) $f(4)=0$인 경우

$f(2)<0$이면 방정식 $f(x)=0$의 한 실근이 사잇값의 정리에 의하여 1과 2 사이에 존재해야 하므로 조건 (나)를 만족시키지 않는다.

즉, $f(2)>0$이므로 $f(6)$과 $f(8)$의 값이 모두 음수이고 $f(10)$의 값이 양수이어야 한다.



조건 (나)에 의하여 $f(9)=0$이므로

$f(x)=(x-4)(x-9)$

(iii) $f(6)=0$인 경우

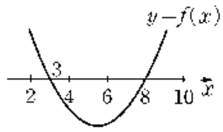
$f(4)>0$이면 $f(2)>0$이고 $f(8)$과 $f(10)$의 값이 모두 음수이어야 한다. 즉, 방정식 $f(x)=0$의 한 실근이 10보다 커야 하므로 조건 (나)를 만족시키지 않는다.

즉, $f(4)<0$이면 $f(8)$과 $f(10)$의 값이 모두 양수이어야 한다.
따라서 $f(2)<0$이고 $f(1)=0$이어야 하는데 조건 (가)를 만족시키지 않으므로 조건을 만족시키는 $f(x)$는 존재하지 않는다.

(iv) $f(8)=0$인 경우

$f(6)>0$이면 $f(2)$와 $f(4)$의 값도 모두 양수이므로 조건을 만족시키지 않는다.

즉, $f(6)<0$이므로 $f(4)<0$이고 $f(2)$와 $f(10)$의 값이 모두 양수이어야 한다.



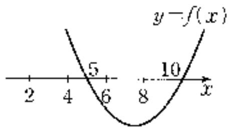
조건 (나)에 의하여 $f(3)=0$이므로

$f(x)=(x-3)(x-8)$

(v) $f(10)=0$인 경우

$f(8)>0$이면 $f(2)$, $f(4)$, $f(6)$의 값이 모두 양수이므로 조건을 만족시키지 않는다.

즉, $f(8)<0$이므로 $f(6)<0$이고 $f(2)$와 $f(4)$의 값이 모두 양수이어야 한다.



조건 (나)에 의하여 $f(5)=0$이므로

$f(x)=(x-5)(x-10)$

(i)~(v)에서 조건을 만족시키는 $f(x)$는

$f(x)=(x-2)(x-7)$ 또는 $f(x)=(x-4)(x-9)$

또는 $f(x)=(x-3)(x-8)$ 또는 $f(x)=(x-5)(x-10)$

따라서 $f(11)$의 값은 $9\times4=36$, $7\times2=14$, $8\times3=24$, $6\times1=6$이므로 최솟값은 6, 최댓값은 36이고, 그 합은 42이다.

답 42

21

$p<0$이라 하면 자연수 n에 대하여 $a_n\ge0$이면 $a_{n+1}=a_n-p>a_n$, 즉 $a_{21}\ne a_1$이므로 조건을 만족시키지 않는다. 즉, p는 자연수이다.

a_1, a_2, $\cdots$, a_{20} 중 음수인 것의 개수를 k라 하면 0 이상인 것의 개수는 $20-k$이므로

$a_{21}=a_1-(20-k)p+kpq$

$k=20$이면 $a_1>0$에 모순이므로 k는 19 이하인 자연수이다.

$a_{21}=a_1$에서

$(20-k)p=kpq$, $kp(q+1)=20p$

$p\ne0$이므로 $k(q+1)=20$

q는 정수이고 k는 19 이하의 자연수이므로 k는 19 이하인 20의 양의 약수이다. 즉, k는 1, 2, 4, 5, 10

(i) $k=1$인 경우, $q=19$

18 이하의 자연수 n_1에 대하여

$a_{n_1+1}=a_1-n_1p\ge0$, $a_{n_1+2}=a_1-(n_1+1)p<0$

즉, $\frac{40}{n_1+1}<p\le\frac{40}{n_1}$ 일 때

$a_{n_1+3}=a_1-(n_1+1)p+19p=a_1+(18-n_1)p$

$n_1\ge14$일 때, $2<\frac{40}{n_1+1}<\frac{40}{n_1}<3$이므로 이를 만족시키는 자연수 p가 존재하지 않는다.

$n_1=13$일 때, $\frac{20}{7}<p\le\frac{40}{13}$이므로 $p=3$

$n_1\le12$일 때, $3<\frac{40}{n_1+1}<p$이므로 자연수 p가 존재하면 $p>3$

따라서 $p\ge3$이므로 이 경우에 $p+q$의 최솟값은 $3+19=22$

(ii) $k=2$인 경우, $q=9$

8 이하의 자연수 n_1에 대하여

$a_{n_1+1}=a_1-n_1p\ge0$, $a_{n_1+2}=a_1-(n_1+1)p<0$

즉, $\frac{40}{n_1+1}<p\le\frac{40}{n_1}$일 때

$a_{n_1+3}=a_1-(n_1+1)p+9p=a_1+(8-n_1)p\ge0$

$a_{n_1+4}=a_1+(7-n_1)p$

$\vdots$

$a_{n_1+3+(8-n_1)}=a_1$, 즉 $a_{11}=a_1$이고 $a_{n+10}=a_n$

모든 자연수 n에 대하여 $a_{n+10}=a_n$을 만족시키므로 $a_{21}=a_1$을 만족시킨다.

$n_1=8$일 때, $\frac{40}{9}<p\le5$이므로 $p=5$

$n_1\le7$일 때, $5\le\frac{40}{n_1+1}$ 이므로 자연수 p가 존재하면 $p>5$

따라서 $p\ge5$이므로 이 경우에 $p+q$의 최솟값은 $5+9=14$

(iii) $k=4$인 경우, $q=4$

3 이하의 자연수 n_1에 대하여

$a_{n_1+1}=a_1-n_1p\ge0$, $a_{n_1+2}=a_1-(n_1+1)p<0$

즉, $\frac{40}{n_1+1}<p\le\frac{40}{n_1}$일 때

$a_{n_1+3}=a_1-(n_1+1)p+4p=a_1+(3-n_1)p\ge0$

$a_{n_1+4}=a_1+(2-n_1)p$

$\vdots$

$a_{n_1+3+(3-n_1)}=a_1$, 즉 $a_6=a_1$이고 $a_{n+5}=a_n$

모든 자연수 n에 대하여 $a_{n+5}=a_n$을 만족시키므로 $a_{21}=a_1$을 만족시킨다.

$n_1=3$일 때, $10<p\le\frac{40}{3}$이므로 $p=11$, 12, 13

$n_1\le2$일 때, $13<\frac{40}{n_1+1}$이므로 자연수 p가 존재하면 $p>13$

따라서 $p\ge11$이므로 이 경우에 $p+q$의 최솟값은 $11+4=15$

(iv) $k=5$인 경우, $q=3$

$a_3=a_1-2p\ge0$, $a_4=a_1-3p<0$인 경우

즉, $\frac{40}{3}<p\le20$에서 $p=14$, 15, $\cdots$, 20인 경우

$a_5=a_1-3p+3p=a_1$

$a_2=a_1-p\ge0$, $a_3=a_1-2p<0$인 경우

즉, $\frac{40}{2}<p\le40$에서 $p=21$, 22, $\cdots$, 40

$a_4=a_1-2p+3p=a_1+p>0$, 즉 $a_5=a_1$이고 $a_{n+4}=a_n$

모든 자연수 n에 대하여 $a_{n+4}=a_n$을 만족시키므로 $a_{21}=a_1$을 만족시킨다.

따라서 $p\ge14$이므로 이 경우에 $p+q$의 최솟값은 $14+3=17$

(v) $k=10$인 경우, $q=1$

$a_2=a_1-p<0$, 즉 $p>40$을 만족시키고 $a_3=a_1-p+p=a_1$이므로 주기가 2이다. 즉, 모든 자연수 n에 대하여 $a_{n+2}=a_n$을 만족시키므로 $a_{21}=a_1$을 만족시킨다.

따라서 이 경우에 $p+q$의 최솟값은

$41+1=42$

(i)~(v)에서 $p+q$의 최솟값은 14이다.

답 14

22

함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하므로 $x=k$에서 연속이어야 한다. 즉, $f(k)=\lim_{x\to k-}f(x)=\lim_{x\to k+}f(x)$이어야 하므로

$f(k)=k^3-3k+a=-k^2+13k+b$

이때

$$\lim_{x\to k-}\frac{f(x)-f(k)}{x-k}=\lim_{x\to k-}\frac{(x^3-3x+a)-(k^3-3k+a)}{x-k}$$
$$=\lim_{x\to k-}\frac{(x-k)(x^2+kx+k^2-3)}{x-k}$$
$$=\lim_{x\to k-}(x^2+kx+k^2-3)=3k^2-3$$

$$\lim_{x\to k+}\frac{f(x)-f(k)}{x-k}=\lim_{x\to k+}\frac{(-x^2+13x+b)-(-k^2+13k+b)}{x-k}$$
$$=\lim_{x\to k+}\frac{-(x-k)(x+k-13)}{x-k}$$
$$=\lim_{x\to k+}(-x-k+13)=-2k+13$$

이고, 함수 $f(x)$가 $x=k$에서 미분가능하므로

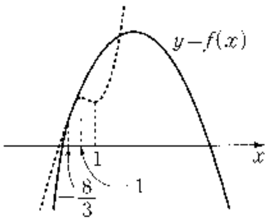
$3k^2-3=-2k+13$, $3k^2+2k-16=0$, $(3k+8)(k-2)=0$

$k=-\frac{8}{3}$ 또는 $k=2$

이때 함수 $y=x^3-3x+a$에서 $y'=3x^2-3=3(x+1)(x-1)$

이므로 함수 $y=x^3-3x+a$는 $x=1$ 또는 $x=-1$에서 극값을 갖는데,

$k=-\frac{8}{3}$이면 함수 $y=f(x)$의 그래프가 [그림 1]과 같으므로 조건 (나)를 만족시킬 수 없다.



[그림 1]

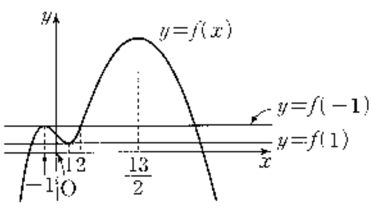
즉, $k=2$이므로

$$f(x)=\begin{cases} x^3-3x+a & (x<2) \\ -x^2+13x+b & (x\ge 2)\end{cases}$$

이고, 함수 $f(x)$가 $x=2$에서 연속이어야 하므로 $2+a=22+b$

$a-b=20$ …… ㉠

한편, $f(-1)=f(2)<f\left(\frac{13}{2}\right)$이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 [그림 2]와 같다. 즉, 방정식 $f(x)=c$의 서로 다른 실근의 개수가 3이 되는 경우는 $c=f(-1)$ 또는 $c=f(1)$인 경우이다.



[그림 2]

$f(-1)=2+a$, $f(1)=-2+a$이므로

$(2+a)+(-2+a)=8$에서 $a=4$

㉠에서 $b=a-20=-16$

즉, $f(x)=\begin{cases} x^3-3x+4 & (x<2) \\ -x^2+13x-16 & (x\ge 2)\end{cases}$

이고, 방정식 $f(x)=d$의 서로 다른 실근의 개수가 1이 되는 경우는 $d=f\left(\frac{13}{2}\right)$인 경우이므로 구하는 실수 d의 값은

$d=f\left(\frac{13}{2}\right)=-\left(\frac{13}{2}\right)^2+13\times\frac{13}{2}-16=\frac{105}{4}$

따라서 $p=4$, $q=105$이므로 $p+q=4+105=109$

답 109

23

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n-1}{3n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{1-\frac{1}{n}}{3+\frac{1}{n}}=\frac{1}{3}$$이므로 $a=\frac{1}{3}$

따라서

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a^{-n}+4}{a^{2-n}+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{1}{3}\right)^{-n}+4}{\left(\frac{1}{3}\right)^{2-n}+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{3^n+4}{3^{n-2}+1}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{9+\frac{4}{3^{n-2}}}{1+\frac{1}{3^{n-2}}}=9$$

답 ⑤

24

$f(x^2-2x)=xe^{2x-5}$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f'(x^2-2x)\times(2x-2)=e^{2x-5}+2xe^{2x-5}$

이 식의 양변에 $x=3$을 대입하면

$f'(3)\times 4=e+6e$

$f'(3)=\frac{7}{4}e$

또한 $f(x^2-2x)=xe^{2x-5}$의 양변에 $x=3$을 대입하면

$f(3)=3e$

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프 위의 점 $(3, f(3))$에서의 접선의 방정식은

$y=\frac{7}{4}e(x-3)+3e$에서 $y=\frac{7}{4}ex-\frac{9}{4}e$

즉, $a=\frac{7}{4}e$, $b=-\frac{9}{4}e$이므로 $a+b=-\frac{1}{2}e$

답 ①

25

$\sum_{n=1}^{\infty}\left(na_n-\frac{3n^2-1}{n+1}\right)$이 수렴하므로

$\lim_{n\to\infty}\left(na_n-\frac{3n^2-1}{n+1}\right)=0$

$b_n=na_n-\frac{3n^2-1}{n+1}$이라 하면

$\lim_{n\to\infty}b_n=0$이고, $a_n=\frac{b_n}{n}+\frac{3n^2-1}{n^2+n}$이므로

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{b_n}{n}+\frac{3n^2-1}{n^2+n}\right)$$
$$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{b_n}{n}+\frac{3-\frac{1}{n^2}}{1+\frac{1}{n}}\right)$$
$$=0+\frac{3}{1}=3$$

따라서 $$\lim_{n\to\infty}\frac{na_n+5}{a_n+3n}=\lim_{n\to\infty}\frac{a_n+\frac{5}{n}}{\frac{a_n}{n}+3}=\frac{3+0}{0+3}=1$$

답 ③

26

$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x(1+4\sin^2 x)\,dx$

$=\int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\sin x\cos x(1+4\sin^2 x)\,dx$

$=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x(2\sin x+8\sin^3 x)\,dx$

$\sin x=t$로 놓으면 $\cos x=\frac{dt}{dx}$이고

$x=0$일 때 $t=0$, $x=\frac{\pi}{2}$일 때 $t=1$이므로

$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x(2\sin x+8\sin^3 x)\,dx=\int_0^1 (2t+8t^3)\,dt$

$=\left[t^2+2t^4\right]_0^1=1+2=3$

답 ③

27

$g(x)=\ln[1+\{f(x)\}^2]$에서

$g'(x)=\frac{2f(x)f'(x)}{1+\{f(x)\}^2}$

즉, $-2<x<2$인 모든 실수 x에 대하여

$\frac{2f(x)f'(x)}{1+\{f(x)\}^2}=\frac{\pi}{2}f(x)$

가 성립하고 $f(1)=1$이므로

$\frac{2f(1)f'(1)}{1+\{f(1)\}^2}=\frac{\pi}{2}f(1)$에서

$f'(1)=\frac{\pi}{4}\left[1+\{f(1)\}^2\right]=\frac{\pi}{4}\times 2=\frac{\pi}{2}$

따라서

$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-1}{x^2-1}=\lim_{x\to 1}\left\{\frac{f(x)-f(1)}{x-1}\times\frac{1}{x+1}\right\}$

$=f'(1)\times\frac{1}{2}=\frac{\pi}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{\pi}{4}$

답 ①

28

$f'(x)=\{(4\cos x+3)(4\cos x-3)^2\}'$

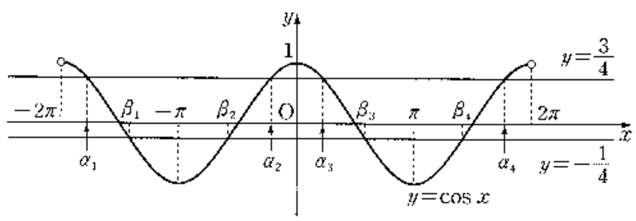
$=-4\sin x(4\cos x-3)^2-8\sin x(4\cos x+3)(4\cos x-3)$

$=-4\sin x(4\cos x-3)(12\cos x+3)=0$

에서 $\sin x=0$ 또는 $\cos x=\frac{3}{4}$ 또는 $\cos x=-\frac{1}{4}$

$-2\pi<x<2\pi$에서 $\sin x=0$의 해는 $-\pi$, 0, π이고 $x=-\pi$, $x=0$, $x=\pi$의 각각의 좌우에서 $f'(x)$의 값이 양에서 음 또는 음에서 양으로 바뀌므로 $x=-\pi$, $x=0$, $x=\pi$에서 함수 $f(x)$는 극값을 갖는다.

$-2\pi<x<2\pi$에서 함수 $y=\cos x$의 그래프와 두 직선 $y=\frac{3}{4}$, $y=-\frac{1}{4}$은 다음 그림과 같이 각각 네 점에서 만난다.



함수 $y=\cos x$의 그래프와 직선 $y=\frac{3}{4}$이 만나는 점의 x좌표를 작은 것부터 차례대로 나열한 것을 α_1, α_2, α_3, α_4라 하면 $x=\alpha_i$ $(i=1, 2, 3, 4)$의 좌우에서 $f'(x)$의 값이 양에서 음 또는 음에서 양으로 바뀌므로 $x=\alpha_i$ $(i=1, 2, 3, 4)$에서 함수 $f(x)$는 극값을 갖는다.

함수 $y=\cos x$의 그래프와 직선 $y=-\frac{1}{4}$이 만나는 점의 x좌표를 작은 것부터 차례대로 나열한 것을 β_1, β_2, β_3, β_4라 하면 $x=\beta_i$ $(i=1, 2, 3, 4)$의 좌우에서 $f'(x)$의 값이 양에서 음 또는 음에서 양으로 바뀌므로 $x=\beta_i$ $(i=1, 2, 3, 4)$에서 함수 $f(x)$는 극값을 갖는다.

즉, $\alpha_1<\beta_1<-\pi<\beta_2<\alpha_2<0<\alpha_3<\beta_3<\pi<\beta_4<\alpha_4$이므로

$n=11$이고

α_1, α_2, α_3, α_4는 순서대로 x_1, x_5, x_7, x_{11}

β_1, β_2, β_3, β_4는 순서대로 x_2, x_4, x_8, x_{10}

$-\pi$, 0, π는 순서대로 x_3, x_6, x_9

따라서

$\sum_{k=1}^{11}(k\cos x_k)$

$=\frac{3}{4}(1+5+7+11)-\frac{1}{4}(2+4+8+10)-1\times(3+9)+1\times 6$

$=\frac{3}{4}\times 24-\frac{1}{4}\times 24-12+6=6$

답 ③

29

$\overline{OA}=2$, $\angle QAO=2\theta$에서 $\overline{OQ}=2\tan 2\theta$이므로 삼각형 QOA의 넓이는

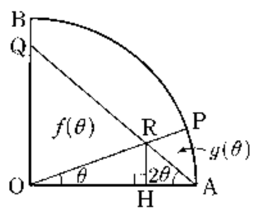
$\frac{1}{2}\times\overline{OA}\times\overline{OQ}=\frac{1}{2}\times 2\times 2\tan 2\theta$

$=2\tan 2\theta$

부채꼴 OAP의 넓이를 S라 하면

$S=\frac{1}{2}\times 2^2\times\theta=2\theta$

그림과 같이 점 R에서 선분 OA에 내린 수선의 발을 H라 하고 $\overline{OH}=x$라 하면



삼각형 ROH에서

$\overline{RH}=x\tan\theta$ …… ㉠

또 삼각형 RHA에서

$\overline{HA}=2-x$, $\angle RAH=2\theta$이므로

$\overline{RH}=(2-x)\tan 2\theta$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 $x\tan\theta=(2-x)\tan 2\theta$이므로

$x=\frac{2\tan 2\theta}{\tan\theta+\tan 2\theta}$

그러므로 삼각형 ROA의 넓이는

$\frac{1}{2}\times\overline{OA}\times\overline{RH}=\frac{1}{2}\times 2\times x\tan\theta$

$=\frac{2\tan\theta\tan 2\theta}{\tan\theta+\tan 2\theta}$

이때

$f(\theta)+g(\theta)=$(삼각형 QOA의 넓이)$+S-2\times$(삼각형 ROA의 넓이)

$=2\tan 2\theta+2\theta-\frac{4\tan\theta\tan 2\theta}{\tan\theta+\tan 2\theta}$

이므로

$$\lim_{\theta\to0+}\frac{f(\theta)+g(\theta)}{\theta}$$

$$=\lim_{\theta\to0+}\frac{2\tan2\theta+2\theta-\dfrac{4\tan\theta\tan2\theta}{\tan\theta+\tan2\theta}}{\theta}$$

$$=\lim_{\theta\to0+}\left(4\times\frac{\tan2\theta}{2\theta}+2-\frac{8\times\dfrac{\tan\theta}{\theta}\times\dfrac{\tan2\theta}{2\theta}}{\dfrac{\tan\theta}{\theta}+2\times\dfrac{\tan2\theta}{2\theta}}\right)$$

$$=4\times1+2-\frac{8\times1\times1}{1+2\times1}=\frac{10}{3}$$

따라서 $p=3$, $q=10$이므로 $p+q=3+10=13$

답 13

30

조건 (다)에서 세 점 $(t,\ f(t))$, $(t+2,\ f(t))$, $(t+2,\ f(t+2))$를 꼭짓점으로 하는 삼각형의 넓이는

$$\frac{1}{2}\times(t+2-t)\times|f(t+2)-f(t)|=|f(t+2)-f(t)|$$

조건 (가)에서 $x\geq0$인 모든 실수 x에 대하여 $f'(x)\geq0$이므로 임의의 두 실수 x_1, x_2에 대하여 $x_1<x_2$이면 $f(x_1)\leq f(x_2)$이다.

즉, $t\geq0$인 모든 실수 t에 대하여 $f(t+2)\geq f(t)$이므로

$$|f(t+2)-f(t)|=f(t+2)-f(t)$$
$$=\{(e^2-1)t+2e^2\}e^t$$

즉, $\int_0^x\{f(t+2)-f(t)\}\,dt=\int_0^x\{(e^2-1)t+2e^2\}e^t\,dt$ (단, $x\geq0$) ...... ㉠

㉠의 좌변을 정리하면

$$\int_0^x\{f(t+2)-f(t)\}\,dt=\int_0^x f(t+2)\,dt-\int_0^x f(t)\,dt$$

$t+2=s$로 놓으면 $1=\dfrac{ds}{dt}$이고

$t=0$일 때 $s=2$, $t=x$일 때 $s=x+2$이므로

$$\int_0^x f(t+2)\,dt=\int_2^{x+2}f(s)\,ds=\int_2^{x+2}f(t)\,dt$$

즉,

$$\int_0^x f(t+2)\,dt-\int_0^x f(t)\,dt$$
$$=\int_2^{x+2}f(t)\,dt-\int_0^x f(t)\,dt$$
$$=\int_0^{x+2}f(t)\,dt-\int_0^2 f(t)\,dt-\int_0^x f(t)\,dt$$
$$=\int_0^{x+2}f(t)\,dt-\int_0^x f(t)\,dt-e^2-3\ (\text{단, } x\geq0)\qquad\cdots\cdots ㉡$$

㉠의 우변을 정리하면

$$\int_0^x\{(e^2-1)t+2e^2\}e^t\,dt=(e^2-1)\int_0^x te^t\,dt+2e^2\int_0^x e^t\,dt$$
$$=(e^2-1)\int_0^x te^t\,dt+2e^2\Big[e^t\Big]_0^x$$
$$=(e^2-1)\int_0^x te^t\,dt+2e^2(e^x-1)$$

이때 $\int_0^x te^t\,dt=\Big[te^t\Big]_0^x-\int_0^x e^t\,dt=xe^x-\Big[e^t\Big]_0^x=xe^x-e^x+1$

즉,

$$\int_0^x\{(e^2-1)t+2e^2\}e^t\,dt=(e^2-1)(xe^x-e^x+1)+2e^2(e^x-1)$$
$$=(e^2-1)xe^x+(e^2+1)e^x-e^2-1\qquad\cdots\cdots ㉢$$

㉡, ㉢을 ㉠에 대입하면

$$\int_0^{x+2}f(t)\,dt-\int_0^x f(t)\,dt-e^2-3$$
$$=(e^2-1)xe^x+(e^2+1)e^x-e^2-1$$
$$\int_0^{x+2}f(t)\,dt=\int_0^x f(t)\,dt+(e^2-1)xe^x+(e^2+1)e^x+2$$

$g(x)=f(x)+xf'(2x)$에서

$$\int_0^4 g(x)\,dx=\int_0^4 f(x)\,dx+\int_0^4 xf'(2x)\,dx\qquad\cdots\cdots ㉣$$

$2x=u$로 놓으면 $2=\dfrac{du}{dx}$이고

$x=0$일 때 $u=0$, $x=4$일 때 $u=8$이므로

$$\int_0^4 xf'(2x)\,dx=\int_0^8\frac{u}{4}f'(u)\,du=\frac{1}{4}\int_0^8 uf'(u)\,du$$

이때 $\int_0^8 uf'(u)\,du=\Big[uf(u)\Big]_0^8-\int_0^8 f(u)\,du=8f(8)-\int_0^8 f(u)\,du$

즉, $\int_0^4 xf'(2x)\,dx=2f(8)-\dfrac{1}{4}\int_0^8 f(u)\,du$이므로 ㉣에서

$$\int_0^4 g(x)\,dx=\int_0^4 f(x)\,dx+2f(8)-\frac{1}{4}\int_0^8 f(u)\,du\qquad\cdots\cdots ㉤$$

$f(t+2)-f(t)=\{(e^2-1)t+2e^2\}e^t$의 양변에 $t=2$, $t=4$, $t=6$을 각각 대입하면

$$f(4)-f(2)=\{(e^2-1)\times2+2e^2\}e^2=4e^4-2e^2$$
$$f(6)-f(4)=\{(e^2-1)\times4+2e^2\}e^4=6e^6-4e^4$$
$$f(8)-f(6)=\{(e^2-1)\times6+2e^2\}e^6=8e^8-6e^6$$

이고, 좌변은 좌변끼리, 우변은 우변끼리 더하면

$f(8)-f(2)=8e^8-2e^2$이므로 $f(8)=8e^8-2e^2+f(2)$

$\int_0^{x+2}f(t)\,dt=\int_0^x f(t)\,dt+(e^2-1)xe^x+(e^2+1)e^x+2$의 양변에 $x=2$, $x=4$, $x=6$을 각각 대입하면

$$\int_0^4 f(t)\,dt=\int_0^2 f(t)\,dt+(e^2-1)\times2e^2+(e^2+1)e^2+2=3e^4+5$$
$$\int_0^6 f(t)\,dt=\int_0^4 f(t)\,dt+(e^2-1)\times4e^4+(e^2+1)e^4+2=5e^6+7$$
$$\int_0^8 f(t)\,dt=\int_0^6 f(t)\,dt+(e^2-1)\times6e^6+(e^2+1)e^6+2=7e^8+9$$

따라서 ㉤에서

$$\int_0^4 g(x)\,dx=\int_0^4 f(x)\,dx+2f(8)-\frac{1}{4}\int_0^8 f(u)\,du$$
$$=3e^4+5+2\{8e^8-2e^2+f(2)\}-\frac{1}{4}(7e^8+9)$$
$$=\frac{57}{4}e^8+3e^4-4e^2+\frac{11}{4}+2f(2)$$

이므로

$$\int_0^4 g(x)\,dx-2f(2)=\frac{57}{4}e^8+3e^4-4e^2+\frac{11}{4}$$
$$=pe^8+3e^4-4e^2+q$$

즉, $p=\dfrac{57}{4}$, $q=\dfrac{11}{4}$이므로 $p+q=\dfrac{57}{4}+\dfrac{11}{4}=17$

답 17

01 ②	02 ③	03 ①	04 ⑤	05 ⑤
06 ④	07 ②	08 ②	09 ⑤	10 ③
11 ④	12 ②	13 ③	14 ②	15 ③
16 6	17 31	18 22	19 2	20 4
21 8	22 45	23 ①	24 ⑤	25 ④
26 ②	27 ③	28 ②	29 9	30 2

01

$8^{\frac{\sqrt{3}}{3}} \times \left(\frac{1}{2}\right)^{\sqrt{3}+1} = (2^3)^{\frac{\sqrt{3}}{3}} \times (2^{-1})^{\sqrt{3}+1} = 2^{\sqrt{3}-\sqrt{3}-1} = 2^{-1} = \frac{1}{2}$

답 ②

02

$f(x)=3x^3-6x^2+2$에서 $f'(x)=9x^2-12x$

따라서 $f'(1)=9-12=-3$

답 ③

03

등비수열 $\{a_n\}$의 공비를 r라 하면

$a_4=4a_2$에서 $a_1r^3=4a_1r$, $r^2=4$

모든 항이 양수이므로 $r=2$

따라서 $a_1=a_3\times\frac{1}{r^2}=4\times\frac{1}{2^2}=1$

답 ①

다른 풀이

등비수열 $\{a_n\}$의 공비를 r라 하면

$a_4=a_3\times r=4r$이므로

$a_4=4a_2$에서 $4r=4a_1\times r$

따라서 $a_1=1$

04

$\lim_{x\to-1-} f(x)=1$, $\lim_{x\to0+} f(x)=2$, $f(1)=-1$이므로

$\lim_{x\to-1-} f(x)+\lim_{x\to0-} f(x)+f(1)=1+2+(-1)=2$

답 ⑤

05

$\sin\theta-\cos\theta=\frac{1}{3}$의 양변을 제곱하면

$\sin^2\theta-2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta=\frac{1}{9}$

$1-2\sin\theta\cos\theta=\frac{1}{9}$, $\sin\theta\cos\theta=\frac{4}{9}$

$(\sin\theta+\cos\theta)^2=\sin^2\theta+2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta$

$=1+2\times\frac{4}{9}=\frac{17}{9}$

$0<\theta<\frac{\pi}{2}$에서 $\sin\theta>0$, $\cos\theta>0$이므로 $\sin\theta+\cos\theta>0$

따라서 $\sin\theta+\cos\theta=\frac{\sqrt{17}}{3}$

답 ⑤

06

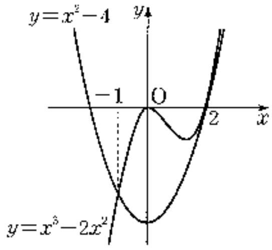
두 곡선 $y=x^3-2x^2$과 $y=x^2-4$가 만나는 점의 x좌표를 구하면

$x^3-2x^2=x^2-4$에서

$x^3-3x^2+4=0$, $(x+1)(x-2)^2=0$

$x=-1$ 또는 $x=2$

두 곡선 $y=x^3-2x^2$과 $y=x^2-4$는 그림과 같다.



따라서 구하는 넓이를 S라 하면

$S=\int_{-1}^{2}|(x^3-2x^2)-(x^2-4)|\,dx$

$=\int_{-1}^{2}(x^3-3x^2+4)\,dx$

$=\left[\frac{1}{4}x^4-x^3+4x\right]_{-1}^{2}$

$=(4-8+8)-\left(\frac{1}{4}+1-4\right)=\frac{27}{4}$

답 ④

07

$9^{x-1}-k\times3^x+9=0$의 양변에 9를 곱하면

$9^x-9k\times3^x+81=0$

$3^x=X$ $(X>0)$이라 하면

$X^2-9kX+81=0$ …… ㉠

이 방정식이 오직 하나의 양의 실근을 가져야 한다.

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 두 근의 곱이 $81>0$이므로 두 근의 부호는 같다. 따라서 이차방정식이 오직 하나의 양의 실근을 가지려면 ㉠의 판별식을 D라 할 때, $D=0$이어야 한다.

즉, $D=(-9k)^2-4\times81=0$에서

$k^2-4=0$, $k^2=4$

이때 이 중근이 양수이어야 하므로 이차방정식의 두 근의 합이 양수이다.

즉, $9k>0$에서 $k>0$이므로

$k=2$

$X^2-18X+81=0$에서

$(X-9)^2=0$, $X=9$, $3^x=9$, $x=2$

즉, $a=2$

따라서 $k+a=2+2=4$

답 ②

08

두 함수 $f(x)$와 $f(x)+5$는 $x=a$에서만 불연속이므로 함수 $f(x)\{f(x)+5\}$가 실수 전체의 집합에서 연속이려면 $x=a$에서 연속이어야 한다. 즉,

$\lim_{x\to a-} f(x)\{f(x)+5\}=\lim_{x\to a+} f(x)\{f(x)+5\}=f(a)\{f(a)+5\}$ …… ㉠

$\lim_{x\to a-} f(x)\{f(x)+5\}=(a+1)(a+6)$

$\lim_{x\to a+} f(x)\{f(x)+5\}=(a-5)a$

$f(a)\{f(a)+5\}=(a+1)(a+6)$

이므로 ㉠에서 $(a+1)(a+6)=(a-5)a$

$a^2+7a+6=a^2-5a$, $12a=-6$

따라서 $a=-\frac{1}{2}$

답 ②

09

$a_3=\frac{1}{6}$에서

$a_3=\frac{1}{4-8a_2}$이므로 $\frac{1}{6}=\frac{1}{4-8a_2}$, $a_2=-\frac{1}{4}$

$a_2=\frac{1}{4-8a_1}$이므로 $-\frac{1}{4}=\frac{1}{4-8a_1}$, $a_1=1$

또한 $a_3=\frac{1}{6}$에서

$a_4=\frac{1}{4-8a_3}=\frac{1}{4-8\times\frac{1}{6}}=\frac{3}{8}$

$a_5=\frac{1}{4-8a_4}=\frac{1}{4-8\times\frac{3}{8}}=1$

즉, 수열 $\{a_n\}$은 $1, -\frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \frac{3}{8}, 1, -\frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \frac{3}{8}, \cdots$으로 첫째항부터 네 개의 수 $1, -\frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \frac{3}{8}$이 이 순서대로 반복하여 나타난다.

따라서

$$\sum_{n=1}^{25}a_n=\sum_{n=1}^{24}a_n+a_{25}=6(a_1+a_2+a_3+a_4)+a_1$$
$$=6\left(1-\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\frac{3}{8}\right)+1=6\times\frac{31}{24}+1=\frac{35}{4}$$

답 ⑤

10

$y=x^3-x-1$에서 $y'=3x^2-1$

점 $A(-1, -1)$에서의 접선의 기울기는 $3\times(-1)^2-1=2$이므로

곡선 $y=x^3-x-1$ 위의 점 $A(-1, -1)$에서의 접선의 방정식은

$y+1=2(x+1)$, 즉 $y=2x+1$

곡선 $y=x^3-x-1$과 직선 $y=2x+1$이 만나는 점의 x좌표는

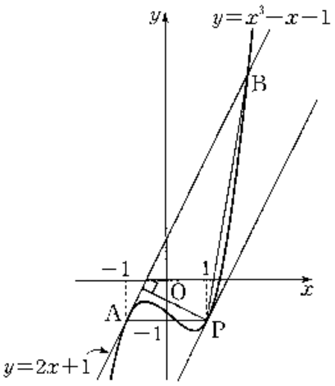
$x^3-x-1=2x+1$에서 $(x+1)^2(x-2)=0$

$x=-1$ 또는 $x=2$

따라서 $A(-1, -1)$, $B(2, 5)$이므로

$\overline{AB}=\sqrt{(2+1)^2+(5+1)^2}=\sqrt{45}=3\sqrt{5}$

삼각형 APB의 넓이는 그림과 같이 점 P에서의 접선의 기울기가 직선 AB의 기울기 2와 같을 때 최대가 된다.



$y'=3x^2-1$에서

점 P의 x좌표를 t라 하면

$3t^2-1=2$

$3(t+1)(t-1)=0$

이때 $t\neq-1$이므로

$t=1$

점 P는 곡선 $y=x^3-x-1$ $(-1<x<2)$ 위의 점이므로 y좌표는

$y=1^3-1-1=-1$

즉, $P(1, -1)$

점 $P(1, -1)$과 직선 $y=2x+1$, 즉 $2x-y+1=0$ 사이의 거리는

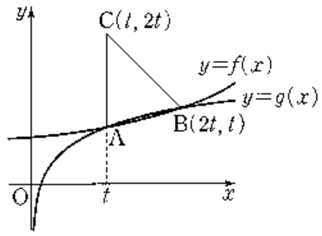
$\frac{|2\times1-(-1)+1|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=\frac{4}{\sqrt{5}}$

따라서 삼각형 APB의 넓이의 최댓값은 $\frac{1}{2}\times3\sqrt{5}\times\frac{4}{\sqrt{5}}=6$

답 ③

11

조건 (가)에서 직선 OC의 기울기가 2이므로 점 C의 좌표를 $(t, 2t)$라 하면 점 B의 좌표는 $(2t, t)$이다.



점 B가 곡선 $y=f(x)$ 위의 점이므로

$a^{2t}+4=t$ …… ㉠

점 B가 곡선 $y=g(x)$ 위의 점이므로

$\frac{1}{4}\log_a 2t=t$, $a^{4t}=2t$ …… ㉡

㉡에서 $t=\frac{1}{2}a^{4t}$이므로 이를 ㉠에 대입하면

$a^{2t}+4=\frac{1}{2}a^{4t}$

$a^{2t}=k$ $(k>0)$이라 하면

$k+4=\frac{1}{2}k^2$, $k^2-2k-8=0$, $(k+2)(k-4)=0$

$k>0$이므로 $k=4$

$a^{2t}=4$이므로 ㉠에서 $t=8$이고, $a^{16}=4$에서 $a=4^{\frac{1}{16}}=2^{\frac{1}{8}}$이다.

즉, 점 B의 좌표는 $(16, 8)$, 점 C의 좌표는 $(8, 16)$이다.

$f(x)=2^{\frac{1}{8}x}+4$이고, 조건 (나)에서 두 점 A, C의 x좌표가 같으므로

$f(8)=2^1+4=6$

에서 점 A의 좌표는 $(8, 6)$이다.

$\overline{AC}=16-6=10$이고, 점 B와 직선 AC 사이의 거리는 $16-8=8$이므로 삼각형 ABC의 넓이는

$\frac{1}{2}\times10\times8=40$

답 ④

12

$f(x)=x^4-\frac{4}{3}kx^3-4k^2x^2$에서

$f'(x)=4x^3-4kx^2-8k^2x=4x(x^2-kx-2k^2)$

$f'(x)=0$에서 $4x(x+k)(x-2k)=0$

$x=-k$ 또는 $x=0$ 또는 $x=2k$

$k>0$이므로 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

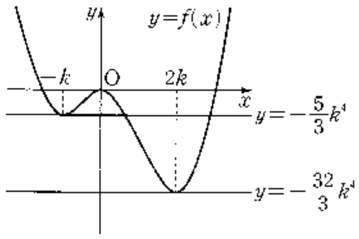
x	$\cdots$	$-k$	$\cdots$	0	$\cdots$	$2k$	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	극소	↗	극대	↘	극소	↗

함수 $f(x)$는 $x=-k$와 $x=2k$에서 극소이고 $x=0$에서 극대이다.

$f(-k)=k^4+\frac{4}{3}k^4-4k^4=-\frac{5}{3}k^4$, $f(0)=0$,

$f(2k)=16k^4-\frac{32}{3}k^4-16k^4=-\frac{32}{3}k^4$

함수 $y=f(x)$의 그래프는 그림과 같다.



곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=-\frac{32}{3}k^4$은 오직 한 점에서만 만나므로

조건 (가)에서

$a=-\frac{32}{3}k^4$

직선 $y=0$과 직선 $y=-\frac{5}{3}k^4$은 곡선 $y=f(x)$와 각각 서로 다른 세 점에서 만나므로 조건 (나)에서

$b=-\frac{5}{3}k^4$ 또는 $b=0$

(i) $a=-\frac{32}{3}k^4$, $b=0$일 때, $b-a=0-\left(-\frac{32}{3}k^4\right)=\frac{32}{3}k^4$

(ii) $a=-\frac{32}{3}k^4$, $b=-\frac{5}{3}k^4$일 때, $b-a=-\frac{5}{3}k^4-\left(-\frac{32}{3}k^4\right)=9k^4$

따라서 $b-a$의 모든 값의 합은

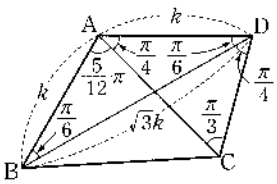
$\frac{32}{3}k^4+9k^4=\frac{59}{3}k^4=236$

이므로 $k^4=12$

답 ②

13

선분 AD의 길이를 k ($k>0$)이라 하자.



$\angle ABD=\angle BDA=\frac{\pi}{6}$이므로

$\overline{BD}=2\times\overline{AB}\times\cos\frac{\pi}{6}=\sqrt{3}k$

삼각형 ABD에서 사인법칙에 의하여

$\frac{k}{\sin(\angle ABD)}=2R_1$이므로

$R_1=\frac{k}{2\sin\frac{\pi}{6}}=k$

삼각형 ACD에서 사인법칙에 의하여

$\frac{\overline{AD}}{\sin(\angle ACD)}=\frac{\overline{CD}}{\sin(\angle CAD)}$이므로

$\frac{k}{\sin\frac{\pi}{3}}=\frac{\overline{CD}}{\sin\frac{\pi}{4}}$

$\overline{CD}=\boxed{\frac{\sqrt{6}}{3}k}$

삼각형 BCD에서 코사인법칙에 의하여

$\overline{BC}^2=\overline{BD}^2+\overline{CD}^2-2\times\overline{BD}\times\overline{CD}\times\cos(\angle CDB)$

$=(\sqrt{3}k)^2+\left(\frac{\sqrt{6}}{3}k\right)^2-2\times\sqrt{3}k\times\frac{\sqrt{6}}{3}k\times\frac{\sqrt{2}}{2}$

$=3k^2+\frac{2}{3}k^2-2k^2=\frac{5}{3}k^2$

$\overline{BC}=\boxed{\frac{\sqrt{15}}{3}k}$

삼각형 BCD에서 사인법칙에 의하여

$\frac{\overline{BC}}{\sin(\angle CDB)}=2R_2$, $R_2=\boxed{\frac{\sqrt{30}}{6}k}$

이므로 $R_1:R_2=k:\boxed{\frac{\sqrt{30}}{6}k}$이다.

따라서 $f(k)=\frac{\sqrt{6}}{3}k$, $g(k)=\frac{\sqrt{15}}{3}k$, $h(k)=\frac{\sqrt{30}}{6}k$이므로

$\frac{f(3)\times g(3)}{h(6)}=\frac{\sqrt{6}\times\sqrt{15}}{\sqrt{30}}=\sqrt{3}$

답 ③

14

ㄱ. $f(x)g(x)=\begin{cases}(-x^2+x)g(x) & (x<0)\\(x^2-2x)g(x) & (x\ge 0)\end{cases}$

$=\begin{cases}-x(x-1)g(x) & (x<0)\\x(x-2)g(x) & (x\ge 0)\end{cases}$

$f(0)=0$이므로 $f(0)g(0)=0$

$\lim_{x\to 0-}\frac{f(x)g(x)}{x}=\lim_{x\to 0-}\{-(x-1)g(x)\}=g(0)$

$\lim_{x\to 0+}\frac{f(x)g(x)}{x}=\lim_{x\to 0+}\{(x-2)g(x)\}=-2g(0)$

함수 $f(x)g(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하므로 $x=0$에서도 미분가능하다.

즉, $\lim_{x\to 0-}\frac{f(x)g(x)}{x}=\lim_{x\to 0+}\frac{f(x)g(x)}{x}$에서

$g(0)=-2g(0)$, $g(0)=0$ (참)

ㄴ. ㄱ에서 $g(0)=0$이므로 일차함수 $g(x)$는

$g(x)=mx$ (m은 0이 아닌 상수)

로 놓을 수 있다.

$\int_{-1}^{0}f(x)\,dx=\int_{-1}^{0}f(x)g(x)\,dx$에서

$\int_{-1}^{0}f(x)\,dx=\int_{-1}^{0}(-x^2+x)\,dx=\left[-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2\right]_{-1}^{0}$

$=0-\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\right)=-\frac{5}{6}$

$\int_{-1}^{0}f(x)g(x)\,dx=\int_{-1}^{0}mx(-x^2+x)\,dx=m\int_{-1}^{0}(-x^3+x^2)\,dx$

$=m\left[-\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{3}x^3\right]_{-1}^{0}$

$=m\times\left\{0-\left(-\frac{1}{4}-\frac{1}{3}\right)\right\}=\frac{7}{12}m$

$-\frac{5}{6}=\frac{7}{12}m$에서 $m=-\frac{10}{7}$

따라서 $g(x)=-\frac{10}{7}x$이므로 $g(-1)=\frac{10}{7}$ (참)

ㄷ. $\int_{-1}^{1}f(x)g(x)\,dx=0$인 일차함수 $g(x)=mx$ (m은 0이 아닌 상수)가 존재한다고 하자.

$\int_{-1}^{1}f(x)g(x)\,dx=\int_{-1}^{0}mx(-x^2+x)\,dx+\int_{0}^{1}mx(x^2-2x)\,dx$

이때 ㄴ에서

$\int_{-1}^{0}mx(-x^2+x)\,dx=\frac{7}{12}m$

$$\int_0^1 mx(x^2-2x)\,dx=m\int_0^1(x^3-2x^2)\,dx=m\left[\frac{1}{4}x^4-\frac{2}{3}x^3\right]_0^1$$
$$=m\left(\frac{1}{4}-\frac{2}{3}\right)=-\frac{5}{12}m$$

따라서

$$\int_{-1}^1 f(x)g(x)\,dx=\frac{7}{12}m+\left(-\frac{5}{12}m\right)=\frac{m}{6}=0$$

이므로 $m=0$이 되어 모순이다.

즉, $\int_{-1}^1 f(x)g(x)\,dx=0$을 만족시키는 일차함수 $g(x)$가 존재하지 않는다. (거짓)

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

답 ②

15

등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공차를 d $(d>0)$이라 하자.

$a_na_{n+5}\le 0$에서 $a_n(a_n+5d)\le 0$

$-5d\le a_n\le 0$ …… ㉠

$S_n=\dfrac{n(a+a_n)}{2}$

$S_{n+5}=\dfrac{(n+5)(a+a_{n+5})}{2}=\dfrac{(n+5)(a+a_n+5d)}{2}$

n은 자연수이므로 $S_nS_{n+5}\le 0$에서

$(a+a_n)(a+5d+a_n)\le 0$

$d>0$이므로 $-a-5d\le a_n\le -a$ …… ㉡

한편, $a\ge 0$이면 $a_n\ge 0$에서 $n(A)\le 1$이므로 $n(A\cap B)=3$을 만족시킬 수 없다. 즉, $a<0$

$n(A\cap B)=3$이므로 ㉡에서 $-a-5d<0$ …… ㉢

따라서 $A\cap B=\{n\mid -a-5d\le a_n\le 0,\ n$은 자연수$\}$이다.

한편, $S_m=a_m$인 짝수인 자연수 m이 존재하므로

$a_m=S_m-S_{m-1}$에서 $S_m=S_m-S_{m-1}$, $S_{m-1}=0$

$\dfrac{(m-1)(a+a_{m-1})}{2}=0$, $a+a_{m-1}=0$

$a+\{a+(m-2)d\}=0$

$m=2k$ (k는 자연수)라 하면 $2a+(2k-2)d=0$

즉, $-a=(k-1)d$인 자연수 k가 존재한다.

㉢에서 $-a-5d=(k-1)d-5d=(k-6)d<0$이므로 k는 5 이하의 자연수이다.

$-a=(k-1)d$에서

$a_n=a+(n-1)d=-(k-1)d+(n-1)d=(n-k)d$

이므로

$A\cap B=\{n\mid (k-6)d\le (n-k)d\le 0,\ n$은 자연수$\}$

$=\{n\mid k-6\le n-k\le 0,\ n$은 자연수$\}$

$=\{n\mid 2k-6\le n\le k,\ n$은 자연수$\}$

k의 값에 따라 집합 $A\cap B$를 구하면 다음과 같다.

$k=1$이면 $A\cap B=\{1\}$

$k=2$이면 $A\cap B=\{1, 2\}$

$k=3$이면 $A\cap B=\{1, 2, 3\}$

$k=4$이면 $A\cap B=\{2, 3, 4\}$

$k=5$이면 $A\cap B=\{4, 5\}$

이때 $n(A\cap B)=3$이므로 $k=3$ 또는 $k=4$

(i) $k=3$일 때, $a=-2d$이고

$a_n=(n-k)d=(n-3)d$

㉠에서 $-5d\le (n-3)d\le 0$, $-5\le n-3\le 0$, $-2\le n\le 3$이므로

$A=\{1, 2, 3\}$

㉡에서 $2d-5d\le (n-3)d\le 2d$, $-3\le n-3\le 2$, $0\le n\le 5$이므로

$B=\{1, 2, 3, 4, 5\}$

이때 $A-B=\varnothing$이다.

(ii) $k=4$일 때, $a=-3d$이고

$a_n=(n-k)d=(n-4)d$

㉠에서 $-5d\le (n-4)d\le 0$, $-5\le n-4\le 0$, $-1\le n\le 4$이므로

$A=\{1, 2, 3, 4\}$

㉡에서 $3d-5d\le (n-4)d\le 3d$, $-2\le n-4\le 3$, $2\le n\le 7$이므로

$B=\{2, 3, 4, 5, 6, 7\}$

이때 $A-B=\{1\}\ne\varnothing$이다.

(i), (ii)에서 $k=4$이고 $m=2k=8$이다.

$a=-3d$이므로

$a_m=a_8=a+7d=-3d+7d=4d$,

$a_{m+10}=a_{18}=a+17d=-3d+17d=14d$

따라서 $\dfrac{a_{m+10}}{a_m}=\dfrac{14d}{4d}=\dfrac{7}{2}$

답 ③

16

$t=0$에서 $t=2$까지 점 P가 움직인 거리를 s라 하면

$$s=\int_0^2|v(t)|\,dt=\int_0^2|6t^2-6t|\,dt$$
$$=\int_0^1(6t-6t^2)\,dt+\int_1^2(6t^2-6t)\,dt$$
$$=\left[3t^2-2t^3\right]_0^1+\left[2t^3-3t^2\right]_1^2$$
$$=(3-2)-0+(16-12)-(2-3)=1+5=6$$

답 6

17

선분 AB의 중점의 x좌표가 1이므로

$\dfrac{\log_2 a+\log_2\frac{2}{3}}{2}=1$, $\log_2\frac{2}{3}a=2$

$\frac{2}{3}a=4$, $a=6$

선분 AB의 중점의 y좌표가 0이므로

$\dfrac{-2+\log_5 b}{2}=0$, $\log_5 b=2$

$b=25$

따라서 $a+b=6+25=31$

답 31

18

$\int_2^x(t^3+2t-1)\,dt=ax^3+3x-f(x)$ …… ㉠

㉠의 양변을 x에 대하여 미분하면

$x^3+2x-1=3ax^2+3-f'(x)$

$f'(x)=-x^3+3ax^2-2x+4$

$f'(2)=16$에서

$-8+12a-4+4=16$

$12a=24,\ a=2$

㉠의 양변에 $x=2$를 대입하면

$\int_2^2 (t^3+2t-1)\,dt=8a+6-f(2)$

$0=16+6-f(2)$

따라서 $f(2)=22$

답 22

19

$\sum_{k=1}^{5}(k+a)^2=50+\sum_{k=1}^{5}k(k+a)$에서

$\sum_{k=1}^{5}(k^2+2ak+a^2)=50+\sum_{k=1}^{5}(k^2+ak)$, $\sum_{k=1}^{5}(ak+a^2)=50$

$a\times\frac{5\times6}{2}+5a^2=50$, $5a^2+15a-50=0$

$a^2+3a-10=0$, $(a+5)(a-2)=0$

a는 양수이므로 $a=2$

답 2

20

$$f(x)=\begin{cases}-2x+2 & (x\le 0)\\ 2 & (0<x\le 2)\\ 2x-2 & (x>2)\end{cases}$$에서

(i) 직선 $y=2x-2$와 곡선 $y=\frac{1}{2}x^2-x+k$가 접하는 경우

이차방정식 $2x-2=\frac{1}{2}x^2-x+k$, 즉 $\frac{1}{2}x^2-3x+k+2=0$의 판별식을 D_1이라 하면

$D_1=(-3)^2-2(k+2)=0$, $k=\frac{5}{2}$

이고, 이때 접점의 좌표는 $(3,\ 4)$이다.

직선 $y=-2x+2$와 곡선 $y=\frac{1}{2}x^2-x+k$가 접하는 경우

이차방정식 $-2x+2=\frac{1}{2}x^2-x+k$, 즉 $\frac{1}{2}x^2+x+k-2=0$의 판별식을 D_2라 하면

$D_2=1^2-2(k-2)=0$, $k=\frac{5}{2}$

이고, 이때 접점의 좌표는 $(-1,\ 4)$이다.

직선 $y=2$와 곡선 $y=\frac{1}{2}x^2-x+k$가 접하는 경우

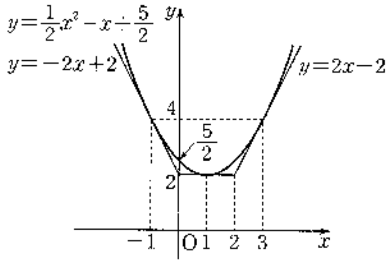
이차방정식 $\frac{1}{2}x^2-x+k=2$, 즉 $\frac{1}{2}x^2-x+k-2=0$의 판별식을 D_3이라 하면

$D_3=(-1)^2-2(k-2)=0$, $k=\frac{5}{2}$

이고, 이때 접점의 좌표는 $(1,\ 2)$이다.

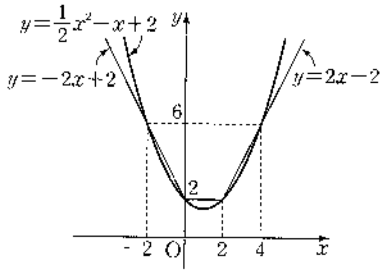
따라서 $k=\frac{5}{2}$일 때 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프는 세 점 $(3,\ 4)$, $(-1,\ 4)$, $(1,\ 2)$에서 접하므로

$h\left(\frac{5}{2}\right)=3$

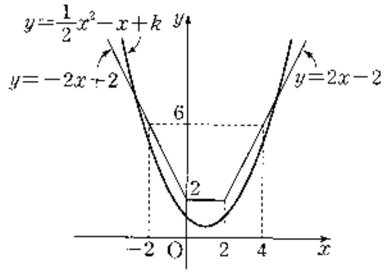


(ii) 함수 $y=g(x)$의 그래프가 함수 $y=f(x)$의 그래프 위의 두 점 $(0,\ 2)$, $(2,\ 2)$를 지나면, 즉 $k=2$이면 함수 $y=f(x)$의 그래프와 서로 다른 두 점 $(-2,\ 6)$, $(4,\ 6)$에서도 만나므로

$h(2)=4$



(iii) $k<2$이면 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프가 만나는 서로 다른 점의 개수는 2이다.



(i), (ii), (iii)에서 함수 $h(k)$는 다음과 같다.

$$h(k)=\begin{cases}2 & (k<2)\\ 4 & (k=2)\\ 6 & \left(2<k<\frac{5}{2}\right)\\ 3 & \left(k=\frac{5}{2}\right)\\ 0 & \left(k>\frac{5}{2}\right)\end{cases}$$

$h\left(\frac{5}{2}\right)+\lim_{k\to a+}h(k)=9$에서

$\lim_{k\to a+}h(k)=9-h\left(\frac{5}{2}\right)=9-3=6$

$2\le a<\frac{5}{2}$이므로 구하는 실수 a의 최솟값은 $p=2$

따라서 $h(2)=4$

답 4

21

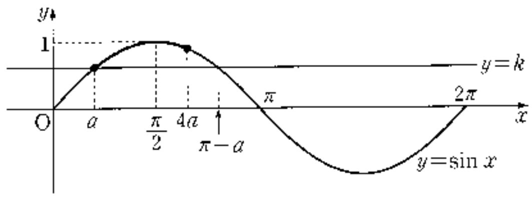
$0<a<\frac{\pi}{2}$에서 $0<4a<2\pi$이고,

$a\le x\le 4a$에서 방정식 $\sin x=1$의 해가 존재하므로 $4a\ge\frac{\pi}{2}$이다.

즉, $\frac{\pi}{2}\le 4a<2\pi$

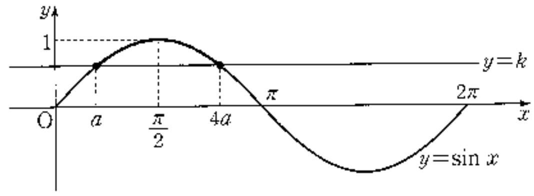
$\sin a=\sin(\pi-a)$이므로 $4a$의 값과 $\pi-a$의 값의 대소 관계에 따라 다음과 같이 경우를 나눌 수 있다.

(i) $\frac{\pi}{2}\le 4a<\pi-a$인 경우



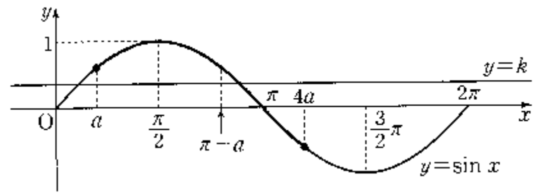
$\sin a\le k<\sin 4a$ 또는 $k=1$이면 $a\le x\le 4a$에서 방정식 $\sin x=k$는 오직 한 개의 실근을 갖는다.

(ii) $4a=\pi-a$인 경우



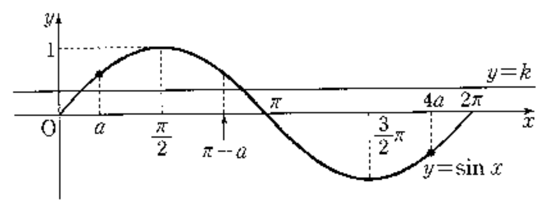
$k=1$이면 $a\le x\le 4a$에서 방정식 $\sin x=k$는 오직 한 개의 실근을 갖는다. $k\ne 1$이면 $a\le x\le 4a$에서 방정식 $\sin x=k$의 서로 다른 실근의 개수는 0 또는 2이다.

(iii) $\pi-a<4a\le\frac{3}{2}\pi$인 경우



$\sin 4a\le k<\sin a$ 또는 $k=1$이면 $a\le x\le 4a$에서 방정식 $\sin x=k$는 오직 한 개의 실근을 갖는다.

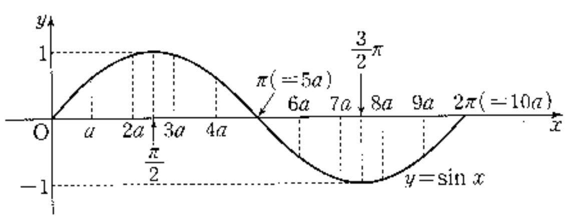
(iv) $\frac{3}{2}\pi<4a<2\pi$인 경우



$\sin 4a<k<\sin a$ 또는 $k=1$ 또는 $k=-1$이면 $a\le x\le 4a$에서 방정식 $\sin x=k$는 오직 한 개의 실근을 갖는다.

(i)~(iv)에서 방정식 $\sin x=k$가 오직 한 개의 실근을 갖도록 하는 실수 k의 값이 1뿐인 경우는 (ii)이다.

즉, $4a=\pi-a$이므로 $a=\frac{\pi}{5}$



한편, m, n $(m<n)$이 10 이하의 두 자연수일 때, 닫힌구간 $[ma, na]$에서 함수 $y=\sin x$의 최댓값과 최솟값의 합이 0인 경우는

㉠ $0<ma\le\frac{\pi}{2}$이고 $\frac{3}{2}\pi\le na\le 2\pi$인 경우

(최댓값 1, 최솟값 -1)

㉡ $\frac{\pi}{2}<ma<\pi<na<\frac{3}{2}\pi$이고 $ma+na=2\pi$인 경우

(최댓값 $\sin ma$, 최솟값 $\sin na=\sin(2\pi-ma)=-\sin ma$)

이다.

㉠에서 m의 값은 1 또는 2이고 n의 값은 8 또는 9 또는 10이므로 순서쌍 (m, n)의 개수는 $2\times 3=6$

㉡에서 가능한 순서쌍 (m, n)은 $(3, 7)$, $(4, 6)$으로 그 개수는 2

따라서 조건을 만족시키는 모든 순서쌍 (m, n)의 개수는

$6+2=8$

답 8

22

조건 (가)의 $\lim_{x\to 2}\frac{f(x)}{x-2}=6$에서 $x\to 2$일 때 (분모) $\to 0$이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\to 0$이어야 한다.

즉, $\lim_{x\to 2}f(x)=0$이고 $f(x)$는 다항함수이므로 $f(2)=0$

조건 (나)에서 모든 실수 x에 대하여 $|f(x)|\le|xg(x)|$인 연속함수 $g(x)$가 존재하므로 $0\le|f(0)|\le|0\times g(0)|=0$에서 $f(0)=0$

따라서 최고차항의 계수가 1인 사차함수 $f(x)$를

$f(x)=x(x-2)(x^2+ax+b)$ (a, b는 상수)

로 놓을 수 있다.

$$6=\lim_{x\to 2}\frac{f(x)}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{x(x-2)(x^2+ax+b)}{x-2}$$

$$=\lim_{x\to 2}x(x^2+ax+b)=2(4+2a+b)$$

에서 $2a+b=-1$

$b=-1-2a$ …… ㉠

또한 $x\ne 0$일 때 $\left|\frac{f(x)}{x}\right|\le|g(x)|$에서 $-|g(x)|\le\frac{f(x)}{x}\le|g(x)|$

함수의 극한의 대소 관계에 의하여

$$-\lim_{x\to 0}|g(x)|\le\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}\le\lim_{x\to 0}|g(x)|$$

이고 함수 $g(x)$는 연속함수이므로

$$-|g(0)|\le\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}\le|g(0)|$$

$-6\le f'(0)\le 6$ …… ㉡

$f(x)=(x^2-2x)(x^2+ax+b)$에서

$f'(x)=(2x-2)(x^2+ax+b)+(x^2-2x)(2x+a)$이므로

$f'(0)=-2b$ …… ㉢

㉢을 ㉡에 대입하면 $-6\le -2b\le 6$, $-3\le b\le 3$

㉠에서 $-3\le -2a-1\le 3$, $-2\le a\le 1$

$f(3)=3(9+3a+b)=3(9+3a-1-2a)=3(a+8)$

따라서 $f(3)=3(a+8)$은

$a=-2$일 때 최소이고 최솟값은 $3\times 6=18$,

$a=1$일 때 최대이고 최댓값은 $3\times 9=27$이므로 구하는 합은

$18+27=45$

답 45

23

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{2^n}+\frac{2}{3^n}}{\frac{3}{2^n}+\frac{1}{3^n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1+2\left(\frac{2}{3}\right)^n}{3+\left(\frac{2}{3}\right)^n}=\frac{1+2\times0}{3+0}=\frac{1}{3}$$

답 ①

24

$f(\sqrt{x})=e^{x^2-x}$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f'(\sqrt{x})\times\frac{1}{2\sqrt{x}}=(2x+1)e^{x^2+x}$

$x=4$를 대입하면

$f'(2)\times\frac{1}{4}=(2\times4+1)\times e^{4^2+4}=9e^{20}$

따라서 $f'(2)=36e^{20}$

답 ⑤

25

곡선 $y=\cos\pi x\left(0\le x\le\frac{1}{2}\right)$과 x축 및 y축으로 둘러싸인 부분의 넓이는

$\int_0^{\frac{1}{2}}\cos\pi x\,dx=\left[\frac{1}{\pi}\sin\pi x\right]_0^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{\pi}$

이므로 곡선 $y=\cos\pi x$와 x축, y축 및 직선 $x=a$로 둘러싸인 부분의 넓이는 $\frac{1}{2\pi}$이다.

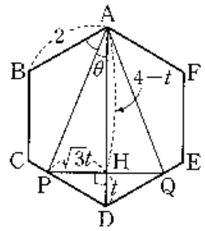
$\frac{1}{2\pi}=\int_0^a\cos\pi x\,dx=\left[\frac{1}{\pi}\sin\pi x\right]_0^a$

$=\frac{1}{\pi}\sin a\pi$

$\sin a\pi=\frac{1}{2}$에서 $0<a<\frac{1}{2}$이므로 $a=\frac{1}{6}$

답 ④

26



선분 CD와 선분 ED는 직선 AD에 대하여 대칭이고 $\overline{DP}=\overline{DQ}$이므로 두 점 P, Q는 직선 AD에 대하여 대칭이다.

즉, 삼각형 APD와 삼각형 AQD는 서로 합동이고 $\angle PAD=\angle QAD$, $\overline{AD}\perp\overline{PQ}$이다.

선분 AD와 선분 PQ가 만나는 점을 H라 하자.

$\overline{HD}=t$라 하면 삼각형 PDH에서 $\angle PDH=\frac{\pi}{3}$이므로 $\overline{PH}=\sqrt{3}t$이다.

사각형 APDQ의 넓이는

$2\times\left(\frac{1}{2}\times\overline{AD}\times\overline{PH}\right)=2\times\left(\frac{1}{2}\times4\times\sqrt{3}t\right)=4\sqrt{3}t$

이므로 $4\sqrt{3}t=3\sqrt{3}$에서 $t=\frac{3}{4}$

$\angle PAH=\theta$라 하면 삼각형 APH에서

$\tan\theta=\frac{\overline{PH}}{\overline{AH}}=\frac{\sqrt{3}t}{4-t}=\frac{\frac{3\sqrt{3}}{4}}{4-\frac{3}{4}}=\frac{3\sqrt{3}}{13}$

따라서

$\tan(\angle BAP)=\tan(\angle BAD-\angle PAD)$

$=\tan\left(\frac{\pi}{3}-\theta\right)$

$=\frac{\tan\frac{\pi}{3}-\tan\theta}{1+\tan\frac{\pi}{3}\times\tan\theta}$

$=\frac{\sqrt{3}-\frac{3\sqrt{3}}{13}}{1+\sqrt{3}\times\frac{3\sqrt{3}}{13}}=\frac{5\sqrt{3}}{11}$

답 ②

27

직각삼각형 $A_1B_1C_1$에서 $\overline{A_1B_1}=2\sqrt{3}$, $\overline{B_1C_1}=2$이므로

$\angle C_1A_1B_1=\frac{\pi}{6}$, $\angle B_1C_1A_1=\frac{\pi}{3}$

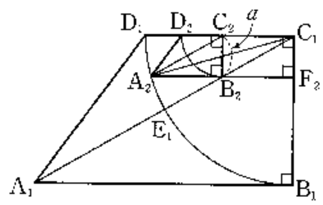
$\angle A_1C_1D_1=\angle C_1A_1B_1=\frac{\pi}{6}$이므로

삼각형 $A_1C_1D_1$의 넓이는 $\frac{1}{2}\times\overline{C_1D_1}\times\overline{B_1C_1}=\frac{1}{2}\times2\times2=2$

부채꼴 $C_1D_1E_1$의 넓이는 $\frac{1}{2}\times2^2\times\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{3}$

부채꼴 $C_1E_1B_1$의 넓이는 $\frac{1}{2}\times2^2\times\frac{\pi}{3}=\frac{2}{3}\pi$

따라서 $S_1=\left(2-\frac{\pi}{3}\right)+\frac{2}{3}\pi=2+\frac{\pi}{3}$



한편, 그림에서 $\overline{B_2C_2}=a$, 직선 A_2B_2가 선분 B_1C_1과 만나는 점을 F_2라 하면 $\overline{F_2C_1}=\overline{B_2C_2}=a$, $\overline{A_2B_2}=\sqrt{3}a$, $\overline{A_2C_1}=2$이고

삼각형 $C_2B_2C_1$에서 $\overline{C_1C_2}=\sqrt{3}a$이므로 $\overline{B_2F_2}=\sqrt{3}a$

따라서 삼각형 $C_1A_2F_2$에서

$2^2=(\sqrt{3}a+\sqrt{3}a)^2+a^2$, $4=13a^2$, $a=\frac{2}{\sqrt{13}}$

사각형 $A_1B_1C_1D_1$과 사각형 $A_2B_2C_2D_2$의 닮음비는 $2:a=1:\frac{1}{\sqrt{13}}$이므로 그림 R_1에서 색칠된 도형과 그림 R_2에서 새로 색칠된 도형의 닮음비가 $1:\frac{1}{\sqrt{13}}$이다.

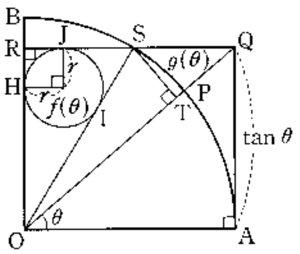
같은 방법으로 그림 R_n에서 새로 색칠된 도형과 그림 R_{n+1}에서 새로 색칠된 도형의 닮음비도 $1:\frac{1}{\sqrt{13}}$이고 넓이의 비는 $1:\frac{1}{13}$이다.

따라서 S_n은 첫째항이 $2+\frac{\pi}{3}$이고 공비가 $\frac{1}{13}$인 등비수열의 첫째항부터 제n항까지의 합이므로

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\frac{2+\frac{\pi}{3}}{1-\frac{1}{13}}=\frac{13}{36}(6+\pi)$$

답 ③

28



$\overline{\mathrm{OR}}=\overline{\mathrm{AQ}}=\tan\theta$, $\overline{\mathrm{OS}}=1$이므로 삼각형 OSR에서

$\overline{\mathrm{RS}}=\sqrt{1-\tan^2\theta}$

삼각형 OSR에 내접하는 원의 반지름의 길이를 r라 하고, 원이 선분 OR와 접하는 점을 H, 선분 OS와 접하는 점을 I, 선분 RS와 접하는 점을 J라 하면 $\overline{\mathrm{RH}}=\overline{\mathrm{RJ}}=r$,

$\overline{\mathrm{OI}}=\overline{\mathrm{OH}}=\overline{\mathrm{OR}}-r$, $\overline{\mathrm{IS}}=\overline{\mathrm{SJ}}=\overline{\mathrm{RS}}-r$

이므로 $\overline{\mathrm{OI}}+\overline{\mathrm{IS}}=\overline{\mathrm{OS}}$에서

$\tan\theta-r+\sqrt{1-\tan^2\theta}-r=1$

$$r=\frac{\tan\theta-1+\sqrt{1-\tan^2\theta}}{2}$$

$$f(\theta)=\pi\times\left(\frac{\tan\theta-1+\sqrt{1-\tan^2\theta}}{2}\right)^2$$

$$=\frac{\pi}{4}\times\{\tan^2\theta-2\tan\theta+1+2(\tan\theta-1)\sqrt{1-\tan^2\theta}+1-\tan^2\theta\}$$

$$=\frac{\pi}{2}\times\{1-\tan\theta+(\tan\theta-1)\sqrt{1-\tan^2\theta}\}$$

$$=\frac{\pi}{2}\times(1-\tan\theta)(1-\sqrt{1-\tan^2\theta})$$

한편, $\overline{\mathrm{QS}}=\overline{\mathrm{QR}}-\overline{\mathrm{RS}}=1-\sqrt{1-\tan^2\theta}$이고

$\angle\mathrm{SQT}=\angle\mathrm{POA}=\theta$이므로

$$g(\theta)=\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{QT}}\times\overline{\mathrm{ST}}$$

$$=\frac{1}{2}\times(\overline{\mathrm{QS}}\times\cos\theta)\times(\overline{\mathrm{QS}}\times\sin\theta)$$

$$=\frac{1}{2}\times(1-\sqrt{1-\tan^2\theta})^2\times\cos\theta\sin\theta$$

$$\lim_{\theta\to0+}\frac{g(\theta)}{\theta^3\times f(\theta)}$$

$$=\lim_{\theta\to0+}\frac{\frac{1}{2}\times(1-\sqrt{1-\tan^2\theta})^2\times\cos\theta\sin\theta}{\theta^3\times\frac{\pi}{2}\times(1-\tan\theta)(1-\sqrt{1-\tan^2\theta})}$$

$$=\lim_{\theta\to0+}\left\{\frac{\cos\theta}{\pi\times(1-\tan\theta)}\times\frac{(1-\sqrt{1-\tan^2\theta})\times\sin\theta}{\theta^3}\right\}$$

이때

$$\lim_{\theta\to0+}\frac{1-\sqrt{1-\tan^2\theta}}{\theta^2}$$

$$=\lim_{\theta\to0+}\frac{(1-\sqrt{1-\tan^2\theta})(1+\sqrt{1-\tan^2\theta})}{\theta^2(1+\sqrt{1-\tan^2\theta})}$$

$$=\lim_{\theta\to0+}\frac{\tan^2\theta}{\theta^2(1+\sqrt{1-\tan^2\theta})}$$

$$=\lim_{\theta\to0+}\left(\frac{\tan\theta}{\theta}\right)^2\times\lim_{\theta\to0+}\frac{1}{1+\sqrt{1-\tan^2\theta}}$$

$$=1^2\times\frac{1}{1+1}=\frac{1}{2}$$

이므로

$$\lim_{\theta\to0+}\frac{g(\theta)}{\theta^3\times f(\theta)}$$

$$=\lim_{\theta\to0+}\left\{\frac{\cos\theta}{\pi\times(1-\tan\theta)}\times\frac{(1-\sqrt{1-\tan^2\theta})\times\sin\theta}{\theta^3}\right\}$$

$$=\frac{1}{\pi}\times\lim_{\theta\to0+}\frac{\cos\theta}{1-\tan\theta}\times\lim_{\theta\to0+}\frac{1-\sqrt{1-\tan^2\theta}}{\theta^2}\times\lim_{\theta\to0+}\frac{\sin\theta}{\theta}$$

$$=\frac{1}{\pi}\times1\times\frac{1}{2}\times1=\frac{1}{2\pi}$$

답 ②

29

조건 (가)에서 $f(1)=1$이므로 $\frac{1}{2}\ln a+b+c=1$ …… ㉠

$$f'(x)=\frac{1}{2x}+2bx+c=\frac{4bx^2+2cx+1}{2x}$$

조건 (나)에서 함수 $f(x)$의 역함수 $g(x)$가 존재하려면 모든 양수 x에 대하여 항상 $f'(x)\geq0$이거나 항상 $f'(x)\leq0$이어야 한다.

이때 $\lim_{x\to0+}f'(x)=\infty$이므로 모든 양수 x에 대하여

$f'(x)\geq0$, 즉 $4bx^2+2cx+1\geq0$이어야 한다.

$$4bx^2+2cx+1=4b\left(x+\frac{c}{4b}\right)^2+1-\frac{c^2}{4b}$$

$b>0$, $c<0$에서 $-\frac{c}{4b}>0$이므로 모든 양수 x에 대하여 $f'(x)\geq0$이려면

$1-\frac{c^2}{4b}\geq0$, 즉 $c^2-4b\leq0$ …… ㉡

한편, 함수 $h(x)$를 $h(x)=f(x)-g(x)$라 하면 $f(1)=1$에서 $g(1)=1$이므로 $h(1)=0$이다.

이때 조건 (나)에서 함수 $|h(x)|$가 $x=1$에서 미분가능하므로 $h'(1)=0$이어야 한다.

$g'(1)=\frac{1}{f'(1)}$에서

$$h'(1)=f'(1)-g'(1)=f'(1)-\frac{1}{f'(1)}$$

$h'(1)=0$에서 $f'(1)>0$이므로 $f'(1)=1$

$f'(1)=\frac{4b+2c+1}{2}=1$에서

$b=\frac{1}{4}-\frac{1}{2}c$ …… ㉢

㉢을 ㉠에 대입하면

$$\frac{1}{2}\ln a+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{2}c\right)+c=1$$

$\ln a=\frac{3}{2}-c$ …… ㉣

㉢을 ㉡에 대입하면

$c^2-4\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{2}c\right)\leq0$, $c^2+2c-1\leq0$, $-1-\sqrt{2}\leq c\leq-1+\sqrt{2}$

$c<0$이므로 $-1-\sqrt{2}\leq c<0$

㉢, ㉣에서

$$f(2)=\frac{1}{2}\ln 2a+4b+2c=\frac{1}{2}\ln 2+\frac{1}{2}\ln a+4b+2c$$

$$=\frac{1}{2}\ln 2+\frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}-c\right)+4\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{2}c\right)+2c$$

$$=\frac{1}{2}\ln 2+\frac{7}{4}-\frac{1}{2}c$$

따라서 $f(2)$의 값은 $c=-1-\sqrt{2}$일 때 최댓값

$\frac{1}{2}\ln 2+\frac{7}{4}-\frac{1}{2}(-1-\sqrt{2})=\frac{1}{2}\ln 2+\frac{9}{4}+\frac{\sqrt{2}}{2}$를 갖는다.

즉, $p=\frac{9}{4}$, $q=\frac{1}{2}$이므로 $8pq=8\times\frac{9}{4}\times\frac{1}{2}=9$

답 9

30

조건 (가)에서 함수 $f(x)$는 실수 전체의 집합에서 감소한다. …… ㉠

조건 (나)의 식의 양변에 $x=1$을 대입하면

$\{f'(1)\}^2+3\int_0^1 f(2t)\,dt=9$이므로

$\{f'(1)\}^2=-3\int_0^1 f(2t)\,dt+9$

이때 $2t=u$로 놓으면 $2=\frac{du}{dt}$이고

$t=0$일 때 $u=0$, $t=1$일 때 $u=2$이므로

$\int_0^1 f(2t)\,dt=\frac{1}{2}\int_0^2 f(u)\,du=-\frac{3}{4}\left(e-\frac{1}{e}\right)^2$

$\{f'(1)\}^2=-3\times\left\{-\frac{3}{4}\left(e-\frac{1}{e}\right)^2\right\}+9$ …… ㉡

$=\frac{9}{4}\left(e^2-2+\frac{1}{e^2}\right)+9=\frac{9}{4}\left(e^2+2+\frac{1}{e^2}\right)$

$=\left\{\frac{3}{2}\left(e+\frac{1}{e}\right)\right\}^2$

에서 $f'(1)<0$이므로 $f'(1)=-\frac{3}{2}\left(e+\frac{1}{e}\right)$

조건 (나)의 식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$2f'(x)f''(x)+3f(2x)=0$

$x=0$을 대입하면 $2f'(0)f''(0)+3f(0)=0$

$f''(0)=0$이므로 $f(0)=0$

이때 ㉠에서 $f(0)>f(1)$이므로 $f(1)<0$이다.

조건 (나)의 식의 양변에 $x=0$을 대입하면 $\{f'(0)\}^2=9$

$\{f'(1)\}^2=\{f(1)\}^2+9$이므로 ㉡에서

$\{f(1)\}^2=\frac{9}{4}\left(e-\frac{1}{e}\right)^2$

$f(1)<0$이므로 $f(1)=-\frac{3}{2}\left(e-\frac{1}{e}\right)$

$\left\{\frac{1}{f'(x)}\right\}'=-\frac{f''(x)}{\{f'(x)\}^2}$이므로 부분적분법에 의하여

$\int_0^1 \frac{f''(x)\times f(x)}{\{f'(x)\}^2}dx$

$=\left[-\frac{1}{f'(x)}\times f(x)\right]_0^1+\int_0^1\left\{\frac{1}{f'(x)}\times f'(x)\right\}dx$

$=-\frac{f(1)}{f'(1)}+1=-\frac{-\frac{3}{2}\left(e-\frac{1}{e}\right)}{-\frac{3}{2}\left(e+\frac{1}{e}\right)}+1$

$=-\frac{e^2-1}{e^2+1}+1=\frac{2}{e^2+1}$

따라서 $k=2$

답 2

참고

문제의 조건을 만족시키는 함수로는 $f(x)=-\frac{3}{2}(e^x-e^{-x})$이 있다.

실전 모의고사 4회

본문 150~161쪽

01 ①	02 ④	03 ②	04 ⑤	05 ⑤
06 ③	07 ④	08 ③	09 ⑤	10 ②
11 ②	12 ①	13 ①	14 ⑤	15 ②
16 6	17 8	18 62	19 10	20 54
21 135	22 52	23 ③	24 ④	25 ②
26 ④	27 ③	28 ③	29 210	30 5

01

$2^{\sqrt{2}-1}\times\left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{1}{2}}=2^{\sqrt{2}-1}\times(2^{-2})^{\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{1}{2}}=2^{\sqrt{2}-1}\times 2^{-2\times\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{1}{2}\right)}$

$=2^{\sqrt{2}-1-\sqrt{2}-1}=2^{-2}=\frac{1}{4}$

답 ①

02

$f(x)=(x+1)(x^2+2)$에서

$f'(x)=1\times(x^2+2)+(x+1)\times 2x$

$=x^2+2+2x^2+2x$

$=3x^2+2x+2$

따라서 $f'(2)=3\times 2^2+2\times 2+2=18$

답 ④

03

등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공비를 r라 하자.

$a_2=10$에서 $ar=10$ …… ㉠

$\frac{a_4}{a_1}=8$에서 $\frac{ar^3}{a}=r^3=8$

등비수열 $\{a_n\}$의 모든 항이 실수이므로

$r=2$ …… ㉡

㉡을 ㉠에 대입하면

$2a=10$, $a=5$

따라서 $a_5=ar^4=5\times 2^4=80$

답 ②

04

$\lim_{x\to 0-}f(x)=1$, $\lim_{x\to -1-}f(x)=2$, $\lim_{x\to 2+}f(x)=2$이므로

$\lim_{x\to 0+}f(x)+\lim_{x\to -1-}f(x)\times\lim_{x\to 2+}f(x)=1+2\times 2=5$

답 ⑤

05

$\sin\theta-\cos\theta=\frac{1}{2}$의 양변을 제곱하면

$\sin^2\theta-2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta=\frac{1}{4}$

$(\sin^2\theta+\cos^2\theta)-2\sin\theta\cos\theta=\frac{1}{4}$

$1-2\sin\theta\cos\theta=\frac{1}{4}$

$\sin\theta\cos\theta=\frac{3}{8}$

$$|\sin\theta+\cos\theta|^2=(\sin\theta+\cos\theta)^2$$
$$=\sin^2\theta+2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta$$
$$=(\sin^2\theta+\cos^2\theta)+2\sin\theta\cos\theta$$
$$=1+2\times\frac{3}{8}=\frac{7}{4}$$

$|\sin\theta+\cos\theta|\ge 0$이므로

$|\sin\theta+\cos\theta|=\dfrac{\sqrt{7}}{2}$

답 ⑤

06

방정식 $x^3+x^2+4=x^2+3x+k$, 즉 $x^3-3x+4=k$의 서로 다른 실근의 개수가 2이다.

$h(x)=x^3-3x+4$라 하면

$h'(x)=3x^2-3=3(x+1)(x-1)$

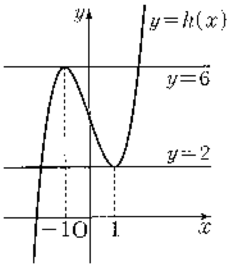
$h'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=1$

함수 $h(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
$h'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$h(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

$h(-1)=6$, $h(1)=2$

함수 $y=h(x)$의 그래프는 그림과 같다.



곡선 $y=h(x)$와 직선 $y=k$가 만나는 점의 개수가 2이려면 $k=2$ 또는 $k=6$이어야 한다.

따라서 모든 실수 k의 값의 합은

$2+6=8$

답 ③

07

$a_1=10$이고 10은 짝수이므로 $a_2=\frac{1}{2}a_1=\frac{1}{2}\times 10=5$

$a_2=5$이고 5는 홀수이므로 $a_3=a_2+1=5+1=6$

$a_3=6$이고 6은 짝수이므로 $a_4=\frac{1}{2}a_3=\frac{1}{2}\times 6=3$

$a_4=3$이고 3은 홀수이므로 $a_5=a_4+1=3+1=4$

$a_5=4$이고 4는 짝수이므로 $a_6=\frac{1}{2}a_5=\frac{1}{2}\times 4=2$

$a_6=2$이고 2는 짝수이므로 $a_7=\frac{1}{2}a_6=\frac{1}{2}\times 2=1$

$a_7=1$이고 1은 홀수이므로 $a_8=a_7+1=1+1=2$

$a_8=2$이고 2는 짝수이므로 $a_9=\frac{1}{2}a_8=\frac{1}{2}\times 2=1$

이와 같은 과정을 반복하면

$a_6=a_8=a_{10}=\cdots=2$

$a_7=a_9=a_{11}=\cdots=1$

따라서 모든 자연수 n에 대하여 $a_n\ge 1$이고, $n\le 5$이면 $a_n\ge 3$.

$a_6+a_7=2+1=3$이므로 $a_k+a_{k+1}=3$을 만족시키는 자연수 k의 최솟값은 6이다.

답 ④

08

직사각형 ABCD의 넓이가 6이므로 선분 AB와 곡선 $y=kx^2$ 및 두 직선 $x=-1$, $x=1$로 둘러싸인 부분의 넓이가 3이다.

$$\int_{-1}^{1}(2-kx^2)\,dx=2\int_0^1(2-kx^2)\,dx=2\left[2x-\frac{kx^3}{3}\right]_0^1=2\left(2-\frac{k}{3}\right)$$

$2\left(2-\frac{k}{3}\right)=3$에서 $2-\frac{k}{3}=\frac{3}{2}$, $\frac{k}{3}=\frac{1}{2}$

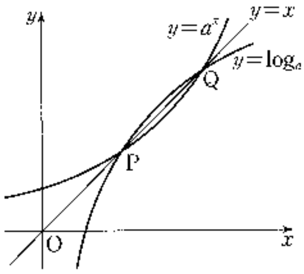
따라서 $k=\frac{3}{2}$

답 ③

09

$f(x)=a^x$, $g(x)=\log_a x$라 하면 두 함수 $f(x)$, $g(x)$는 서로 역함수 관계이고, 함수 $f(x)$는 실수 전체의 집합에서 증가하므로 두 곡선 $y=a^x$, $y=\log_a x$의 교점은 곡선 $y=a^x$과 직선 $y=x$의 교점과 같다.

즉, 두 점 P, Q는 직선 $y=x$ 위의 점이다.



$\overline{OP}=\overline{PQ}$이므로 양수 k에 대하여 점 P의 좌표를 (k, k)라 하면 점 Q의 좌표는 $(2k, 2k)$이다.

두 점 P, Q는 곡선 $y=a^x$ 위의 점이므로

$a^k=k$ $\cdots\cdots$ ㉠

$a^{2k}=2k$ $\cdots\cdots$ ㉡

㉡에서 $a^{2k}=(a^k)^2$이므로 ㉠을 대입하면 $k^2=2k$, $k(k-2)=0$

$k>0$이므로 $k=2$ $\cdots\cdots$ ㉢

㉢을 ㉠에 대입하면 $a^2=2$

$a>1$이므로 $a=\sqrt{2}$

답 ⑤

10

$g(x)=2x+4$라 하면 $f'(1)=g'(1)$, $f(1)=g(1)$이므로 함수 $f(x)-g(x)$는 $(x-1)^2$을 인수로 갖는다.

또 $f'(2)=g'(2)$, $f(2)=g(2)$이므로 함수 $f(x)-g(x)$는 $(x-2)^2$을 인수로 갖는다. 즉, $f(x)-g(x)=(x-1)^2(x-2)^2$이므로

$f(x)=(x-1)^2(x-2)^2+2x+4$

따라서 $f(3)=(3-1)^2\times(3-2)^2+2\times 3+4=14$

답 ②

11

점 C의 y좌표를 t라 하면

$S_1=\frac{1}{2}\times\overline{AB}\times(1-t)$, $S_2=\frac{1}{2}\times\overline{OD}\times t$이므로

$$\frac{S_2}{S_1}=\frac{\overline{OD}\times t}{\overline{AB}\times(1-t)}$$

$\dfrac{\overline{OD}\times t}{\overline{AB}\times(1-t)}=\dfrac{\overline{OD}}{\overline{AB}}$에서 $1-t=t$, 즉 $t=\frac{1}{2}$

곡선 $y=f(x-a)$는 곡선 $y=f(x)$를 x축의 방향으로 a만큼 평행이동한 것이므로 두 점 A, B의 x좌표는 각각 $\frac{1}{2}$, $a+\frac{1}{2}$이고,

점 C의 x좌표는 $\dfrac{\frac{1}{2}+\left(a+\frac{1}{2}\right)}{2}=\frac{1}{2}a+\frac{1}{2}$

즉, $C\left(\frac{1}{2}a+\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$이고 점 C는 곡선 $y=f(x)$ 위의 점이므로

$\frac{1}{2}=\sin\left\{\left(\frac{1}{2}a+\frac{1}{2}\right)\pi\right\}$

한편, $0<a<1$에서 $\frac{\pi}{2}<\left(\frac{1}{2}a+\frac{1}{2}\right)\pi<\pi$이고

$\sin\frac{5}{6}\pi=\frac{1}{2}$이므로 $\left(\frac{1}{2}a+\frac{1}{2}\right)\pi=\frac{5}{6}\pi$

따라서 $\frac{1}{2}a+\frac{1}{2}=\frac{5}{6}$이므로 $a=\frac{2}{3}$

답 ②

12

$\lim_{x\to-1}|g(x)|=\lim_{x\to-1}\left|\frac{x^3+x+1}{f(x)}\right|$

$\lim_{x\to-1}(x^3+x+1)=-1$이므로 조건 (가)를 만족시키려면

$\lim_{x\to-1}|f(x)|=0$

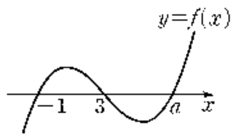
즉, 함수 $f(x)$는 $x+1$을 인수로 갖는다.

$\lim_{x\to3}g(x)=\lim_{x\to3}\frac{x^3+x+1}{f(x)}$

$\lim_{x\to3}(x^3+x+1)=31$이므로 $\lim_{x\to3}f(x)=0$이고 함수 $f(x)$는 $x-3$을 인수로 갖는다.

$f(x)=(x+1)(x-3)(x-a)$ (a는 상수)라 하자.

$a>3$이면 함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형은 그림과 같다.



$x\to3+$일 때 $f(x)\to0-$이므로

$\lim_{x\to3+}g(x)=-\infty$이고

$x\to3-$일 때 $f(x)\to0+$이므로 $\lim_{x\to3-}g(x)=\infty$이다.

따라서 조건 (나)를 만족시키지 않는다.

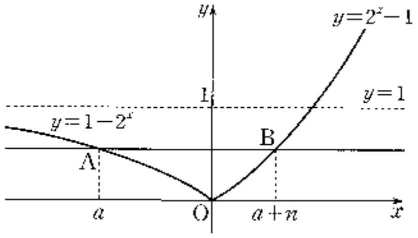
마찬가지로 $a<3$인 경우도 조건 (나)를 만족시키지 않는다.

$a=3$이면 $f(x)=(x+1)(x-3)^2$, $g(x)=\frac{x^3+x+1}{(x+1)(x-3)^2}$이므로 조건 (나)를 만족시킨다.

따라서 $f(5)=6\times4=24$

답 ①

13



$f(x)=|2^x-1|=\begin{cases}1-2^x & (x<0)\\ 2^x-1 & (x\ge0)\end{cases}$

이고, 곡선 $y=f(x)$의 점근선은 $y=1$이다.

곡선 $y=1-2^x$ $(x<0)$ 위의 점 A, 곡선 $y=2^x-1$ $(x>0)$ 위의 점 B를 직선 AB가 x축과 평행하고 $\overline{AB}=n$이 되도록 잡는다.

점 A의 x좌표를 a라 하면 점 B의 x좌표는 $a+n$이므로

$1-2^a=2^{a+n}-1$, $(2^n+1)\times2^a=2$, $2^a=\frac{2}{2^n+1}$

즉, $a=\log_2\frac{2}{2^n+1}$

(i) $t<a$일 때

닫힌구간 $[t, t+n]$에서 함수 $f(x)=|2^x-1|$의 최댓값은 $f(t)$

(ii) $t=a$일 때

닫힌구간 $[t, t+n]$에서 함수 $f(x)=|2^x-1|$의 최댓값은 $f(t)=f(t+n)$

(iii) $t>a$일 때

닫힌구간 $[t, t+n]$에서 함수 $f(x)=|2^x-1|$의 최댓값은 $f(t+n)$

(i), (ii), (iii)에서 $t\ge a$일 때, 닫힌구간 $[t, t+n]$에서 함수 $f(x)=|2^x-1|$의 최댓값이 $f(t+n)$이므로 닫힌구간 $[t, t+n]$에서 함수 $f(x)=|2^x-1|$의 최댓값이 $f(t+n)$이 되도록 하는 실수 t의 최솟값은 $a=\log_2\frac{2}{2^n+1}$이고 $g(n)=\log_2\frac{2}{2^n+1}$이다.

$2^{g(n)}=\frac{2}{2^n+1}$, $\frac{1}{2^{g(n)}}=\frac{2^n+1}{2}$이므로

$\frac{1}{2^{g(3)}}=\frac{2^3+1}{2}=\frac{9}{2}$

$\frac{1}{2^{g(4)}}=\frac{2^4+1}{2}=\frac{17}{2}$

$\frac{1}{2^{g(5)}}=\frac{2^5+1}{2}=\frac{33}{2}$

따라서 $\frac{1}{2^{g(3)}}+\frac{1}{2^{g(4)}}+\frac{1}{2^{g(5)}}=\frac{9}{2}+\frac{17}{2}+\frac{33}{2}=\frac{59}{2}$

답 ①

14

ㄱ. $a=0$이면 $v(t)=t^2(t-2)=t^3-2t^2$이므로

$x(1)=\int_0^1(t^3-2t^2)\,dt=\left[\frac{1}{4}t^4-\frac{2}{3}t^3\right]_0^1$

$=\frac{1}{4}-\frac{2}{3}=-\frac{5}{12}<0$ (참)

ㄴ. $x(2)=\int_0^2 v(t)\,dt=\int_0^2 t(t-2)(t-a)\,dt$

$=\int_0^2\{t^3-(a+2)t^2+2at\}\,dt=\left[\frac{1}{4}t^4-\frac{a+2}{3}t^3+at^2\right]_0^2$

$=4-\frac{8(a+2)}{3}+4a=\frac{4a-4}{3}$

$\frac{4a-4}{3}=a$에서 $a=4$ (참)

ㄷ. $x(a)=\int_0^a v(t)\,dt=\int_0^a t(t-2)(t-a)\,dt$

$=\int_0^a\{t^3-(a+2)t^2+2at\}\,dt=\left[\frac{1}{4}t^4-\frac{a+2}{3}t^3+at^2\right]_0^a$

$=\frac{1}{4}a^4-\frac{a+2}{3}\times a^3+a^3=-\frac{1}{12}a^4+\frac{1}{3}a^3$

$-\frac{1}{12}a^4+\frac{1}{3}a^3=-a^2$에서

$a>0$이므로 $-\frac{1}{12}a^2+\frac{1}{3}a=-1$

$a^2-4a-12=0$, $(a+2)(a-6)=0$

$a>0$이므로 $a=6$, 즉 $x(6)=-6^2$

$0\le t\le 2$에서 $v(t)\ge 0$이고, $2\le t\le 6$에서 $v(t)\le 0$이므로

$$\begin{aligned}\int_0^6 |v(t)|\,dt&=\int_0^2 v(t)\,dt+\int_2^6 \{-v(t)\}\,dt\\&=\int_0^2 v(t)\,dt-\int_2^6 v(t)\,dt\\&=\int_0^2 v(t)\,dt-\left(\int_0^6 v(t)\,dt-\int_0^2 v(t)\,dt\right)\\&=2\int_0^2 v(t)\,dt-\int_0^6 v(t)\,dt\\&=2\times x(2)-x(6)=2\times x(2)-(-6^2)\\&=2\times x(2)+36 \text{ (참)}\end{aligned}$$

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

답 ⑤

15

x에 대한 방정식 $\sin x-|\sin t|=0$에서

$0<t<\frac{\pi}{2}$일 때, $x=t$ 또는 $x=\pi-t$

$\frac{\pi}{2}<t<\pi$일 때, $x=\pi-t$ 또는 $x=t$

$\pi<t<\frac{3}{2}\pi$일 때, $x=t-\pi$ 또는 $x=2\pi-t$

$\frac{3}{2}\pi<t<2\pi$일 때, $x=2\pi-t$ 또는 $x=t-\pi$

x에 대한 방정식 $|\sin x|-\sin t=0$에서

$0<t<\frac{\pi}{2}$일 때, $x=t$ 또는 $x=\pi-t$ 또는 $x=\pi+t$ 또는 $x=2\pi-t$

$\frac{\pi}{2}<t<\pi$일 때, $x=\pi-t$ 또는 $x=t$ 또는 $x=2\pi-t$ 또는 $x=\pi+t$

$\pi<t<\frac{3}{2}\pi$일 때, 실근은 존재하지 않는다.

$\frac{3}{2}\pi<t<2\pi$일 때, 실근은 존재하지 않는다.

그러므로 각 경우의 $0<x<2\pi$에서 x에 대한 방정식 $(\sin x-|\sin t|)(|\sin x|-\sin t)=0$의 실근을 크기순으로 나열하고 서로 다른 모든 실근의 합을 구하면

(i) $0<t<\frac{\pi}{2}$일 때

$x=t$ 또는 $x=\pi-t$ 또는 $x=\pi+t$ 또는 $x=2\pi-t$이므로 서로 다른 모든 실근의 합은

$t+(\pi-t)+(\pi+t)+(2\pi-t)=4\pi$

(ii) $\frac{\pi}{2}<t<\pi$일 때

$x=\pi-t$ 또는 $x=t$ 또는 $x=2\pi-t$ 또는 $x=\pi+t$이므로 서로 다른 모든 실근의 합은

$(\pi-t)+t+(2\pi-t)+(\pi+t)=4\pi$

(iii) $\pi<t<\frac{3}{2}\pi$일 때

$x=t-\pi$ 또는 $x=2\pi-t$이므로 서로 다른 모든 실근의 합은

$(t-\pi)+(2\pi-t)=\pi$

(iv) $\frac{3}{2}\pi<t<2\pi$일 때

$x=2\pi-t$ 또는 $x=t-\pi$이므로 서로 다른 모든 실근의 합은

$(2\pi-t)+(t-\pi)=\pi$

즉,

$$f(t)=\begin{cases}t & \left(0<t<\frac{\pi}{2}\right)\\ \pi-t & \left(\frac{\pi}{2}<t<\pi\right)\\ t-\pi & \left(\pi<t<\frac{3}{2}\pi\right)\\ 2\pi-t & \left(\frac{3}{2}\pi<t<2\pi\right)\end{cases},\quad g(t)=\begin{cases}2\pi-t & \left(0<t<\frac{\pi}{2}\right)\\ \pi+t & \left(\frac{\pi}{2}<t<\pi\right)\\ 2\pi-t & \left(\pi<t<\frac{3}{2}\pi\right)\\ t-\pi & \left(\frac{3}{2}\pi<t<2\pi\right)\end{cases}$$

$$g(t)-f(t)=\begin{cases}2\pi-2t & \left(0<t<\frac{\pi}{2}\right)\\ 2t & \left(\frac{\pi}{2}<t<\pi\right)\\ 3\pi-2t & \left(\pi<t<\frac{3}{2}\pi\right)\\ 2t-3\pi & \left(\frac{3}{2}\pi<t<2\pi\right)\end{cases},\quad h(t)=\begin{cases}4\pi & \left(0<t<\frac{\pi}{2}\right)\\ 4\pi & \left(\frac{\pi}{2}<t<\pi\right)\\ \pi & \left(\pi<t<\frac{3}{2}\pi\right)\\ \pi & \left(\frac{3}{2}\pi<t<2\pi\right)\end{cases}$$

$0<t<\pi\left(t\ne\frac{\pi}{2}\right)$에서 $\pi<kh(t)<2\pi$일 때

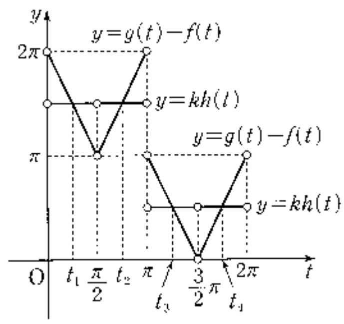
방정식 $g(t)-f(t)=kh(t)$의 두 실근을 t_1, t_2라 하면

$\frac{t_1+t_2}{2}=\frac{\pi}{2}$에서 $t_1+t_2=\pi$

$\pi<t<2\pi\left(t\ne\frac{3}{2}\pi\right)$에서 $0<kh(t)<\pi$일 때

방정식 $g(t)-f(t)=kh(t)$의 두 실근을 t_3, t_4라 하면

$\frac{t_3+t_4}{2}=\frac{3}{2}\pi$에서 $t_3+t_4=3\pi$



$t_1+t_2+t_3+t_4=(t_1+t_2)+(t_3+t_4)=\pi+3\pi=4\pi$이므로

$0<t<\pi\left(t\ne\frac{\pi}{2}\right)$에서 $\pi<kh(t)<2\pi$이고

$\pi<t<2\pi\left(t\ne\frac{3}{2}\pi\right)$에서 $0<kh(t)<\pi$인 경우에만

방정식 $g(t)-f(t)=kh(t)$의 모든 실근의 합이 4π이다.

$0<t<\pi\left(t\ne\frac{\pi}{2}\right)$에서 $h(t)=4\pi$이므로 $\pi<4\pi k<2\pi$

$\frac{1}{4}<k<\frac{1}{2}$ ...... ㉠

$\pi<t<2\pi\left(t\ne\frac{3}{2}\pi\right)$에서 $h(t)=\pi$이므로 $0<\pi k<\pi$

$0<k<1$ ...... ㉡

㉠, ㉡에서 모든 실수 k의 값의 범위는 $\frac{1}{4}<k<\frac{1}{2}$

따라서 $\alpha=\frac{1}{4}$, $\beta=\frac{1}{2}$이므로 $\alpha\beta=\frac{1}{4}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{8}$

답 ②

16

$$\log_2 9\times\frac{1}{\log_8 3}=\log_2 9\times\log_3 8=\frac{\log 9}{\log 2}\times\frac{\log 8}{\log 3}$$

$$=\frac{2\log 3}{\log 2}\times\frac{3\log 2}{\log 3}=2\times3=6$$

답 6

17

$f(x)=\int(3x^2+4x+1)dx$

$=x^3+2x^2+x+C$ (단, C는 적분상수)

한편, $f(0)=4$이므로 $C=4$

따라서 $f(x)=x^3+2x^2+x+4$이므로

$f(1)=1^3+2\times1^2+1+4=8$

답 8

18

$\sum_{k=1}^{10}(a_k+2)(b_k+2)=\sum_{k=1}^{10}(a_kb_k+2a_k+2b_k+4)$

$=\sum_{k=1}^{10}a_kb_k+2\sum_{k=1}^{10}(a_k+b_k)+40$

$150=\sum_{k=1}^{10}a_kb_k+2\times24+40$에서

$\sum_{k=1}^{10}a_kb_k=150-(48+40)=62$

답 62

19

이차함수 $f(x)$가 최고차항의 계수가 1이고

모든 실수 x에 대하여 $f(1+x)=f(1-x)$이므로

$f(x)=(x-1)^2+k=x^2-2x+(k+1)$ (단, k는 실수)

조건 (가)에서 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $\mathrm{A}(a,\ f(a))$에서의 접선 l_1은

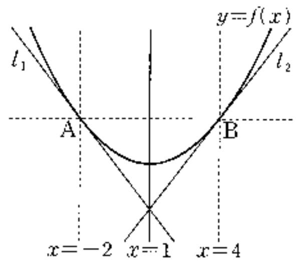
$y=f'(a)(x-a)+f(a)$

이고, 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $\mathrm{B}(b,\ f(b))$에서의 접선 l_2는

$y=f'(b)(x-b)+f(b)$

이므로 x에 대한 방정식 $f'(a)(x-a)+f(a)=f'(b)(x-b)+f(b)$의 근은 두 직선 l_1, l_2의 교점의 x좌표와 같다.

$\frac{a+b}{2}=1$인 경우에만 두 직선 l_1, l_2의 교점의 x좌표가 1이므로



$a+b=2$ ...... ㉠

$\frac{a+b}{2}=1$에서 $f(a)=f(b)$이므로

조건 (나)에서

$\sqrt{(b-a)^2+\{f(b)-f(a)\}^2}$

$=\sqrt{(b-a)^2}$

$=b-a=6$ ...... ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=-2$, $b=4$

따라서 $f'(x)=2x-2$, $a+2b=(-2)+2\times4=6$이므로

$f'(a+2b)=f'(6)=2\times6-2=10$

답 10

20

조건 (가)에서

$\int_0^6 xf(x)dx-6\int_0^6 f(x)dx=0$

$\int_0^6 xf(x)dx=6\int_0^6 f(x)dx$ ...... ㉠

조건 (나)에서

$2\int_0^6 xf(x)dx+3\int_0^6 f(x)dx=90$ ...... ㉡

$\int_0^6 f(x)dx=A$, $\int_0^6 xf(x)dx=B$라 하면

㉠에서 $B=6A$, ㉡에서 $2B+3A=90$

두 식을 연립하여 풀면

$A=\int_0^6 f(x)dx=6$, $B=\int_0^6 xf(x)dx=36$ ...... ㉢

$f(x)=x^2+ax+b$ (a, b는 상수)라 하면

$\int_0^6 f(x)dx=\int_0^6(x^2+ax+b)dx=\left[\frac{1}{3}x^3+\frac{a}{2}x^2+bx\right]_0^6$

$=72+18a+6b=6(12+3a+b)$

㉢에 의하여 $12+3a+b=1$, $3a+b=-11$ ...... ㉣

$\int_0^6 xf(x)dx=\int_0^6(x^3+ax^2+bx)dx=\left[\frac{1}{4}x^4+\frac{a}{3}x^3+\frac{b}{2}x^2\right]_0^6$

$=\frac{1}{4}\times6^4+\frac{a}{3}\times6^3+\frac{b}{2}\times6^2=36\left(9+2a+\frac{b}{2}\right)$

㉢에 의하여 $9+2a+\frac{b}{2}=1$, $4a+b=-16$ ...... ㉤

㉣, ㉤을 연립하여 풀면 $a=-5$, $b=4$

따라서 $f(x)=x^2-5x+4$이므로

$f(10)=10^2-5\times10+4=54$

답 54

21

등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항이 $\frac{4}{3}$이고, 공차가 $\frac{1}{3}$이므로 모든 자연수 n에 대하여 $a_n<a_{n+1}$이고, 2와 3의 최소공배수는 6이다.

$m=6$일 때, $A_6=\{a_2, a_4, a_6, \cdots, a_{12}\}$, $B_6=\{a_3, a_6, a_9, \cdots, a_{18}\}$

$A_6\cap B_6=\{a_6, a_{12}\}$, $b_6=a_{12}$

$m=7$일 때, $A_7=\{a_2, a_4, a_6, \cdots, a_{14}\}$, $B_7=\{a_3, a_6, a_9, \cdots, a_{21}\}$

$A_7\cap B_7=\{a_6, a_{12}\}$, $b_7=a_{12}$

$m=8$일 때, $A_8=\{a_2, a_4, a_6, \cdots, a_{16}\}$, $B_8=\{a_3, a_6, a_9, \cdots, a_{24}\}$

$A_8\cap B_8=\{a_6, a_{12}\}$, $b_8=a_{12}$

$m=9$일 때, $A_9=\{a_2, a_4, a_6, \cdots, a_{18}\}$, $B_9=\{a_3, a_6, a_9, \cdots, a_{27}\}$

$A_9\cap B_9=\{a_6, a_{12}, a_{18}\}$, $b_9=a_{18}$

$m=10$일 때, $A_{10}=\{a_2, a_4, a_6, \cdots, a_{20}\}$, $B_{10}=\{a_3, a_6, a_9, \cdots, a_{30}\}$

$A_{10}\cap B_{10}=\{a_6, a_{12}, a_{18}\}$, $b_{10}=a_{18}$

$m=11$일 때, $A_{11}=\{a_2, a_4, a_6, \cdots, a_{22}\}$, $B_{11}=\{a_3, a_6, a_9, \cdots, a_{33}\}$

$A_{11}\cap B_{11}=\{a_6, a_{12}, a_{18}\}$, $b_{11}=a_{18}$

⋮

이와 같은 과정을 반복하면

$b_{3k+3}=b_{3k+4}=b_{3k+5}=a_{6k+6}$ ($k=1, 2, 3, \cdots$)

$a_n=\frac{4}{3}+(n-1)\times\frac{1}{3}$이므로

$a_{6k+6}=\frac{4}{3}+\{(6k+6)-1\}\times\frac{1}{3}=2k+3$

따라서

$\sum_{m=6}^{20}b_m=\sum_{k=1}^{5}(b_{3k+3}+b_{3k+4}+b_{3k+5})=\sum_{k=1}^{5}3a_{6k+6}$

$=3\sum_{k=1}^{5}a_{6k+6}=3\sum_{k=1}^{5}(2k+3)=3\times\left(2\times\frac{5\times6}{2}+3\times5\right)=135$

답 135

22

$f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ (a, b, c는 상수)라 하면

$f'(x)=3x^2+2ax+b$

(i) 함수 $g(x)$는 $x=2$에서 연속이므로

$\lim_{x\to2-}g(x)=\lim_{x\to2-}\frac{f'(x+2)-f'(x-2)}{x-2}$

$g(2)=2\times f(2)$ …… ㉠

$x\to2-$일 때 (분모) $\to0$이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\to0$ 이어야 한다.

즉, $\lim_{x\to2-}\{f'(x+2)-f'(x-2)\}=0$이고 $f'(x)$가 연속이므로

$f'(4)=f'(0)$

$3\times4^2+2\times a\times4+b=b$에서

$a=-6$

또한 $f'(x)=3x^2-12x+b$에서

$f'(x+2)-f'(x-2)$

$=3(x+2)^2-12(x+2)+b-3(x-2)^2+12(x-2)-b$

$=3x^2+12x+12-12x-24-3x^2+12x-12+12x-24$

$=24(x-2)$

이므로

$\lim_{x\to2-}g(x)=\lim_{x\to2-}\frac{24(x-2)}{x-2}=24$

$f(x)=x^3-6x^2+bx+c$에서 $f(2)=2b+c-16$

㉠에 의하여 $2(2b+c-16)=24$

$2b+c=28$ …… ㉡

(ii) 함수 $g(x)$는 $x=2$에서 미분가능하므로

$x<2$일 때, $g(x)=24$이고 $g'(x)=0$

$\lim_{x\to2-}\frac{g(x)-g(2)}{x-2}=0$ …… ㉢

$x\geq2$일 때, $g(x)=xf(x)$이고

$\lim_{x\to2+}\frac{xf(x)-2f(2)}{x-2}=\lim_{x\to2+}\frac{(x-2)f(x)+2\{f(x)-f(2)\}}{x-2}$

$=\lim_{x\to2+}f(x)+2\lim_{x\to2+}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}$

$=f(2)+2f'(2)$ …… ㉣

이때 $f'(2)=12-24+b=b-12$이고 ㉡에서 $f(2)=12$이므로

$f(2)+2f'(2)=12+2(b-12)=2b-12$

$g(x)$가 $x=2$에서 미분가능하므로 ㉢=㉣

$2b-12=0$에서 $b=6$

$b=6$을 ㉡에 대입하면

$12+c=28$에서 $c=16$

(i), (ii)에 의하여 $f(x)=x^3-6x^2+6x+16$이므로

$f(6)=6^3-6\times6^2+6\times6+16=52$

답 52

23

$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n}-\frac{1}{n+3}}{\frac{n+2}{n+1}-\frac{n+3}{n+2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n}-\frac{1}{n+3}}{1+\frac{1}{n+1}-1-\frac{1}{n+2}}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n}-\frac{1}{n+3}}{\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{3}{n(n+3)}}{\frac{1}{(n+1)(n+2)}}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{3(n+1)(n+2)}{n(n+3)}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{3\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{2}{n}\right)}{1\times\left(1+\frac{3}{n}\right)}$

$=\frac{3\times1\times1}{1\times1}=3$

답 ③

24

$f(x)=t$로 놓으면 $f'(x)=\frac{dt}{dx}$이고

$x=0$일 때 $t=\frac{\pi}{6}$, $x=1$일 때 $t=\frac{\pi}{2}$이므로

$\int_0^1\{f'(x)\times\cos f(x)\}dx=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\cos t\,dt=\left[\sin t\right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}$

$=\sin\frac{\pi}{2}-\sin\frac{\pi}{6}$

$=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$

답 ④

25

$a_n=r\times r^{n-1}=r^n$이므로

$\sum_{n=1}^{\infty}a_n(a_n-a_{n+1})=\sum_{n=1}^{\infty}r^n(r^n-r^{n+1})=\sum_{n=1}^{\infty}r^{2n}(1-r)$

$=\frac{r^2(1-r)}{1-r^2}=\frac{r^2}{1+r}$ (단, $-1<r<1$)

즉, $\frac{r^2}{1+r}=\frac{1}{2}$에서

$2r^2-r-1=0$, $(2r+1)(r-1)=0$

$-1<r<1$이므로 $r=-\frac{1}{2}$

이때 $a_n=\left(-\frac{1}{2}\right)^n$, $S_n=\frac{-\frac{1}{2}\left\{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right\}}{1+\frac{1}{2}}=-\frac{1}{3}\left\{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right\}$

이므로

$a_nS_n=-\frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^n+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^n$

따라서

$\sum_{n=1}^{\infty}a_nS_n=\sum_{n=1}^{\infty}\left\{-\frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^n+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^n\right\}$

$$= -\frac{1}{3}\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{1}{2}\right)^n + \frac{1}{3}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^n$$
$$= \left(-\frac{1}{3}\right)\times\frac{-\frac{1}{2}}{1+\frac{1}{2}} + \frac{1}{3}\times\frac{\frac{1}{4}}{1-\frac{1}{4}} = \frac{1}{9}+\frac{1}{9}=\frac{2}{9}$$

답 ②

26

$0<\alpha<\frac{\pi}{2}$이므로 $\tan\alpha>0$, $\frac{\pi}{2}<\beta<\pi$이므로 $\tan\beta<0$

$\left|\frac{\tan\beta}{\tan\alpha}\right|=\frac{1}{4}$이므로 양의 실수 k에 대하여 $\tan\alpha=4k$, $\tan\beta=-k$로 놓을 수 있다.

$$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}=\frac{4k+(-k)}{1-4k\times(-k)}$$
$$=\frac{3k}{1+4k^2}=\frac{3}{\frac{1}{k}+4k}$$

한편, $k>0$이므로

$\frac{1}{k}+4k\geq 2\sqrt{\frac{1}{k}\times 4k}=4$ $\left(\text{단, 등호는 } k=\frac{1}{2}\text{일 때 성립}\right)$

따라서 $\frac{1}{k}+4k$는 $k=\frac{1}{2}$일 때 최솟값 4를 가지므로 $\tan(\alpha+\beta)$는 $k=\frac{1}{2}$일 때 최댓값 $\frac{3}{4}$을 갖는다.

답 ④

27

$g(x)=\int_1^x (t-1)f(x-t+1)\,dt$에서

$x-t+1=s$로 놓으면 $-1=\frac{ds}{dt}$이고 $t-1=x-s$

$t=1$일 때 $s=x$, $t=x$일 때 $s=1$이므로

$$g(x)=\int_1^x (t-1)f(x-t+1)\,dt$$
$$=\int_x^1 (x-s)f(s)(-ds)=\int_1^x (x-s)f(s)\,ds$$
$$=x\int_1^x f(s)\,ds-\int_1^x sf(s)\,ds$$

양변을 x에 대하여 미분하면

$$g'(x)=\int_1^x f(s)\,ds+xf(x)-xf(x)$$
$$=\int_1^x f(s)\,ds=\int_1^x\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2s^2}\right)ds$$
$$=\left[\frac{1}{2}s-\frac{1}{2s}\right]_1^x=\frac{x}{2}-\frac{1}{2x}$$

따라서 $x=2$에서 $x=4$까지의 곡선 $y=g(x)$의 길이는

$$\int_2^4\sqrt{1+\{g'(x)\}^2}\,dx=\int_2^4\sqrt{1+\left(\frac{x}{2}-\frac{1}{2x}\right)^2}\,dx$$
$$=\int_2^4\sqrt{\left(\frac{x}{2}+\frac{1}{2x}\right)^2}\,dx=\int_2^4\left(\frac{x}{2}+\frac{1}{2x}\right)dx$$
$$=\left[\frac{x^2}{4}+\frac{1}{2}\ln|x|\right]_2^4$$
$$=4+\frac{1}{2}\ln 4-\left(1+\frac{1}{2}\ln 2\right)=3+\frac{1}{2}\ln 2$$

답 ③

28

방정식 $a^2-5a+2=3a-5$의 해는

$a^2-8a+7=(a-1)(a-7)=0$에서

$a=1$ 또는 $a=7$ …… ㉠

방정식 $a^2-5a+2=5-3a$의 해는

$a^2-2a-3=(a+1)(a-3)=0$에서

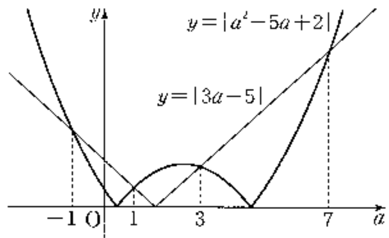
$a=-1$ 또는 $a=3$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 부등식 $|a^2-5a+2|>|3a-5|$의 해는

$a<-1$ 또는 $1<a<3$ 또는 $a>7$ …… ㉢

㉠, ㉡에서 부등식 $|a^2-5a+2|<|3a-5|$의 해는

$-1<a<1$ 또는 $3<a<7$ …… ㉣



(i) $|a^2-5a+2|>|3a-5|$인 경우

㉢에서 $a<-1$ 또는 $1<a<3$ 또는 $a>7$일 때

$$f(a)=\lim_{n\to\infty}\frac{|a^2-5a+2|^n-|3a-5|^n}{|a^2-5a+2|^n+|3a-5|^n}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1-\left|\frac{3a-5}{a^2-5a+2}\right|^n}{1+\left|\frac{3a-5}{a^2-5a+2}\right|^n}=1$$

(ii) $|a^2-5a+2|=|3a-5|$인 경우

㉠, ㉡에서 $a=-1$ 또는 $a=1$ 또는 $a=3$ 또는 $a=7$일 때

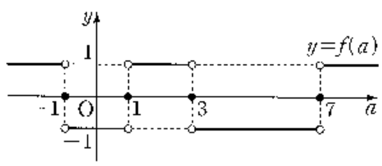
$$f(a)=\lim_{n\to\infty}\frac{|a^2-5a+2|^n-|3a-5|^n}{|a^2-5a+2|^n+|3a-5|^n}=0$$

(iii) $|a^2-5a+2|<|3a-5|$인 경우

㉣에서 $-1<a<1$ 또는 $3<a<7$일 때

$$f(a)=\lim_{n\to\infty}\frac{|a^2-5a+2|^n-|3a-5|^n}{|a^2-5a+2|^n+|3a-5|^n}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\left|\frac{a^2-5a+2}{3a-5}\right|^n-1}{\left|\frac{a^2-5a+2}{3a-5}\right|^n+1}=-1$$

(i), (ii), (iii)에서 함수 $y=f(a)$의 그래프는 그림과 같다.



그러므로 함수 $f(a)$가 $a=t$에서 불연속이 되도록 하는 모든 실수 t의 값은 -1, 1, 3, 7이고

$t=-1$일 때, $\lim_{a\to -1+}f(a)=-1$, $\lim_{a\to -1-}f(a)=1$

$t=1$일 때, $\lim_{a\to 1+}f(a)=1$, $\lim_{a\to 1-}f(a)=-1$

$t=3$일 때, $\lim_{a\to 3+}f(a)=-1$, $\lim_{a\to 3-}f(a)=1$

$t=7$일 때, $\lim_{a\to 7+}f(a)=1$, $\lim_{a\to 7-}f(a)=-1$이다.

따라서 부등식 $\lim_{a\to k+} f(a) > \lim_{a\to k-} f(a)$를 만족시키는 모든 실수 k의 값은 1, 7이고, 그 합은

$1+7=8$

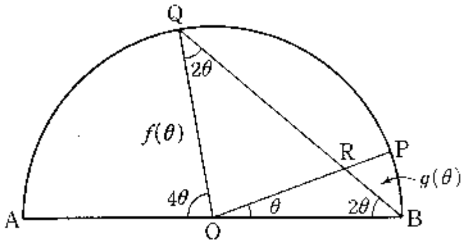
답 ③

참고

$a^2-5a+2=0$에서 $a=\frac{5\pm\sqrt{17}}{2}$, $3a-5=0$에서 $a=\frac{5}{3}$이므로

a^2-5a+2의 값과 $3a-5$의 값이 동시에 0이 되는 실수 a는 존재하지 않는다.

29



$\angle OBQ=\angle OQB=2\theta$이므로

$\angle AOQ=4\theta$

삼각형 ORQ의 넓이에서 $g(\theta)$를 뺀 값은 삼각형 OBQ의 넓이에서 부채꼴 OBP의 넓이를 뺀 값과 같다.

$f(\theta)-g(\theta)$

$=$(부채꼴 OQA의 넓이)$+$(삼각형 ORQ의 넓이)$-g(\theta)$

$=$(부채꼴 OQA의 넓이)$+$(삼각형 OBQ의 넓이)

$-$(부채꼴 OBP의 넓이)

$=\frac{1}{2}\times 1^2\times 4\theta+\frac{1}{2}\times 1^2\times \sin(\pi-4\theta)-\frac{1}{2}\times 1^2\times\theta$

$=\frac{3}{2}\theta+\frac{1}{2}\sin 4\theta$

따라서

$$60\times\lim_{\theta\to 0+}\frac{f(\theta)-g(\theta)}{\theta}=60\times\lim_{\theta\to 0+}\frac{\frac{3}{2}\theta+\frac{1}{2}\sin 4\theta}{\theta}$$

$$=60\times\lim_{\theta\to 0+}\left(\frac{3}{2}+4\times\frac{1}{2}\times\frac{\sin 4\theta}{4\theta}\right)$$

$$=60\times\left(\frac{3}{2}+2\right)=210$$

답 210

30

$f(x)=\frac{x}{e^x}$에서

$f'(x)=\frac{1\times e^x-x\times e^x}{e^{2x}}=\frac{1-x}{e^x}$

$f'(x)=0$에서 $x=1$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	↗	$\frac{1}{e}$	↘

조건 (가)의 $f(g(x))=k$에서 상수 k는 $k\le\frac{1}{e}$이고 함수 $g(x)$는 상수 k의 값의 범위에 따라 다음과 같다.

(i) $k\le 0$ 또는 $k=\frac{1}{e}$일 때

x에 대한 방정식 $f(x)=k$의 서로 다른 실근의 개수가 1이므로 함수 $g(x)$는 상수함수이고 조건 (나)를 만족시키지 않는다.

(ii) $0<k<\frac{1}{e}$일 때

x에 대한 방정식 $f(x)=k$의 서로 다른 실근의 개수는 2이고, 두 실근을 각각 α, β $(\alpha<\beta)$라 하면 $g(x)=\alpha$ 또는 $g(x)=\beta$이다.

모든 실수 x에 대하여 $g(x)=\alpha$이면 함수 $g(x)$는 상수함수이고 조건 (나)를 만족시키지 않는다.

모든 실수 x에 대하여 $g(x)=\beta$이면 함수 $g(x)$는 상수함수이고 조건 (나)를 만족시키지 않는다.

$g(x_1)=\alpha$인 어떤 x_1과 $g(x_2)=\beta$인 어떤 x_2가 모두 존재하면

$M=\beta$, $m=\alpha$, $M-m=\beta-\alpha$

즉, 함수 $g(x)$는 $g(x_1)=\alpha$인 어떤 x_1과 $g(x_2)=\beta$인 어떤 x_2가 모두 존재하고 $\beta-\alpha=\ln 2$이다.

$\beta=\alpha+\ln 2$, $f(\alpha)=f(\beta)$에서 $\frac{\alpha}{e^\alpha}=\frac{\alpha+\ln 2}{e^{\alpha+\ln 2}}$

$\frac{\alpha}{e^\alpha}=\frac{\alpha+\ln 2}{2e^\alpha}$, $\alpha=\frac{\alpha+\ln 2}{2}$, $\alpha=\ln 2$

$\beta=\alpha+\ln 2=\ln 2+\ln 2=2\ln 2=\ln 4$

$k=f(\alpha)=f(\ln 2)=\frac{\ln 2}{e^{\ln 2}}=\frac{\ln 2}{2}$

즉, $\alpha=\ln 2$, $\beta=\ln 4$, $k=\frac{\ln 2}{2}$이므로

$$S=\int_{\ln 2}^{\ln 4}\left(\frac{x}{e^x}-\frac{\ln 2}{2}\right)dx=\int_{\ln 2}^{\ln 4}\frac{x}{e^x}dx-\frac{\ln 2}{2}\times(\ln 4-\ln 2)$$

$$=\int_{\ln 2}^{\ln 4}\frac{x}{e^x}dx-\frac{(\ln 2)^2}{2}$$

한편, $\int_{\ln 2}^{\ln 4}\frac{x}{e^x}dx=\int_{\ln 2}^{\ln 4}xe^{-x}dx$이고

$u(x)=x$, $v'(x)=e^{-x}$으로 놓으면 $u'(x)=1$, $v(x)=-e^{-x}$이므로

$$\int_{\ln 2}^{\ln 4}\frac{x}{e^x}dx=\int_{\ln 2}^{\ln 4}xe^{-x}dx=\Big[-xe^{-x}\Big]_{\ln 2}^{\ln 4}+\int_{\ln 2}^{\ln 4}e^{-x}dx$$

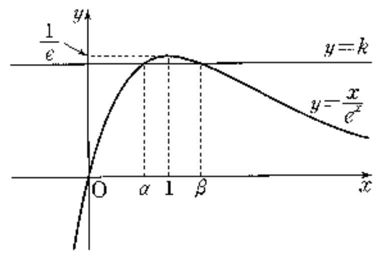
$$=\left(-\frac{\ln 4}{4}+\frac{\ln 2}{2}\right)+\Big[-e^{-x}\Big]_{\ln 2}^{\ln 4}$$

$$=\left(-\frac{\ln 2}{2}+\frac{\ln 2}{2}\right)+\left(-\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{4}$$

즉, $S=\frac{1}{4}-\frac{(\ln 2)^2}{2}$

따라서 $S+\frac{(\ln 2)^2}{2}=\frac{1}{4}$이고 $p=4$, $q=1$이므로

$p+q=4+1=5$



답 5

실전 모의고사 5회 본문 162~173쪽

01 ①	02 ②	03 ④	04 ⑤	05 ③
06 ③	07 ⑤	08 ①	09 ②	10 ⑤
11 ③	12 ③	13 ①	14 ③	15 ⑤
16 114	17 8	18 81	19 17	20 32
21 21	22 426	23 ①	24 ③	25 ④
26 ④	27 ②	28 ⑤	29 25	30 150

01

$4^{\frac{1}{2}}+27^{\frac{2}{3}}=(2^2)^{\frac{1}{2}}+(3^3)^{\frac{2}{3}}=2+3^2=2+9=11$

답 ①

02

$f(x)=2x^3-5x^2+3x$에서 $f(1)=2-5+3=0$이므로

$\lim_{h\to0}\frac{f(1+h)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=f'(1)$

$f'(x)=6x^2-10x+3$이므로

$f'(1)=6-10+3=-1$

답 ②

03

$a_1=a$, $a_{99}=l$이라 하면 $\sum_{k=1}^{99}a_k=297$에서

$\frac{99(a+l)}{2}=297$, $\frac{a+l}{2}=\frac{297}{99}=3$

수열 $\{a_n\}$이 등차수열이므로 수열 $\{a_{2n-1}\}$도 등차수열이다.

$a_{2\times1-1}=a_1=a$, $a_{2\times50-1}=a_{99}=l$

이므로

$\sum_{k=1}^{50}a_{2k-1}=\frac{50(a+l)}{2}=50\times3=150$

답 ④

04

$\lim_{x\to-1+}f(x)=1$

$x+1=t$라 하면 $x\to0-$일 때 $t\to1-$이므로

$\lim_{x\to0-}f(x+1)=\lim_{t\to1-}f(t)=1$

따라서 $\lim_{x\to-1+}f(x)+\lim_{x\to0-}f(x+1)=1+1=2$

답 ⑤

05

$a_{2n-1}=2^n$, $a_{2n}=3^n$이므로 짝수번째 항과 홀수번째 항을 나누어 생각하면

$\sum_{n=1}^{10}\log_6 a_n=\sum_{k=1}^{5}\log_6 a_{2k-1}+\sum_{k=1}^{5}\log_6 a_{2k}=\sum_{k=1}^{5}\log_6 2^k+\sum_{k=1}^{5}\log_6 3^k$

$=\sum_{k=1}^{5}k\log_6 2+\sum_{k=1}^{5}k\log_6 3=\log_6 2\times\sum_{k=1}^{5}k+\log_6 3\times\sum_{k=1}^{5}k$

$=(\log_6 2+\log_6 3)\times\frac{5\times(5+1)}{2}$

$=\log_6 6\times15=15$

답 ③

06

함수 $f(x)$는 이차함수이므로 실수 전체의 집합에서 연속이고, 함수 $g(x)$는 $x=-1$과 $x=1$에서만 불연속이다.

그러므로 함수 $f(x)g(x)$가 $x=-1$과 $x=1$에서 연속이면 실수 전체의 집합에서 연속이 된다.

함수 $f(x)g(x)$가 $x=-1$에서 연속이려면

$\lim_{x\to-1-}f(x)g(x)=\lim_{x\to-1+}f(x)g(x)=f(-1)g(-1)$이어야 한다.

$\lim_{x\to-1-}f(x)g(x)=(1-a+b)\times(-2-1)=-3(1-a+b)$

$\lim_{x\to-1+}f(x)g(x)=(1-a+b)\times1=1-a+b$

$f(-1)g(-1)=(1-a+b)\times(-2-1)=-3(1-a+b)$

이므로 $-3(1-a+b)=1-a+b$

$a-b=1$ $\cdots\cdots$ ㉠

함수 $f(x)g(x)$가 $x=1$에서 연속이려면

$\lim_{x\to1-}f(x)g(x)=\lim_{x\to1+}f(x)g(x)=f(1)g(1)$이어야 한다.

$\lim_{x\to1-}f(x)g(x)=(1+a+b)\times(-1)=-(1+a+b)$

$\lim_{x\to1+}f(x)g(x)=(1+a+b)\times2=2(1+a+b)$

$f(1)g(1)=(1+a+b)\times(-1)=-(1+a+b)$

이므로 $-(1+a+b)=2(1+a+b)$

$a+b=-1$ $\cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=0$, $b=-1$이므로 $f(x)=x^2-1$

따라서 $f(2)=4-1=3$

답 ③

07

$y=\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right)\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)+\cos x-2$

$=-\sin x\times\sin x+\cos x-2=-\sin^2 x+\cos x-2$

$=\cos^2 x-1+\cos x-2=\cos^2 x+\cos x-3$

$=\left(\cos x+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{13}{4}$

$0\le x<2\pi$에서 $-1\le\cos x\le1$이므로

함수 $y=\left(\cos x+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{13}{4}$은 $\cos x=-\frac{1}{2}$일 때 최솟값 $-\frac{13}{4}$, $\cos x=1$일 때 최댓값 -1을 갖는다.

따라서 $M=-1$, $m=-\frac{13}{4}$이므로 $M-m=-1-\left(-\frac{13}{4}\right)=\frac{9}{4}$

답 ⑤

08

$2\times3^x+a\times3^{-x}\le1$에서 $2\times3^x+\frac{a}{3^x}\le1$, $2(3^x)^2+a\le3^x$

$3^x-2(3^x)^2\ge a$

$t=3^x$이라 하면 $t>0$이고 $t-2t^2\ge a$

$f(t)=t-2t^2$ $(t>0)$이라 하면 $f(t)=-2\left(t-\frac{1}{4}\right)^2+\frac{1}{8}$ $(t>0)$

부등식 $f(t)\ge a$의 실수인 해가 존재하려면 a는 함수 $f(t)$의 최댓값보다는 작거나 같아야 한다.

$t>0$일 때 함수 $f(t)$의 최댓값은 $f\left(\frac{1}{4}\right)=\frac{1}{8}$이므로 $a\le\frac{1}{8}$이다.

이때 $a=\frac{1}{8}$이면 $t=\frac{1}{4}=3^x$이므로 이를 만족시키는 실수인 x가 존재한다.

따라서 a의 최댓값은 $\frac{1}{8}$이다.

답 ①

09

$y=-x^3-3x^2+6$에서 $y'=-3x^2-6x$

곡선 위의 점 $(t,\ -t^3-3t^2+6)$에서의 접선의 방정식은

$y-(-t^3-3t^2+6)=(-3t^2-6t)(x-t)$

이 직선이 점 $(1,\ a)$를 지나므로

$a-(-t^3-3t^2+6)=(-3t^2-6t)(1-t)$

$2t^3-6t+6-a=0$ …… ㉠

삼차함수의 그래프에서 두 개 이상의 점에 동시에 접하는 직선은 존재하지 않으므로 방정식 ㉠이 서로 다른 세 실근을 가지면 그을 수 있는 접선의 개수가 3이 된다.

$f(t)=2t^3-6t+6-a$라 하면

$f'(t)=6t^2-6=6(t+1)(t-1)$

$f'(t)=0$에서 $t=-1$ 또는 $t=1$

함수 $f(t)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

t	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(t)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(t)$	↗	극대	↘	극소	↗

$f(-1)=-2+6+6-a=-a+10$

$f(1)=2-6+6-a=-a+2$

방정식 ㉠이 서로 다른 세 실근을 가지려면

$-a+10>0,\ -a+2<0$에서 $2<a<10$

따라서 정수 a의 개수는

$10-2-1=7$

답 ②

10

$2\int_p^x f(t)\,dt-\int_p^x \{f'(t)\}^2dt=2-3x$ …… ㉠

㉠의 양변에 $x=p$를 대입하면

$0=2-3p,\ p=\frac{2}{3}$

㉠의 양변을 x에 대하여 미분하면

$2f(x)-\{f'(x)\}^2=-3$ …… ㉡

$f'(1)=-2$에서 $f(x)$는 상수함수가 아니므로

$f(x)$의 차수를 $n\ (n\geq 1)$이라 하면 $f'(x)$의 차수는 $n-1$,

$\{f'(x)\}^2$의 차수는 $2(n-1)$이다.

㉡의 양변의 차수를 비교하면 $n=2(n-1)$에서 $n=2$

$f(x)=ax^2+bx+c$ ($a,\ b,\ c$는 상수, $a\neq 0$)이라 하면

$f'(x)=2ax+b$ …… ㉢

이므로 ㉡에서 $2(ax^2+bx+c)-(2ax+b)^2=-3$

$(2a-4a^2)x^2+(2b-4ab)x+2c-b^2=-3$

위의 등식이 모든 실수 x에 대하여 성립하므로

$2a-4a^2=0,\ 2b-4ab=0,\ 2c-b^2=-3$ …… ㉣

에서 $a=\frac{1}{2}$

$f'(1)=-2$이므로 ㉢에서

$f'(1)=2a+b=1+b=-2$

$b=-3$

㉣에서 $2c-(-3)^2=-3$

$c=3$

이므로 $f(x)=\frac{1}{2}x^2-3x+3$이고 $f(2)=2-6+3=-1$

따라서 $p+f(2)=\frac{2}{3}+(-1)=-\frac{1}{3}$

답 ⑤

11

$y=3\tan \pi x$에 $x=\frac{1}{3}$을 대입하면

$3\tan\frac{\pi}{3}=3\sqrt{3}$이므로 $\mathrm{P}\left(\frac{1}{3},\ 3\sqrt{3}\right)$

$0<x\leq 1$이고 $y=3\tan \pi x=0$에서 $\pi x=\pi,\ x=1$이므로 $\mathrm{R}(1,\ 0)$

주어진 그래프에서 $y=a\sin\frac{\pi}{b}x$의 주기가 1이므로

$\frac{2\pi}{\frac{\pi}{b}}=2b=1$에서 $b=\frac{1}{2}$

함수 $y=a\sin 2\pi x$의 그래프가 점 $\mathrm{P}\left(\frac{1}{3},\ 3\sqrt{3}\right)$을 지나므로

$a\sin\frac{2}{3}\pi=\frac{\sqrt{3}}{2}a=3\sqrt{3}$에서 $a=6$

이때 두 곡선 $y=3\tan \pi x,\ y=6\sin 2\pi x$는 점 $\left(\frac{1}{2},\ 0\right)$에 대하여 대칭이므로 사각형 OQRP는 평행사변형이다.

사각형 OQRP의 넓이는 삼각형 ORP의 넓이의 2배이므로

$S=2\times\left(\frac{1}{2}\times 1\times 3\sqrt{3}\right)=3\sqrt{3}$

따라서 $abS=6\times\frac{1}{2}\times 3\sqrt{3}=9\sqrt{3}$

답 ③

12

$f(x)=x^3-4x,\ g(x)=x^2+ax$라 하고, 점 P의 x좌표를 t라 하면

$f(t)=g(t)$이고 $f'(t)=g'(t)$이다.

$f'(x)=3x^2-4,\ g'(x)=2x+a$이므로

$t^3-4t=t^2+at$ …… ㉠

$3t^2-4=2t+a$ …… ㉡

㉡에서 $a=3t^2-2t-4$이고, 이를 ㉠에 대입하면

$t^3-4t=t^2+(3t^2-2t-4)t,\ t^2(2t-1)=0$에서 $t=0$ 또는 $t=\frac{1}{2}$

$t=0$이면 $a=-4$

$t=\frac{1}{2}$이면 $a=-\frac{17}{4}$

(i) $a=-4$일 때

$f(x)-g(x)=(x^3-4x)-(x^2-4x)$

$=x^3-x^2=x^2(x-1)$

이므로 두 곡선으로 둘러싸인 부분의 넓이는

$-\int_0^1 (x^3-x^2)\,dx=-\left[\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{3}x^3\right]_0^1=-\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{12}$

(ii) $a=-\frac{17}{4}$일 때

$$f(x)-g(x)=(x^3-4x)-\left(x^2-\frac{17}{4}x\right)$$
$$=x^3-x^2+\frac{1}{4}x=x\left(x-\frac{1}{2}\right)^2$$

이므로 두 곡선으로 둘러싸인 부분의 넓이는

$$\int_0^{\frac{1}{2}}\left(x^3-x^2+\frac{1}{4}x\right)dx=\left[\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{8}x^2\right]_0^{\frac{1}{2}}$$
$$=\frac{1}{64}-\frac{1}{24}+\frac{1}{32}=\frac{1}{192}$$

따라서 $S_1=\frac{1}{12}$, $S_2=\frac{1}{192}$이므로 $\frac{S_1}{S_2}=\frac{\frac{1}{12}}{\frac{1}{192}}=\frac{192}{12}=16$

답 ③

13

$y=\log_2 4(x-5)=\log_2(x-5)+\log_2 4=\log_2(x-5)+2$

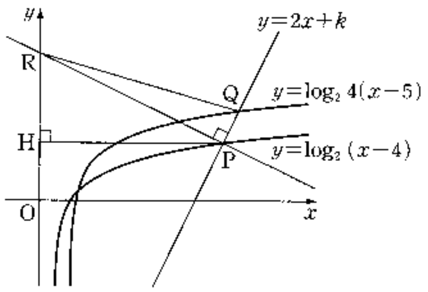
이므로 함수 $y=\log_2 4(x-5)$의 그래프는 함수 $y=\log_2(x-4)$의 그래프를 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이다.

직선 $y=2x+k$의 기울기가 2이므로 점 P를 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 점이 점 Q이다.

$\overline{PQ}=\sqrt{1^2+2^2}=\sqrt{5}$이고 삼각형 PQR의 넓이가 15이므로

$\frac{1}{2}\times\sqrt{5}\times\overline{PR}=15$, $\overline{PR}=\frac{30}{\sqrt{5}}=6\sqrt{5}$

점 P에서 y축에 내린 수선의 발을 H라 하면 직선 PR의 기울기가 $-\frac{1}{2}$이므로 $\overline{RH}:\overline{PH}:\overline{PR}=1:2:\sqrt{5}$이다.



$\overline{PR}=6\sqrt{5}$이므로 $\overline{PH}=12$

점 P의 x좌표를 p라 하면 $p=12$

점 P$(p,\ 2p+k)$, 즉 P$(12,\ 24+k)$는 곡선 $y=\log_2(x-4)$ 위의 점이므로

$24+k=\log_2 8=3$

따라서 $k=3-24=-21$

답 ①

다른 풀이

$y=\log_2 4(x-5)=\log_2(x-5)+\log_2 4=\log_2(x-5)+2$

이므로 함수 $y=\log_2 4(x-5)$의 그래프는 함수 $y=\log_2(x-4)$의 그래프를 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이다.

직선 $y=2x+k$의 기울기가 2이므로 점 P를 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 점이 점 Q이다.

$\overline{PQ}=\sqrt{1^2+2^2}=\sqrt{5}$이고 삼각형 PQR의 넓이가 15이므로

$\frac{1}{2}\times\sqrt{5}\times\overline{PR}=15$, $\overline{PR}=\frac{30}{\sqrt{5}}=6\sqrt{5}$ ...... ㉠

점 P의 x좌표를 $p\ (p>0)$이라 하면 점 P는 직선 $y=2x+k$ 위의 점이므로

P$(p,\ 2p+k)$

점 P를 지나고 직선 $y=2x+k$에 수직인 직선의 기울기는 $-\frac{1}{2}$이므로 직선 PR의 방정식은

$y-(2p+k)=-\frac{1}{2}(x-p)$, $x+2y-5p-2k=0$

$x=0$이면 $y=\frac{5p+2k}{2}$이므로 $\mathrm{R}\left(0,\ \frac{5p+2k}{2}\right)$

$\overline{PR}$는 점 R와 직선 $y=2x+k$, 즉 $2x-y+k=0$ 사이의 거리이므로

$$\overline{PR}=\frac{\left|0-\frac{5p+2k}{2}+k\right|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=\frac{\frac{5}{2}p}{\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{5}}{2}p \quad \cdots\cdots ㉡$$

㉠, ㉡에서 $\frac{\sqrt{5}}{2}p=6\sqrt{5}$, $p=12$

점 P$(12,\ 24+k)$는 곡선 $y=\log_2(x-4)$ 위의 점이므로

$24+k=\log_2 8=3$

따라서 $k=3-24=-21$

14

$h(x)=x^3-3a^2x$라 하면

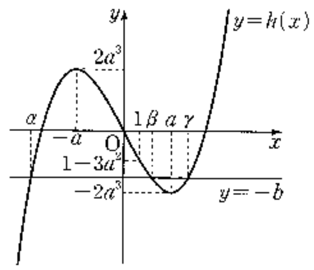
$h'(x)=3x^2-3a^2=3(x+a)(x-a)$

$h'(x)=0$에서 $x=-a$ 또는 $x=a$

함수 $h(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	$-a$	$\cdots$	a	$\cdots$
$h'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$h(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

$h(-a)=-a^3+3a^3=2a^3$, $h(a)=a^3-3a^3=-2a^3$



삼차방정식 $x^3-3a^2x+b=0$이 서로 다른 세 실근을 가지려면 $x^3-3a^2x=-b$에서 함수 $y=h(x)$의 그래프와 직선 $y=-b$가 서로 다른 세 점에서 만나야 하고, 세 근 $\alpha,\ \beta,\ \gamma\ (\alpha<\beta<\gamma)$에 대하여 $\beta>1$이 성립하려면 $h(1)=1-3a^2$이므로

$-2a^3<-b<1-3a^2$, 즉 $3a^2-1<b<2a^3$

따라서 $f(a)=3a^2-1$, $g(a)=2a^3$이므로

$f(3)+g(2)=26+16=42$

답 ③

15

ㄱ. $a_1=1$

$a_2=a_1+1\times\sin\frac{\pi}{2}=a_1+1=2$

$a_3=a_2+2\times\sin\pi=a_2=2$

$a_4=a_3+3\times\sin\frac{3\pi}{2}=a_3-3=-1$

이므로 $a_1+a_2+a_3+a_4=1+2+2+(-1)=4$ (참)

ㄴ. 자연수 k에 대하여

$a_{4k+1}=a_{4k}+4k\sin\frac{4k\pi}{2}=a_{4k}$

$a_{4k+2}=a_{4k+1}+(4k+1)\sin\frac{(4k+1)\pi}{2}=a_{4k}+4k+1$

$a_{4k+3}=a_{4k+2}+(4k+2)\sin\frac{(4k+2)\pi}{2}=a_{4k+2}=a_{4k}+4k+1$

$$\begin{aligned}a_{4k+4}&=a_{4k+3}+(4k+3)\sin\frac{(4k+3)\pi}{2}\\&=(a_{4k}+4k+1)-(4k+3)=a_{4k}-2\end{aligned}$$

$a_{4k+5}=a_{4k+4}=a_{4k}-2=a_{4k+1}-2$

$$\begin{aligned}a_{4k+6}&=a_{4k+5}+(4k+5)=a_{4k}-2+(4k+5)\\&=a_{4k}+4k+3=a_{4k+2}+2\end{aligned}$$

$a_{4k+7}=a_{4k+6}=a_{4k+2}+2=a_{4k+3}+2$

이므로 수열 $\{a_{4k-3}\}$, $\{a_{4k-2}\}$, $\{a_{4k-1}\}$, $\{a_{4k}\}$는 각각 공차가 -2, 2, 2, -2인 등차수열이다.

$a_4=-1$이므로

$a_{4k}=-1+(k-1)\times(-2)=-2k+1$ (참)

ㄷ. $a_{4k-3}+a_{4k-2}+a_{4k-1}+a_{4k}=a_1+a_2+a_3+a_4=4$

이고

$$\begin{aligned}a_{4k+1}+a_{4k+2}&=a_{4k}+(a_{4k}+4k+1)=2a_{4k}+4k+1\\&=2(-2k+1)+4k+1=3\end{aligned}$$

따라서

$\sum_{k=1}^{50}a_k=\sum_{k=1}^{48}a_k+a_{49}+a_{50}=4\times12+3=48+3=51$ (참)

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

답 ⑤

16

$$\begin{aligned}\int_{-3}^{3}(6x^2+5x+1)\,dx&=2\int_{0}^{3}(6x^2+1)\,dx\\&=2\Big[2x^3+x\Big]_0^3\\&=2(54+3)=114\end{aligned}$$

답 114

17

등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공비를 r라 하면

$a_3a_5=2a_7$에서 $ar^2\times ar^4=2ar^6$

$a^2r^6=2ar^6$

$a\neq0$, $r\neq0$이므로 $a=2$

$a_8+a_9=6a_7$에서

$2r^7+2r^8=6\times2r^6$

$r+r^2=6$, $r^2+r-6=0$, $(r+3)(r-2)=0$

$r>0$이므로 $r=2$

즉, $a_n=2\times2^{n-1}=2^n$이므로

$a_3=2^3=8$

답 8

18

$f(x)=x^3+2ax^2+3ax-1$에서

$f'(x)=3x^2+4ax+3a$

함수 $f(x)$의 역함수가 존재하려면 $f(x)$는 실수 전체의 집합에서 증가해야 한다.

즉, 모든 실수 x에 대하여 $f'(x)\geq0$이어야 하므로 이차방정식 $f'(x)=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=4a^2-9a\leq0$, $a(4a-9)\leq0$

$0\leq a\leq\frac{9}{4}$

따라서 a의 최댓값은 $\frac{9}{4}$, 최솟값은 0이므로

$36(M+m)=36\left(\frac{9}{4}+0\right)=81$

답 81

19

삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의하여

$\cos B=\frac{5^2+4^2-7^2}{2\times5\times4}=-\frac{1}{5}$이므로

$\sin B=\sqrt{1-\left(-\frac{1}{5}\right)^2}=\sqrt{\frac{24}{25}}=\frac{2\sqrt{6}}{5}$

사각형 ABCD가 한 원에 내접하므로 마주보는 각의 크기의 합은 π이다.

즉, $B+D=\pi$이므로

$\sin D=\sin(\pi-B)=\sin B=\frac{2\sqrt{6}}{5}$ ...... ㉠

$\cos D=\cos(\pi-B)=-\cos B=\frac{1}{5}$

$\overline{AD}=a$라 하면 $\overline{CD}=2a$이므로

삼각형 ACD에서 코사인법칙에 의하여

$\overline{AC}^2=a^2+(2a)^2-4a^2\cos D$이므로

$49=5a^2-4a^2\times\frac{1}{5}=\frac{21}{5}a^2$

$a^2=\frac{5}{21}\times49=\frac{35}{3}$ ...... ㉡

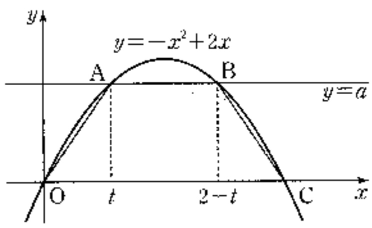
㉠, ㉡에서 삼각형 ACD의 넓이는

$\frac{1}{2}\times a\times2a\times\sin D=a^2\sin D=\frac{35}{3}\times\frac{2\sqrt{6}}{5}=\frac{14\sqrt{6}}{3}$

따라서 $p=3$, $q=14$이므로 $p+q=3+14=17$

답 17

20



점 C의 좌표는 $(2, 0)$이고, 곡선 $y=-x^2+2x$는 직선 $x=1$에 대하여 대칭이므로 점 A의 x좌표를 t $(0<t<1)$이라 하면 점 B의 x좌표는 $2-t$이다.

점 A의 y좌표가 $-t^2+2t$이므로 사각형 OCBA의 넓이를 $f(t)$라 하면

$$f(t)=\frac{1}{2}\times\{2+(2-2t)\}\times(-t^2+2t)$$
$$=t(t-2)^2=t(t^2-4t+4)$$
$$f'(t)=(t-2)^2+2t(t-2)$$
$$=(t-2)(3t-2)$$

$0<t<1$이므로 $f'(t)=0$에서 $t=\frac{2}{3}$

이때 $f(t)$는 $t=\frac{2}{3}$에서 극대이면서 최대이므로 최댓값 S는

$$S=f\left(\frac{2}{3}\right)=\frac{2}{3}\times\left(\frac{2}{3}-2\right)^2=\frac{2}{3}\times\frac{16}{9}=\frac{32}{27}$$

따라서 $27S=32$

답 32

21

집합 S_n의 원소는

$(-2)^0a_1+(-2)^1a_2+(-2)^2a_3+\cdots+(-2)^{n-1}a_n$
$=a_1-2a_2+2^2a_3-\cdots+(-2)^{n-1}a_n$

과 같이 나타낼 수 있다.

집합 S_3의 원소는 $a_1-2a_2+4a_3$의 꼴로 나타나고 $a_k\ (k=1,\ 2,\ 3)$의 값은 0 또는 1이다.

따라서 a_1+4a_3의 값은 0, 1, 4, 5로 4가지

$-2a_2$의 값은 -2, 0으로 2가지

경우가 될 수 있으므로

$S_3=\{-2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}$

즉, $p=8$

집합 S_n에 속하는 원소 $a_1-2a_2+2^2a_3-\cdots+(-2)^{n-1}a_n$의 값은

$a_{2i-1}=1,\ a_{2i}=0\ (i=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$

일 때 최대이다.

자연수 j에 대하여 $n=2j$라 하면 집합 S_n에 속하는 원소의 최댓값은

$a_1-2a_2+2^2a_3-\cdots+(-2)^{2j-1}a_{2j}$
$=1-0+2^2-0+\cdots+(-2)^{2j-2}-0$
$=1+2^2+\cdots+2^{2j-2}=\frac{2^{2j}-1}{4-1}=\frac{2^{2j}-1}{3}$

$n=2j+1$이라 하면

$a_1-2a_2+2^2a_3-\cdots+(-2)^{(2j+1)-1}a_{2j+1}$
$=1-0+2^2-0+\cdots+(-2)^{2j-2}-0+(-2)^{2j}$
$=1+2^2+\cdots+2^{2j-2}+2^{2j}=\frac{2^{2j+2}-1}{3}$

$\frac{2^{2j}-1}{3}\le 5453\le\frac{2^{2j+2}-1}{3}$에서

$\frac{2^{12}-1}{3}=\frac{4095}{3}=1365,\ \frac{2^{14}-1}{3}=\frac{16383}{3}=5461$이고

$5453=5461-8$이므로

$5453=1+2^2+2^4+\cdots+2^{12}-2^3$

따라서 5453을 원소로 갖는 S_n 중 n의 값이 최소인 경우는

$n=2\times6+1=13$일 때이다.

그러므로 $q=13$

따라서 $p+q=8+13=21$

답 21

22

$f(x)=x^3+3x^2-3(t^2-1)x+2t^3-3t^2+1$에서

$f'(x)=3x^2+6x-3(t^2-1)$
$=3x^2+6x-3(t+1)(t-1)$
$=3\{x-(t-1)\}\{x+(t+1)\}$

$f'(x)=0$에서 $x=t-1$ 또는 $x=-t-1$

$t>0$이므로 $-t-1<-1<t-1$이고, 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	$-t-1$	$\cdots$	$t-1$	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

$f(t-1)=(t-1)^3+3(t-1)^2-3(t^2-1)(t-1)+2t^3-3t^2+1$
$=(t-1)^3+3(t-1)^2-3(t-1)^2(t+1)+(t-1)^2(2t+1)$
$=(t-1)^2\{(t-1)+3-3(t+1)+(2t+1)\}=0$

$f(-1)=-1+3+3(t^2-1)+2t^3-3t^2+1$
$=2t^3$

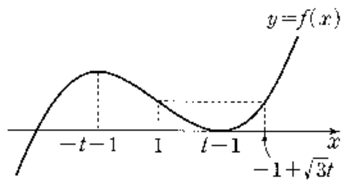
$f(2)=8+12-6(t^2-1)+2t^3-3t^2+1$
$=2t^3-9t^2+27$

$f(x)=f(-1)$에서

$f(x)-2t^3=(x+1)(x^2+2x+1-3t^2)=0$이므로

$x=-1$ 또는 $x=-1\pm\sqrt{3}t$

에서 $f(-1)=f(-1+\sqrt{3}t)=2t^3$



이때 $-1+\sqrt{3}t\ge2$, 즉 $t\ge\sqrt{3}$이면 $g(t)=f(-1)=2t^3$

$0<t<\sqrt{3}$이면 $g(t)=f(2)=2t^3-9t^2+27$

한편, $t-1\ge2$, 즉 $t\ge3$이면 $h(t)=f(2)=2t^3-9t^2+27$

$0<t<3$이면 $h(t)=f(t-1)=0$

그러므로 두 함수 $g(t)$, $h(t)$는 다음과 같다.

$$g(t)=\begin{cases}2t^3-9t^2+27 & (0<t<\sqrt{3})\\ 2t^3 & (t\ge\sqrt{3})\end{cases}$$

$$h(t)=\begin{cases}0 & (0<t<3)\\ 2t^3-9t^2+27 & (t\ge3)\end{cases}$$

이때 함수 $g(t)$는 $t=\sqrt{3}$에서 미분가능하지 않으므로 $a=\sqrt{3}$이다.

$g(2a)=g(2\sqrt{3})=2\times(2\sqrt{3})^3$
$=48\sqrt{3}$

$h(3a)=h(3\sqrt{3})=2(3\sqrt{3})^3-9(3\sqrt{3})^2+27$
$=162\sqrt{3}-216$

따라서

$g(2a)+h(3a)=48\sqrt{3}+(162\sqrt{3}-216)$
$=210\sqrt{3}-216$

즉, $p=210$, $q=-216$이므로

$p-q=210-(-216)=426$

답 426

23

$f'(x)=2e^{2x+1}$이므로

$f'(\ln 2)=2e^{2\ln 2+1}=2\times e^{\ln 4}\times e=2\times 4^{\ln e}\times e=8e$

답 ①

24

$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{\sqrt[n]{e^{2k}}}{n}=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(e^{\frac{2k}{n}}\times\frac{2}{n}\right)$

$x_k=\frac{2k}{n}$로 놓으면 $\Delta x=\frac{2}{n}$이므로

$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{\sqrt[n]{e^{2k}}}{n}=\frac{1}{2}\int_0^2 e^x\,dx=\frac{1}{2}\Big[e^x\Big]_0^2=\frac{e^2-1}{2}$

답 ③

25

$f(g(x))=x$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f'(g(x))g'(x)=1$, 즉 $\frac{1}{f'(g(x))}=g'(x)$

$g\left(\frac{1}{2}\right)=a$, $g\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=b$로 놓으면

$f(a)=\sin a=\frac{1}{2}$에서 $a=g\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{\pi}{6}$

$f(b)=\sin b=\frac{\sqrt{3}}{2}$에서 $b=g\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\frac{\pi}{3}$

따라서

$\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(x)\,dx+\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}}\frac{1}{f'(g(x))}\,dx$

$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\,dx+\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}}g'(x)\,dx=\Big[-\cos x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}+\Big[g(x)\Big]_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}}$

$=0-(-1)+g\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)-g\left(\frac{1}{2}\right)=1+\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{6}\right)=1+\frac{\pi}{6}$

답 ④

26

등비수열 $\{a_n\}$의 공비를 $r\ (r>2)$라 하면

$a_n=r^{n-1}$, $S_n=\frac{r^n-1}{r-1}$이므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{S_n+S_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{r^n-1}{r-1}+\frac{r^{n+1}-1}{r-1}}{r^{n-1}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{r-1}\left(r+r^2-\frac{2}{r^{n-1}}\right)=\frac{r(r+1)}{r-1}$$

$\lim_{n\to\infty}(2n+1)b_n=15$에서

$\lim_{n\to\infty}nb_n=\lim_{n\to\infty}\left\{(2n+1)b_n\times\frac{n}{2n+1}\right\}=15\times\frac{1}{2}=\frac{15}{2}$

$\lim_{n\to\infty}(n+1)b_n=\lim_{n\to\infty}\left\{(2n+1)b_n\times\frac{n+1}{2n+1}\right\}=15\times\frac{1}{2}=\frac{15}{2}$

따라서 수열의 극한의 대소 관계에 의하여

$\lim_{n\to\infty}\frac{S_n+S_{n+1}}{a_n}=\frac{15}{2}$

즉, $\frac{r(r+1)}{r-1}=\frac{15}{2}$에서 $2r^2+2r=15r-15$

$2r^2-13r+15=0$, $(2r-3)(r-5)=0$

$r>2$에서 $r=5$이므로 $a_2=r=5$

답 ④

27

그림 R_n에서 새로 색칠된 부분의 넓이를 a_n이라 하자.

그림 R_1에서 $\overline{G_1C_1}=\frac{3}{\tan\frac{\pi}{3}}=\sqrt{3}$이므로 삼각형 $D_1G_1F_1$은 한 변의 길이가 $3-\sqrt{3}$인 정삼각형이고, 삼각형 $G_1B_1C_1$은 직각을 낀 두 변의 길이가 $\sqrt{3}$, 3인 직각삼각형이므로

$a_1=\frac{\sqrt{3}}{4}\times(3-\sqrt{3})^2+\frac{1}{2}\times\sqrt{3}\times 3=\frac{6\sqrt{3}-9}{2}+\frac{3\sqrt{3}}{2}=\frac{9\sqrt{3}-9}{2}$

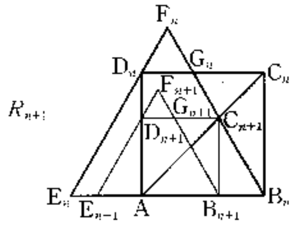


그림 R_{n+1}에서 $\overline{AB_n}=b_n$으로 놓으면

$\overline{AB_{n+1}}=\overline{C_{n+1}B_{n+1}}=b_{n+1}$

$\overline{B_{n+1}B_n}=\overline{C_{n+1}B_{n+1}}\times\tan\frac{\pi}{6}$

$=\frac{\sqrt{3}}{3}b_{n+1}$

$\overline{AB_n}=\overline{AB_{n+1}}+\overline{B_{n+1}B_n}$에서

$b_n=b_{n+1}+\frac{\sqrt{3}}{3}b_{n+1}=\frac{3+\sqrt{3}}{3}b_{n+1}$

$\frac{b_{n+1}}{b_n}=\frac{3}{3+\sqrt{3}}=\frac{3-\sqrt{3}}{2}$

따라서 그림 R_n에서 새로 색칠한 부분과 그림 R_{n+1}에서 새로 색칠한 부분의 넓이의 비는

$1:\left(\frac{3-\sqrt{3}}{2}\right)^2$, 즉 $1:\frac{6-3\sqrt{3}}{2}$

따라서 수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 $a_1=\frac{9\sqrt{3}-9}{2}$이고 공비가 $\frac{6-3\sqrt{3}}{2}$인 등비수열이므로

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}a_k=\frac{\frac{9\sqrt{3}-9}{2}}{1-\frac{6-3\sqrt{3}}{2}}=\frac{9(\sqrt{3}-1)}{3\sqrt{3}-4}$$

$$=\frac{9(\sqrt{3}-1)(3\sqrt{3}+4)}{(3\sqrt{3}-4)(3\sqrt{3}+4)}=\frac{9(5+\sqrt{3})}{11}$$

답 ②

28

$f(x)=ax^2+bx+c$ (a, b, c는 상수이고, $a\neq 0$, $b>0$)으로 놓자.

$g'(x)=(2ax+b)e^{-x}-(ax^2+bx+c)e^{-x}$

$=\{-ax^2+(2a-b)x+b-c\}e^{-x}$

조건 (가)에서 $g'(0)=0$이므로

$g'(0)=b-c=0$, $b=c$

조건 (나)에서 함수 $\ln|g(x)|$가 실수 전체의 집합에서 연속이므로 모든 실수 x에 대하여 $g(x)\neq 0$, 즉 $f(x)\neq 0$이다.

이차방정식 $ax^2+bx+b=0$의 판별식을 D라 하면 $D<0$이어야 하므로

$D=b^2-4ab<0$, $b(b-4a)<0$

$b>0$이므로 $a>0$이고 $0<b<4a$, 즉 $0<\frac{b}{a}<4$ ······ ㉠

$g'(x)=0$에서

$-ax^2+(2a-b)x=0$, $x(ax-2a+b)=0$

$x=0$ 또는 $x=\frac{2a-b}{a}=2-\frac{b}{a}$

조건 (다)에서 p, q가 정수이므로 $\frac{b}{a}$의 값도 정수이어야 한다.

㉠에서 $\frac{b}{a}$의 값은 1 또는 2 또는 3이다.

(i) $\frac{b}{a}=1$일 때, $2-\frac{b}{a}=1$

함수 $g(x)$는 $x=0$에서 극소이고, $x=1$에서 극대이므로

조건 (다)에서 $p=0$, $q=1$

$\frac{b}{a}=1$에서 $b=a$

즉, $f(x)=a(x^2+x+1)$이므로

$f(0)=a$, $f(1)=3a$, $f(2)=7a$

따라서 $f(p)+4f(q)=f(0)+4f(1)=f(2)$를 만족시키지 않는다.

(ii) $\frac{b}{a}=2$일 때, 모든 실수 x에 대하여 $g'(x)=-ax^2e^{-x}\le 0$이므로

함수 $g(x)$는 극값을 갖지 않는다.

(iii) $\frac{b}{a}=3$일 때, $2-\frac{b}{a}=-1$

함수 $g(x)$는 $x=-1$에서 극소이고, $x=0$에서 극대이므로

조건 (다)에서 $p=-1$, $q=0$

$\frac{b}{a}=3$에서 $b=3a$

즉, $f(x)=a(x^2+3x+3)$이므로

$f(-1)=a$, $f(0)=3a$, $f(2)=13a$

따라서 $f(p)+4f(q)=f(-1)+4f(0)=f(2)$를 만족시킨다.

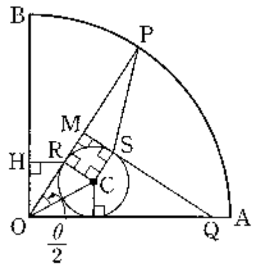
(i), (ii), (iii)에서 $f(x)=a(x^2+3x+3)$이므로

$$\frac{f(3)}{f(1)}=\frac{21a}{7a}=3$$

답 ⑤

29

원 C의 중심을 C라 하고 반지름의 길이를 r라 하자.



$\angle\mathrm{COR}=\frac{\theta}{2}$이므로 $\overline{\mathrm{OR}}=\dfrac{r}{\tan\frac{\theta}{2}}$

$\overline{\mathrm{OM}}=1$, $\overline{\mathrm{MR}}=r$이므로

$$\frac{r}{\tan\frac{\theta}{2}}+r=1,\ r=\frac{\tan\frac{\theta}{2}}{1+\tan\frac{\theta}{2}}$$

$$\overline{\mathrm{OR}}=\frac{1}{1+\tan\frac{\theta}{2}}$$

$\angle\mathrm{ROH}=\frac{\pi}{2}-\theta$이므로 삼각형 ORH의 넓이는

$$f(\theta)=\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{OR}}\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)\times\overline{\mathrm{OR}}\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\frac{1}{2}\overline{\mathrm{OR}}^2\sin\theta\cos\theta$$

$\lim\limits_{\theta\to0+}\overline{\mathrm{OR}}=\lim\limits_{\theta\to0+}\dfrac{1}{1+\tan\frac{\theta}{2}}=1$이므로

$$\lim_{\theta\to0+}\frac{f(\theta)}{\theta}=\lim_{\theta\to0+}\left(\frac{\overline{\mathrm{OR}}^2}{2}\times\frac{\sin\theta}{\theta}\times\cos\theta\right)$$
$$=\frac{1^2}{2}\times1\times1=\frac{1}{2}$$

$\overline{\mathrm{MS}}=r$, $\overline{\mathrm{MP}}=1$이므로 삼각형 MSP의 넓이는

$g(\theta)=\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{MS}}\times\overline{\mathrm{MP}}=\frac{1}{2}r$이므로

$$\lim_{\theta\to0+}\frac{g(\theta)}{\theta}=\lim_{\theta\to0+}\frac{\tan\frac{\theta}{2}}{2\theta\left(1+\tan\frac{\theta}{2}\right)}$$
$$=\lim_{\theta\to0+}\left\{\frac{\tan\frac{\theta}{2}}{\frac{\theta}{2}}\times\frac{1}{4\left(1+\tan\frac{\theta}{2}\right)}\right\}$$
$$=1\times\frac{1}{4(1+0)}=\frac{1}{4}$$

따라서

$$\lim_{\theta\to0+}\frac{f(\theta)-g(\theta)}{\theta}=\lim_{\theta\to0+}\frac{f(\theta)}{\theta}-\lim_{\theta\to0+}\frac{g(\theta)}{\theta}=\frac{1}{2}-\frac{1}{4}=\frac{1}{4}$$

즉, $a=\frac{1}{4}$이므로 $100a=25$

답 25

30

$g(x)=\int_a^x f(t)\,dt$의 양변을 x에 대하여 미분하면 $g'(x)=f(x)$

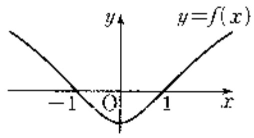
조건 (가)에서 $g'(1)=0$이므로 $f(1)=\ln 2-\ln(a^2+1)=0$

$a^2+1=2$에서 $a=1$ 또는 $a=-1$

$f(x)=\ln(x^2+1)-\ln 2$에서 $f'(x)=\dfrac{2x}{x^2+1}$

이므로 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	극소	↗



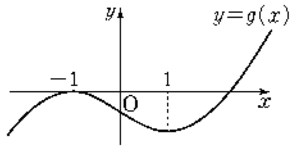
이때 $f(-1)=0$, $f(1)=0$이므로 $g'(-1)=0$, $g'(1)=0$

(i) $a=-1$일 때,

$g'(-1)=0$, $g(-1)=0$이므로

어떤 양의 실수 α에 대하여

$\int_{-1}^{\alpha} g(t)\,dt=0$이라 하면 방정식



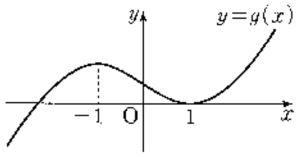
$\int_{-1}^{x} g(t)\,dt=0$의 서로 다른 모든 실근의 합은 $\alpha-1$이고, $\alpha>1$에서 $\alpha+(-1)>0$이 되어 조건 (나)를 만족시키지 않는다.

(ii) $a=1$일 때,

$g'(1)=0$, $g(1)=0$이므로

어떤 음의 실수 β에 대하여

$\int_{1}^{\beta} g(t)\,dt=0$이라 하면 방정식



$\int_{1}^{x} g(t)\,dt=0$의 서로 다른 모든 실근의 합은 $\beta+1$이고, $\beta<-1$에서 $\beta+1<0$이므로 조건 (나)를 만족시킨다.

따라서 $a=1$이므로 $x^2+1=t$로 놓으면 $2x=\dfrac{dt}{dx}$

$x=1$일 때 $t=2$, $x=2$일 때 $t=5$이므로

$$\int_1^2 xg'(x)\,dx=\int_1^2 xf(x)\,dx=\int_1^2 x\{\ln(x^2+1)-\ln 2\}\,dx$$
$$=\frac{1}{2}\int_2^5(\ln t-\ln 2)\,dt=\frac{1}{2}\Big[t\ln t-t-t\ln 2\Big]_2^5$$
$$=\frac{1}{2}\{(5\ln 5-5-5\ln 2)-(2\ln 2-2-2\ln 2)\}$$
$$=\frac{1}{2}\left(5\ln\frac{5}{2}-3\right)=\frac{5}{2}\ln\frac{5}{2}-\frac{3}{2}$$

즉, $p=\frac{5}{2}$, $q=\frac{3}{2}$이므로 $40pq=40\times\frac{5}{2}\times\frac{3}{2}=150$

답 150