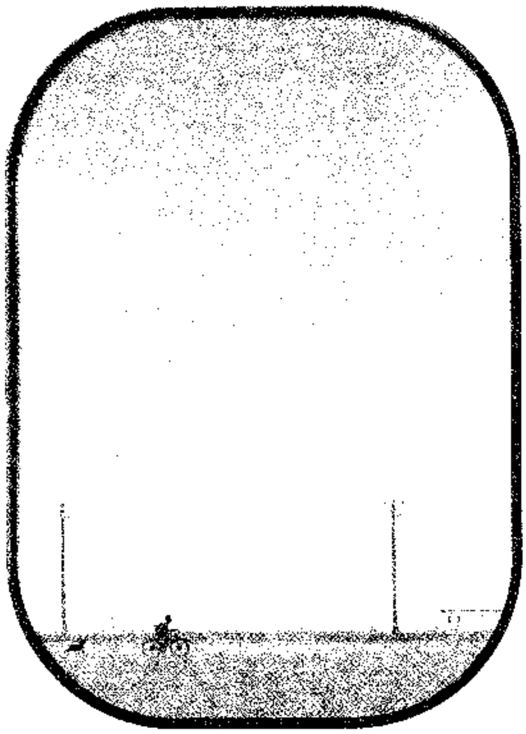
수능완성



수학영역 | **수학 Ⅰ · 수학 Ⅱ · 확률과 통계**

정답과 풀이

01 지수함수와 로그함수

정답			본문 6~15쪽
필수 유형❶ ①	01 ④	02 ③	03 ④
	04 5		
필수 유형❷ ①	05 ①	06 ④	07 16
	08 48		
필수 유형❸ 2	09 ①	10 ②	11 5
	12 ③		
필수 유형❹ ①	13 ①	14 ④	15 37
필수 유형❺ ②	16 ②	17 8	18 ⑤
필수 유형❻ ⑤	19 ③	20 ④	21 ③
필수 유형❼ ③	22 ③	23 ②	24 7
필수 유형❽ 15	25 4	26 ①	27 6
필수 유형❾ 192	28 ⑤	29 ①	30 22
필수 유형❿ ④	31 ①	32 ②	33 23

필수 유형 ❶

$-n^2+9n-18=-(n^2-9n+18)=-(n-3)(n-6)$이므로

$-n^2+9n-18$의 n제곱근 중에서 음의 실수는

$-n^2+9n-18<0$일 때, 홀수 n에 대하여 $\sqrt[n]{-n^2+9n-18}$이고

$-n^2+9n-18>0$일 때, 짝수 n에 대하여 $-\sqrt[n]{-n^2+9n-18}$이다.

(i) $-n^2+9n-18<0$일 때

$-(n-3)(n-6)<0$에서 $(n-3)(n-6)>0$이므로

$n<3$ 또는 $n>6$

즉, $2\le n<3$ 또는 $6<n\le 11$을 만족시키는 홀수는 7, 9, 11이다.

(ii) $-n^2+9n-18>0$일 때

$-(n-3)(n-6)>0$에서 $(n-3)(n-6)<0$이므로 $3<n<6$

즉, 이를 만족시키는 짝수는 4이다.

(i), (ii)에 의하여 조건을 만족시키는 모든 n의 값의 합은

$4+7+9+11=31$

답 ①

01

$(\sqrt[3]{5})^3=5$, $\sqrt[3]{27}\times\sqrt[4]{16}=\sqrt[3]{3^3}\times\sqrt[4]{2^4}=3\times2=6$,

$\sqrt[3]{\sqrt{64}}=\sqrt[6]{64}=\sqrt[6]{2^6}=2$이므로

$(\sqrt[3]{5})^3+\sqrt[3]{27}\times\sqrt[4]{16}-\sqrt[3]{\sqrt{64}}=5+6-2=9$

답 ④

02

$a>0$, $b>0$일 때, 지수법칙에 의하여 $(ab)^{12}=a^{12}b^{12}$

$a^3=\sqrt[4]{5}$이므로 $a^{12}=(a^3)^4=(\sqrt[4]{5})^4=5$

$b^4=\sqrt[3]{3}$이므로 $b^{12}=(b^4)^3=(\sqrt[3]{3})^3=3$

따라서 $(ab)^{12}=a^{12}b^{12}=5\times3=15$

답 ③

03

m^2-4m-5의 네제곱근 중 실수인 것이 존재하지 않으려면

$m^2-4m-5<0$이어야 한다.

$m^2-4m-5<0$에서 $(m+1)(m-5)<0$이므로

$-1<m<5$

따라서 조건을 만족시키는 자연수 m의 최댓값은 4이다.

답 ④

04

$x^2-65x+64=0$에서 $(x-1)(x-64)=0$

$x=1$ 또는 $x=64$이므로 $A=\{1, 64\}$

또한 $x^2-7x+10<0$에서 $(x-2)(x-5)<0$

$2<x<5$이므로 부등식 $x^2-7x+10<0$을 만족시키는 자연수 x의 값은 3, 4이다. 즉, $B=\{3, 4\}$

(i) $a=1$, $n=3$인 경우

$x^3=1$에서 $x^3-1=0$

$(x-1)(x^2+x+1)=0$

$x=1$ 또는 $x=\frac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}$이므로 1의 세제곱근 중 실수인 것의 개수는 1이다.

(ii) $a=1$, $n=4$인 경우

$x^4=1$에서 $x^4-1=0$

$(x^2-1)(x^2+1)=0$

$x=\pm1$ 또는 $x=\pm i$이므로 1의 네제곱근 중 실수인 것의 개수는 2이다.

(iii) $a=64$, $n=3$인 경우

$x^3=64$에서 $x^3-64=0$

$(x-4)(x^2+4x+16)=0$

$x=4$ 또는 $x=-2\pm2\sqrt{3}i$이므로 64의 세제곱근 중 실수인 것의 개수는 1이다.

(iv) $a=64$, $n=4$인 경우

$x^4=64$에서 $x^4-64=0$

$(x^2-8)(x^2+8)=0$

$x=\pm2\sqrt{2}$ 또는 $x=\pm2\sqrt{2}i$이므로 64의 네제곱근 중 실수인 것의 개수는 2이다.

(i)~(iv)에서 1은 1의 세제곱근이면서 동시에 1의 네제곱근이므로 집합 C의 원소 중에서 실수인 것의 개수는 $1+2+1+2-1=5$이다.

답 5

필수 유형 ❷

$\frac{1}{\sqrt[4]{3}}=3^{-\frac{1}{4}}$이므로

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sqrt[4]{3}}\times3^{-\frac{7}{4}}&=3^{-\frac{1}{4}}\times3^{-\frac{7}{4}}\\&=3^{-\frac{1}{4}-\frac{7}{4}}\\&=3^{-2}=\frac{1}{9}\end{aligned}$$

답 ①

05

$(2-\sqrt{2})^{1+\sqrt{3}}\times(2-\sqrt{2})^{1-\sqrt{3}}+2^{\frac{5}{2}}=(2-\sqrt{2})^{(1+\sqrt{3})+(1-\sqrt{3})}+4\sqrt{2}$

$=(2-\sqrt{2})^2+4\sqrt{2}$

$=4-4\sqrt{2}+2+4\sqrt{2}=6$

답 ①

06

$2^{\frac{4}{3}}\times6^{\frac{2}{3}}=2^{\frac{4}{3}}\times(2\times3)^{\frac{2}{3}}=2^{\frac{4}{3}}\times2^{\frac{2}{3}}\times3^{\frac{2}{3}}=(2^6\times3^2)^{\frac{1}{3}}=\sqrt[3]{2^6\times3^2}$

따라서 $p=6$, $q=2$이므로

$p+q=6+2=8$

답 ④

07

$f(x)=x\sqrt{x}=x^{\frac{3}{2}}$이므로 $f(f(n))=\left(n^{\frac{3}{2}}\right)^{\frac{3}{2}}=n^{\frac{3}{2}\times\frac{3}{2}}=n^{\frac{9}{4}}$

$n^{\frac{9}{4}}$의 값이 1보다 큰 자연수가 되려면 n은 1보다 큰 자연수 k에 대하여 $n=k^4$의 꼴이어야 한다. 즉, 자연수 n의 최솟값은 1보다 큰 자연수의 네제곱의 꼴로 표현되는 자연수 중 가장 작은 값이므로

$2^4=16$

답 16

08

한 내각의 크기가 60°이고 한 변의 길이가 $2^{\frac{n}{3}}$인 직각삼각형의 세 꼭짓점을 A, B, C라 하면 직각삼각형 ABC는 다음과 같다.

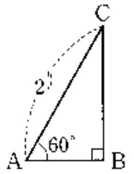
(i) 그림과 같이 길이가 $2^{\frac{n}{3}}$인 변이 빗변인 직각삼각형일 때

$\angle A=60°$, $\overline{AC}=2^{\frac{n}{3}}$이라 하면

$\overline{AB}=2^{\frac{n}{3}}\times\cos 60°$, $\overline{BC}=2^{\frac{n}{3}}\times\sin 60°$

이므로 직각삼각형 ABC의 넓이는

$\frac{1}{2}\times\left(2^{\frac{n}{3}}\times\cos 60°\right)\times\left(2^{\frac{n}{3}}\times\sin 60°\right)=\frac{\sqrt{3}}{8}\times2^{\frac{2n}{3}}$



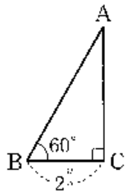
(ii) 그림과 같이 길이가 $2^{\frac{n}{3}}$인 변의 양 끝 각의 크기가 60°, 90°인 직각삼각형일 때

$\angle B=60°$, $\overline{BC}=2^{\frac{n}{3}}$이라 하면

$\overline{AC}=2^{\frac{n}{3}}\times\tan 60°$

이므로 직각삼각형 ABC의 넓이는

$\frac{1}{2}\times2^{\frac{n}{3}}\times\left(2^{\frac{n}{3}}\times\tan 60°\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}\times2^{\frac{2n}{3}}$



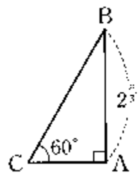
(iii) 그림과 같이 길이가 $2^{\frac{n}{3}}$인 변과 마주 보는 각의 크기가 60°인 직각삼각형일 때

$\angle C=60°$, $\overline{AB}=2^{\frac{n}{3}}$이라 하면

$\overline{AC}\times\tan 60°=2^{\frac{n}{3}}$에서 $\overline{AC}=2^{\frac{n}{3}}\times\frac{1}{\sqrt{3}}$

이므로 직각삼각형 ABC의 넓이는

$\frac{1}{2}\times2^{\frac{n}{3}}\times\left(2^{\frac{n}{3}}\times\frac{1}{\sqrt{3}}\right)=\frac{\sqrt{3}}{6}\times2^{\frac{2n}{3}}$



(i), (ii), (iii)에 의하여 $f(n)=\frac{\sqrt{3}}{2}\times2^{\frac{2n}{3}}$이므로

$f(3)\times f(6)=\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\times2^2\right)\times\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\times2^4\right)=48$

답 48

필수 유형 ❸

$\log_4\frac{2}{3}+\log_4 24=\log_4\left(\frac{2}{3}\times24\right)=\log_4 16=2$

답 2

09

로그의 성질에 의하여

$\log_2(\sqrt{17}+1)+\log_2(\sqrt{17}-1)-\log_2 8$

$=\log_2\{(\sqrt{17}+1)(\sqrt{17}-1)\}-3$

$=\log_2 16-3=4-3=1$

답 ①

10

$\log_{(x-2)}\{-x^2+(2a+3)x-a(a+3)\}$이 정의되기 위해서는 밑의 조건 $x-2\neq1$, $x-2>0$과 진수의 조건

$-x^2+(2a+3)x-a(a+3)>0$을 모두 만족시켜야 한다.

밑의 조건에 의하여 $x\neq3$, $x>2$ …… ㉠

진수의 조건에 의하여

$-x^2+(2a+3)x-a(a+3)=-(x-a)\{x-(a+3)\}>0$

$(x-a)\{x-(a+3)\}<0$에서

$a<x<a+3$ …… ㉡

a가 자연수이므로 ㉡을 만족시키는 자연수 x의 값은 $a+1$, $a+2$이다.

(i) $a+1=4$일 때

$a=3$이므로 ㉠, ㉡에 의하여 $3<x<6$이므로 주어진 로그의 값이 정의되도록 하는 자연수 x의 값은 4, 5이다.

즉, 조건을 만족시키지 않는다.

(ii) $a+2=4$일 때

$a=2$이므로 ㉠, ㉡에 의하여 $2<x<5$, $x\neq3$이므로 주어진 로그의 값이 정의되도록 하는 자연수 x의 값은 4뿐이다.

즉, 조건을 만족시킨다.

(i), (ii)에 의하여 $a=2$

답 ②

11

$a=2^m$, $b=3^{3n+1}$이므로

$\log_2(\log_2 a)+\log_2(\log_3 b)=\log_2(\log_2 2^m)+\log_2(\log_3 3^{3n+1})$

$=\log_2 m+\log_2(3n+1)$

$=\log_2 m(3n+1)$

이므로 $\log_2 m(3n+1)=4$에서 $m(3n+1)=16$

$3n+1$이 16의 양의 약수이어야 하므로 자연수 n의 값은 1 또는 5이다.

$n=1$이면 $m=4$이고 $n=5$이면 $m=1$이므로 $m+n$의 최솟값은 5이다.

답 5

12

두 물체 A, B의 단면의 넓이를 각각 S_A, S_B라 하고 두께를 각각 L_A, L_B라 하자.

물체 A의 열전도율 P_A는 다음을 만족시킨다.

$\log_a P_A = k + \log_a \dfrac{S_A T}{L_A}$ $\qquad \cdots\cdots$ ㉠

물체 B는 물체 A에 비하여 단면의 넓이를 25 % 확장시키고 두께를 50 % 증가시켰으므로

$S_B = \left(1+\dfrac{25}{100}\right)S_A = \dfrac{5}{4}S_A$, $L_B = \left(1+\dfrac{50}{100}\right)L_A = \dfrac{3}{2}L_A$

이고 물체 B의 열전도율 P_B는 다음을 만족시킨다.

$$\log_a P_B = k + \log_a \frac{S_B T}{L_B} = k + \log_a \frac{\frac{5}{4}S_A T}{\frac{3}{2}L_A}$$

$$= k + \log_a \frac{S_A T}{L_A} + \log_a \frac{5}{6} \qquad \cdots\cdots ㉡$$

㉠, ㉡에서 $\log_a P_B - \log_a P_A = \log_a \dfrac{5}{6}$

즉, $\log_a \dfrac{P_B}{P_A} = \log_a \dfrac{5}{6}$이므로 $\dfrac{P_B}{P_A} = \dfrac{5}{6}$

답 ③

필수 유형 ❹

$\log_a b = \dfrac{\log_b c}{2} = \dfrac{\log_c a}{4} = k$라 하면 $k>0$이고

$\log_a b = k$, $\log_b c = 2k$, $\log_c a = 4k$

$\log_a b \times \log_b c \times \log_c a = 1$에서 $k \times 2k \times 4k = 8k^3 = 1$

$k^3 = \dfrac{1}{8}$, $k = \dfrac{1}{2}$이므로

$\log_a b + \log_b c + \log_c a = k + 2k + 4k = 7k = \dfrac{7}{2}$

답 ①

13

$$\log_3 6 \times \log_4 81 - \frac{1}{\log_3 2} = \frac{\log 6}{\log 3} \times \frac{\log 81}{\log 4} - \log_2 3$$

$$= \frac{\log 6}{\log 3} \times \frac{4\log 3}{2\log 2} - \log_2 3$$

$$= \frac{2\log 6}{\log 2} - \log_2 3$$

$$= 2\log_2 6 - \log_2 3$$

$$= \log_2 36 - \log_2 3$$

$$= \log_2 12$$

이므로 $k = \log_2 12$

따라서 $2^k = 12$

답 ①

14

수직인 두 직선의 기울기의 곱이 -1이므로

두 점 $(\log_3 2,\ \log_9 a)$, $(\log_3 54,\ \log_9 a^2)$을 지나는 직선의 기울기는 $\dfrac{1}{2}$이다.

따라서 $\dfrac{\log_9 a^2 - \log_9 a}{\log_3 54 - \log_3 2} = \dfrac{\log_9 a}{\log_3 27} = \dfrac{\log_9 a}{3} = \dfrac{1}{2}$에서

$\log_9 a = \dfrac{3}{2}$이므로

$a = 9^{\frac{3}{2}} = (3^2)^{\frac{3}{2}} = 3^{2\times\frac{3}{2}} = 3^3 = 27$

답 ④

15

$\dfrac{1}{\log_9 27} = \dfrac{1}{\log_{3^2} 3^3} = \dfrac{1}{\frac{3}{2}} = \dfrac{2}{3}$

$\dfrac{1}{3}\log_b b^5 = \dfrac{5}{3}\log_b b = \dfrac{5}{3}$

$\log_a a^{\frac{2}{3}} = \dfrac{2}{3}\log_a a = \dfrac{2}{3}$이므로

$A = \left\{\log_a b,\ \dfrac{2}{3},\ \dfrac{5}{3}\right\}$, $B = \left\{2,\ \dfrac{2}{3},\ \log_2 a + \log_2 b\right\}$

$A = B$이기 위해서는 $\log_a b = 2$, $\log_2 a + \log_2 b = \dfrac{5}{3}$이어야 한다.

$\log_a b = 2$에서 $\dfrac{\log_2 b}{\log_2 a} = 2$이므로

$\log_2 b = 2\log_2 a$ $\qquad \cdots\cdots$ ㉠

$\log_2 a + \log_2 b = \dfrac{5}{3}$에 ㉠을 대입하면 $\log_2 a = \dfrac{5}{9}$

㉠에서 $\log_2 b = \dfrac{10}{9}$

이때 $\log_a 2 + \log_b 2 = \dfrac{1}{\log_2 a} + \dfrac{1}{\log_2 b} = \dfrac{9}{5} + \dfrac{9}{10} = \dfrac{27}{10}$

따라서 $p = 10$, $q = 27$이므로

$p + q = 10 + 27 = 37$

답 37

필수 유형 ❺

곡선 $y = 2^{x+2} - 1$을 x축에 대하여 대칭이동한 곡선은

$y = -2^{x+2} + 1$이므로 $f(x) = -2^{x+2} + 1$

곡선 $y = f(x)$와 y축이 만나는 점의 좌표가 $(0,\ a)$이므로

$a = -2^{0+2} + 1$, $a = -3$

한편, 점근선은 직선 $y = 1$이므로 $b = 1$

따라서 $a + b = (-3) + 1 = -2$

답 ②

16

곡선 $y = 2^{x+2} - 3$을 x축의 방향으로 -1만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동하면 $y - 2 = 2^{(x+1)+2} - 3$, 즉 $y = 2^{x+3} - 1$이므로

$f(x) = 2^{x+3} - 1$

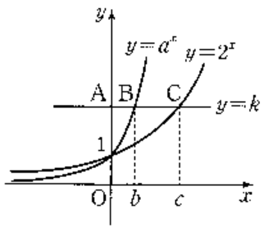
이때 점근선은 직선 $y = -1$이므로 $a = -1$

따라서 $f(a) = f(-1) = 2^2 - 1 = 3$이므로

$a + f(a) = -1 + 3 = 2$

답 ②

17



두 점 B, C의 x좌표를 각각

b, c $(0<b<c)$라 하면

$\overline{AB} : \overline{BC} = 1 : 2$이므로

$c = 3b$ $\qquad \cdots\cdots$ ㉠

두 점 B, C의 y좌표는 서로 같으므로

$a^b = 2^c$ $\qquad \cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡에서

$a^b = 2^{3b} = 8^b$ $\qquad \cdots\cdots$ ㉢

따라서 $a>2$, $b>0$이므로 ㉢에서 $a=8$

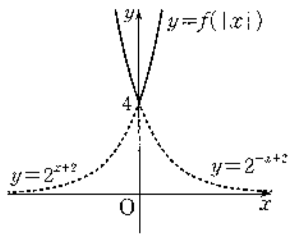
답 8

18

ㄱ. $x\ge 0$일 때, $|x|=x$이므로 $f(|x|)=f(x)=2^{x+2}$이고

$x<0$일 때, $|x|=-x$이므로 $f(|x|)=f(-x)=2^{-x+2}$이다.

따라서 함수 $y=f(|x|)$의 그래프는 그림과 같다.



따라서 치역은 $\{y|y\ge 4\}$이다. (참)

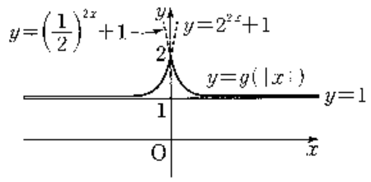
ㄴ. (i) $x\ge 0$일 때, $|x|=x$이므로

$g(|x|)=g(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^{2x}+1$

(ii) $x<0$일 때, $|x|=-x$이므로

$g(|x|)=g(-x)=\left(\frac{1}{2}\right)^{-2x}+1=2^{2x}+1$

$g(0)=2$이므로 (i), (ii)에 의하여 함수 $y=g(|x|)$의 그래프는 그림과 같다.



따라서 함수 $y=g(|x|)$의 최댓값은 2이므로 모든 실수 x에 대하여 $g(|x|)\le 2$이다. (참)

ㄷ. ㄱ에서 함수 $y=f(|x|)$의 그래프가 y축과 만나는 점은 점 $(0, 4)$이고, ㄴ에서 함수 $y=g(|x|)$의 그래프가 y축과 만나는 점은 점 $(0, 2)$이므로 $g(0)=2$

이때 두 함수 $y=f(|x|)$, $y=g(|x|)+k$의 그래프가 y축 위의 점에서 만나므로 함수 $y=g(|x|)+k$의 그래프가 점 $(0, 4)$를 지나야 한다.

따라서 $4=g(0)+k$에서 $k=4-g(0)$이므로 $k=2$이다.

함수 $y=g(|x|)$의 그래프의 점근선은 직선 $y=1$이고 함수 $y=g(|x|)+2$의 그래프는 함수 $y=g(|x|)$의 그래프를 y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 그래프이므로 점근선은 직선 $y=3$이다.

(참)

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

답 ⑤

필수 유형 ❻

$\left(\frac{1}{9}\right)^x=(3^{-2})^x=3^{-2x}$이므로 부등식 $\left(\frac{1}{9}\right)^x<3^{21-4x}$에서 $3^{-2x}<3^{21-4x}$이다.

밑 3은 1보다 크므로 $-2x<21-4x$에서

$x<\frac{21}{2}=10.5$

따라서 부등식을 만족시키는 자연수 x의 값은 1, 2, 3, $\cdots$, 10이고 그 개수는 10이다.

답 ⑤

19

$3^x=t$라 하면 $t>0$이고 $9^x=t^2$이므로 방정식 $2\times 9^x+63=(3^x+6)^2$은

$2t^2+63=(t+6)^2$, $t^2-12t+27=0$, $(t-3)(t-9)=0$

$t=3$ 또는 $t=9$

따라서 $3^x=3$에서 $x=1$이고 $3^x=9$에서 $x=2$이므로 모든 실수 x의 값의 합은

$1+2=3$

답 ③

20

곡선 $y=2^x$과 직선 $x=n$이 만나는 점 A_n의 좌표는 $(n, 2^n)$

곡선 $y=(\sqrt{2})^x$과 직선 $x=n$이 만나는 점 B_n의 좌표는 $\left(n, 2^{\frac{n}{2}}\right)$

$f(n)=\frac{1}{2}\times\overline{OP_n}\times\overline{A_nP_n}=\frac{1}{2}\times n\times 2^n=\frac{n}{2}\times 2^n$

$g(n)=\frac{1}{2}\times\overline{OP_n}\times\overline{B_nP_n}=\frac{1}{2}\times n\times 2^{\frac{n}{2}}=\frac{n}{2}\times 2^{\frac{n}{2}}$

부등식 $f(n)-4\times g(n)\ge 16n$에서

$\frac{n}{2}\times 2^n-4\times\frac{n}{2}\times 2^{\frac{n}{2}}\ge 16n$, $2^n-4\times 2^{\frac{n}{2}}\ge 32$

$2^{\frac{n}{2}}=t$라 하면 $t>0$이고 $t^2-4t-32\ge 0$

$(t+4)(t-8)\ge 0$이므로 $t\ge 8$

즉, $2^{\frac{n}{2}}\ge 8=2^3$이므로 $\frac{n}{2}\ge 3$, $n\ge 6$

따라서 자연수 n의 최솟값은 6이다.

답 ④

21

부등식 $\left(\frac{1}{2}\right)^{-x^2-4x+1}\le 4^{x-3}$에서

$2^{x^2-4x-1}\le 2^{2x-6}$이고 밑 2가 1보다 크므로

$x^2-4x-1\le 2x-6$

$x^2-6x+5\le 0$, $(x-1)(x-5)\le 0$, $1\le x\le 5$

따라서 부등식을 만족시키는 정수 x의 값은 1, 2, 3, 4, 5이므로

$A=\{1, 2, 3, 4, 5\}$

$a\in A$에 대하여

$x=3^{a^2}\times\left(\frac{1}{3}\right)^{6a-k}=3^{a(a-6)+k}$이므로

$a=1$일 때, $x=3^{-5+k}$

$a=2$일 때, $x=3^{-8+k}$

$a=3$일 때, $x=3^{-9+k}$

$a=4$일 때, $x=3^{-8+k}$

$a=5$일 때, $x=3^{-5+k}$

집합 $B=\{3^{-5+k}, 3^{-8+k}, 3^{-9+k}\}$이므로

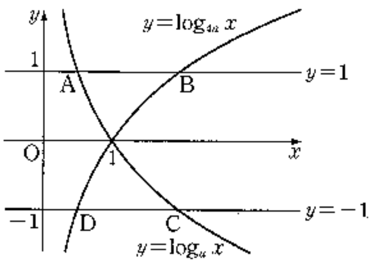
집합 B의 모든 원소의 곱은

$3^{-5+k}\times 3^{-8+k}\times 3^{-9+k}=3^{-22+3k}$

즉, $3^{-22+3k}=3^2$에서 $-22+3k=2$이므로 $k=8$

답 ③

《 필수 유형 ❼ 》



ㄱ. $\mathrm{A}(a,\ 1)$, $\mathrm{B}(4a,\ 1)$이므로 선분 AB를 $1:4$로 외분하는 점의 좌표는 $\left(\frac{4a-4a}{1-4},\ \frac{1-4}{1-4}\right)$, 즉 $(0,\ 1)$이다. (참)

ㄴ. 사각형 ABCD가 직사각형이면 점 A와 점 D, 점 B와 점 C는 x축에 대하여 대칭이므로 x좌표가 각각 같다. 한편, 점 D의 좌표는 $\left(\frac{1}{4a},\ -1\right)$이므로 $a=\frac{1}{4a}$에서 $4a^2=1$이고 $\frac{1}{4}<a<1$이므로 $a=\frac{1}{2}$ (참)

ㄷ. 네 점의 좌표가 각각 $\mathrm{A}(a,\ 1)$, $\mathrm{B}(4a,\ 1)$, $\mathrm{C}\left(\frac{1}{a},\ -1\right)$, $\mathrm{D}\left(\frac{1}{4a},\ -1\right)$이므로 $\overline{\mathrm{AB}}=3a$, $\overline{\mathrm{CD}}=\frac{3}{4a}$

$\overline{\mathrm{AB}}<\overline{\mathrm{CD}}$이면 $3a<\frac{3}{4a}$에서 $a^2<\frac{1}{4}$이고, $\frac{1}{4}<a<1$이므로 $\frac{1}{4}<a<\frac{1}{2}$ (거짓)

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

답 ③

22

곡선 $y=\log_3(ax+b)$가 점 $(0,\ 2)$를 지나므로 $2=\log_3 b$에서 $b=9$

곡선 $y=\log_3(ax+9)$의 점근선이 직선 $x=-\frac{9}{a}$이므로

$-\frac{9}{a}=-3$에서 $a=3$

따라서 주어진 곡선은 $y=\log_3(3x+9)$이고 이 곡선이 점 $(2,\ k)$를 지나므로

$k=\log_3(3\times 2+9)=\log_3 15=\log_3(3\times 5)=1+\log_3 5$

답 ③

23

곡선 $y=\log_a x$와 직선 $x=n$이 만나는 점의 x좌표가 n이므로 점 P_n의 좌표는 $(n,\ \log_a n)$이고 점 P_{n+1}의 좌표는 $(n+1,\ \log_a(n+1))$이다.

주어진 직사각형은 선분 $\mathrm{P}_n\mathrm{P}_{n+1}$을 대각선으로 하고 모든 변이 x축 또는 y축과 평행하므로 그 넓이 $f(n)$은

$$f(n)=\{(n+1)-n\}\times\{\log_a(n+1)-\log_a n\}$$
$$=\log_a(n+1)-\log_a n=\log_a\frac{n+1}{n}$$

따라서

$f(2)+f(3)+f(4)+f(5)$

$=\log_a\frac{3}{2}+\log_a\frac{4}{3}+\log_a\frac{5}{4}+\log_a\frac{6}{5}=\log_a\left(\frac{3}{2}\times\frac{4}{3}\times\frac{5}{4}\times\frac{6}{5}\right)$

$=\log_a 3=3$

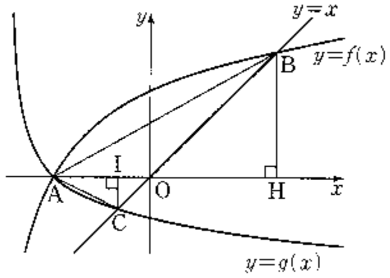
이므로 $a^3=3$에서 $a=\sqrt[3]{3}$

답 ②

24

함수 $g(x)=\log_{\frac{1}{3}}(x+4)$의 그래프가 x축과 만나는 점의 좌표는 $(-3,\ 0)$이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프가 점 $(-3,\ 0)$을 지난다.

즉, $0=\log_a(-3-m)$에서 $m=-4$이므로 $f(x)=\log_a(x+4)$



점 B는 직선 $y=x$ 위의 점이므로 점 B의 좌표를 $(k,\ k)\ (k>0)$이라 하고 점 B에서 x축에 내린 수선의 발을 H, 점 $\mathrm{C}(-1,\ -1)$에서 x축에 내린 수선의 발을 I라 하면 $\overline{\mathrm{CI}}=1$이고 $\overline{\mathrm{BH}}=k$

한편, 삼각형 ABC의 넓이는 원점 O에 대하여 두 삼각형 OAC와 OAB의 넓이의 합이므로

$$(\text{삼각형 ABC의 넓이})=\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{OA}}\times\overline{\mathrm{CI}}+\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{OA}}\times\overline{\mathrm{BH}}$$
$$=\frac{1}{2}\times 3\times 1+\frac{1}{2}\times 3\times k=\frac{3}{2}(1+k)$$

즉, $\frac{3}{2}(1+k)=\frac{15}{2}$에서 $k=4$

점 B가 곡선 $y=f(x)$ 위의 점이므로 $4=\log_a(4+4)$에서 $a^4=8$

$a>1$이므로 $a=2^{\frac{3}{4}}$

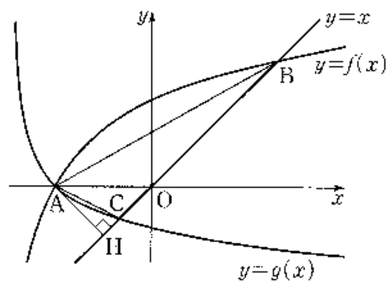
따라서 $p=4$, $q=3$이므로 $p+q=4+3=7$

답 7

다른 풀이

함수 $g(x)=\log_{\frac{1}{3}}(x+4)$의 그래프가 x축과 만나는 점의 좌표는 $(-3,\ 0)$이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프가 점 $(-3,\ 0)$을 지난다.

즉, $0=\log_a(-3-m)$에서 $m=-4$이므로 $f(x)=\log_a(x+4)$



한편, 점 $\mathrm{A}(-3,\ 0)$에서 직선 $y=x$, 즉 $x-y=0$에 내린 수선의 발을 H라 하면

$\overline{\mathrm{AH}}=\frac{|-3-0|}{\sqrt{2}}=\frac{3\sqrt{2}}{2}$

또한 점 B의 좌표를 $(k,\ k)$라 하면 $k>0$이고 $\mathrm{C}(-1,\ -1)$이므로

$\overline{\mathrm{BC}}=\sqrt{2(k+1)^2}=\sqrt{2}(k+1)$

삼각형 ABC의 넓이는 $\frac{1}{2}\times\sqrt{2}(k+1)\times\frac{3\sqrt{2}}{2}=\frac{15}{2}$에서 $k=4$

점 $\mathrm{B}(4,\ 4)$가 곡선 $y=f(x)$ 위의 점이므로 $4=\log_a(4+4)$에서 $a^4=8$

$a>1$이므로 $a=2^{\frac{3}{4}}$

따라서 $p=4$, $q=3$이므로 $p+q=4+3=7$

필수 유형 ❽

로그의 진수의 조건에 의하여 $f(x)>0$, $x>1$
$f(x)>0$에서 $0<x<7$이고, $x>1$이므로 $1<x<7$
$\log_3 f(x)+\log_{\frac{1}{3}}(x-1)\le 0$에서
$\log_3 f(x)-\log_3(x-1)\le 0$
$\log_3 f(x)\le \log_3(x-1)$
$f(x)\le x-1$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠
$1<x<7$에서 ㉠을 만족시키는 x의 값의 범위는 $4\le x<7$
따라서 부등식을 만족시키는 모든 자연수 x의 값은 4, 5, 6이고 그 합은
$4+5+6=15$

답 15

25

로그의 진수의 조건에 의하여 $x>\frac{1}{3}$, $x>3$에서 $x>3$
$\log_4(3x-1)+\log_4(x-3)=\log_4 11$에서
$\log_4(3x-1)(x-3)=\log_4 11$이므로 $(3x-1)(x-3)=11$
$3x^2-10x-8=0$, $(3x+2)(x-4)=0$
따라서 $x=-\frac{2}{3}$ 또는 $x=4$
$x>3$이므로 구하는 실수 x의 값은 4이다.

답 4

26

$\log_3\frac{x}{3}\times\log_3\frac{x}{9}=(\log_3 x-\log_3 3)(\log_3 x-\log_3 9)$
$=(\log_3 x-1)(\log_3 x-2)$
$\log_3 x=t$라 하면
$(t-1)(t-2)<6$에서 $t^2-3t-4<0$
$(t+1)(t-4)<0$이므로 $-1<t<4$
즉, $-1<\log_3 x<4$, $\frac{1}{3}<x<81$
따라서 부등식을 만족시키는 자연수 x의 최댓값은 80이다.

답 ①

27

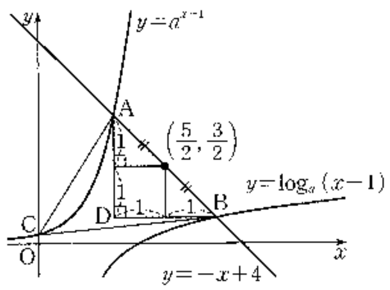
사각형 ABDC는 두 변 AB와 CD가 평행한 사다리꼴이다.
$\overline{\mathrm{AB}}=\log_4 n-\log_{\frac{1}{2}} n=\frac{1}{2}\log_2 n+\log_2 n=\frac{3}{2}\log_2 n$
$\overline{\mathrm{CD}}=\log_4 m-\log_{\frac{1}{2}} m=\frac{1}{2}\log_2 m+\log_2 m=\frac{3}{2}\log_2 m$
사다리꼴 ABDC의 넓이는
$\frac{1}{2}\times\left(\frac{3}{2}\log_2 m+\frac{3}{2}\log_2 n\right)\times(m-n)$이므로
$\frac{1}{2}\times\left(\frac{3}{2}\log_2 m+\frac{3}{2}\log_2 n\right)\times(m-n)=\frac{9}{2}$
$\frac{3}{4}(m-n)\log_2 mn=\frac{9}{2}$
$\log_2 mn=\frac{6}{m-n}$
$mn=2^{\frac{6}{m-n}}$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

이때 m, n이 2 이상의 자연수이고 $m>n$이므로 $m-n$은 자연수이다.
mn은 자연수이므로 ㉠을 만족시키기 위해서는 $m-n$이 6의 양의 약수이어야 한다.
(i) $m-n=1$일 때, $m=n+1$이고
$mn=64$에서 $n(n+1)=64$, $n^2+n-64=0$
이때 이를 만족시키는 2 이상의 자연수 n은 존재하지 않는다.
(ii) $m-n=2$일 때, $m=n+2$이고
$mn=8$에서 $n(n+2)=8$, $n^2+2n-8=0$, $(n+4)(n-2)=0$
n은 2 이상의 자연수이므로 $n=2$이고 $m=4$
(iii) $m-n=3$일 때, $m=n+3$이고
$mn=4$에서 $n(n+3)=4$, $n^2+3n-4=0$, $(n+4)(n-1)=0$
이때 이를 만족시키는 2 이상의 자연수 n은 존재하지 않는다.
(iv) $m-n=6$일 때, $m=n+6$이고
$mn=2$에서 $n(n+6)=2$, $n^2+6n-2=0$
이때 이를 만족시키는 2 이상의 자연수 n은 존재하지 않는다.
(i)~(iv)에 의하여 $m=4$, $n=2$이므로
$m+n=4+2=6$

답 6

필수 유형 ❾

두 곡선 $y=a^{x-1}$, $y=\log_a(x-1)$은 두 곡선 $y=a^x$, $y=\log_a x$를 x축의 방향으로 각각 1만큼 평행이동한 것이다. 두 곡선 $y=a^x$, $y=\log_a x$는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로 두 곡선 $y=a^x$, $y=\log_a x$를 x축의 방향으로 각각 1만큼 평행이동한 두 곡선 $y=a^{x-1}$, $y=\log_a(x-1)$은 직선 $y=x-1$에 대하여 대칭이다.
따라서 두 점 A, B는 두 직선 $y=x-1$과 $y=-x+4$의 교점인 점 $\left(\frac{5}{2}, \frac{3}{2}\right)$에 대하여 대칭이다.



$\overline{\mathrm{AB}}=2\sqrt{2}$이므로 그림의 직각이등변삼각형 ADB에서
$\mathrm{A}\left(\frac{3}{2}, \frac{5}{2}\right)$, $\mathrm{B}\left(\frac{7}{2}, \frac{1}{2}\right)$임을 알 수 있다.
함수 $y=a^{x-1}$의 그래프가 점 $\mathrm{A}\left(\frac{3}{2}, \frac{5}{2}\right)$를 지나므로 $a^{\frac{1}{2}}=\frac{5}{2}$, $a=\frac{25}{4}$
따라서 점 C의 좌표는 $\left(0, \frac{4}{25}\right)$이다.
선분 AB를 밑변으로 할 때, 점 C와 직선 $x+y-4=0$ 사이의 거리는
$\frac{\left|0+\frac{4}{25}-4\right|}{\sqrt{2}}=\frac{\frac{96}{25}}{\sqrt{2}}=\frac{48\sqrt{2}}{25}$
이므로 삼각형 ABC의 넓이 S는 $S=\frac{1}{2}\times 2\sqrt{2}\times\frac{48\sqrt{2}}{25}=\frac{96}{25}$
따라서 $50\times S=50\times\frac{96}{25}=192$

답 192

28

함수 $f(x)=2^{x-1}+a$의 역함수는 $y=2^{x-1}+a$에서 x와 y를 바꾸면 $x=2^{y-1}+a$이고
$y=\log_2(x-a)+1$이므로 $a=2$
한편, 함수 $g(x)=\log_2(x-2)+1$의 그래프를 x축의 방향으로 m만큼 평행이동하면 $g(x-m)=\log_2(x-m-2)+1$이고, 이 함수의 그래프의 점근선은 $x=m+2$이므로 $m+2=5$에서 $m=3$
따라서 $a+m=2+3=5$

답 ⑤

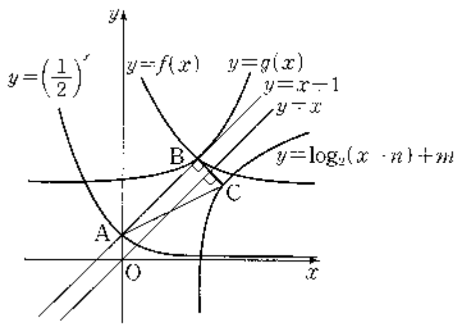
29

곡선 $y=\log_2(x-1)-1$을 x축의 방향으로 -1만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동하면 곡선 $y=\log_2 x$가 되고, 점 $(5, 1)$을 x축의 방향으로 -1만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동하면 점 $(4, 2)$가 되며 이 점은 직선 l 위의 점이다.
곡선 $y=\log_2 x$와 곡선 $y=2^x$은 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로 직선 l과 곡선 $y=2^x$이 만나는 점의 좌표는 $(2, 4)$이다.
따라서 $a=2$, $b=4$이므로 $\frac{b}{a}=\frac{4}{2}=2$

답 ①

30

점 A의 좌표는 $(0, 1)$이므로 점 B의 좌표는 $(m, 1+n)$이다.
점 B는 직선 $y=x+1$ 위의 점이므로 $1+n=m+1$에서 $m=n$이다.
함수 $y=2^x$의 그래프도 y축과 점 A에서 만나므로 $g(x)=2^{x-m}+n$이라 하면 함수 $y=g(x)$의 그래프도 점 $B(m, 1+n)$을 지난다. 또한 함수 $y=g(x)$의 역함수가 $y=\log_2(x-n)+m$이고 기울기가 -1인 직선이 두 함수 $y=g(x)$, $y=\log_2(x-n)+m$의 그래프와 만나는 점이 각각 B, C이므로 두 점 B, C는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이다.



즉, 두 점 B, C의 좌표는 각각 $(m, m+1)$, $(m+1, m)$이므로
$\overline{BC}=\sqrt{1^2+(-1)^2}=\sqrt{2}$
두 직선 AB, BC의 기울기의 곱은 -1이므로 삼각형 ABC에서 $\angle B=90°$이다.
$m>0$이고 삼각형 ABC의 넓이가 6이므로
$\frac{1}{2}\times\overline{AB}\times\overline{BC}=\frac{1}{2}\times\sqrt{2}m\times\sqrt{2}=m=6$
따라서 $f(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^{x-6}+6$이므로
$f(2)=\left(\frac{1}{2}\right)^{-4}+6=16+6=22$

답 22

필수 유형 ⑩

함수 $f(x)=2\log_{\frac{1}{2}}(x+k)$는 밑 $\frac{1}{2}$이 1보다 작으므로 $x=0$에서 최댓값을 갖고 $x=12$에서 최솟값을 갖는다.
$f(0)=2\log_{\frac{1}{2}}k=-4$에서 $\log_{\frac{1}{2}}k=-2$이므로 $k=\left(\frac{1}{2}\right)^{-2}=4$
한편, $m=f(12)=2\log_{\frac{1}{2}}(12+4)=-2\log_2 16=-8$
따라서 $k+m=4+(-8)=-4$

답 ④

31

함수 $g(x)$는 밑이 1보다 큰 지수함수이므로 실수 전체의 집합에서 x의 값이 증가하면 y의 값도 증가한다.
$g(f(x))=2^{x^2-2x+3}=2^{(x-1)^2+2}$이고 $(x-1)^2+2\ge 2$이므로
$2^{(x-1)^2+2}\ge 2^2$
따라서 함수 $y=(g\circ f)(x)$는 $x=1$일 때 최솟값 $2^2=4$를 갖는다.

답 ①

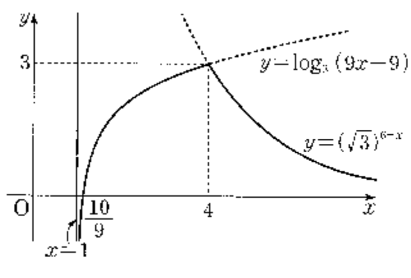
32

$a>1$이므로 두 함수 $y=2^{x+2}$, $y=\log_a(x+2)$는 모두 x의 값이 증가하면 y의 값도 증가한다.
$-1\le x_1<x_2$이면 $2^{x_1+2}<2^{x_2+2}$, $\log_a(x_1+2)<\log_a(x_2+2)$이므로 $f(x_1)<f(x_2)$이다. 즉, 함수 $f(x)$도 x의 값이 증가하면 y의 값도 증가하는 함수이므로 함수 $f(x)$는 $x=-1$에서 최솟값을 갖고, $x=2$에서 최댓값을 갖는다.
$f(-1)=2^1+\log_a 1=2$, $f(2)=2^4+\log_a 4=16+\log_a 4$
이고 $2+(16+\log_a 4)=19$에서 $\log_a 4=1$
따라서 $a=4$

답 ③

33

함수 $y=f(x)$의 그래프는 그림과 같다.



함수 $f(x)$는 $x=4$일 때 최댓값 3을 가지므로 $t\le x\le t+2$에 $x=4$가 포함되면 최댓값은 3이다. 즉, $t\le 4<t+2$에서 $2\le t\le 4$이고 이를 만족시키는 자연수 t의 값은 2, 3, 4로 그 개수는 3이다. 즉, $a=3$
$s\le x\le s+1$에서 최솟값이 1인 경우는 다음과 같이 경우를 나누어 생각할 수 있다.
(i) $s>1$, $s+1<4$일 때, $1<s<3$이고 함수 $f(x)$는 $s\le x\le s+1$에서 x의 값이 증가하면 y의 값도 증가하는 함수이므로 $x=s$일 때 최소이다.

$f(s)=\log_3(9s-9)=1$에서 $9s-9=3$, $s=\frac{4}{3}$

이는 $1<s<3$을 만족시킨다.

(ii) $1<s<4$, $s+1\geq 4$일 때, $3\leq s<4$이고 $f(3)=\log_3 18>\log_3 3=1$

$f(4)=(\sqrt{3})^2=3>1$이므로 $s\leq x\leq s+1$에서 함수 $f(x)$의 최솟값은 1보다 크다.

(iii) $s\geq 4$일 때, 함수 $f(x)$는 $s\leq x\leq s+1$에서 x의 값이 증가하면 y의 값은 감소하는 함수이므로 $x=s+1$일 때 최소이다.

즉, $f(s+1)=(\sqrt{3})^{6-(s+1)}=1$에서 $5-s=0$, $s=5$

이는 $s\geq 4$를 만족시킨다.

(i), (ii), (iii)에 의하여 $b=\frac{4}{3}\times 5=\frac{20}{3}$

따라서 $a+3b=3+3\times\frac{20}{3}=23$

답 23

02 삼각함수

정답 본문 18~25쪽

필수 유형 ❶ ③	01 ②	02 ④	03 11
필수 유형 ❷ ④	04 ⑤	05 ⑤	06 ①
	07 ⑤		
필수 유형 ❸ ③	08 24	09 ⑤	
필수 유형 ❹ ⑤	10 ①	11 ③	12 ④
필수 유형 ❺ ③	13 ④	14 ③	15 64
필수 유형 ❻ ②	16 ①	17 ③	18 ②
	19 185		
필수 유형 ❼ 21	20 ④	21 ②	22 39
필수 유형 ❽ ①	23 9	24 135	

필수 유형 ❶

부채꼴의 반지름의 길이를 r $(r>0)$이라 하면

이 부채꼴의 중심각의 크기는 $\frac{5}{9}\pi$이고 호의 길이는 $\frac{10}{3}\pi$이므로

$r\times\frac{5}{9}\pi=\frac{10}{3}\pi$

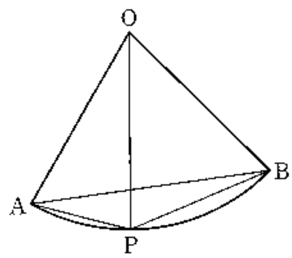
$r=6$

따라서 부채꼴의 넓이는

$\frac{1}{2}\times 6^2\times\frac{5}{9}\pi=10\pi$

답 ③

01



중심각과 원주각의 크기 사이의 관계에 의하여

$\angle\text{AOP}=2\angle\text{ABP}=\frac{\pi}{6}$,

$\angle\text{BOP}=2\angle\text{BAP}=\frac{\pi}{4}$

이므로

$\angle\text{AOB}=\angle\text{AOP}+\angle\text{BOP}$

$=\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{4}=\frac{5}{12}\pi$

부채꼴 OAB의 반지름의 길이를 r $(r>0)$이라 하면

부채꼴 OAB의 넓이가 30π이므로

$\frac{1}{2}\times r^2\times\frac{5}{12}\pi=30\pi$

$r^2=144$

$r>0$이므로 $r=12$

따라서 호 AB의 길이는

$12\times\frac{5}{12}\pi=5\pi$

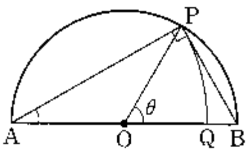
답 ②

02

선분 AB의 중점을 O라 하면

$\overline{OA}=\overline{OB}=3$

$\angle POB=\theta\ (0<\theta<\pi)$라 하면 호 BP의 길이가 π이므로



$\pi=3\times\theta,\ \theta=\frac{\pi}{3}$

삼각형 ABP에서 $\angle APB=\frac{\pi}{2}$, $\angle PAB=\frac{1}{2}\angle POB=\frac{\pi}{6}$이므로

$\overline{AP}=\overline{AB}\times\cos\frac{\pi}{6}=6\times\frac{\sqrt{3}}{2}=3\sqrt{3}$

따라서 부채꼴 APQ의 호 PQ의 길이는

$3\sqrt{3}\times\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}\pi$

답 ④

03

부채꼴 OAB의 중심각의 크기는 $\frac{4}{25}\pi$이고 호의 길이는 $\frac{8}{5}\pi$이므로

$\overline{OA}\times\frac{4}{25}\pi=\frac{8}{5}\pi,\ \overline{OA}=10$

부채꼴 OAB의 넓이는 $\frac{1}{2}\times10^2\times\frac{4}{25}\pi=8\pi$

한편, 선분 OB를 3 : 2로 내분하는 점이 C이므로

$\overline{OC}=\frac{3}{5}\times10=6$

부채꼴 OCD에서 $\angle COD=\theta$라 하면 부채꼴 OCD의 넓이는

$\frac{1}{2}\times6^2\times\theta=18\theta$

부채꼴 OAB의 넓이와 부채꼴 OCD의 넓이가 같으므로

$8\pi=18\theta$에서 $\theta=\frac{4}{9}\pi$

부채꼴 OCD에서 호 CD의 길이는

$6\times\frac{4}{9}\pi=\frac{8}{3}\pi$

따라서 $p=3,\ q=8$이므로

$p+q=3+8=11$

답 11

필수 유형 ❷

$\cos^2\theta=\frac{4}{9}$이고 $\frac{\pi}{2}<\theta<\pi$일 때 $\cos\theta<0$이므로

$\cos\theta=-\frac{2}{3}$

한편, $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$이므로

$\sin^2\theta=1-\cos^2\theta=1-\frac{4}{9}=\frac{5}{9}$

따라서 $\sin^2\theta+\cos\theta=\frac{5}{9}+\left(-\frac{2}{3}\right)=-\frac{1}{9}$

답 ④

04

$\sin\theta=-\frac{\sqrt{7}}{4}$이고 $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$이므로

$\cos^2\theta=1-\sin^2\theta=1-\left(-\frac{\sqrt{7}}{4}\right)^2=\frac{9}{16}$

$\frac{3}{2}\pi<\theta<2\pi$일 때 $\cos\theta>0$이므로 $\cos\theta=\frac{3}{4}$

따라서 $\frac{2\cos\theta}{1+\cos\theta}=\frac{2\times\frac{3}{4}}{1+\frac{3}{4}}=\frac{6}{7}$

답 ⑤

05

$\tan\theta+\frac{1}{\tan\theta}=-4$에서

$\frac{\sin\theta}{\cos\theta}+\frac{\cos\theta}{\sin\theta}=-4,\ \frac{\sin^2\theta+\cos^2\theta}{\sin\theta\cos\theta}=-4$

$\frac{1}{\sin\theta\cos\theta}=-4,\ \sin\theta\cos\theta=-\frac{1}{4}$

$$\begin{aligned}(\sin\theta-\cos\theta)^2&=\sin^2\theta-2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta\\&=(\sin^2\theta+\cos^2\theta)-2\sin\theta\cos\theta\\&=1-2\times\left(-\frac{1}{4}\right)=\frac{3}{2}\end{aligned}$$

한편, $\frac{\pi}{2}<\theta<\pi$에서 $\sin\theta>0,\ \cos\theta<0$이므로

$\sin\theta-\cos\theta>0$

따라서 $\sin\theta-\cos\theta=\sqrt{\frac{3}{2}}=\frac{\sqrt{6}}{2}$

답 ⑤

06

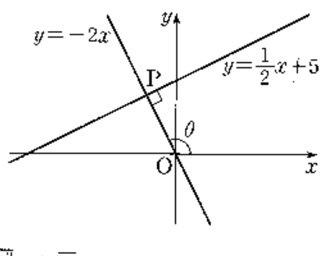
직선 OP의 기울기를 m이라 하면 직선 $y=\frac{1}{2}x+5$와 직선 OP가 서로 수직이므로

$m\times\frac{1}{2}=-1,\ m=-2$

직선 $y=\frac{1}{2}x+5$와 직선 $y=-2x$가 만나는 점의 x좌표는

$\frac{1}{2}x+5=-2x$에서 $x=-2$

이때 $y=-2\times(-2)=4$이므로 점 P의 좌표는 $(-2,\ 4)$이다.



$\overline{OP}=\sqrt{(-2)^2+4^2}=2\sqrt{5}$

$\sin\theta=\frac{4}{2\sqrt{5}}=\frac{2\sqrt{5}}{5},\ \cos\theta=\frac{-2}{2\sqrt{5}}=-\frac{\sqrt{5}}{5}$

따라서 $\sin\theta\times\cos\theta=\frac{2\sqrt{5}}{5}\times\left(-\frac{\sqrt{5}}{5}\right)=-\frac{2}{5}$

답 ①

07

선분 AP를 포함하는 부채꼴 OAP에서 $\angle AOP=\alpha$라 하자.

조건 (가)에서 부채꼴 AOP의 호 AP의 길이가 4π이므로

$6a=4\pi$, $a=\frac{2}{3}\pi$

이때 $\theta=\frac{2}{3}\pi$ 또는 $\theta=\frac{4}{3}\pi$이다.

(ⅰ) $\theta=\frac{2}{3}\pi$일 때, θ는 제2사분면의 각이므로 $\cos\theta<0$, $\tan\theta<0$

이때 $\frac{\tan\theta}{\cos\theta}>0$이므로 조건 (나)를 만족시키지 않는다.

(ⅱ) $\theta=\frac{4}{3}\pi$일 때, θ는 제3사분면의 각이므로 $\cos\theta<0$, $\tan\theta>0$

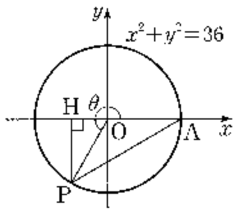
이때 $\frac{\tan\theta}{\cos\theta}<0$이므로 조건 (나)를 만족시킨다.

(ⅰ), (ⅱ)에서 $\theta=\frac{4}{3}\pi$

점 P에서 x축에 내린 수선의 발을 H라 하면

$\overline{\mathrm{OH}}=3$, $\overline{\mathrm{PH}}=3\sqrt{3}$

이므로 점 P의 좌표는 $(-3, -3\sqrt{3})$이다.



따라서 $\cos\theta=\frac{-3}{6}=-\frac{1}{2}$,

$\tan\theta=\frac{-3\sqrt{3}}{-3}=\sqrt{3}$이므로

$\cos\theta+\tan^2\theta=-\frac{1}{2}+(\sqrt{3})^2=\frac{5}{2}$

답 ⑤

다른 풀이

선분 AP를 포함하는 부채꼴 OAP에서 $\angle\mathrm{AOP}=\alpha$라 하자.

조건 (가)에서 부채꼴 AOP의 호 AP의 길이가 4π이므로

$6\alpha=4\pi$, $\alpha=\frac{2}{3}\pi$

이때 $\theta=\frac{2}{3}\pi$ 또는 $\theta=\frac{4}{3}\pi$이다.

(ⅰ) $\theta=\frac{2}{3}\pi$일 때, θ는 제2사분면의 각이므로 $\cos\theta<0$, $\tan\theta<0$

이때 $\frac{\tan\theta}{\cos\theta}>0$이므로 조건 (나)를 만족시키지 않는다.

(ⅱ) $\theta=\frac{4}{3}\pi$일 때, θ는 제3사분면의 각이므로 $\cos\theta<0$, $\tan\theta>0$

이때 $\frac{\tan\theta}{\cos\theta}<0$이므로 조건 (나)를 만족시킨다.

(ⅰ), (ⅱ)에서 $\theta=\frac{4}{3}\pi$

$\cos\theta=\cos\frac{4}{3}\pi=\cos\left(\pi+\frac{\pi}{3}\right)=-\cos\frac{\pi}{3}=-\frac{1}{2}$

$\tan\theta=\tan\frac{4}{3}\pi=\tan\left(\pi+\frac{\pi}{3}\right)=\tan\frac{\pi}{3}=\sqrt{3}$

따라서 $\cos\theta+\tan^2\theta=-\frac{1}{2}+(\sqrt{3})^2=\frac{5}{2}$

필수 유형 ❸

함수 $y=a\sin b\pi x$의 주기는 $\frac{2\pi}{b\pi}=\frac{2}{b}$

점 A의 x좌표가 점 B의 x좌표보다 작다고 하면

$\mathrm{A}\left(\frac{1}{2b}, a\right)$, $\mathrm{B}\left(\frac{5}{2b}, a\right)$이므로 $\overline{\mathrm{AB}}=\frac{5}{2b}-\frac{1}{2b}=\frac{4}{2b}=\frac{2}{b}$

삼각형 OAB의 넓이가 5이므로 $\frac{1}{2}\times\frac{2}{b}\times a=5$, $\frac{a}{b}=5$

$a=5b$ …… ㉠

직선 OA의 기울기와 직선 OB의 기울기의 곱이 $\frac{5}{4}$이므로

$\frac{a}{\frac{1}{2b}}\times\frac{a}{\frac{5}{2b}}=2ab\times\frac{2ab}{5}=\frac{4a^2b^2}{5}=\frac{5}{4}$

$a^2b^2=\frac{25}{16}$

$ab>0$이므로 $ab=\frac{5}{4}$ …… ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면 $5b^2=\frac{5}{4}$, $b^2=\frac{1}{4}$

$b>0$이므로 $b=\frac{1}{2}$

$b=\frac{1}{2}$을 ㉠에 대입하면 $a=\frac{5}{2}$

따라서 $a+b=\frac{5}{2}+\frac{1}{2}=3$

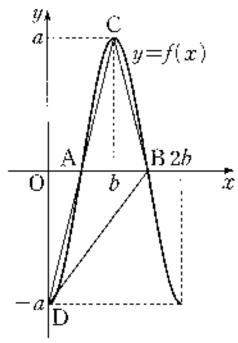
답 ③

08

함수 $f(x)=-a\cos\frac{\pi x}{b}$의 주기는 $\frac{2\pi}{\frac{\pi}{b}}=2b$이므로

$\mathrm{A}\left(\frac{b}{2}, 0\right)$, $\mathrm{B}\left(\frac{3b}{2}, 0\right)$이고,

함수 $y=f(x)$의 그래프는 그림과 같다.



함수 $f(x)$는 $x=b$일 때,

최댓값 $f(b)=a$를 가지므로 $c=b$이고

$\mathrm{C}(b, a)$, $\mathrm{D}(0, -a)$이다.

한편, 직선 AC의 기울기는 $\frac{a}{b-\frac{b}{2}}=\frac{2a}{b}$

이고, 직선 BC의 기울기는 $\frac{a}{b-\frac{3b}{2}}=-\frac{2a}{b}$이다.

조건 (가)에 의하여

$\frac{2a}{b}\times\left(-\frac{2a}{b}\right)=-16$, $\left(\frac{a}{b}\right)^2=4$

$\frac{a}{b}>0$이므로 $\frac{a}{b}=2$

$a=2b$ …… ㉠

조건 (나)에서

(삼각형 BCD의 넓이)

$=$(삼각형 ABC의 넓이)$+$(삼각형 ADB의 넓이)

$=\frac{1}{2}\times b\times a+\frac{1}{2}\times b\times a$

$=ab=72$ …… ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면 $2b^2=72$, $b^2=36$

$b>0$이므로 $b=6$

$b=6$을 ㉠에 대입하면 $a=12$

한편, $c=b=6$

따라서 $a+b+c=12+6+6=24$

답 24

09

함수 $y=f(x)$의 주기가 2이므로 $\frac{\pi}{b}=2$, 즉 $b=\frac{\pi}{2}$

$\overline{\mathrm{OA}}=2$이므로 점 A의 좌표는 $(2, 0)$이다.

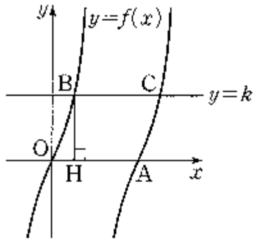
점 B에서 x축에 내린 수선의 발을 H라 하면 $\angle BAO=\frac{\pi}{4}$이므로

$\overline{AH}=\overline{BH}=k$, $\overline{OH}=2-k$

직각삼각형 BOH에서

$\tan\theta=\tan(\angle BOH)=3$이므로

$\frac{\overline{BH}}{\overline{OH}}=\frac{k}{2-k}=3$, $k=\frac{3}{2}$



점 B의 좌표가 $\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$이고, 함수 $y=f(x)$의 그래프가 점 B를 지나므로

$f\left(\frac{1}{2}\right)=a\tan\left(\frac{\pi}{2}\times\frac{1}{2}\right)=a\tan\frac{\pi}{4}=a=\frac{3}{2}$

이때 점 C의 좌표는 $\left(\frac{5}{2}, \frac{3}{2}\right)$이고 $f(x)=\frac{3}{2}\tan\frac{\pi x}{2}$이다.

$f\left(\frac{k}{3}\right)=f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{3}{2}\tan\frac{\pi}{4}=\frac{3}{2}$

$\overline{OC}^2=\left(\frac{5}{2}\right)^2+\left(\frac{3}{2}\right)^2=\frac{17}{2}$

따라서 $f\left(\frac{k}{3}\right)+\overline{OC}^2=\frac{3}{2}+\frac{17}{2}=10$

답 ⑤

필수 유형 ❹

$\cos\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)=-\sin\theta$이므로 $\cos\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)=\frac{\sqrt{5}}{5}$에서 $\sin\theta=-\frac{\sqrt{5}}{5}$

$\tan\theta<0$, $\sin\theta<0$이므로 θ는 제4사분면의 각이고, $\cos\theta>0$이다.

$\cos^2\theta=1-\sin^2\theta=1-\left(-\frac{\sqrt{5}}{5}\right)^2=\frac{4}{5}$에서

$\cos\theta>0$이므로 $\cos\theta=\frac{2\sqrt{5}}{5}$

답 ⑤

10

$\sin\left(-\frac{5}{6}\pi\right)=-\sin\frac{5}{6}\pi=-\sin\left(\pi-\frac{\pi}{6}\right)=-\sin\frac{\pi}{6}=-\frac{1}{2}$

$\cos\frac{8}{3}\pi=\cos\left(2\pi+\frac{2}{3}\pi\right)=\cos\frac{2}{3}\pi=\cos\left(\pi-\frac{\pi}{3}\right)$

$=-\cos\frac{\pi}{3}=-\frac{1}{2}$

따라서 $\sin\left(-\frac{5}{6}\pi\right)+\cos\frac{8}{3}\pi=-\frac{1}{2}+\left(-\frac{1}{2}\right)=-1$

답 ①

11

$\cos\theta=-\frac{1}{3}$이므로 $\sin^2\theta=1-\cos^2\theta=1-\left(-\frac{1}{3}\right)^2=\frac{8}{9}$

$\frac{\pi}{2}<\theta<\pi$일 때, $\sin\theta>0$이므로 $\sin\theta=\frac{2\sqrt{2}}{3}$

$\sin(\pi+\theta)=-\sin\theta=-\frac{2\sqrt{2}}{3}$, $\cos\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)=-\sin\theta=-\frac{2\sqrt{2}}{3}$

$\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\cos\theta=-\frac{1}{3}$, $\cos(\pi-\theta)=-\cos\theta=\frac{1}{3}$

따라서

$\sin(\pi+\theta)\cos\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)+\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)\cos(\pi-\theta)$

$=-\frac{2\sqrt{2}}{3}\times\left(-\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)+\left(-\frac{1}{3}\right)\times\frac{1}{3}=\frac{7}{9}$

답 ③

12

$\sin(2\pi-\theta)=\sin(-\theta)=-\sin\theta$

$\cos(\pi+\theta)=-\cos\theta$

$\cos\left(\frac{3}{2}\pi+\theta\right)=\cos\left\{\pi+\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)\right\}=-\cos\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)=\sin\theta$

이므로 $\sin(2\pi-\theta)+\cos(\pi+\theta)+2\cos\left(\frac{3}{2}\pi+\theta\right)=3\sin\theta$에서

$-\sin\theta-\cos\theta+2\sin\theta=3\sin\theta$

$\cos\theta=-2\sin\theta$ …… ㉠

한편, $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$이므로 $\sin^2\theta+(-2\sin\theta)^2=1$, $\sin^2\theta=\frac{1}{5}$

$\frac{3}{2}\pi<\theta<2\pi$에서 $\sin\theta<0$이므로

$\sin\theta=-\frac{\sqrt{5}}{5}$ …… ㉡

㉡을 ㉠에 대입하면 $\cos\theta=\frac{2\sqrt{5}}{5}$

따라서 $\sin\theta+\cos\theta=-\frac{\sqrt{5}}{5}+\frac{2\sqrt{5}}{5}=\frac{\sqrt{5}}{5}$

답 ④

필수 유형 ❺

함수 $f(x)=a-\sqrt{3}\tan 2x$의 그래프의 주기는 $\frac{\pi}{2}$이다.

함수 $f(x)$가 닫힌구간 $\left[-\frac{\pi}{6}, b\right]$에서 최댓값과 최솟값을 가지므로

$-\frac{\pi}{6}<b<\frac{\pi}{4}$이다.

한편, 함수 $y=f(x)$의 그래프는 구간 $\left[-\frac{\pi}{6}, b\right]$에서 x의 값이 증가할 때, y의 값은 감소하므로 함수 $f(x)$는 $x=-\frac{\pi}{6}$에서 최댓값 7을 갖는다.

즉, $f\left(-\frac{\pi}{6}\right)=a-\sqrt{3}\tan\left(-\frac{\pi}{3}\right)=7$에서

$a+\sqrt{3}\tan\frac{\pi}{3}=7$, $a+3=7$, $a=4$

함수 $f(x)$는 $x=b$에서 최솟값 3을 가지므로

$f(b)=4-\sqrt{3}\tan 2b=3$에서 $\tan 2b=\frac{\sqrt{3}}{3}$

이때 $-\frac{\pi}{3}<2b<\frac{\pi}{2}$이므로 $2b=\frac{\pi}{6}$, $b=\frac{\pi}{12}$

따라서 $a\times b=4\times\frac{\pi}{12}=\frac{\pi}{3}$

답 ③

13

함수 $f(x)$의 최솟값이 -1이고 $a>0$이므로

$-a+b=-1$ …… ㉠

$f\left(\frac{\pi}{3}\right)=a\sin\frac{\pi}{6}+b=\frac{a}{2}+b$이므로

$\frac{a}{2}+b=5$ …… ㉡

㉡−㉠을 하면 $\frac{3}{2}a=6$, $a=4$

$a=4$를 ㉠에 대입하면 $-4+b=-1$, $b=3$

따라서 $a+b=4+3=7$

답 ④

14

$\sin(\pi+x)=-\sin x$, $\sin(\pi-x)=\sin x$,

$\sin\left(\frac{3}{2}\pi+x\right)=\sin\left\{\pi+\left(\frac{\pi}{2}+x\right)\right\}=-\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=-\cos x$

이므로

$$\begin{aligned} f(x)&=2\sin(\pi+x)\sin(\pi-x)+\sin\left(\frac{3}{2}\pi+x\right)+3\\ &=-2\sin^2 x-\cos x+3=-2(1-\cos^2 x)-\cos x+3\\ &=2\cos^2 x-\cos x+1=2\left(\cos x-\frac{1}{4}\right)^2+\frac{7}{8}\end{aligned}$$

$-1\le\cos x\le1$이므로 $\cos x=-1$일 때 함수 $f(x)$는 최댓값을 갖고

$\cos x=\frac{1}{4}$일 때, 함수 $f(x)$는 최솟값을 갖는다.

따라서 $M=2\left(-1-\frac{1}{4}\right)^2+\frac{7}{8}=4$, $m=2\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{4}\right)^2+\frac{7}{8}=\frac{7}{8}$이므로

$M+m=4+\frac{7}{8}=\frac{39}{8}$

답 ③

15

함수 $y=f(x)$의 그래프의 점근선은 직선 $x=3$이다.

함수 $g(x)$의 주기는 $\frac{\pi}{\frac{\pi}{a}}=a$이므로 함수 $y=g(x)$의 그래프의 점근선은

직선 $x=na+\frac{a}{2}$ (n은 정수)이다.

조건 (가)에서 $na+\frac{a}{2}=3$이므로 $a=\frac{6}{2n+1}$

a는 자연수이므로 $2n+1$은 6의 양의 약수이어야 한다.

$2n+1=1$ 또는 $2n+1=2$ 또는 $2n+1=3$ 또는 $2n+1=6$

즉, $n=0$ 또는 $n=\frac{1}{2}$ 또는 $n=1$ 또는 $n=\frac{5}{2}$

이때 n은 정수이므로 $n=0$ 또는 $n=1$

(i) $n=0$일 때, $a=6$이므로 $g(x)=\tan\frac{\pi x}{6}$

$g\left(\frac{2}{3}\right)=\tan\frac{\pi}{9}<\tan\frac{\pi}{4}=1$이므로 조건 (나)를 만족시키지 않는다.

(ii) $n=1$일 때, $a=2$이므로 $g(x)=\tan\frac{\pi x}{2}$

$g\left(\frac{2}{3}\right)=\tan\frac{\pi}{3}=\sqrt{3}>1$이므로 조건 (나)를 만족시킨다.

(i), (ii)에서 $g(x)=\tan\frac{\pi x}{2}$

함수 $y=f(x)$의 정의역은 $\{x|x>3$인 실수$\}$이고 밑 4가 1보다 크므로

함수 $y=f(x)$의 그래프는 x의 값이 증가하면 y의 값도 증가한다.

$\frac{13}{4}\le x\le19$에서 $f\left(\frac{13}{4}\right)=\frac{1}{3}\log_4\frac{1}{4}=-\frac{1}{3}$, $f(19)=\frac{1}{3}\log_4 16=\frac{2}{3}$

이므로 $-\frac{1}{3}\le f(x)\le\frac{2}{3}$

또 $-1<x<1$일 때, 함수 $y=g(x)$의 그래프는 x의 값이 증가하면 y의 값도 증가한다.

$g\left(-\frac{1}{3}\right)=\tan\left(-\frac{\pi}{6}\right)=-\tan\frac{\pi}{6}=-\frac{\sqrt{3}}{3}$,

$g\left(\frac{2}{3}\right)=\tan\frac{\pi}{3}=\sqrt{3}$이므로 $-\frac{\sqrt{3}}{3}\le(g\circ f)(x)\le\sqrt{3}$

따라서 $M=\sqrt{3}$, $m=-\frac{\sqrt{3}}{3}$이므로

$12(M-m)^2=12\times\left\{\sqrt{3}-\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)\right\}^2=12\times\left(\frac{4\sqrt{3}}{3}\right)^2=64$

답 64

필수 유형 ❻

$\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=-\sin x$이므로 $4\sin^2 x-4\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right)-3=0$에서

$4\sin^2 x+4\sin x-3=0$

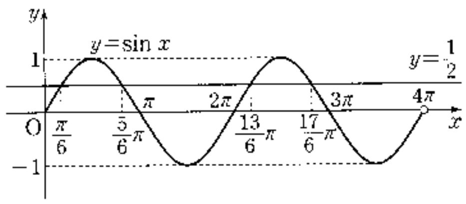
$(2\sin x-1)(2\sin x+3)=0$ …… ㉠

$0\le x<4\pi$일 때, $2\sin x+3>0$이므로 ㉠에서

$2\sin x-1=0$, $\sin x=\frac{1}{2}$

$0\le x<4\pi$일 때, 방정식 $\sin x=\frac{1}{2}$의 해는

$x=\frac{\pi}{6}$ 또는 $x=\frac{5}{6}\pi$ 또는 $x=\frac{13}{6}\pi$ 또는 $x=\frac{17}{6}\pi$



따라서 방정식의 모든 해의 합은

$\frac{\pi}{6}+\frac{5}{6}\pi+\frac{13}{6}\pi+\frac{17}{6}\pi=6\pi$

답 ②

16

부등식 $(2\sin x-1)(\sqrt{2}\cos x-1)>0$에서

$2\sin x-1>0$, $\sqrt{2}\cos x-1>0$ 또는

$2\sin x-1<0$, $\sqrt{2}\cos x-1<0$

(i) $2\sin x-1>0$, $\sqrt{2}\cos x-1>0$일 때

부등식 $2\sin x-1>0$에서 $\sin x>\frac{1}{2}$이므로

$\frac{\pi}{6}<x<\frac{5}{6}\pi$ …… ㉠

부등식 $\sqrt{2}\cos x-1>0$에서 $\cos x>\frac{\sqrt{2}}{2}$이므로

$0\le x<\frac{\pi}{4}$ 또는 $\frac{7}{4}\pi<x<2\pi$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 $\frac{\pi}{6}<x<\frac{\pi}{4}$

(ii) $2\sin x-1<0$, $\sqrt{2}\cos x-1<0$일 때

부등식 $2\sin x-1<0$에서 $\sin x<\frac{1}{2}$이므로

$0 \le x < \frac{\pi}{6}$ 또는 $\frac{5}{6}\pi < x < 2\pi$ ...... ㉢

부등식 $\sqrt{2}\cos x - 1 < 0$에서 $\cos x < \frac{\sqrt{2}}{2}$

$\frac{\pi}{4} < x < \frac{7}{4}\pi$ ...... ㉣

㉢, ㉣에서 $\frac{5}{6}\pi < x < \frac{7}{4}\pi$

(i), (ii)에서 $\frac{\pi}{6} < x < \frac{\pi}{4}$ 또는 $\frac{5}{6}\pi < x < \frac{7}{4}\pi$

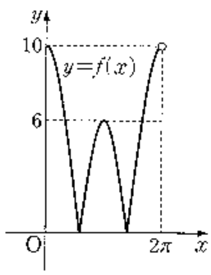
따라서 $\alpha = \frac{\pi}{6}$, $\beta = \frac{\pi}{4}$, $\gamma = \frac{5}{6}\pi$, $\delta = \frac{7}{4}\pi$이므로

$$\begin{aligned}\sin(\delta-\beta)+\cos(\gamma-\alpha) &= \sin\left(\frac{7}{4}\pi-\frac{\pi}{4}\right)+\cos\left(\frac{5}{6}\pi-\frac{\pi}{6}\right)\\ &= \sin\frac{3}{2}\pi+\cos\frac{2}{3}\pi\\ &= -1+\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{3}{2}\end{aligned}$$

답 ①

17

$f(x) = |8\cos x + 2|$라 하면 $0 \le x < 2\pi$에서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 그림과 같다.



방정식 $|8\cos x + 2| = k$가 서로 다른 세 실근을 가지므로 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=k$가 서로 다른 세 점에서 만나야 한다.

즉, $k=6$

방정식 $|8\cos x+2|=6$에서

$8\cos x + 2 = 6$ 또는 $8\cos x + 2 = -6$

(i) $8\cos x + 2 = 6$일 때, $\cos x = \frac{1}{2}$이므로 $x = \frac{\pi}{3}$ 또는 $x = \frac{5}{3}\pi$

(ii) $8\cos x + 2 = -6$일 때, $\cos x = -1$이므로 $x = \pi$

(i), (ii)에서 $\alpha = \frac{\pi}{3}$, $\beta = \pi$, $\gamma = \frac{5}{3}\pi$

따라서 $\frac{k(\gamma-\alpha)}{\beta} = \frac{6\times\left(\frac{5}{3}\pi-\frac{\pi}{3}\right)}{\pi} = 8$

답 ③

18

이차방정식 $x^2+(4\sin\theta)x-2+10\cos\theta=0$의 판별식을 D라 하면

이차방정식 $x^2+(4\sin\theta)x-2+10\cos\theta=0$이 실근을 가져야 하므로

$\frac{D}{4} = (2\sin\theta)^2 - (-2+10\cos\theta) \ge 0$이어야 한다.

즉, $4(1-\cos^2\theta)+2-10\cos\theta \ge 0$에서

$2\cos^2\theta + 5\cos\theta - 3 \le 0$

$(2\cos\theta-1)(\cos\theta+3) \le 0$

$0 \le \theta < 2\pi$에서 $-1 \le \cos\theta \le 1$이므로 $\cos\theta + 3 > 0$

즉, $2\cos\theta - 1 \le 0$에서 $\cos\theta \le \frac{1}{2}$이므로 $\frac{\pi}{3} \le \theta \le \frac{5}{3}\pi$

따라서 $\alpha = \frac{\pi}{3}$, $\beta = \frac{5}{3}\pi$이므로

$\beta - \alpha = \frac{5}{3}\pi - \frac{\pi}{3} = \frac{4}{3}\pi$

답 ②

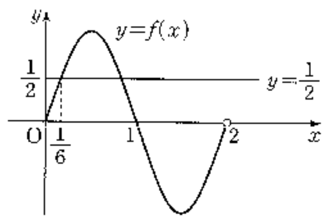
19

함수 $y=\sin(n\pi x)$의 주기는 $\frac{2\pi}{n\pi} = \frac{2}{n}$

(i) $0 \le x < 2$, 즉 $n=1$일 때, $f(x) = \sin(\pi x)$이다.

방정식 $2f(x)-1=0$에서 $\sin(\pi x) = \frac{1}{2}$

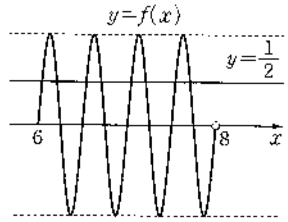
$0 \le x < 2$에서 방정식 $\sin(\pi x) = \frac{1}{2}$의 실근 중 가장 작은 것이 α이므로 $\alpha = \frac{1}{6}$



(ii) $6 \le x < 8$, 즉 $n=4$일 때, $f(x) = \sin(4\pi x)$이다.

방정식 $2f(x)-1=0$에서 $\sin(4\pi x) = \frac{1}{2}$

$6 \le x < 8$에서 방정식 $\sin(4\pi x) = \frac{1}{2}$의 실근 중 가장 큰 것이 β이므로 $\beta = 6 + \frac{3}{2} + \frac{5}{24} = \frac{185}{24}$



(i), (ii)에서 $\frac{4\beta}{\alpha} = \frac{4\times\frac{185}{24}}{\frac{1}{6}} = 185$

답 185

필수 유형 7

삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이가 15이므로 사인법칙에 의하여

$\frac{\overline{AC}}{\sin B} = 2\times15 = 30$

따라서 $\overline{AC} = 30\sin B = 30\times\frac{7}{10} = 21$

답 21

20

$\sin^2 A = 1-\cos^2 A = 1-\left(\frac{\sqrt{7}}{4}\right)^2 = \frac{9}{16}$

이때 $0 < A < \pi$이고 $\sin A > 0$이므로

$\sin A = \frac{3}{4}$

삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이가 16이므로

사인법칙에 의하여

$\dfrac{\overline{BC}}{\sin A}=2\times16$

따라서 $\overline{BC}=2\times16\times\sin A=2\times16\times\dfrac{3}{4}=24$

답 ④

21

삼각형 ADC에서 사인법칙에 의하여

$\dfrac{\overline{AD}}{\sin(\angle ACD)}=\dfrac{\overline{CD}}{\sin(\angle CAD)}$이므로

$\overline{AD}=\dfrac{\overline{CD}}{\sin(\angle CAD)}\times\sin(\angle ACD)=\dfrac{2}{\sin\frac{\pi}{6}}\times\sin\dfrac{\pi}{4}$

$=\dfrac{2}{\frac{1}{2}}\times\dfrac{\sqrt{2}}{2}=2\sqrt{2}$

삼각형 ABD의 외접원의 반지름의 길이를 R라 하면

사인법칙에 의하여

$\dfrac{\overline{AD}}{\sin(\angle ABD)}=2R$이므로

$R=\dfrac{\overline{AD}}{2\sin(\angle ABD)}=\dfrac{2\sqrt{2}}{2\sin\frac{\pi}{3}}$

$=\dfrac{2\sqrt{2}}{2\times\frac{\sqrt{3}}{2}}=\dfrac{2\sqrt{6}}{3}$

답 ②

22

직각삼각형 ABC에서

$\overline{BC}=\sqrt{\overline{AC}^2-\overline{AB}^2}=\sqrt{4^2-3^2}=\sqrt{7}$이므로 $\sin(\angle CAB)=\dfrac{\sqrt{7}}{4}$

점 D는 선분 AB를 2 : 1로 내분하는 점이므로

$\overline{BD}=\dfrac{1}{3}\times\overline{AB}=\dfrac{1}{3}\times3=1$

직각삼각형 DBC에서 $\overline{CD}=\sqrt{\overline{BD}^2+\overline{BC}^2}=\sqrt{1^2+(\sqrt{7})^2}=2\sqrt{2}$

삼각형 ADC의 외접원의 반지름의 길이를 R라 하면 사인법칙에 의하여

$\dfrac{\overline{CD}}{\sin(\angle CAD)}=2R$에서 $\dfrac{2\sqrt{2}}{\frac{\sqrt{7}}{4}}=2R$, $R=\dfrac{4\sqrt{2}}{\sqrt{7}}$

삼각형 ADC의 외접원의 넓이는 $\pi\times\left(\dfrac{4\sqrt{2}}{\sqrt{7}}\right)^2=\dfrac{32}{7}\pi$

따라서 $p=7$, $q=32$이므로

$p+q=7+32=39$

답 39

필수 유형 ❸

$\angle BAC=\angle CAD=\theta\left(0<\theta<\dfrac{\pi}{2}\right)$라 하면

삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의하여

$\overline{BC}^2=\overline{AB}^2+\overline{AC}^2-2\times\overline{AB}\times\overline{AC}\times\cos\theta$

$=5^2+(3\sqrt{5})^2-2\times5\times3\sqrt{5}\times\cos\theta$

$=70-30\sqrt{5}\cos\theta$

삼각형 ACD에서 코사인법칙에 의하여

$\overline{CD}^2=\overline{AD}^2+\overline{AC}^2-2\times\overline{AD}\times\overline{AC}\times\cos\theta$

$=7^2+(3\sqrt{5})^2-2\times7\times3\sqrt{5}\times\cos\theta$

$=94-42\sqrt{5}\cos\theta$

$\angle BAC=\angle CAD$이므로 $\overline{BC}=\overline{CD}$, 즉 $\overline{BC}^2=\overline{CD}^2$이다.

이때 $70-30\sqrt{5}\cos\theta=94-42\sqrt{5}\cos\theta$에서

$\cos\theta=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$

$\overline{BC}^2=70-30\sqrt{5}\cos\theta=70-30\sqrt{5}\times\dfrac{2\sqrt{5}}{5}=10$

$\overline{BC}=\sqrt{10}$

한편, $\sin^2\theta=1-\cos^2\theta=1-\left(\dfrac{2\sqrt{5}}{5}\right)^2=\dfrac{1}{5}$이므로

$\sin\theta=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$

따라서 구하는 원의 반지름의 길이를 R라 하면

삼각형 ABC에서 사인법칙에 의하여

$\dfrac{\overline{BC}}{\sin\theta}=2R$이므로

$\dfrac{\sqrt{10}}{\frac{\sqrt{5}}{5}}=2R$

$5\sqrt{2}=2R$

따라서 $R=\dfrac{5\sqrt{2}}{2}$

답 ①

23

$\overline{BC}=a\ (a>4\sqrt{2})$라 하면 삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의하여

$\overline{AC}^2=\overline{AB}^2+\overline{BC}^2-2\times\overline{AB}\times\overline{BC}\times\cos(\angle ABC)$

이므로

$(2\sqrt{2})^2=(4\sqrt{2})^2+a^2-2\times4\sqrt{2}\times a\times\dfrac{5\sqrt{2}}{8}$

$a^2-10a+24=0$, $(a-6)(a-4)=0$

$a>4\sqrt{2}$이므로 $a=6$

한편, $\angle BAD=\angle CAD$이므로 $\overline{AB}:\overline{AC}=\overline{BD}:\overline{CD}$

즉, $2:1=\overline{BD}:\overline{CD}$이므로 $\overline{BD}=2\overline{CD}$

$\overline{BC}=\overline{BD}+\overline{CD}=3\overline{CD}=6$에서 $\overline{CD}=2$

이때 $\overline{BD}=4$

직각삼각형 ABE에서 $\angle BAE=\theta\left(0<\theta<\dfrac{\pi}{4}\right)$라 하면

$\overline{AE}=4\sqrt{2}\cos\theta$

직각삼각형 CAF에서

$\angle CAF=\theta$이므로 $\overline{AF}=2\sqrt{2}\cos\theta$

삼각형 ABD에서 코사인법칙에 의하여

$\overline{AD}^2=\overline{AB}^2+\overline{BD}^2-2\times\overline{AB}\times\overline{BD}\times\cos(\angle ABD)$

$=(4\sqrt{2})^2+4^2-2\times4\sqrt{2}\times4\times\dfrac{5\sqrt{2}}{8}=8$

$\overline{AD}=2\sqrt{2}$

삼각형 ABD에서

$\cos\theta=\dfrac{\overline{AB}^2+\overline{AD}^2-\overline{BD}^2}{2\times\overline{AB}\times\overline{AD}}=\dfrac{(4\sqrt{2})^2+(2\sqrt{2})^2-4^2}{2\times4\sqrt{2}\times2\sqrt{2}}=\dfrac{3}{4}$

따라서

$\overline{AF}\times\overline{AE}=2\sqrt{2}\cos\theta\times4\sqrt{2}\cos\theta=16\cos^2\theta$

$=16\times\left(\frac{3}{4}\right)^2=9$

답 9

24

삼각형 ABC에서 $\angle CAB=\theta\left(\frac{\pi}{2}<\theta<\pi\right)$라 하면

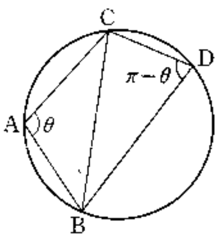
사인법칙에 의하여

$\frac{\overline{BC}}{\sin\theta}=2\times\frac{4\sqrt{10}}{5}$, $\frac{2\sqrt{6}}{\sin\theta}=2\times\frac{4\sqrt{10}}{5}$, $\sin\theta=\frac{\sqrt{15}}{4}$

이때 $\cos^2\theta=1-\sin^2\theta=1-\left(\frac{\sqrt{15}}{4}\right)^2=\frac{1}{16}$

$\frac{\pi}{2}<\theta<\pi$에서 $\cos\theta<0$이므로

$\cos\theta=-\frac{1}{4}$



삼각형 BDC에서

$\angle BDC=\pi-\theta$이므로

$\cos(\angle BDC)=\cos(\pi-\theta)=-\cos\theta=\frac{1}{4}$

$\overline{CD}=k\ (k>0)$이라 하면

$\overline{BD}=2k$

이므로 코사인법칙에 의하여

$\overline{BC}^2=\overline{BD}^2+\overline{CD}^2-2\times\overline{BD}\times\overline{CD}\times\cos(\angle BDC)$

$(2\sqrt{6})^2=(2k)^2+k^2-2\times2k\times k\times\frac{1}{4}$

$24=4k^2$, $k^2=6$

$k>0$이므로

$k=\sqrt{6}$

$\overline{CD}=\sqrt{6}$, $\overline{BD}=2\sqrt{6}$

$\sin(\angle BDC)=\sin(\pi-\theta)=\sin\theta=\frac{\sqrt{15}}{4}$이므로

삼각형 BDC의 넓이 S는

$S=\frac{1}{2}\times\overline{BD}\times\overline{CD}\times\sin(\angle BDC)$

$=\frac{1}{2}\times2\sqrt{6}\times\sqrt{6}\times\frac{\sqrt{15}}{4}=\frac{3\sqrt{15}}{2}$

따라서 $4S^2=4\times\left(\frac{3\sqrt{15}}{2}\right)^2=135$

답 135

03 수열

정답 본문 28~39쪽

필수 유형 ❶ ①	01 ①	02 ②	03 42
필수 유형 ❷ 7	04 ③	05 ①	06 ⑤
	07 8		
필수 유형 ❸ 36	08 ④	09 ①	10 ④
필수 유형 ❹ 64	11 ①	12 ③	13 ④
필수 유형 ❺ ③	14 ③	15 ②	16 ③
필수 유형 ❻ 9	17 ④	18 ③	19 ②
필수 유형 ❼ 22	20 ⑤	21 ①	22 ④
필수 유형 ❽ 91	23 ③	24 29	25 ⑤
	26 ②		
필수 유형 ❾ ④	27 ②	28 ④	29 ①
필수 유형 ❿ ④	30 16	31 ④	32 99
필수 유형 ⓫ ⑤	33 ⑤	34 ④	35 ③
필수 유형 ⓬ ④	36 ②		

필수 유형 ❶

등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d라 하면

$a_{10}-a_7=(a_1+9d)-(a_1+6d)=3d=6$이므로 $d=2$

따라서 $a_4=a_1+3d=4+6=10$

답 ①

01

등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a라 하면

$a_2=a+d=3$ …… ㉠

$a_7-a_5=(a+6d)-(a+4d)=2d$에서

$2d=3-d$이므로 $d=1$ …… ㉡

㉡을 ㉠에 대입하면 $a=2$

따라서 $a_4=a+3d=2+3=5$

답 ①

02

수열 $\{a_n\}$의 첫째항이 45이고 공차가 -7이므로 일반항 a_n은 $a_n=-7n+52$이다. 또한 수열 $\{b_n\}$은 첫째항과 공차가 같고 모든 항이 자연수이므로 수열 $\{b_n\}$의 공차를 d라 하면 d는 자연수이다.

$b_n=b_1+(n-1)d$에서 $b_1=d$이므로 $b_n=dn$이다.

따라서 $c_n=(d-7)n+52$

$c_n>100$을 만족시키는 자연수 n의 최솟값이 10이므로

$c_9\le100$, $c_{10}>100$이다.

$c_9=9(d-7)+52=9d-11$에서 $9d-11\le100$, $d\le\frac{37}{3}$

$c_{10}=10(d-7)+52=10d-18$에서 $10d-18>100$, $d>\frac{59}{5}$

즉, $\frac{59}{5}<d\le\frac{37}{3}$이고 d는 자연수이므로 $d=12$

따라서 $b_1=12$

답 ②

03

3으로 나눈 나머지가 1인 자연수를 나열하면 1, 4, 7, 10, 13, …이므로 첫째항이 1이고 공차가 3인 등차수열이다.

즉, $a_n=3n-2$

4로 나눈 나머지가 2인 자연수를 나열하면

2, 6, 10, 14, 18, …이므로 첫째항이 2이고 공차가 4인 등차수열이다.

즉, $b_n=4n-2$

$a_k=b_m$에서 $3k-2=4m-2$, $3k=4m$

즉, k는 4의 배수이고 m은 3의 배수이므로

$k=4k'$, $m=3m'$ (단, $k'\le5$, $m'\le6$인 자연수)

이를 대입하면 $3\times4k'=4\times3m'$에서 $k'=m'$이다.

k와 m은 20 이하의 자연수이므로 $k+m$의 최솟값은 $k'=m'=1$, 즉 $k=4$, $m=3$일 때 7이고, $k+m$의 최댓값은 $k'=m'=5$, 즉 $k=20$, $m=15$일 때 35이다.

따라서 $k+m$의 최댓값과 최솟값의 합은

$35+7=42$

답 42

필수 유형 ❷

$S_{k+2}-S_k=a_{k+2}+a_{k+1}=4$이고 등차수열 $\{a_n\}$의 공차가 2이므로

$a_1+2(k+1)+a_1+2k=4$, $2a_1+4k=2$

$a_1=1-2k$ …… ㉠

한편, $S_k=\frac{k\{2a_1+2(k-1)\}}{2}=-16$이고 ㉠을 대입하면

$\frac{k\{2(1-2k)+2(k-1)\}}{2}=-16$

$-k^2=-16$에서 k는 자연수이므로 $k=4$

이것을 ㉠에 대입하면 $a_1=-7$

따라서 $a_{2k}=a_8=a_1+7d=-7+7\times2=7$

답 7

04

첫째항이 3이고 공차가 2인 등차수열 $\{a_n\}$의 일반항은

$a_n=3+2(n-1)=2n+1$이므로

$a_{2n-1}=2(2n-1)+1=4n-1$, $a_{2n}=2\times2n+1=4n+1$이고

$b_n=a_{2n-1}+a_{2n}=(4n-1)+(4n+1)=8n$

따라서 수열 $\{b_n\}$은 첫째항이 $b_1=8$이고 공차가 8인 등차수열이다.

따라서 $S_5=\frac{5\times(2\times8+4\times8)}{2}=120$

답 ③

05

등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공차를 d라 하면 $a_n=a+(n-1)d$

또한 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합이 S_n이므로

$S_{n+1}=S_n+a_{n+1}$

즉, $2S_n+a_{n+1}=3n^2-28n-14$ …… ㉠

한편, $S_n=\frac{n\{2a+(n-1)d\}}{2}$이므로 이것을 ㉠에 대입하면

$2\times\frac{n\{2a+(n-1)d\}}{2}+(a+dn)=3n^2-28n-14$

$n\{2a+(n-1)d\}+(a+dn)=dn^2+2an+a$

$dn^2+2an+a=3n^2-28n-14$ …… ㉡

이 식은 모든 자연수 n에 대하여 성립하므로 ㉡은 n에 대한 항등식이다.

즉, $d=3$, $a=-14$

따라서 수열 $\{a_n\}$의 일반항은 $a_n=3n-17$이므로

$a_6=3\times6-17=1$

답 ①

다른 풀이

$S_{n+1}+S_n=3n^2-28n-14$에

$n=1$을 대입하면 $(a_2+a_1)+a_1=-39$ …… ㉠

$n=2$를 대입하면 $(a_3+a_2+a_1)+(a_2+a_1)=-58$ …… ㉡

등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d라 하면

$a_2=a_1+d$이므로 이것을 ㉠에 대입하면

$3a_1+d=-39$ …… ㉢

$a_3=a_1+2d$, $a_2=a_1+d$를 ㉡에 대입하면

$5a_1+4d=-58$ …… ㉣

㉢, ㉣을 연립하여 풀면 $a_1=-14$, $d=3$

따라서 수열 $\{a_n\}$의 일반항은 $a_n=3n-17$이므로

$a_6=3\times6-17=1$

06

$b_n=\frac{(a_{n+1})^2-(a_n)^2}{3}=\frac{1}{3}(a_{n+1}-a_n)(a_{n+1}+a_n)$

등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a $(a>0)$, 공차를 d $(d>0)$이라 하면

$a_n=a+(n-1)d$에서 $a_{n+1}-a_n=d$이고 $a_{n+1}+a_n=2a+(2n-1)d$

$b_n=\frac{d}{3}(2dn+2a-d)$

즉, $b_1=\frac{d}{3}(2a+d)=4$ …… ㉠

한편, $b_3=\frac{d}{3}(2a+5d)$이고 $S_6=\frac{6(2a+5d)}{2}=3(2a+5d)$이므로

$b_3=\frac{1}{3}S_6$에서 $\frac{d}{3}(2a+5d)=2a+5d$

$a>0$, $d>0$에서 $2a+5d\ne0$이므로 $\frac{d}{3}=1$

$d=3$ …… ㉡

㉡을 ㉠에 대입하면 $2a+3=4$이므로 $a=\frac{1}{2}$

따라서 $a_n=3n-\frac{5}{2}$이므로 $a_4=3\times4-\frac{5}{2}=\frac{19}{2}$

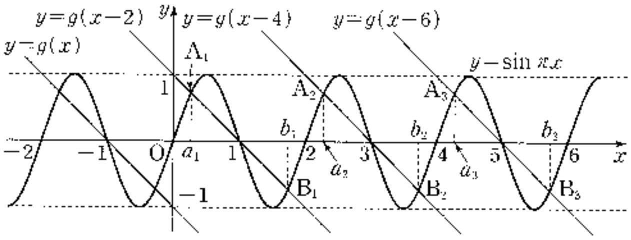
답 ⑤

07

직선 $y=-x$가 원점에 대하여 대칭인 직선이므로 직선 $y=g(x)$는 점 $(-1, 0)$에 대하여 대칭인 직선이다.

따라서 직선 $y=g(x-2n)$은 점 $(2n-1,\ 0)$에 대하여 대칭이고 기울기가 -1인 직선이다.

함수 $y=\sin \pi x$의 그래프는 함수 $y=\sin \pi x$의 그래프가 x축과 만나는 모든 점에 대하여 대칭이고 점 $(2n-1,\ 0)$은 함수 $y=\sin \pi x$의 그래프 위의 점이므로 함수 $y=\sin \pi x$의 그래프는 점 $(2n-1,\ 0)$에 대하여 대칭이다.



따라서 그림과 같이 곡선 $y=\sin \pi x$와 직선 $y=g(x-2n)$이 모두 점 $(2n-1,\ 0)$에 대하여 대칭이므로 두 함수의 그래프의 교점 A_n, B_n도 점 $(2n-1,\ 0)$에 대하여 대칭이다.

즉, $\dfrac{a_n+b_n}{2}=2n-1$에서 $a_n+b_n=4n-2$

따라서 $c_n=4n-2$

그러므로 수열 $\{c_n\}$은 첫째항이 2이고 공차가 4인 등차수열이다.

$S_n=\dfrac{n\{4+4(n-1)\}}{2}=2n^2$이므로 $2n^2>100$에서 $n^2>50$

한편, $7<\sqrt{50}<8$이므로 $n^2>50$을 만족시키는 자연수 n의 최솟값은 8이다.

답 8

필수 유형 ❸

주어진 등비수열의 첫째항을 a, 공비를 r라 하면

모든 항이 양수이므로 $a>0$, $r>0$

$a_n=ar^{n-1}$에서

$\dfrac{a_{16}}{a_{14}}+\dfrac{a_8}{a_7}=\dfrac{ar^{15}}{ar^{13}}+\dfrac{ar^7}{ar^6}=r^2+r=12$

$r^2+r-12=0$, $(r+4)(r-3)=0$

$r>0$이므로 $r=3$

따라서 $\dfrac{a_3}{a_1}+\dfrac{a_6}{a_3}=\dfrac{ar^2}{a}+\dfrac{ar^5}{ar^2}=r^2+r^3=3^2+3^3=36$

답 36

08

등비수열 $\{a_n\}$의 공비를 r라 하면 $\dfrac{a_4}{a_3}=r=\sqrt{6}$이다.

따라서 $a_5=\dfrac{1}{9}\times(\sqrt{6})^4=\dfrac{1}{9}\times 36=4$

답 ④

09

등비수열 $\{a_n\}$의 공비를 r라 하면

$a_3-a_1=4$에서

$a_1(r^2-1)=4$ ⋯⋯ ㉠

$a_7-a_5=36$에서

$a_5(r^2-1)=36$ ⋯⋯ ㉡

㉡÷㉠을 하면

$\dfrac{a_5}{a_1}=9$, $a_5=a_1\times 9$

한편, $a_5=a_1r^4$이므로 $r^4=9$

$r^2=3$이므로 이것을 ㉠에 대입하면 $a_1=2$

따라서 $a_9=a_1\times r^8=a_1\times(r^2)^4=2\times 3^4=162$

답 ①

10

등비수열 $\{a_n\}$의 공비를 $r\ (r>0)$이라 하면

$a_1+a_2=a_1(1+r)$, $a_4+a_5=a_4(1+r)$이므로

$\dfrac{a_1+a_2}{a_4+a_5}=\dfrac{1}{2}$에서 $\dfrac{a_1}{a_4}=\dfrac{1}{2}$

즉, $a_4=2a_1$이므로 $r^3=2$

$a_{10}=a_1\times r^9=a_1\times(r^3)^3=8a_1$이므로

$8a_1\le 40$, $a_1\le 5$

따라서 자연수 a_1의 값은 1, 2, 3, 4, 5이고 그 합은 15이다.

답 ④

필수 유형 ❹

주어진 등비수열의 공비를 r라 하면

$r=1$일 때, $a_n=1$이므로 $\dfrac{S_6}{S_3}=\dfrac{6}{3}=2$, $2a_4-7=-5$가 되어 모순이다.

즉, $r\ne 1$

$\dfrac{S_6}{S_3}=\dfrac{\dfrac{r^6-1}{r-1}}{\dfrac{r^3-1}{r-1}}=\dfrac{r^6-1}{r^3-1}=\dfrac{(r^3+1)(r^3-1)}{r^3-1}=r^3+1$이고

$\dfrac{S_6}{S_3}=2a_4-7$에서 $2a_4-7=2r^3-7$이므로

$r^3+1=2r^3-7$

$r^3=8$, $r=2$

따라서 $a_7=a_1r^6=1\times 2^6=64$

답 64

11

등비수열 $\{a_n\}$의 공비를 $r\ (r>0)$이라 하면

$r=1$이면 $a_n=3$이므로 $S_4=3\times 4=12$, $S_8=3\times 8=24$가 되어 $S_8=10S_4$를 만족시키지 않는다.

$r\ne 1$이므로

$S_8=\dfrac{3(1-r^8)}{1-r}$, $S_4=\dfrac{3(1-r^4)}{1-r}$

$S_8=10S_4$에서

$\dfrac{3(1-r^8)}{1-r}=10\times\dfrac{3(1-r^4)}{1-r}$

$\dfrac{3(1-r^4)(1+r^4)}{1-r}=10\times\dfrac{3(1-r^4)}{1-r}$

$1+r^4=10$, $r^4=9$

$r>0$이므로 $r=\sqrt{3}$

따라서 $a_3=a_1r^2=3\times(\sqrt{3})^2=9$

답 ①

다른 풀이

등비수열 $\{a_n\}$의 공비를 r $(r>0)$이라 하면

$S_8=10S_4$에서 $S_8-S_4=9S_4$이므로

$a_5+a_6+a_7+a_8=9(a_1+a_2+a_3+a_4)$

$a_1r^4+a_1r^5+a_1r^6+a_1r^7=9(a_1+a_1r+a_1r^2+a_1r^3)$

$r^4(a_1+a_1r+a_1r^2+a_1r^3)=9(a_1+a_1r+a_1r^2+a_1r^3)$

$r^4=9$

$r>0$이므로 $r=\sqrt{3}$

따라서 $a_3=a_1r^2=3\times(\sqrt{3})^2=9$

12

등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a $(a>0)$, 공비를 r $(r>0)$이라 하면

$\dfrac{a_1a_4}{a_3}=\dfrac{a\times ar^3}{ar^2}=ar=2$ …… ㉠

$a_2+a_6=ar+ar^5=ar(1+r^4)=10$ …… ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면

$1+r^4=5$, $r^4=4$

$r>0$이므로 $r=\sqrt{2}$

㉠에 의하여 $a=\sqrt{2}$

즉, $a_n=(\sqrt{2})^n$이므로

$b_n=\dfrac{a_{2n}}{2a_{n+1}}=\dfrac{(\sqrt{2})^{2n}}{2\times(\sqrt{2})^{n+1}}=\dfrac{(\sqrt{2})^n}{2\sqrt{2}}=(\sqrt{2})^{n-3}$

따라서 수열 $\{b_n\}$은 첫째항이 $\dfrac{1}{2}$이고 공비가 $\sqrt{2}$인 등비수열이므로 첫째항부터 제8항까지의 합은

$\dfrac{\frac{1}{2}\{(\sqrt{2})^8-1\}}{\sqrt{2}-1}=\dfrac{15}{2}\times\dfrac{1}{\sqrt{2}-1}=\dfrac{15}{2}(\sqrt{2}+1)$

답 ③

13

등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공비 $\sqrt[5]{3}$을 r라 하자.

수열 $\{a_n\}$의 일반항은 $a_n=ar^{n-1}$이므로

$S_n=(a_1+a_2)+(a_2+a_3)+(a_3+a_4)+\cdots+(a_n+a_{n+1})$

$T_n=(a_1+a_2)+(a_3+a_4)+(a_5+a_6)+\cdots+(a_{2n-1}+a_{2n})$

에서

T_5-S_5

$=(a_1+a_2)+(a_3+a_4)+(a_5+a_6)+(a_7+a_8)+(a_9+a_{10})$
$\quad-\{(a_1+a_2)+(a_2+a_3)+(a_3+a_4)+(a_4+a_5)+(a_5+a_6)\}$

$=(a_7+a_8+a_9+a_{10})-(a_2+a_3+a_4+a_5)$

$=(a_2\times r^5+a_3\times r^5+a_4\times r^5+a_5\times r^5)-(a_2+a_3+a_4+a_5)$

$=(r^5-1)(a_2+a_3+a_4+a_5)$

$r^5=(\sqrt[5]{3})^5=3$이므로

$T_5-S_5=2(a_2+a_3+a_4+a_5)=8$

따라서 $a_2+a_3+a_4+a_5=4$

답 ④

다른 풀이

등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공비 $\sqrt[5]{3}$을 r라 하면

수열 $\{a_n\}$의 일반항은 $a_n=ar^{n-1}$이므로

$b_n=a_n+a_{n+1}=ar^{n-1}+ar^n=a(1+r)r^{n-1}$

$c_n=a_{2n-1}+a_{2n}=ar^{2n-2}+ar^{2n-1}=a(1+r)r^{2n-2}$

$T_5=c_1+c_2+c_3+c_4+c_5=\dfrac{a(1+r)(1-r^{10})}{1-r^2}$

$S_5=b_1+b_2+b_3+b_4+b_5=\dfrac{a(1+r)(1-r^5)}{1-r}$

$T_5-S_5=\dfrac{a(1+r)(1-r^{10})}{1-r^2}-\dfrac{a(1+r)(1-r^5)}{1-r}$

$=\dfrac{a(1+r)(1-r^5)}{1-r}\left(\dfrac{1+r^5}{1+r}-1\right)$

$=\dfrac{a(1+r)(1-r^5)}{1-r}\times\dfrac{1+r^5-1-r}{1+r}$

$=\dfrac{a(1-r^5)(r^5-r)}{1-r}$

$=ar(r^5-1)(r+1)(r^2+1)$

$=(r^5-1)(ar+ar^2+ar^3+ar^4)$

$=(r^5-1)(a_2+a_3+a_4+a_5)=8$

$r^5=(\sqrt[5]{3})^5=3$이므로

$2(a_2+a_3+a_4+a_5)=8$에서

$a_2+a_3+a_4+a_5=4$

필수 유형 ⑤

$x^2-nx+4(n-4)=0$에서 $(x-4)(x-n+4)=0$

$x=4$ 또는 $x=n-4$

한편, 세 수 1, α, β가 이 순서대로 등차수열을 이루므로

$2\alpha=\beta+1$ …… ㉠

(i) $\alpha=4$, $\beta=n-4$일 때

$\alpha<\beta$이므로 $4<n-4$에서 $n>8$

㉠에서 $8=(n-4)+1$이므로 $n=11$

(ii) $\alpha=n-4$, $\beta=4$일 때

$\alpha<\beta$이므로 $n-4<4$에서 $n<8$

㉠에서 $2(n-4)=4+1$이므로 $n=\dfrac{13}{2}$

(i), (ii)에서 구하는 자연수 n의 값은 11이다.

답 ③

14

수열 $\{a_n\}$이 등비수열이므로

$a_2a_4=(a_3)^2$

$a_2a_4=256$에서 $(a_3)^2=256$

$a_3>0$이므로 $a_3=16$

$a_1+a_3=24$에서 $a_1+16=24$

$a_1=8$

$a_1\times a_5=(a_3)^2$에서 $8\times a_5=16^2$

따라서 $a_5=32$

답 ③

15

세 수 a, $a+b$, ab가 이 순서대로 등차수열을 이루므로

$2(a+b)=a+ab$

$a+2b-ab=0$ …… ㉠

세 수 a^2, ab, $2b$가 이 순서대로 등비수열을 이루므로
$(ab)^2=a^2\times 2b$
$a^2b(b-2)=0$
$a\neq 0$, $b\neq 0$이므로 $b=2$
$b=2$를 ㉠에 대입하면
$a+2\times 2-a\times 2=0$
$a=4$
따라서 $ab=4\times 2=8$

답 ②

16

$\mathrm{P}(n, \sqrt{n})$, $\mathrm{Q}(n, \sqrt{2n})$, $\mathrm{R}(n, \sqrt{mn})$이므로
$\overline{\mathrm{PA}}=\sqrt{n}$, $\overline{\mathrm{QA}}=\sqrt{2n}$, $\overline{\mathrm{RA}}=\sqrt{mn}$
$\overline{\mathrm{PA}}$, $\overline{\mathrm{QA}}$, $\overline{\mathrm{RA}}$가 이 순서대로 등비수열을 이루므로
$\overline{\mathrm{QA}}^2=\overline{\mathrm{PA}}\times\overline{\mathrm{RA}}$
즉, $(\sqrt{2n})^2=\sqrt{n}\times\sqrt{mn}$에서 $n>0$이므로 $2n=n\sqrt{m}$이고,
$\sqrt{m}=2$, $m=4$
또 $\overline{\mathrm{OP}}^2=n^2+n$, $\overline{\mathrm{OQ}}^2+4=n^2+2n+4$, $\overline{\mathrm{OR}}^2+5=n^2+4n+5$
$\overline{\mathrm{OP}}^2$, $\overline{\mathrm{OQ}}^2+4$, $\overline{\mathrm{OR}}^2+5$가 이 순서대로 등차수열을 이루므로
$2(\overline{\mathrm{OQ}}^2+4)=\overline{\mathrm{OP}}^2+(\overline{\mathrm{OR}}^2+5)$
즉, $2(n^2+2n+4)=(n^2+n)+(n^2+4n+5)$에서 $n=3$
따라서 $m+n=4+3=7$

답 ③

필수 유형 ❻

모든 자연수 n에 대하여
$S_{n+3}-S_n=13\times 3^{n-1}$이 성립하고
$S_{n+3}-S_n=a_{n+1}+a_{n+2}+a_{n+3}$이므로 모든 자연수 n에 대하여
$a_{n+1}+a_{n+2}+a_{n+3}=13\times 3^{n-1}$ …… ㉠
이 성립한다.
㉠에 $n=1$을 대입하면 $a_2+a_3+a_4=13$이므로
등비수열 $\{a_n\}$의 공비를 r라 하면
$a_1r+a_1r^2+a_1r^3=13$
$a_1r(1+r+r^2)=13$ …… ㉡
또 ㉠에 $n=2$를 대입하면 $a_3+a_4+a_5=13\times 3=39$이므로
$a_1r^2+a_1r^3+a_1r^4=39$
$a_1r^2(1+r+r^2)=39$ …… ㉢
㉢÷㉡을 하면
$\dfrac{a_1r^2(1+r+r^2)}{a_1r(1+r+r^2)}=\dfrac{39}{13}$에서 $r=3$
$r=3$을 ㉡에 대입하면
$a_1\times 3\times(1+3+9)=13$에서 $a_1=\dfrac{1}{3}$
따라서 $a_4=a_1r^3=\dfrac{1}{3}\times 3^3=9$

답 9

17

$a_4=S_4-S_3=(2\times 4^2+4k)-(2\times 3^2+3k)=14+k$
이때 $a_4=20$이므로
$14+k=20$, $k=6$
따라서 $a_1=S_1=2+6=8$

답 ①

18

등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a $(a>0)$, 공비를 r라 하자.
$S_{10}-S_8=a_{10}+a_9=ar^9+ar^8=ar^8(r+1)$
$S_7-S_5=a_7+a_6=ar^6+ar^5=ar^5(r+1)$
$\dfrac{S_{10}-S_8}{S_7-S_5}=\dfrac{ar^8(r+1)}{ar^5(r+1)}=r^3$이므로
$\dfrac{S_{10}-S_8}{S_7-S_5}=4$에서 $r^3=4$ …… ㉠
또 $S_2-S_1=a_2=ar$이므로
$(S_2-S_1)^3=108$에서 $(ar)^3=108$
즉, $a^3r^3=108$ …… ㉡
㉠을 ㉡에 대입하면
$a^3\times 4=108$, $a^3=27$
$a>0$이므로 $a=3$
따라서 $a_2\times a_6=(a_4)^2=(ar^3)^2=a^2\times(r^3)^2=3^2\times 4^2=144$

답 ③

19

조건 (가)에 의하여
$S_{2n-1}=S_1+(n-1)\times 3$
조건 (나)에 의하여
$S_{2n}=S_2+(n-1)\times 4$
$a_{11}=S_{11}-S_{10}=(S_1+15)-(S_2+16)=S_1-S_2-1$
$a_{12}=S_{12}-S_{11}=(S_2+20)-(S_1+15)=S_2-S_1+5$
이때 $a_{11}=a_{12}$이므로
$S_1-S_2-1=S_2-S_1+5$
$S_2-S_1=-3$
따라서
$a_7=S_7-S_6=(S_1+9)-(S_2+8)$
$=1-(S_2-S_1)$
$=1-(-3)=4$

답 ②

필수 유형 ❼

$\sum_{k=1}^{5}(3a_k+5)=55$에서
$3\sum_{k=1}^{5}a_k+25=55$
$\sum_{k=1}^{5}a_k=10$
$\sum_{k=1}^{5}(a_k+b_k)=32$에서
$\sum_{k=1}^{5}a_k+\sum_{k=1}^{5}b_k=32$
따라서 $\sum_{k=1}^{5}b_k=32-\sum_{k=1}^{5}a_k=32-10=22$

답 22

20

$\sum_{k=1}^{15}(2a_k-b_k)=17$에서

$\sum_{k=1}^{15}(2a_k-b_k)=2\sum_{k=1}^{15}a_k-\sum_{k=1}^{15}b_k=2\times12-\sum_{k=1}^{15}b_k=24-\sum_{k=1}^{15}b_k$

이므로 $24-\sum_{k=1}^{15}b_k=17$

$\sum_{k=1}^{15}b_k=24-17=7$

따라서 $\sum_{k=1}^{15}(b_k+1)=\sum_{k=1}^{15}b_k+\sum_{k=1}^{15}1=7+15=22$

답 ⑤

21

$\sum_{k=1}^{10}\{ka_{k+1}-(k+1)a_k\}=70$에서

$\sum_{k=1}^{10}\{ka_{k+1}-(k+1)a_k\}$

$=(a_2-2a_1)+(2a_3-3a_2)+(3a_4-4a_3)+\cdots+(10a_{11}-11a_{10})$

$=10a_{11}-2(a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{10})$

$=10a_{11}-2\sum_{k=1}^{10}a_k$

이고, $a_{11}=15$이므로

$10\times15-2\sum_{k=1}^{10}a_k=70$, $\sum_{k=1}^{10}a_k=40$

따라서

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{10}a_k(a_k+6)-\sum_{k=1}^{10}(a_k+2)^2&=\sum_{k=1}^{10}\{a_k(a_k+6)-(a_k+2)^2\}\\&=\sum_{k=1}^{10}(2a_k-4)=2\sum_{k=1}^{10}a_k-\sum_{k=1}^{10}4\\&=2\times40-4\times10=40\end{aligned}$$

답 ①

22

$a_n+b_n=2$ …… ㉠

이므로

$(a_n)^2-(b_n)^2=(a_n+b_n)(a_n-b_n)=2(a_n-b_n)$

$\sum_{k=1}^{10}\{(a_k)^2-(b_k)^2\}=310$에서

$\sum_{k=1}^{10}\{(a_k)^2-(b_k)^2\}=\sum_{k=1}^{10}2(a_k-b_k)=2\sum_{k=1}^{10}(a_k-b_k)$

이므로 $2\sum_{k=1}^{10}(a_k-b_k)=310$

$\sum_{k=1}^{10}(a_k-b_k)=155$ …… ㉡

㉠에서 $b_k=-a_k+2$ …… ㉢

㉢을 ㉡에 대입하면

$\sum_{k=1}^{10}\{a_k-(-a_k+2)\}=\sum_{k=1}^{10}(2a_k-2)=2\sum_{k=1}^{10}a_k-20=155$

이므로 $\sum_{k=1}^{10}a_k=\frac{175}{2}$

따라서

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{10}(2a_k-4b_k)&=\sum_{k=1}^{10}\{2a_k-4(-a_k+2)\}=6\sum_{k=1}^{10}a_k-\sum_{k=1}^{10}8\\&=6\times\frac{175}{2}-80=445\end{aligned}$$

답 ④

필수 유형 ❸

$a_n=2n^2-3n+1$이므로

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{7}(a_n-n^2+n)&=\sum_{n=1}^{7}(n^2-2n+1)=\sum_{n=1}^{7}(n-1)^2=\sum_{k=1}^{6}k^2\\&=\frac{6\times7\times13}{6}=91\end{aligned}$$

답 91

23

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{10}k(k^2+16)-\sum_{k=1}^{10}k^2(k+2)&=\sum_{k=1}^{10}\{k(k^2+16)-k^2(k+2)\}\\&=\sum_{k=1}^{10}(16k-2k^2)\\&=16\times\frac{10\times11}{2}-2\times\frac{10\times11\times21}{6}\\&=880-770=110\end{aligned}$$

답 ③

24

$\sum_{k=1}^{20}\left(\frac{1}{3}k+a\right)=\frac{1}{3}\sum_{k=1}^{20}k+\sum_{k=1}^{20}a=\frac{1}{3}\times\frac{20\times21}{2}+20a=70+20a$

$\sum_{k=1}^{12}k^2=\frac{12\times13\times25}{6}=650$

$\sum_{k=1}^{20}\left(\frac{1}{3}k+a\right)=\sum_{k=1}^{12}k^2$에서 $70+20a=650$

따라서 $a=29$

답 29

25

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$a_n=\frac{n^2-12n}{n}=n-12$, $b_n=-\frac{8}{n}$

따라서

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{15}\frac{a_k}{b_k}&=\sum_{k=1}^{15}\frac{k-12}{-\frac{8}{k}}=\sum_{k=1}^{15}\left(-\frac{k^2}{8}+\frac{3k}{2}\right)=-\frac{1}{8}\sum_{k=1}^{15}k^2+\frac{3}{2}\sum_{k=1}^{15}k\\&=-\frac{1}{8}\times\frac{15\times16\times31}{6}+\frac{3}{2}\times\frac{15\times16}{2}\\&=-155+180=25\end{aligned}$$

답 ⑤

26

부등식 $\left(\frac{1}{2}\right)^{x-2n}\geq\left(\frac{1}{2}\right)^{-x-8}$에서 밑 $\frac{1}{2}$이 0보다 크고 1보다 작으므로

$x-2n\leq-x-8$

$x\leq n-4$

(i) $n\leq4$일 때,

부등식 $x\leq n-4$를 만족시키는 자연수 x는 존재하지 않으므로

$a_1=a_2=a_3=a_4=0$

(ii) $n\geq5$일 때,

부등식 $x\leq n-4$를 만족시키는 자연수 x의 개수는 $n-4$이므로

$a_n=n-4$ $(n\geq5)$

(i), (ii)에서 $a_n=\begin{cases} 0 & (n\le 4) \\ n-4 & (n\ge 5) \end{cases}$

따라서 $\sum_{k=1}^{20} a_k=\sum_{k=5}^{20}(k-4)=\sum_{k=1}^{16}k=\frac{16\times 17}{2}=136$

답 ②

필수 유형 ❾

등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항과 공차가 같으므로 $a_1=a$라 하면

$a_n=a+(n-1)\times a=an$

$\sum_{k=1}^{15}\frac{1}{\sqrt{a_k}+\sqrt{a_{k+1}}}=2$에서

$$\sum_{k=1}^{15}\frac{1}{\sqrt{a_k}+\sqrt{a_{k+1}}}=\sum_{k=1}^{15}\frac{1}{\sqrt{ak}+\sqrt{a(k+1)}}=\sum_{k=1}^{15}\frac{\sqrt{a(k+1)}-\sqrt{ak}}{a}$$

$$=\frac{1}{a}\sum_{k=1}^{15}\{\sqrt{a(k+1)}-\sqrt{ak}\}$$

$$=\frac{1}{a}\{(\sqrt{2a}-\sqrt{a})+(\sqrt{3a}-\sqrt{2a})+(\sqrt{4a}-\sqrt{3a})+\cdots+(\sqrt{16a}-\sqrt{15a})\}$$

$$=\frac{1}{a}(4\sqrt{a}-\sqrt{a})=\frac{3\sqrt{a}}{a}$$

이므로 $\frac{3}{\sqrt{a}}=2$

$a=\frac{9}{4}$

따라서 $a_4=4a=4\times\frac{9}{4}=9$

답 ④

27

등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d라 하면 $a_4=a_2+8$에서

$a_4-a_2=8$, $2d=8$

즉, $d=4$이므로 $a_{n+1}-a_n=4$

$$\sum_{k=1}^{15}\frac{1}{a_ka_{k+1}}=\frac{1}{4}\sum_{k=1}^{15}\frac{a_{k+1}-a_k}{a_ka_{k+1}}=\frac{1}{4}\sum_{k=1}^{15}\left(\frac{1}{a_k}-\frac{1}{a_{k+1}}\right)$$

$$=\frac{1}{4}\left\{\left(\frac{1}{a_1}-\frac{1}{a_2}\right)+\left(\frac{1}{a_2}-\frac{1}{a_3}\right)+\left(\frac{1}{a_3}-\frac{1}{a_4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{a_{15}}-\frac{1}{a_{16}}\right)\right\}$$

$$=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{a_1}-\frac{1}{a_{16}}\right)=\frac{1}{4}\left(1-\frac{1}{a_{16}}\right) \quad \cdots\cdots ㉠$$

한편, $a_{16}=a_1+15d=1+15\times 4=61$ $\quad \cdots\cdots ㉡$

㉠, ㉡에서

$$\sum_{k=1}^{15}\frac{1}{a_ka_{k+1}}=\frac{1}{4}\left(1-\frac{1}{a_{16}}\right)=\frac{1}{4}\left(1-\frac{1}{61}\right)=\frac{15}{61}$$

답 ②

다른 풀이

등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d라 하면 $a_4=a_2+8$에서

$a_4-a_2=8$, $2d=8$

즉, $d=4$

이때 $a_1=1$이므로 $a_n=1+(n-1)\times 4=4n-3$

따라서

$$\sum_{k=1}^{15}\frac{1}{a_ka_{k+1}}=\sum_{k=1}^{15}\frac{1}{(4k-3)(4k+1)}=\sum_{k=1}^{15}\frac{1}{4}\left(\frac{1}{4k-3}-\frac{1}{4k+1}\right)$$

$$=\frac{1}{4}\left\{\left(1-\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{9}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{57}-\frac{1}{61}\right)\right\}$$

$$=\frac{1}{4}\left(1-\frac{1}{61}\right)=\frac{15}{61}$$

28

등비수열 $\{a_n\}$의 공비가 2이므로

$a_{n+1}=2a_n$, $S_n=\frac{a_1(2^n-1)}{2-1}=a_1(2^n-1)$

이때 $a_n=\frac{1}{2}a_{n+1}=\frac{1}{2}(S_{n+1}-S_n)$이므로

$$\sum_{k=1}^{10}\frac{a_k}{S_{k+1}S_k}=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{10}\frac{S_{k+1}-S_k}{S_{k+1}S_k}=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{10}\left(\frac{1}{S_k}-\frac{1}{S_{k+1}}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{1}{S_1}-\frac{1}{S_2}\right)+\left(\frac{1}{S_2}-\frac{1}{S_3}\right)+\left(\frac{1}{S_3}-\frac{1}{S_4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{S_{10}}-\frac{1}{S_{11}}\right)\right\}$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{S_1}-\frac{1}{S_{11}}\right)=\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{a_1}-\frac{1}{a_1(2^{11}-1)}\right\}$$

$$=\frac{2^{10}-1}{a_1(2^{11}-1)}$$

즉, $p=\frac{2^{10}-1}{a_1(2^{11}-1)}$에서 $pa_1=\frac{2^{10}-1}{2^{11}-1}$이므로

$1-pa_1=\frac{2^{10}}{2^{11}-1}$, $(2^{11}-1)(1-pa_1)=2^{10}$

따라서

$$\log_2(2^{11}-1)+\log_2(1-pa_1)=\log_2(2^{11}-1)(1-pa_1)$$
$$=\log_2 2^{10}=10$$

답 ④

29

점 A$(0, -1)$에서 함수 $y=\frac{1}{n}x^2$의 그래프에 그은 접선의 기울기를 m $(m>0)$이라 하면 접선의 방정식은 $y=mx-1$이다.

$y=\frac{1}{n}x^2$, $y=mx-1$을 연립하면

$\frac{1}{n}x^2=mx-1$

$\frac{1}{n}x^2-mx+1=0$ $\quad \cdots\cdots ㉠$

이차방정식 ㉠의 판별식을 D라 하면 $D=0$이어야 하므로

$D=m^2-\frac{4}{n}=0$, $m^2=\frac{4}{n}$

$m>0$이므로 $m=\frac{2}{\sqrt{n}}$

따라서 접선의 방정식은 $y=\frac{2}{\sqrt{n}}x-1$이고

접점의 x좌표 x_n은 ㉠에서

$\frac{1}{n}x_n^2-\frac{2}{\sqrt{n}}x_n+1=0$

$\left(\frac{1}{\sqrt{n}}x_n-1\right)^2=0$이므로 $x_n=\sqrt{n}$

이때 $y_n=1$이므로 접점은 P$(\sqrt{n}, 1)$이다.

따라서

$$\sum_{n=1}^{15}\frac{y_n}{x_n+x_{n+1}}$$
$$=\sum_{n=1}^{15}\frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}=\sum_{n=1}^{15}\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$$

$=\sum_{n=1}^{15}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$

$=(\sqrt{2}-\sqrt{1})+(\sqrt{3}-\sqrt{2})+(\sqrt{4}-\sqrt{3})+\cdots+(\sqrt{16}-\sqrt{15})$

$=-1+\sqrt{16}=-1+4=3$

답 ①

필수 유형 ⑩

$a_{n+1}+a_n=(-1)^{n+1}\times n$에서 $a_{n+1}=-a_n+(-1)^{n+1}\times n$

이때 $a_1=12$이므로

$a_2=-a_1+1=-11$, $a_3=-a_2-2=9$

$a_4=-a_3+3=-6$, $a_5=-a_4-4=2$

$a_6=-a_5+5=3$, $a_7=-a_6-6=-9$

$a_8=-a_7+7=16$

따라서 $a_k>a_1$을 만족시키는 자연수 k의 최솟값은 8이다.

답 ④

30

조건 (나)에서 $a_n=-\frac{1}{2}a_{n+1}$, 즉 $a_{n+1}=-2a_n$이므로

수열 $\{a_n\}$은 공비가 -2인 등비수열이다.

조건 (가)에서 $2\times(-2a_1)+4\times4a_1=3$이므로 $a_1=\frac{1}{4}$

따라서 $a_7=\frac{1}{4}\times(-2)^6=16$

답 16

31

$a_1=2$이므로 $\log_2 2\times\log_2 a_2=1$에서

$\log_2 a_2=1$, 즉 $a_2=2$

$a_2=2$이므로 $\log_2 2\times\log_2 a_3=3$에서

$\log_2 a_3=3$, 즉 $a_3=8$

$a_3=2^3$이므로 $\log_2 2^3\times\log_2 a_4=5$에서

$\log_2 a_4=\frac{5}{3}$, 즉 $a_4=2^{\frac{5}{3}}$

$a_4=2^{\frac{5}{3}}$이므로 $\log_2 2^{\frac{5}{3}}\times\log_2 a_5=7$에서

$\log_2 a_5=\frac{21}{5}$, 즉 $a_5=2^{\frac{21}{5}}$

따라서 $\log_2\frac{a_5}{a_2}=\log_2\frac{2^{\frac{21}{5}}}{2}=\log_2 2^{\frac{16}{5}}=\frac{16}{5}$

답 ④

32

조건 (가)에서 $a_{n+1}=a_n+4$, 즉 $a_{n+1}-a_n=4$이므로 수열 $\{a_n\}$은 공차가 4인 등차수열이다.

조건 (나)에서 $\sum_{k=1}^{10}a_k=a_1+a_2$이므로 $\sum_{k=3}^{10}a_k=\frac{8(a_3+a_{10})}{2}=0$

$a_3+a_{10}=(a_1+8)+(a_1+36)=0$에서 $a_1=-22$

$a_2=-22+4=-18$

따라서 $\frac{a_1\times a_2}{4}=\frac{(-22)\times(-18)}{4}=99$

답 99

필수 유형 ⑪

(i) a_6이 3의 배수인 경우

$a_7=40$이므로 $\frac{a_6}{3}=a_7$에서 $a_6=3a_7=3\times40=120$

$a_7=40$이 3의 배수가 아니므로 $a_8=a_6+a_7=120+40=160$

$a_8=160$이 3의 배수가 아니므로 $a_9=a_7+a_8=40+160=200$

(ii) $a_6=3k-2$ (k는 자연수)인 경우

$a_5+a_6=a_7$

$a_5=a_7-a_6=40-(3k-2)=42-3k=3(14-k)$

a_5는 자연수이므로 $3(14-k)>0$에서 $k<14$

한편, a_5는 3의 배수이므로 $a_6=\frac{a_5}{3}$

즉, $3k-2=\frac{3(14-k)}{3}$에서

$4k=16$, $k=4$

따라서 $a_6=3\times4-2=10$이므로 $a_8=a_6+a_7=10+40=50$

$a_8=50$이 3의 배수가 아니므로 $a_9=a_7+a_8=40+50=90$

(iii) $a_6=3k-1$ (k는 자연수)인 경우

$a_5+a_6=a_7$

$a_5=a_7-a_6=40-(3k-1)=41-3k$

a_5는 자연수이므로 $41-3k>0$에서

$k<\frac{41}{3}$ …… ㉠

한편, a_5는 3의 배수가 아니므로

$a_4+a_5=a_6$에서

$a_4=a_6-a_5=(3k-1)-(41-3k)=6k-42=3(2k-14)$

a_4가 자연수이므로 $3(2k-14)>0$에서

$k>7$ …… ㉡

㉠, ㉡에서

$7<k<\frac{41}{3}$

한편, a_4는 3의 배수이므로 $a_5=\frac{a_4}{3}$

즉, $41-3k=\frac{3(2k-14)}{3}$에서

$5k=55$

$k=11$

따라서 $a_6=3\times11-1=32$이므로

$a_8=a_6+a_7=32+40=72$

$a_8=72$가 3의 배수이므로

$a_9=\frac{a_8}{3}=\frac{72}{3}=24$

(i), (ii), (iii)에서 a_9의 최댓값 $M=200$이고 최솟값 $m=24$이다.

따라서 $M+m=200+24=224$

답 ⑤

33

$a_1=1$이므로 $a_2=2a_1=2\times1=2$

$a_2=2$이므로 $a_3=2a_2=2\times2=4$

$a_3=4$이므로 $a_4=2a_3=2\times4=8$

$a_4=8$이므로 $a_5=2a_4=2\times8=16$

$a_5=16$이므로 $a_6=a_5-10=16-10=6$

$a_6=6$이므로 $a_7=2a_6=2\times6=12$

$a_7=12$이므로 $a_8=a_7-10=12-10=2$

⋮

이므로

$a_n=a_{n+6}\ (n\geq2)$

따라서

$\sum_{k=1}^{20}a_k=a_1+3\sum_{k=2}^{7}a_k+a_{20}=1+3(2+4+8+16+6+12)+2=147$

답 ⑤

34

$\sum_{k=1}^{24}a_k=\sum_{k=1}^{12}(a_{2k-1}+a_{2k})=\sum_{k=1}^{12}\left\{\frac{1}{2}(2k-1)+2\right\}=\sum_{k=1}^{12}k+\sum_{k=1}^{12}\frac{3}{2}$

$=\frac{12\times13}{2}+\frac{3}{2}\times12=96$ …… ㉠

$\sum_{k=2}^{25}a_k=\sum_{k=1}^{12}(a_{2k}+a_{2k+1})=\sum_{k=1}^{12}\left(\frac{1}{2}\times2k+2\right)=\sum_{k=1}^{12}k+\sum_{k=1}^{12}2$

$=\frac{12\times13}{2}+2\times12=102$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 $\sum_{k=2}^{25}a_k-\sum_{k=1}^{24}a_k=102-96=6$

즉, $a_{25}-a_1=6$

따라서 $a_1=a_{25}-6=20-6=14$

답 ④

35

(i) a_2가 홀수일 때, $a_3=6a_2=4$, $a_2=\frac{2}{3}$

a_2가 자연수가 아니므로 주어진 조건을 만족시키지 않는다.

(ii) a_2가 짝수일 때, $a_3=\frac{a_2}{2}+1=4$, $a_2=6$

① a_1이 홀수일 때, $a_2=6a_1=6$, $a_1=1$

이때 $a_2>a_1$을 만족시킨다.

② a_1이 짝수일 때, $a_2=\frac{a_1}{2}+1=6$, $a_1=10$

이때 $a_2>a_1$을 만족시키지 않는다.

(i), (ii)에서 $a_1=1$, $a_2=6$

한편, a_3이 짝수이므로 $a_4=\frac{a_3}{2}+1=\frac{4}{2}+1=3$

a_4가 홀수이므로 $a_5=6a_4=6\times3=18$

a_5가 짝수이므로 $a_6=\frac{a_5}{2}+1=\frac{18}{2}+1=10$

a_6이 짝수이므로 $a_7=\frac{a_6}{2}+1=\frac{10}{2}+1=6$

이때

$a_1=1$

$a_2=a_7=a_{12}=a_{17}=\cdots=6$

$a_3=a_8=a_{13}=a_{18}=\cdots=4$

$a_4=a_9=a_{14}=a_{19}=\cdots=3$

$a_5=a_{10}=a_{15}=a_{20}=\cdots=18$

$a_6=a_{11}=a_{16}=a_{21}=\cdots=10$

따라서 $a_k<a_2$를 만족시키는 20 이하의 자연수 k의 값은

1, 3, 4, 8, 9, 13, 14, 18, 19이므로 그 개수는 9이다.

답 ③

필수 유형 ⑫

(i) $n=1$일 때, (좌변)$=3$, (우변)$=3$이므로 (*)이 성립한다.

(ii) $n=m$일 때, (*)이 성립한다고 가정하면

$\sum_{k=1}^{m}a_k=2^{m(m+1)}-(m+1)\times2^{-m}$

이다. $n=m+1$일 때,

$\sum_{k=1}^{m+1}a_k=\sum_{k=1}^{m}a_k+a_{m+1}$

$=2^{m(m+1)}-(m+1)\times2^{-m}$

$+\{2^{2(m+1)}-1\}\times2^{(m+1)m}+m\times2^{-(m+1)}$

$=2^{m(m+1)}-(m+1)\times2^{-m}$

$+(2^{2m+2}-1)\times\boxed{2^{m(m+1)}}+m\times2^{-(m+1)}$

$=\boxed{2^{m(m+1)}}\times\boxed{2^{2m+2}}-\frac{m+2}{2}\times2^{-m}$

$=2^{(m+1)(m+2)}-(m+2)\times2^{-(m+1)}$

이다. 따라서 $n=m+1$일 때도 (*)이 성립한다.

(i), (ii)에 의하여 모든 자연수 n에 대하여

$\sum_{k=1}^{n}a_k=2^{n(n+1)}-(n+1)\times2^{-n}$이다.

따라서 $f(m)=2^{m(m+1)}$, $g(m)=2^{2m+2}$이므로 $\frac{g(7)}{f(3)}=\frac{2^{16}}{2^{12}}=2^4=16$

답 ④

36

(i) $n=1$일 때,

(좌변)$=4$, (우변)$=4$이므로 (*)이 성립한다.

(ii) $n=k$일 때, (*)이 성립한다고 가정하면

$\frac{1\times2^2}{2k^2-1}+\frac{5\times4^2}{2k^2-1}+\frac{9\times6^2}{2k^2-1}+\cdots+\frac{(4k-3)\times(2k)^2}{2k^2-1}$

$=2k(k+1)$

이다. 이때

$1\times2^2+5\times4^2+9\times6^2+$

$\cdots+(4k-3)\times(2k)^2+(4k+1)\times(2k+2)^2$

$=\boxed{2k(k+1)(2k^2-1)}+(4k+1)\times(2k+2)^2$

$=2(k+1)(2k^3+8k^2+9k+2)$

$=2(k+1)\times(k+2)\times\{2\times(\boxed{k^2+2k})+1\}$

$=2(k+1)(k+2)\{2(k+1)^2-1\}$

이므로

$\frac{1\times2^2}{2(k+1)^2-1}+\frac{5\times4^2}{2(k+1)^2-1}+\frac{9\times6^2}{2(k+1)^2-1}+$

$\cdots+\frac{(4k+1)\times\{2(k+1)\}^2}{2(k+1)^2-1}$

$=2(k+1)(k+2)$

이다. 따라서 $n=k+1$일 때도 (*)이 성립한다.

(i), (ii)에 의하여 모든 자연수 n에 대하여

$\frac{1\times2^2}{2n^2-1}+\frac{5\times4^2}{2n^2-1}+\frac{9\times6^2}{2n^2-1}+\cdots+\frac{(4n-3)\times(2n)^2}{2n^2-1}=2n(n+1)$

이다.

이상에서 $f(k)=2k(k+1)(2k^2-1)$, $g(k)=k^2+2k$이므로

$\frac{f(5)}{g(3)}=\frac{10\times6\times49}{15}=196$

답 ②

04 함수의 극한과 연속

정답 본문 42~49쪽

필수 유형 ❶ ②	01 ②	02 ②	03 ④
필수 유형 ❷ ②	04 ④	05 ③	06 ④
	07 ②		
필수 유형 ❸ 30	08 ④	09 ①	10 4
	11 12		
필수 유형 ❹ ②	12 ④	13 14	14 ⑤
필수 유형 ❺ ②	15 ⑤	16 ②	17 ③
	18 ④	19 18	
필수 유형 ❻ ⑤	20 ④	21 ②	22 ③
	23 11	24 ③	
필수 유형 ❼ ④	25 ④	26 ④	27 38

필수 유형 ❶

주어진 그래프에서

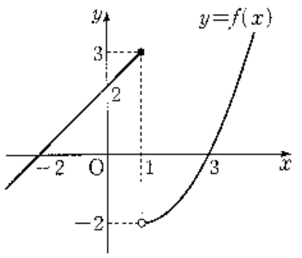
$\lim_{x\to 0-} f(x)=-2$, $\lim_{x\to 1+} f(x)=1$이므로

$\lim_{x\to 0-} f(x)+\lim_{x\to 1+} f(x)=-2+1=-1$

답 ②

01

함수 $y=f(x)$의 그래프는 그림과 같다.



위의 그래프에서

$\lim_{x\to 1-} f(x)=3$, $\lim_{x\to 1+} f(x)=-2$이므로

$\lim_{x\to 1-} f(x)+\lim_{x\to 1+} f(x)=3+(-2)=1$

답 ②

다른 풀이

$\lim_{x\to 1-} f(x)=\lim_{x\to 1-}(x+2)=3$

$\lim_{x\to 1-} f(x)=\lim_{x\to 1+}\left\{\frac{1}{2}(x-1)^2-2\right\}=-2$

따라서 $\lim_{x\to 1-} f(x)+\lim_{x\to 1+} f(x)=3+(-2)=1$

02

함수 $y=f(x)-2$의 그래프는 함수 $y=f(x)$의 그래프를 y축의 방향으로 -2만큼 평행이동한 것과 같으므로

$\lim_{x\to -1+}\{f(x)-2\}=0$

함수 $y=f(x-1)$의 그래프는 함수 $y=f(x)$의 그래프를 x축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것과 같으므로

$\lim_{x\to 2-} f(x-1)=\lim_{x\to 1-} f(x)=-2$

따라서 $\lim_{x\to -1+}\{f(x)-2\}+\lim_{x\to 2-} f(x-1)=0+(-2)=-2$

답 ②

03

$\lim_{x\to 1-} f(x)=0$, $\lim_{x\to 1+} g(x)=1$, $\lim_{x\to -1} g(x)=1$

이므로 $0+1=f(k)+1$에서 $f(k)=0$

따라서 그림에서 $f(1)=0$이므로 $k=1$이다.

답 ④

필수 유형 ❷

$$\lim_{x\to -1}\frac{x^2+9x+8}{x+1}=\lim_{x\to -1}\frac{(x+1)(x+8)}{x+1}=\lim_{x\to -1}(x+8)$$
$$=-1+8=7$$

답 ②

04

$$\lim_{x\to 0}\frac{10x-x^2}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{x(10-x)(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})}{(\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x})(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{x(10-x)(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})}{(1+x)-(1-x)}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{x(10-x)(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})}{2x}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{(10-x)(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})}{2}$$
$$=\frac{10\times(1+1)}{2}=10$$

답 ④

05

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x(2x+3)}{3x^2+2x+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{2+\frac{3}{x}}{3+\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}}=\frac{2+0}{3+0+0}=\frac{2}{3}$$

답 ③

06

$$\lim_{x\to\infty}\{\sqrt{x(x+k)}-x\}$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\{\sqrt{x(x+k)}-x\}\{\sqrt{x(x+k)}+x\}}{\sqrt{x(x+k)}+x}$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{kx}{\sqrt{x^2+kx}+x}=\lim_{x\to\infty}\frac{k}{\sqrt{1+\frac{k}{x}}+1}=\frac{k}{1+1}=\frac{k}{2}=2$$

에서 $k=4$

답 ④

07

$\frac{x^2-2}{6x} \le f(x) \le \frac{x^2+2}{6x}$에서 $x>0$이므로

$\frac{x^2-2}{3x^2} \le \frac{2f(x)}{x} \le \frac{x^2+2}{3x^2}$

이때 $\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-2}{3x^2}=\lim_{x\to\infty}\frac{1-\frac{2}{x^2}}{3}=\frac{1}{3}$

$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+2}{3x^2}=\lim_{x\to\infty}\frac{1+\frac{2}{x^2}}{3}=\frac{1}{3}$

따라서 함수의 극한의 대소 관계에 의하여 $\lim_{x\to\infty}\frac{2f(x)}{x}=\frac{1}{3}$

답 ②

필수 유형 ❸

$\lim_{x\to1}(2x^2+1)f(x)=\lim_{x\to1}\left\{\frac{2x^2+1}{x+1}\times(x+1)f(x)\right\}$

$=\lim_{x\to1}\frac{2x^2+1}{x+1}\times\lim_{x\to1}(x+1)f(x)$

$=\frac{2+1}{1+1}\times1=\frac{3}{2}$

에서 $a=\frac{3}{2}$

따라서 $20a=20\times\frac{3}{2}=30$

답 30

다른 풀이

$a=\lim_{x\to1}(2x^2+1)f(x)=\frac{\lim_{x\to1}(2x^2+1)f(x)}{\lim_{x\to1}(x+1)f(x)}=\lim_{x\to1}\frac{(2x^2+1)f(x)}{(x+1)f(x)}$

$=\lim_{x\to1}\frac{2x^2+1}{x+1}=\frac{2+1}{1+1}=\frac{3}{2}$

따라서 $20a=20\times\frac{3}{2}=30$

08

$\lim_{x\to0}g(x)=\lim_{x\to0}[\{g(x)-2\}+2]$에서

$\lim_{x\to0}\{g(x)-2\}=\lim_{x\to0}\frac{f(x)\{g(x)-2\}}{f(x)}=\lim_{x\to0}\frac{f(x)g(x)-2f(x)}{f(x)}$

$=\frac{\lim_{x\to0}\{f(x)g(x)-2f(x)\}}{\lim_{x\to0}f(x)}=\frac{6}{2}=3$

따라서

$\lim_{x\to0}g(x)=\lim_{x\to0}[\{g(x)-2\}+2]=\lim_{x\to0}\{g(x)-2\}+\lim_{x\to0}2$

$=3+2=5$

답 ④

09

$\lim_{x\to1}\frac{x^3-1}{xf(x)}=\lim_{x\to1}\left\{\frac{x^2-1}{f(x)}\times\frac{x^3-1}{x(x^2-1)}\right\}$

$=\lim_{x\to1}\left\{\frac{x^2-1}{f(x)}\times\frac{(x-1)(x^2+x+1)}{x(x-1)(x+1)}\right\}$

$=\lim_{x\to1}\left\{\frac{x^2-1}{f(x)}\times\frac{x^2+x+1}{x(x+1)}\right\}$

$=\lim_{x\to1}\frac{1}{\frac{f(x)}{x^2-1}}\times\lim_{x\to1}\frac{x^2+x+1}{x(x+1)}=\frac{1}{\frac{3}{2}}\times\frac{3}{2}=1$

답 ①

10

$f(x)=ax+b$ (a, b는 상수, $a\ne0$)이라 하면

$\lim_{x\to0}f(x)=\lim_{x\to0}(ax+b)=b=2$

$\lim_{x\to1}\frac{3(x^2-1)}{(x-1)f(x)}=\lim_{x\to1}\frac{3(x-1)(x+1)}{(x-1)(ax+2)}=\lim_{x\to1}\frac{3(x+1)}{ax+2}$

$=\frac{3\lim_{x\to1}(x+1)}{\lim_{x\to1}(ax+2)}=\frac{3(1+1)}{a+2}=\frac{6}{a+2}=2$

에서 $a+2=3$이므로 $a=1$

따라서 $f(x)=x+2$이므로 $f(2)=2+2=4$

답 4

11

$f(x)$가 다항함수이므로

$\lim_{x\to1-}f(x)=\lim_{x\to1+}f(x)=\lim_{x\to1}f(x)$

조건 (가)에서

$\lim_{x\to1-}f(x)+\lim_{x\to1+}2f(x)=\lim_{x\to1}f(x)+2\lim_{x\to1}f(x)=3\lim_{x\to1}f(x)=6$

이므로 $\lim_{x\to1}f(x)=2$

조건 (나)에서

$\lim_{x\to1}\{f(x)g(x)+2xf(x)\}=\lim_{x\to1}f(x)\{g(x)+2x\}$

$=\lim_{x\to1}f(x)\times\left\{\lim_{x\to1}g(x)+\lim_{x\to1}2x\right\}$

$=2\left\{\lim_{x\to1}g(x)+2\right\}=10$

이므로 $\lim_{x\to1}g(x)=3$

따라서

$\lim_{x\to1}\{3f(x)+2g(x)\}=3\lim_{x\to1}f(x)+2\lim_{x\to1}g(x)=3\times2+2\times3=12$

답 12

다른 풀이

$f(x)$, $g(x)$가 다항함수이므로 $x=1$에서 연속이다.

$\lim_{x\to1-}f(x)=\lim_{x\to1+}f(x)=\lim_{x\to1}f(x)=f(1)$

$\lim_{x\to1}g(x)=g(1)$

조건 (가)에서 $f(1)+2f(1)=6$이므로 $f(1)=2$

조건 (나)에서 $f(1)g(1)+2f(1)=10$이므로

$2g(1)+4=10$, $g(1)=3$

따라서 $\lim_{x\to1}\{3f(x)+2g(x)\}=3f(1)+2g(1)=3\times2+2\times3=12$

필수 유형 ❹

조건 (가)에서 다항함수 $f(x)$는

$f(x)=2x^2+ax+b$ (a, b는 상수)로 놓을 수 있다.

조건 (나)에서 $x\to0$일 때 극한값이 존재하고 (분모) $\to$ 0이므로

(분자) $\to$ 0이어야 한다.

즉, $\lim_{x\to0}f(x)=\lim_{x\to0}(2x^2+ax+b)=b=0$에서

$f(x)=2x^2+ax$이므로

$\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to0}\frac{x(2x+a)}{x}=\lim_{x\to0}(2x+a)=a=3$

따라서 $f(x)=2x^2+3x$이므로 $f(2)=14$

답 ②

12

$\lim_{x\to2}\frac{\sqrt{x+a}-b}{x^2-4}=\frac{1}{16}$ …… ㉠

에서 $x\to2$일 때 극한값이 존재하고 (분모) $\to0$이므로 (분자) $\to0$이어야 한다.

즉, $\lim_{x\to2}(\sqrt{x+a}-b)=0$에서 $\sqrt{2+a}-b=0$이므로

$b=\sqrt{2+a}$ …… ㉡

㉡을 ㉠에 대입하면

$$\lim_{x\to2}\frac{\sqrt{x+a}-\sqrt{2+a}}{x^2-4}=\lim_{x\to2}\frac{(\sqrt{x+a}-\sqrt{2+a})(\sqrt{x+a}+\sqrt{2+a})}{(x^2-4)(\sqrt{x+a}+\sqrt{2+a})}$$
$$=\lim_{x\to2}\frac{x-2}{(x-2)(x+2)(\sqrt{x+a}+\sqrt{2+a})}$$
$$=\lim_{x\to2}\frac{1}{(x+2)(\sqrt{x+a}+\sqrt{2+a})}$$
$$=\frac{1}{(2+2)(\sqrt{2+a}+\sqrt{2+a})}$$
$$=\frac{1}{8\sqrt{2+a}}=\frac{1}{16}$$

에서 $\sqrt{2+a}=2$이므로 $a=2$

이것을 ㉡에 대입하면 $b=2$

따라서 $a+b=2+2=4$

답 ④

13

$\lim_{x\to1}\frac{(x-1)f(x)}{(x+a)(x+b)}=\frac{1}{4}$에서 $x\to1$일 때 0이 아닌 극한값이 존재하고 (분자) $\to0$이므로 (분모) $\to0$이어야 한다.

즉, $\lim_{x\to1}\{(x+a)(x+b)\}=(1+a)(1+b)=0$에서

$1+a=0$ 또는 $1+b=0$, 즉 $a=-1$ 또는 $b=-1$

한편, 다항함수 $y=f(x)$의 그래프가 점 $(1, 4)$를 지나므로 $f(1)=4$

$a=-1$일 때,

$\lim_{x\to1}\frac{(x-1)f(x)}{(x-1)(x+b)}=\lim_{x\to1}\frac{f(x)}{x+b}=\frac{f(1)}{1+b}=\frac{4}{1+b}=\frac{1}{4}$에서

$b=15$

같은 방법으로 $b=-1$일 때, $a=15$

따라서 $a+b=-1+15=14$

답 14

참고

$b=-1$일 때,

$\lim_{x\to1}\frac{(x-1)f(x)}{(x+a)(x-1)}=\lim_{x\to1}\frac{f(x)}{x+a}=\frac{f(1)}{1+a}=\frac{4}{1+a}=\frac{1}{4}$에서

$a=15$

14

조건 (가)에서 $f(x)-ax^2$은 일차항의 계수가 4인 일차함수이므로

$f(x)-ax^2=4x+b$ (b는 상수)라 하자.

조건 (나)에서 $x\to-2$일 때, 극한값이 존재하고 (분모) $\to0$이므로 (분자) $\to0$이어야 한다. 즉,

$\lim_{x\to-2}f(x)=\lim_{x\to-2}(ax^2+4x+b)=4a-8+b=0$

에서 $b=-4a+8$ …… ㉠

$$\lim_{x\to-2}\frac{f(x)}{x+2}=\lim_{x\to-2}\frac{ax^2+4x-4a+8}{x+2}$$
$$=\lim_{x\to-2}\frac{(x+2)(ax-2a+4)}{x+2}$$
$$=\lim_{x\to-2}(ax-2a+4)=-4a+4=4$$

에서 $a=0$

이것을 ㉠에 대입하면 $b=8$

따라서 $f(x)=4x+8$이므로

$f(1)=4+8=12$

답 ⑤

필수 유형 ❺

두 점 A, B의 좌표를 각각 $A(a, a^2)$, $B(b, b^2)$이라 하면 x에 대한 이차방정식 $x^2-x-t=0$의 두 근이 a, b이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$a+b=1$, $ab=-t$

$\overline{AH}=a-b=\sqrt{(a+b)^2-4ab}=\sqrt{1+4t}$

한편, 점 C의 좌표는 $C(-a, a^2)$이므로

$\overline{CH}=b-(-a)=a+b=1$

따라서

$$\lim_{t\to0+}\frac{\overline{AH}-\overline{CH}}{t}=\lim_{t\to0+}\frac{\sqrt{1+4t}-1}{t}$$
$$=\lim_{t\to0+}\frac{(\sqrt{1+4t}-1)(\sqrt{1+4t}+1)}{t(\sqrt{1+4t}+1)}$$
$$=\lim_{t\to0+}\frac{4t}{t(\sqrt{1+4t}+1)}$$
$$=\lim_{t\to0+}\frac{4}{\sqrt{1+4t}+1}$$
$$=\frac{4}{1+1}=2$$

답 ②

15

사각형 PQCR가 평행사변형이므로

$\overline{DR}=\overline{PR}-\overline{PD}=\overline{QC}-\overline{PD}=1-t$

즉, 직각삼각형 ABR에서

$\overline{AB}=3$, $\overline{AR}=3+(1-t)=4-t$

이므로

$\overline{BR}=\sqrt{3^2+(4-t)^2}=\sqrt{t^2-8t+25}$

따라서

$$\lim_{t\to0-}\frac{\overline{\mathrm{PD}}}{5-\overline{\mathrm{BR}}}=\lim_{t\to0-}\frac{t}{5-\sqrt{t^2-8t+25}}=\lim_{t\to0+}\frac{t(5+\sqrt{t^2-8t+25})}{25-(t^2-8t+25)}$$
$$=\lim_{t\to0+}\frac{t(5+\sqrt{t^2-8t+25})}{t(8-t)}=\lim_{t\to0+}\frac{5+\sqrt{t^2-8t+25}}{8-t}$$
$$=\frac{5+5}{8}=\frac{5}{4}$$

답 ⑤

16

두 점 $\mathrm{P}(t,\ t^2)$, $\mathrm{A}(4,\ 0)$에 대하여 선분 PA의 중점을 M이라 하면

점 M의 좌표는 $\left(\frac{t+4}{2},\ \frac{t^2}{2}\right)$

직선 PA의 기울기는 $\frac{t^2}{t-4}$이므로 이 직선에 수직인 직선의 기울기는 $-\frac{t-4}{t^2}$이다.

즉, 선분 PA의 수직이등분선의 방정식은

$$y-\frac{t^2}{2}=-\frac{t-4}{t^2}\left(x-\frac{t+4}{2}\right)$$

이 직선의 x절편이 $f(t)$이므로

$$0-\frac{t^2}{2}=-\frac{t-4}{t^2}\left\{f(t)-\frac{t+4}{2}\right\}$$

$$f(t)-\frac{t+4}{2}=\frac{t^4}{2(t-4)}$$

$$f(t)=\frac{t^4}{2(t-4)}+\frac{t+4}{2}=\frac{t^4+t^2-16}{2(t-4)}$$

따라서 $\lim_{t\to\infty}\frac{f(t)}{t^3}=\lim_{t\to\infty}\frac{t^4+t^2-16}{2t^3(t-4)}=\lim_{t\to\infty}\frac{1+\frac{1}{t^2}-\frac{16}{t^4}}{2\left(1-\frac{4}{t}\right)}=\frac{1}{2}$

답 ②

17

$4x^2=t\ (x>0)$에서 $x=\frac{\sqrt{t}}{2}$이므로 점 A의 좌표는 $\left(\frac{\sqrt{t}}{2},\ t\right)$이다.

또 $x^2=t\ (x>0)$에서 $x=\sqrt{t}$이므로 점 B의 좌표는 $(\sqrt{t},\ t)$이다.

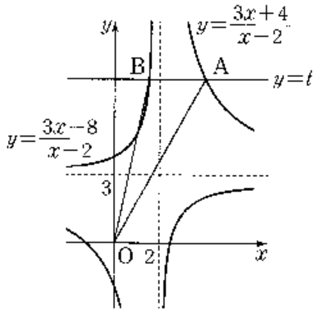
따라서 $f(t)=\sqrt{\frac{t}{4}+t^2}$, $g(t)=\sqrt{t+t^2}$이므로

$$\lim_{t\to\infty}\{g(t)-f(t)\}=\lim_{t\to\infty}\left(\sqrt{t+t^2}-\sqrt{\frac{t}{4}+t^2}\right)$$
$$=\lim_{t\to\infty}\frac{(t+t^2)-\left(\frac{t}{4}+t^2\right)}{\sqrt{t+t^2}+\sqrt{\frac{t}{4}+t^2}}$$
$$=\lim_{t\to\infty}\frac{\frac{3}{4}t}{\sqrt{t+t^2}+\sqrt{\frac{t}{4}+t^2}}$$
$$=\lim_{t\to\infty}\frac{\frac{3}{4}}{\sqrt{\frac{1}{t}+1}+\sqrt{\frac{1}{4t}+1}}$$
$$=\frac{\frac{3}{4}}{1+1}=\frac{3}{8}$$

답 ③

18

두 함수 $y=\frac{3x+4}{x-2}$, $y=\frac{3x-8}{x-2}$의 그래프는 그림과 같다.



$\frac{3x+4}{x-2}=t$에서 $x=\frac{2t+4}{t-3}$이므로 점 A의 좌표는 $\left(\frac{2t+4}{t-3},\ t\right)$이다.

$\frac{3x-8}{x-2}=t$에서 $x=\frac{2t-8}{t-3}$이므로 점 B의 좌표는 $\left(\frac{2t-8}{t-3},\ t\right)$이다.

즉, $\overline{\mathrm{AB}}=\frac{2t+4}{t-3}-\frac{2t-8}{t-3}=\frac{12}{t-3}$이므로 삼각형 OAB의 넓이 $f(t)$는

$$f(t)=\frac{1}{2}\times t\times\frac{12}{t-3}=\frac{6t}{t-3}$$

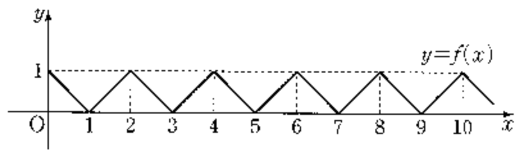
따라서

$$\lim_{t\to3-}(t^2-4t+3)f(t)=\lim_{t\to3+}\frac{6t(t^2-4t+3)}{t-3}$$
$$=\lim_{t\to3-}\frac{6t(t-1)(t-3)}{t-3}=\lim_{t\to3+}6t(t-1)$$
$$=6\times3\times2=36$$

답 ④

19

조건 (가), (나)에 의하여 함수 $y=f(x)$의 그래프는 그림과 같다.



이때 직선 $y=\frac{x}{t}$는 원점을 지나고 기울기가 $\frac{1}{t}$인 직선이므로

$0<t<2$일 때, $g(t)=1$

자연수 n에 대하여 $t=2n$일 때, $g(t)=2n$

$2n<t<2n+2$일 때, $g(t)=2n+1$

즉, $2<t<4$일 때 $g(t)=3$이므로 $\lim_{t\to4-}g(t)=3$

$8<t<10$일 때 $g(t)=9$이므로 $\lim_{t\to8+}g(t)=9$

따라서 $\lim_{t\to4-}g(t)+g(6)+\lim_{t\to8+}g(t)=3+6+9=18$

답 18

필수 유형 6

함수 $|f(x)|$가 실수 전체의 집합에서 연속이므로 $x=-1$과 $x=3$에서도 연속이어야 한다.

(i) 함수 $|f(x)|$가 $x=-1$에서 연속이므로

$\lim_{x\to-1-}|f(x)|=\lim_{x\to-1+}|f(x)|=|f(-1)|$

$\lim_{x\to-1-}|x+a|=\lim_{x\to-1+}|x|=|-1|$

$|-1+a|=|-1|=|-1|$

$|-1+a|=1$

$a>0$이므로

$a=2$

(ii) 함수 $|f(x)|$가 $x=3$에서 연속이므로

$\lim_{x\to3-}|f(x)|=\lim_{x\to3+}|f(x)|=|f(3)|$

$\lim_{x\to3-}|x|=\lim_{x\to3+}|bx-2|=|3b-2|$

$|3|=|3b-2|=|3b-2|$

$|3b-2|=3$

$b>0$이므로

$b=\frac{5}{3}$

따라서 $a+b=2+\frac{5}{3}=\frac{11}{3}$

답 ⑤

20

함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이므로 $x=2$에서도 연속이어야 한다.

즉, $\lim_{x\to2-}f(x)=\lim_{x\to2+}f(x)=f(2)$

$\lim_{x\to2-}(x-a)=\lim_{x\to2+}(ax+3)=2a+3$

$2-a=2a+3$

$3a=-1$

$a=-\frac{1}{3}$

따라서 $f(x)=\begin{cases} x+\frac{1}{3} & (x<2) \\ -\frac{1}{3}x+3 & (x\ge2) \end{cases}$ 이므로

$f(1)+f(3)=\left(1+\frac{1}{3}\right)+(-1+3)=\frac{10}{3}$

답 ①

21

함수 $f(x)$가 $x=1$에서 연속이므로 $\lim_{x\to1}f(x)=f(1)$이어야 한다.

따라서

$$a=\lim_{x\to1}f(x)=\lim_{x\to1}\frac{\sqrt{x^2+3}-2}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{x^2-1}{(x-1)(\sqrt{x^2+3}+2)}$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{x+1}{\sqrt{x^2+3}+2}=\frac{2}{2+2}=\frac{1}{2}$$

답 ②

22

함수 $g(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이므로 $x=0$과 $x=2$에서도 연속이어야 한다.

(i) 함수 $g(x)$가 $x=0$에서 연속이므로

$\lim_{x\to0-}g(x)=\lim_{x\to0+}g(x)=g(0)$

이때 $\lim_{x\to0+}g(x)=g(0)=b$이므로 $\lim_{x\to0-}g(x)=b$이어야 한다.

즉, $\lim_{x\to0-}\frac{x^2+x+a}{x^2-x}=b$에서 $x\to0-$일 때 (분모) $\to0$이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\to0$이어야 한다.

그러므로 $a=0$이고

$b=\lim_{x\to0-}\frac{x^2+x}{x^2-x}=\lim_{x\to0-}\frac{x(x+1)}{x(x-1)}=\lim_{x\to0-}\frac{x+1}{x-1}=-1$

(ii) 함수 $g(x)$가 $x=2$에서 연속이므로

$\lim_{x\to2-}g(x)=\lim_{x\to2+}g(x)=g(2)$

$\lim_{x\to2-}(x-1)=\lim_{x\to2+}f(x)=f(2)$

즉, $f(2)=1$

한편, 함수 $f(x)$는 이차항의 계수가 1인 이차함수이고, $x\ge2$에서 최솟값이 0이므로

$f(x)=(x-k)^2$ (단, k는 2보다 큰 상수)

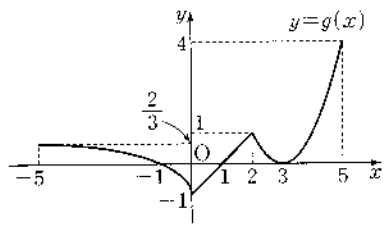
로 놓을 수 있다. 이때 $f(2)=1$이므로

$(2-k)^2=1$

$k>2$이므로 $k=3$

그러므로 $g(x)=\begin{cases} \frac{x+1}{x-1} & (x<0) \\ x-1 & (0\le x<2) \\ (x-3)^2 & (x\ge2) \end{cases}$

이고 닫힌구간 $[-5, 5]$에서 함수 $y=g(x)$의 그래프는 그림과 같다.



따라서 닫힌구간 $[-5, 5]$에서 함수 $g(x)$의 최댓값은 4, 최솟값은 -1이므로 구하는 합은

$4+(-1)=3$

답 ③

23

함수 $g(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이므로 $x=1$, $x=3$에서도 연속이어야 한다.

즉, $\lim_{x\to1-}g(x)=\lim_{x\to1+}g(x)=g(1)$에서

$\frac{1}{2}=\frac{1}{f(1)}$, $f(1)=2$ …… ㉠

또 $\lim_{x\to3-}g(x)=\lim_{x\to3+}g(x)=g(3)$에서

$\frac{1}{f(3)}=\frac{1}{6}$, $f(3)=6$ …… ㉡

㉠, ㉡에 의하여

$f(x)-2x=a(x-1)(x-3)$ (단, a는 0보다 큰 상수)

로 놓을 수 있다. 즉,

$f(x)=ax^2-2(2a-1)x+3a$

$=a\left(x-\frac{2a-1}{a}\right)^2-\frac{a^2-4a+1}{a}$ …… ㉢

이고 함수 $g(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이려면 $1\le x\le 3$에서 $f(x)\ne 0$이어야 한다.

(i) $\frac{2a-1}{a}\le 1$인 경우

$2a-1\le a$, $a\le 1$

즉, $0<a\le 1$인 경우 $f(1)=2>0$이므로 조건을 만족시킨다.

(ii) $\frac{2a-1}{a}\ge 3$인 경우

$2a-1\ge 3a$

$a<-1$이므로 조건을 만족시키는 양수 a는 존재하지 않는다.

(iii) $1<\frac{2a-1}{a}<3$, 즉 $a>1$인 경우

㉢에서 $-\frac{a^2-4a+1}{a}>0$이어야 하므로

$a^2-4a+1<0$, $2-\sqrt{3}<a<2+\sqrt{3}$

즉, $1<a<2+\sqrt{3}$

(i), (ii), (iii)에 의하여 조건을 만족시키는 양수 a의 값의 범위는 $0<a<2+\sqrt{3}$이고, $k=f(0)=3a$이므로

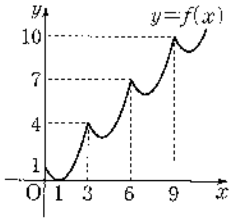
$0<k<6+3\sqrt{3}$

이때 $11<6+3\sqrt{3}<12$이므로 조건을 만족시키는 자연수 k의 최댓값은 11이다.

답 11

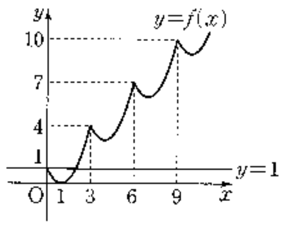
24

조건 (가), (나)에 의하여 함수 $y=f(x)$의 그래프는 그림과 같다.



ㄱ. $t=0$일 때, 직선 $y=1$은 그림과 같이 함수 $y=f(x)$의 그래프와 두 점에서 만나므로

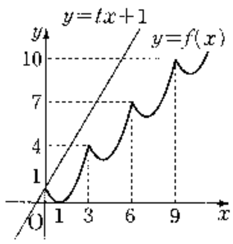
$g(0)=2$ (참)



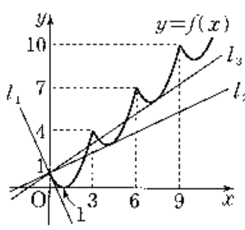
ㄴ. $t>1$일 때, 직선 $y=tx+1$은 그림과 같이 함수 $y=f(x)$의 그래프와 점 $(0, 1)$에서만 만난다.

즉, $t>1$일 때, $g(t)=1$이므로

$\lim_{t\to 1+} g(t)=1$ (거짓)



ㄷ. 그림과 같이 점 $(0, 1)$에서 곡선 $y=(x-1)^2$에 접하는 직선을 l_1, $3<x<6$인 점에서 곡선 $y=f(x)$에 접하고 점 $(0, 1)$을 지나는 직선을 l_2, $6<x<9$인 점에서 곡선 $y=f(x)$에 접하고 점 $(0, 1)$을 지나는 직선을 l_3, …이라 하고, 자연수 n에 대하여 직선 l_n의 기울기를 t_n이라 하자.



$(x-1)^2=tx+1$에서 $x^2-(t+2)x=0$이므로

$t=-2$일 때 직선 $y=-2x+1$은 점 $(0, 1)$에서 곡선 $y=(x-1)^2$에 접한다.

즉, $t_1=-2$이고 $t\le -2$일 때 $g(t)=1$, $-2<t<t_2$일 때 $g(t)=2$이므로 함수 $g(t)$는 $t=-2$에서 불연속이고 $a_1=-2$이다.

또 $g(t_2)=3$이고 $t_2<t<t_3$일 때 $g(t)=4$이므로 함수 $g(t)$는 $t=t_2$에서 불연속이고 $a_2=t_2$이다.

마찬가지 방법으로 하면 $a_3=t_3$임을 알 수 있다.

즉, 직선 $y=a_3x+1$이 $6<x<9$인 점에서 곡선 $y=(x-7)^2+6$에 접하므로 이차방정식

$(x-7)^2+6=a_3x+1$, 즉 $x^2-(a_3+14)x+54=0$의 판별식을 D라 하면

$D=(a_3+14)^2-4\times 54=0$

$(a_3+14)^2=4\times 9\times 6$

$a_3>0$이므로 $a_3+14=6\sqrt{6}$

그러므로 $a_3=-14+6\sqrt{6}$ (참)

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

답 ③

필수 유형 ❼

$g(x)=\{f(x)\}^2$이라 하자.

함수 $g(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이려면 $x=a$에서 연속이어야 한다.

즉, $\lim_{x\to a+} g(x)=\lim_{x\to a-} g(x)=g(a)$이어야 한다.

이때

$\lim_{x\to a-} g(x)=\lim_{x\to a-} \{f(x)\}^2=\lim_{x\to a-} (-2x+6)^2=(-2a+6)^2$,

$\lim_{x\to a+} g(x)=\lim_{x\to a+} (2x-a)^2=a^2$,

$g(a)=\{f(a)\}^2=a^2$이므로

$(-2a+6)^2=a^2$에서 $a^2-8a+12=0$

$(a-2)(a-6)=0$

$a=2$ 또는 $a=6$

따라서 조건을 만족시키는 모든 상수 a의 값의 합은

$2+6=8$

답 ④

25

함수 $f(x)$가 $x=1$, $x=3$에서만 불연속이고, 함수 $g(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이므로 함수 $h(x)$가 $x=1$, $x=3$에서 연속이면 닫힌구간 $[0, 4]$에서 연속이다.

함수 $h(x)$가 $x=1$에서 연속이어야 하므로

$\lim_{x\to 1-} h(x)=\lim_{x\to 1+} h(x)=h(1)$

$\lim_{x\to 1-} f(x)g(x)=\lim_{x\to 1+} f(x)g(x)=f(1)g(1)$

$1\times g(1)=0\times g(1)=1\times g(1)$

즉, $g(1)=0$ ⋯⋯ ㉠

또 함수 $h(x)$가 $x=3$에서 연속이어야 하므로

$\lim_{x\to 3-} h(x)=\lim_{x\to 3+} h(x)=h(3)$

$\lim_{x \to 3-} f(x)g(x) = \lim_{x \to 3+} f(x)g(x) = f(3)g(3)$

$2 \times g(3) = 0 \times g(3) = 2 \times g(3)$

즉, $g(3)=0$ ...... ㉡

㉠, ㉡에 의하여

$g(x) = a(x-1)(x-3)$ (단, a는 0이 아닌 상수)

로 놓을 수 있다.

이때 $h(0)-h(4)=-6$이므로 $2 \times g(0) - 1 \times g(4) = -6$

$6a-3a=-6$

$a=-2$

즉,

$g(x) = -2(x-1)(x-3) = -2x^2+8x-6$

$\quad = -2(x-2)^2+2$

이므로 함수 $g(x)$는 $x=2$에서 최댓값 2를 갖는다.

따라서 $k=2$, $M=2$이므로 $k+M=2+2=4$

답 ①

26

(i) $x<0$일 때

$g(x) = x+3x+4 = 4x+4$이므로 $x \neq -1$일 때

$$h(x) = \frac{x^2-x-2}{4x+4} = \frac{(x+1)(x-2)}{4(x+1)} = \frac{x-2}{4}$$

그러므로 $x<0$에서 함수 $h(x)$가 연속이려면

$$h(-1) = \lim_{x \to -1} h(x) = \lim_{x \to -1} \frac{x-2}{4} = -\frac{3}{4}$$

이어야 한다.

즉, $a = -\frac{3}{4}$

(ii) $x \geq 0$일 때

$g(x) = x-3x+4 = -2x+4$이므로 $x \neq 2$일 때

$$h(x) = \frac{x^2-x-2}{-2x+4} = \frac{(x+1)(x-2)}{-2(x-2)} = -\frac{x+1}{2}$$

그러므로 $x \geq 0$에서 함수 $h(x)$가 연속이려면

$$h(2) = \lim_{x \to 2} h(x) = \lim_{x \to 2} \left(-\frac{x+1}{2}\right) = -\frac{3}{2}$$

이어야 한다.

즉, $b = -\frac{3}{2}$

따라서 $a \times b = \left(-\frac{3}{4}\right) \times \left(-\frac{3}{2}\right) = \frac{9}{8}$

답 ④

27

$h(x)=f(x)-g(x)$라 하면 방정식 $f(x)-g(x)=0$의 실근은 방정식 $h(x)=0$의 실근과 같다.

$h(x) = x^5+x^3+x-k-1$에서 $h(1)=2-k$, $h(2)=41-k$이고,

방정식 $h(x)=0$이 열린구간 $(1, 2)$에서 오직 하나의 실근을 가지려면 $h(1)h(2)<0$이어야 하므로

$(2-k)(41-k)<0$

$2<k<41$

따라서 조건을 만족시키는 정수 k의 개수는 38이다.

답 38

05 다항함수의 미분법

정답 본문 52~63쪽

필수 유형 ❶ 11	01 ①	02 ③	03 ④
필수 유형 ❷ ⑤	04 ⑤	05 ①	06 ④
필수 유형 ❸ ③	07 ④	08 ④	09 ②
필수 유형 ❹ ③	10 ④	11 ⑤	12 20
필수 유형 ❺ 6	13 ③	14 51	15 ②
필수 유형 ❻ 2	16 ③	17 ⑤	18 ①
필수 유형 ❼ ③	19 ⑤	20 ①	21 ③
필수 유형 ❽ ⑤	22 ③	23 ③	24 ②
	25 ②		
필수 유형 ❾ ③	26 ①	27 ②	28 ④
	29 ⑤	30 ③	
필수 유형 ❿ ⑤	31 ③	32 ④	33 ④
필수 유형 ⓫ 22	34 ⑤	35 ⑤	36 13

필수 유형 ❶

함수 $f(x)=x^3-6x^2+5x$에서 x의 값이 0에서 4까지 변할 때의 평균변화율은

$$\frac{f(4)-f(0)}{4-0} = \frac{4^3-6\times4^2+5\times4}{4} = -3$$

$f'(x)=3x^2-12x+5$에서 $f'(a)=3a^2-12a+5$

$\frac{f(4)-f(0)}{4-0} = f'(a)$에서 $-3=3a^2-12a+5$

$3a^2-12a+8=0$

$g(a)=3a^2-12a+8$이라 하면

$g(a)=3(a-2)^2-4$에서 $g(2)=-4<0$이고,

$g(0)=8>0$, $g(4)=8>0$

이므로 이차방정식 $g(a)=0$은 열린구간 $(0, 4)$에서 서로 다른 두 실근을 갖는다.

이때 조건을 만족시키는 모든 실수 a의 값의 곱은 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 $\frac{8}{3}$이므로 $p=3$, $q=8$

따라서 $p+q=3+8=11$

답 11

01

$\lim_{x \to 2} \frac{f(x)-1}{x-2}=5$에서 $x \to 2$일 때 (분모) $\to 0$이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\to 0$이어야 한다.

즉, $\lim_{x \to 2} \{f(x)-1\} = f(2)-1=0$이므로 $f(2)=1$

이때 $\lim_{x \to 2} \frac{f(x)-1}{x-2} = \lim_{x \to 2} \frac{f(x)-f(2)}{x-2} = f'(2)$이므로

$f'(2)=5$

한편, 함수 $f(x)$에서 x의 값이 2에서 4까지 변할 때의 평균변화율은

$\frac{f(4)-f(2)}{4-2}=\frac{f(4)-1}{2}$이므로

$\frac{f(4)-1}{2}=\frac{1}{2}f'(2)=\frac{5}{2}$

따라서 $f(4)=6$

답 ①

02

$\lim_{h\to0}\frac{\{f(3+h)\}^2-\{f(3)\}^2}{2h}$

$=\lim_{h\to0}\frac{\{f(3+h)-f(3)\}\{f(3+h)+f(3)\}}{2h}$

$=\lim_{h\to0}\left\{\frac{f(3+h)-f(3)}{h}\times\frac{f(3+h)+f(3)}{2}\right\}$

$=f'(3)\times\frac{f(3)+f(3)}{2}=f'(3)\times f(3)$

이므로

$f'(3)\times f(3)=16$

따라서 $f'(3)=\frac{16}{f(3)}=\frac{16}{2}=8$

답 ③

03

$\lim_{x\to1}\frac{f(x)+3}{x-1}=4$에서 $x\to1$일 때 (분모) $\to0$이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\to0$이어야 한다.

즉, $\lim_{x\to1}\{f(x)+3\}=f(1)+3=0$이므로 $f(1)=-3$

이때 $\lim_{x\to1}\frac{f(x)+3}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=f'(1)$이므로 $f'(1)=4$

한편, $\lim_{x\to1}\frac{f(x)+g(x)}{x-1}=10$에서 $x\to1$일 때 (분모) $\to0$이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\to0$이어야 한다.

즉, $\lim_{x\to1}\{f(x)+g(x)\}=f(1)+g(1)=0$이므로

$g(1)=-f(1)=-(-3)=3$

이때

$\lim_{x\to1}\frac{f(x)+g(x)}{x-1}=\lim_{x\to1}\left\{\frac{f(x)-f(1)}{x-1}+\frac{g(x)-g(1)}{x-1}\right\}$

$=f'(1)+g'(1)=10$

이므로

$g'(1)=10-f'(1)=10-4=6$

따라서 $g(1)+g'(1)=3+6=9$

답 ④

필수 유형 ❷

함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하므로 $x=-2$에서도 미분가능하다.

함수 $f(x)$가 $x=-2$에서 미분가능하면 $x=-2$에서 연속이므로

$\lim_{x\to-2-}f(x)=\lim_{x\to-2-}f(x)=f(-2)$이어야 한다.

이때

$\lim_{x\to-2-}f(x)=\lim_{x\to-2-}(x^2+ax+b)=4-2a+b$

$\lim_{x\to-2+}f(x)=\lim_{x\to-2-}2x=-4$

$f(-2)=4-2a+b$

이므로

$4-2a+b=-4$에서

$2a-b=8$ …… ㉠

한편, 함수 $f(x)$가 $x=-2$에서 미분가능하므로

$\lim_{x\to-2-}\frac{f(x)-f(-2)}{x-(-2)}=\lim_{x\to-2+}\frac{f(x)-f(-2)}{x-(-2)}$

이어야 한다.

이때

$\lim_{x\to-2-}\frac{f(x)-f(-2)}{x-(-2)}=\lim_{x\to-2-}\frac{(x^2+ax+b)-(4-2a+b)}{x+2}$

$=\lim_{x\to-2-}\frac{x^2+ax-4+2a}{x+2}$

$=\lim_{x\to-2-}\frac{(x+2)(x+a-2)}{x+2}$

$=\lim_{x\to-2-}(x+a-2)=a-4$

$\lim_{x\to-2+}\frac{f(x)-f(-2)}{x-(-2)}=\lim_{x\to-2+}\frac{2x-(4-2a+b)}{x+2}$

$=\lim_{x\to-2+}\frac{2x-(-4)}{x+2}$

$=\lim_{x\to-2+}\frac{2(x+2)}{x+2}=\lim_{x\to-2+}2=2$

이므로 $a-4=2$에서 $a=6$

이것을 ㉠에 대입하면

$2\times6-b=8$, $b=4$

따라서 $a+b=6+4=10$

답 ⑤

04

함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하므로 $x=-1$에서도 미분가능하다.

함수 $f(x)$가 $x=-1$에서 미분가능하면 $x=-1$에서 연속이므로

$\lim_{x\to-1-}f(x)=\lim_{x\to-1+}f(x)=f(-1)$

이어야 한다.

이때

$\lim_{x\to-1-}f(x)=\lim_{x\to-1-}(ax^2+x-3)=a-4$

$\lim_{x\to-1+}f(x)=\lim_{x\to-1-}(bx+1)=-b+1$

$f(-1)=-b+1$

이므로 $a-4=-b+1$에서

$a+b=5$ …… ㉠

한편, 함수 $f(x)$가 $x=-1$에서 미분가능하므로

$\lim_{x\to-1-}\frac{f(x)-f(-1)}{x-(-1)}=\lim_{x\to-1+}\frac{f(x)-f(-1)}{x-(-1)}$

이어야 한다.

이때

$\lim_{x\to-1-}\frac{f(x)-f(-1)}{x-(-1)}=\lim_{x\to-1-}\frac{(ax^2+x-3)-(-b+1)}{x+1}$

$=\lim_{x\to-1-}\frac{(ax^2+x-3)-(a-4)}{x+1}$

$$= \lim_{x \to -1-} \frac{(x+1)(ax-a+1)}{x+1}$$
$$= \lim_{x \to -1-} (ax-a+1) = -2a+1$$
$$\lim_{x \to -1+} \frac{f(x)-f(-1)}{x-(-1)} = \lim_{x \to -1+} \frac{(bx+1)-(-b+1)}{x+1}$$
$$= \lim_{x \to -1+} \frac{b(x+1)}{x+1}$$
$$= \lim_{x \to -1+} b = b$$

이므로 $-2a+1=b$에서

$2a+b=1$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=-4$, $b=9$

따라서

$$f(x)=\begin{cases} -4x^2+x-3 & (x<-1) \\ 9x+1 & (x \ge -1) \end{cases}$$

이므로

$$f(2)-f(-2)=(18+1)-(-16-2-3)$$
$$=19-(-21)=40$$

답 ⑤

05

ㄱ. $\lim_{x \to 0-} \frac{f(x)+1}{x} = \lim_{x \to 0-} \frac{(x^2-1)+1}{x} = \lim_{x \to 0-} \frac{x^2}{x}$

$= \lim_{x \to 0-} x = 0$ (참)

ㄴ. $\lim_{x \to 0-} f(x) = \lim_{x \to 0-} (x^2-1) = -1$

$\lim_{x \to 0+} f(x) = \lim_{x \to 0+} (1-x^3) = 1$

이므로 $\lim_{x \to 0-} f(x) \ne \lim_{x \to 0+} f(x)$

즉, 함수 $f(x)$가 $x=0$에서 연속이 아니므로 $x=0$에서 미분가능하지 않다. (거짓)

ㄷ. $\lim_{x \to 1-} |f(x)| = \lim_{x \to 1-} |1-x^3| = 0$

$\lim_{x \to 1+} |f(x)| = \lim_{x \to 1+} |3-3x| = 0$

$|f(1)|=0$

에서 $\lim_{x \to 1-} |f(x)| = \lim_{x \to 1+} |f(x)| = |f(1)|$이므로 함수 $|f(x)|$는 $x=1$에서 연속이다.

그런데

$$\lim_{x \to 1-} \frac{|f(x)|-|f(1)|}{x-1} = \lim_{x \to 1-} \frac{|1-x^3|-0}{x-1} = \lim_{x \to 1-} \frac{1-x^3}{x-1}$$
$$= \lim_{x \to 1-} \frac{(1-x)(1+x+x^2)}{x-1}$$
$$= \lim_{x \to 1-} (-x^2-x-1) = -3$$
$$\lim_{x \to 1+} \frac{|f(x)|-|f(1)|}{x-1} = \lim_{x \to 1+} \frac{|3-3x|-0}{x-1} = \lim_{x \to 1+} \frac{3(x-1)}{x-1}$$
$$= \lim_{x \to 1+} 3 = 3$$

에서 $\lim_{x \to 1-} \frac{|f(x)|-|f(1)|}{x-1} \ne \lim_{x \to 1+} \frac{|f(x)|-|f(1)|}{x-1}$이므로

함수 $|f(x)|$는 $x=1$에서 미분가능하지 않다. (거짓)

이상에서 옳은 것은 ㄱ이다.

답 ①

06

조건 (나)에 의하여 함수 $y=f(x)$의 그래프는 $0 \le x \le k$에서의 곡선 $y=f(x)$를 x축의 방향으로 k만큼, y축의 방향으로 $f(k)$만큼 평행이동하거나 x축의 방향으로 $-k$만큼, y축의 방향으로 $-f(k)$만큼 평행이동하면서 반복되므로 함수 $f(x)$가 $x=k$에서 미분가능하면 실수 전체의 집합에서 미분가능하다.

(i) $\lim_{x \to k-} f(x) = \lim_{x \to k-} (x^3-6x^2+10x) = k^3-6k^2+10k$

$\lim_{x \to k+} f(x) = \lim_{x \to 0+} f(x+k) = \lim_{x \to 0+} \{f(x)+f(k)\}$

$=f(0)+f(k)=k^3-6k^2+10k$

$f(k)=k^3-6k^2+10k$

에서 $\lim_{x \to k+} f(x) = \lim_{x \to k-} f(x) = f(k)$이므로 함수 $f(x)$는 $x=k$에서 연속이다.

(ii) $\lim_{h \to 0-} \frac{f(k+h)-f(k)}{h}$

$$= \lim_{h \to 0-} \frac{(k+h)^3-6(k+h)^2+10(k+h)-k^3+6k^2-10k}{h}$$
$$= \lim_{h \to 0-} \frac{3k^2h+3kh^2+h^3-12kh-6h^2+10h}{h}$$
$$= \lim_{h \to 0-} (3k^2+3kh+h^2-12k-6h+10)$$
$$=3k^2-12k+10$$
$$\lim_{h \to 0+} \frac{f(k+h)-f(k)}{h} = \lim_{h \to 0+} \frac{f(k)+f(h)-f(k)}{h}$$
$$= \lim_{h \to 0+} \frac{f(h)}{h}$$
$$= \lim_{h \to 0+} \frac{h^3-6h^2+10h}{h}$$
$$= \lim_{h \to 0+} (h^2-6h+10) = 10$$

이므로 함수 $f(x)$가 $x=k$에서 미분가능하려면

$3k^2-12k+10=10$이어야 한다.

즉, $3k(k-4)=0$

따라서 $k>0$이므로 $k=4$

답 ④

필수 유형 ❸

$g(x)=x^2f(x)$에서

$g'(x)=2xf(x)+x^2f'(x)$

따라서

$g'(2)=2\times2\times f(2)+2^2\times f'(2)$

$=4\times1+4\times3$

$=16$

답 ③

07

$f(x)=(x^2+1)(x^2+ax-3)$에서

$f'(x)=2x(x^2+ax-3)+(x^2+1)(2x+a)$이므로

$f'(1)=2(a-2)+2(a+2)=4a$

$f'(2)=4(2a+1)+5(a+4)=13a+24$

이때 $f'(2)=f'(1)+60$이므로

$13a+24=4a+60$, $9a=36$

따라서 $a=4$

답 ④

08

$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-2}{x-1}=3$에서 $x \to 1$일 때 (분모) $\to 0$이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\to 0$이어야 한다.

즉, $\lim_{x\to 1}\{f(x)-2\}=f(1)-2=0$이므로 $f(1)=2$

이때 $\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-2}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=f'(1)$이므로 $f'(1)=3$

한편, $g(x)=(3x^2+2)f(x)$에서

$g'(x)=6xf(x)+(3x^2+2)f'(x)$이므로

$g(1)=5f(1)=5\times 2=10$

$g'(1)=6f(1)+5f'(1)=6\times 2+5\times 3=27$

따라서 $g(1)+g'(1)=10+27=37$

답 ①

09

$\frac{1}{x}=t$라 하면 $x \to \infty$일 때, $t \to 0+$이므로

$\lim_{x\to\infty}x\left\{f\left(2+\frac{3}{x}\right)-21\right\}=\lim_{t\to 0+}\frac{f(2+3t)-21}{t}=f(2)$ ...... ㉠

㉠에서 $t \to 0+$일 때 (분모) $\to 0$이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\to 0$이어야 한다.

즉, $\lim_{t\to 0+}\{f(2+3t)-21\}=f(2)-21=0$이므로 $f(2)=21$

이때 $\lim_{t\to 0+}\frac{f(2+3t)-21}{t}=3\lim_{t\to 0+}\frac{f(2+3t)-f(2)}{3t}=3f'(2)$

이므로 $3f'(2)=f(2)=21$에서 $f'(2)=7$

한편, $f(x)=2x^3+ax^2-5x+b$에서

$f(2)=16+4a-10+b=21$이므로

$4a+b=15$ ...... ㉡

$f'(x)=6x^2+2ax-5$에서

$f'(2)=24+4a-5=7$이므로 $4a=-12$, $a=-3$

$a=-3$을 ㉡에 대입하면

$-12+b=15$, $b=27$

따라서 $a+b=(-3)+27=24$

답 ②

필수 유형 ❹

함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하므로 닫힌구간 $[1, 5]$에서 연속이고 열린구간 $(1, 5)$에서 미분가능하다.

그러므로 평균값 정리에 의하여 $\frac{f(5)-f(1)}{5-1}=f'(c)$인 c가 열린구간 $(1, 5)$에 적어도 하나 존재한다.

조건 (가)에 의하여 $f(1)=3$이므로 $f'(c)=\frac{f(5)-3}{4}$이고, 조건 (나)에 의하여 $1<x<5$인 모든 실수 x에 대하여 $f'(x)\geq 5$이므로

$f'(c)=\frac{f(5)-3}{4}\geq 5$

따라서 $f(5)\geq 23$이므로 구하는 $f(5)$의 최솟값은 23이다.

답 ③

참고

$f(x)=5x-2$이면 $f(5)=23$이고 주어진 조건을 만족시킨다.

10

다항함수 $f(x)$는 실수 전체의 집합에서 미분가능하므로 닫힌구간 $[2, 4]$에서 연속이고 열린구간 $(2, 4)$에서 미분가능하다.

그러므로 평균값 정리에 의하여 $\frac{f(4)-f(2)}{4-2}=f'(c)$인 c가 열린구간 $(2, 4)$에 적어도 하나 존재한다.

조건 (가)에 의하여 $f(4)=10$이므로 $f'(c)=\frac{10-f(2)}{2}$이고, 조건 (나)에 의하여 $2<x<4$인 모든 실수 x에 대하여 $|f'(x)|\leq 6$이므로

$|f'(c)|=\left|\frac{10-f(2)}{2}\right|\leq 6$

$|10-f(2)|\leq 12$, $-12\leq 10-f(2)\leq 12$, $-2\leq f(2)\leq 22$

따라서 $M=22$, $m=-2$이므로

$M-m=22-(-2)=24$

답 ④

참고

$f(x)=-6x+34$이면 $f(2)=22$이면서 조건을 만족시키고,

$f(x)=6x-14$이면 $f(2)=-2$이면서 조건을 만족시킨다.

11

$y=x^3-2x-5$에서 $y'=3x^2-2$이므로 곡선 $y=x^3-2x-5$의 접선 중 기울기가 1인 접선의 접점의 x좌표를 t라 하면

$3t^2-2=1$

$t=1$ 또는 $t=-1$

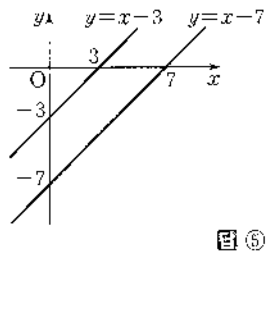
(i) $t=1$일 때, 접점의 좌표가 $(1, -6)$이므로 접선의 방정식은

$y+6=x-1$, 즉 $y=x-7$

(ii) $t=-1$일 때, 접점의 좌표가 $(-1, -4)$이므로 접선의 방정식은

$y+4=x+1$, 즉 $y=x-3$

(i), (ii)에 의하여 두 직선 l_1, l_2와 x축, y축으로 둘러싸인 사각형은 그림과 같다.



따라서 구하는 사각형의 넓이는

$\frac{1}{2}\times 7^2-\frac{1}{2}\times 3^2=\frac{40}{2}=20$

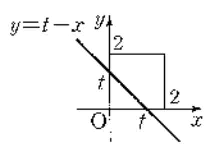
답 ⑤

12

(i) $t\leq 0$일 때, $f(t)=0$

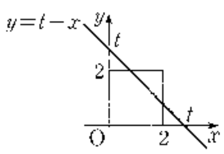
(ii) $0<t\leq 2$일 때,

$f(t)=\frac{1}{2}t^2$



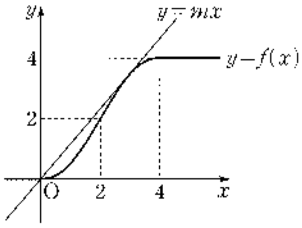
(iii) $2<t<4$일 때,

$$f(t)=4-\frac{1}{2}(4-t)^2$$



(iv) $t\geq 4$일 때, $f(t)=4$

(i)~(iv)에 의하여 함수 $y=f(x)$의 그래프는 그림과 같다.



그림과 같이 직선 $y=mx$가 $2<x<4$인 점에서 곡선 $y=f(x)$에 접할 때의 기울기 m의 값을 구해 보자.

$2<x<4$일 때, $f(x)=-\frac{1}{2}x^2+4x-4$이므로 접점의 x좌표를 s라 하면

$-\frac{1}{2}s^2+4s-4=ms$ ······ ㉠

$f'(x)=-x+4$이므로

$-s+4=m$ ······ ㉡

㉡을 ㉠에 대입하면

$-\frac{1}{2}s^2+4s-4=-s^2+4s$, $s^2=8$

$2<s<4$이므로 $s=2\sqrt{2}$이고 $m=4-2\sqrt{2}$

즉, 함수 $|f(x)-mx|$가 $x=0$에서만 미분가능하지 않으려면

$m<0$ 또는 $m\geq 4-2\sqrt{2}$

이어야 하므로 조건을 만족시키는 양수 m의 최솟값은 $4-2\sqrt{2}$이다.

따라서 $a=4$, $b=-2$이므로

$a^2+b^2=4^2+(-2)^2=20$

답 20

필수 유형 5

$f(x)=x^3+ax^2-(a^2-8a)x+3$에서

$f'(x)=3x^2+2ax-(a^2-8a)$

함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 증가하려면 모든 실수 x에 대하여 $f'(x)\geq 0$이어야 한다.

즉, 이차방정식 $f'(x)=0$의 판별식을 D라 하면 $D\leq 0$이어야 하므로

$\frac{D}{4}=a^2+3(a^2-8a)\leq 0$

$4a(a-6)\leq 0$

$0\leq a\leq 6$

따라서 구하는 실수 a의 최댓값은 6이다.

답 6

13

함수 $f(x)$가 구간 $(-3, 0)$에서 감소하므로 이 구간에서 $f'(x)\leq 0$이고, 구간 $(0, \infty)$에서 증가하므로 이 구간에서 $f'(x)\geq 0$이다.

그러므로 $f'(0)=0$이어야 한다.

$f(x)=x^3+ax^2+bx-1$에서

$f'(x)=3x^2+2ax+b$이므로 $f'(0)=b=0$

즉, $f'(x)=3x^2+2ax$

이때 구간 $(-3, 0)$에서 $f'(x)\leq 0$이고 $f(x)$는 다항함수이므로 $f'(-3)\leq 0$이어야 한다.

그러므로 $f'(-3)=27-6a\leq 0$에서 $a\geq\frac{9}{2}$

따라서 $f(x)=x^3+ax^2+1$에서

$f(1)=2+a\geq 2+\frac{9}{2}=\frac{13}{2}$

이므로 구하는 $f(1)$의 최솟값은 $\frac{13}{2}$이다.

답 ③

14

닫힌구간 $[n, n+2]$에서 정의된 함수 $f(x)$가 일대일함수가 되려면 이 구간에서 $f(x)$가 증가하거나 감소해야 한다. 즉, 구간 $[n, n+2]$에 속하는 모든 실수 x에 대하여 $f'(x)\geq 0$이거나 $f'(x)\leq 0$이어야 한다.

이때 $f(x)=x^3-9x^2+24x+5$에서

$$\begin{aligned}f'(x)&=3x^2-18x+24\\&=3(x^2-6x+8)\\&=3(x-2)(x-4)\end{aligned}$$

이므로 구간 $(-\infty, 2]$에서 $f'(x)\geq 0$, 구간 $[2, 4]$에서 $f'(x)\leq 0$, 구간 $[4, \infty)$에서 $f'(x)\geq 0$이다.

따라서 조건을 만족시키는 10 이하의 자연수 n의 값은

2, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10

이므로 구하는 합은 51이다.

답 51

15

함수 $f(x)$의 역함수가 존재하려면 $f(x)$의 최고차항의 계수가 양수이므로 $x\neq a$인 모든 실수 x에 대하여 $f'(x)\geq 0$이어야 한다.

이때

$$f(x)=\begin{cases}x^3+x^2+x-a+2 & (x\geq a)\\ x^3+x^2-x+a+2 & (x<a)\end{cases}$$

에서

$$f'(x)=\begin{cases}3x^2+2x+1 & (x>a)\\ 3x^2+2x-1 & (x<a)\end{cases}$$

$x>a$일 때,

$f'(x)=3x^2+2x+1$이고 이차방정식 $3x^2+2x+1=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=1^2-3\times 1=-2<0$

이므로 실수 a의 값에 관계없이 $x>a$인 모든 실수 x에 대하여 $f'(x)>0$이다.

$x<a$일 때,

$f'(x)=3x^2+2x-1=(x+1)(3x-1)$

이므로 $x<a$인 모든 실수 x에 대하여 $f'(x)\geq 0$이려면 $a\leq -1$이어야 한다.

따라서 구하는 실수 a의 최댓값은 -1이다.

답 ②

필수 유형 ❻

$f(x)=x^4+ax^2+b$에서

$f'(x)=4x^3+2ax$

함수 $f(x)$가 $x=1$에서 극소이므로

$f'(1)=0$에서

$4+2a=0$, $a=-2$

이때 $f'(x)=4x^3-4x=4x(x+1)(x-1)$이므로

$f'(x)=0$에서

$x=0$ 또는 $x=-1$ 또는 $x=1$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	극소	↗	극대	↘	극소	↗

즉, 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 극댓값을 갖고 주어진 조건에 의하여 극댓값이 4이므로

$f(0)=b=4$

따라서 $a+b=(-2)+4=2$

답 2

16

삼차함수 $f(x)=x^3+ax^2+bx$가 주어진 조건을 만족시키려면 함수 $f(x)$가 $x=1$에서 극대, $x=5$에서 극소이어야 한다.

즉, $f'(x)=3x^2+2ax+b$에서

$f'(1)=0$이므로

$3+2a+b=0$ ⋯⋯ ㉠

또 $f'(5)=0$에서

$75+10a+b=0$ ⋯⋯ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

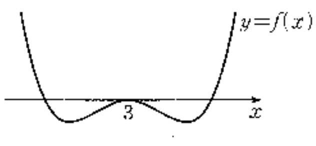
$a=-9$, $b=15$

따라서 $a+b=(-9)+15=6$

답 ③

17

조건 (가), (나)에 의하여 함수 $y=f(x)$의 그래프는 그림과 같다.



조건 (나)에 의하여 방정식 $f(x)=0$의 한 실근을 $3+a$라 하면 다른 한 실근은 $3-a$이므로

$f(x)=(x-3+a)(x-3-a)(x-3)^2$ (단, a는 양의 상수)

로 놓을 수 있다.

즉, $f(x)=\{(x-3)^2-a^2\}(x-3)^2=(x^2-6x+9-a^2)(x^2-6x+9)$

이므로

$$\begin{aligned} f'(x)&=(2x-6)(x^2-6x+9)+(x^2-6x+9-a^2)(2x-6)\\ &=2(x-3)\{2(x^2-6x+9)-a^2\}\\ &=2(x-3)\{2(x-3)^2-a^2\} \end{aligned}$$

$f'(x)=0$에서 $x=3$ 또는 $x=3\pm\frac{a}{\sqrt{2}}$이므로 함수 $f(x)$는

$x=3\pm\frac{a}{\sqrt{2}}$에서 극솟값을 갖는다.

이때 함수 $f(x)$의 극솟값이 -16이므로

$f(x)=(x-3)^4-a^2(x-3)^2$에서

$f\left(3+\frac{a}{\sqrt{2}}\right)=\left(\frac{a}{\sqrt{2}}\right)^4-a^2\left(\frac{a}{\sqrt{2}}\right)^2=\frac{a^4}{4}-\frac{a^4}{2}=-\frac{a^4}{4}=-16$,

$f\left(3-\frac{a}{\sqrt{2}}\right)=\left(-\frac{a}{\sqrt{2}}\right)^4-a^2\left(-\frac{a}{\sqrt{2}}\right)^2=\frac{a^4}{4}-\frac{a^4}{2}=-\frac{a^4}{4}=-16$

즉, $a^4=64$에서 $a^2=8$이므로

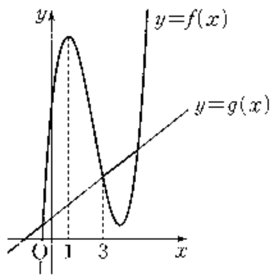
$f(x)=(x-3)^4-8(x-3)^2$

따라서 $f(0)=3^4-8\times3^2=81-72=9$

답 ⑤

18

조건 (가)에 의하여 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프는 서로 다른 세 점에서 만나야 한다. 또 조건 (나)를 만족시키려면 그림과 같이 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 극대이고, 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프는 $x=3$인 점에서 만나야 한다.



$f(x)=2x^3+ax^2+bx+18$에서

$f'(x)=6x^2+2ax+b$이고

$f'(1)=0$이어야 하므로

$6+2a+b=0$ ⋯⋯ ㉠

$f(3)=g(3)$이어야 하므로

$54+9a+3b+18=9$에서

$3a+b=-21$ ⋯⋯ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=-15$, $b=24$이므로

$f(x)=2x^3-15x^2+24x+18$이고

$f'(x)=6x^2-30x+24=6(x-1)(x-4)$

$f'(x)=0$에서

$x=1$ 또는 $x=4$

따라서 함수 $f(x)$의 극댓값과 극솟값의 합은

$f(1)+f(4)=29+2=31$

답 ①

필수 유형 ❼

$f(x)=x^3-3x^2-9x-12$에서

$f'(x)=3x^2-6x-9=3(x+1)(x-3)$

이므로 $f'(x)=0$에서

$x=-1$ 또는 $x=3$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	극대	$\searrow$	극소	$\nearrow$

즉, 함수 $f(x)$는 $x=-1$에서 극댓값 $f(-1)=-7$을 갖고, $x=3$에서 극솟값 $f(3)=-39$를 갖는다.

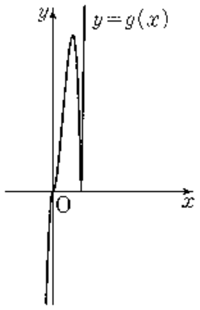
한편, 조건 (가)에서 $xg(x)=|xf(x-p)+qx|$이므로

$$g(x)=\begin{cases} |f(x-p)+q| & (x>0) \\ -|f(x-p)+q| & (x<0) \end{cases}$$

함수 $g(x)$가 $x=0$에서 연속이므로

$|f(-p)+q|=-|f(-p)+q|$

즉, $f(-p)+q=0$



이때 함수 $y=|f(x-p)+q|$의 그래프는 함수 $y=f(x)$의 그래프를 x축의 방향으로 p만큼, y축의 방향으로 q만큼 평행이동시킨 후 $y<0$인 부분을 x축에 대하여 대칭이동시킨 것인데, 조건 (나)에서 함수 $g(x)$가 $x=a$에서 미분가능하지 않은 실수 a의 개수가 1이어야 하므로 $p=1$, $q=7$이고, 함수 $y=g(x)$의 그래프는 그림과 같다.

따라서 $p+q=1+7=8$

답 ③

19

ㄱ. 실수 전체의 집합에서 도함수 $f'(x)$가 정의되어 있으므로 함수 $f(x)$는 실수 전체의 집합에서 미분가능하다. (참)

ㄴ. $f'(1)=0$이고 $x=1$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 양에서 음으로 바뀌므로 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 극대이다. (참)

ㄷ. (i) $x\le1$일 때 $f'(x)\ge0$이고 $x=-1$에서만 $f'(x)=0$이므로 함수 $f(x)$는 증가한다.

(ii) $1<x<3$일 때 $f'(x)<0$이므로 함수 $f(x)$는 감소한다.

(iii) $x\ge3$일 때 $f'(x)\ge0$이고 $x=3$에서만 $f'(x)=0$이므로 함수 $f(x)$는 증가한다.

(i), (ii), (iii)에 의하여 $x\ge1$일 때 함수 $f(x)$는 $x=3$에서 극소이면서 최소이므로 $f(3)>0$이면 $x\ge1$일 때 함수 $y=f(x)$의 그래프는 x축과 만나지 않는다.

한편, $x\le-1$일 때 $f'(x)=-x-1$이므로 이 구간에서 함수 $f(x)$는 최고차항의 계수가 음수인 이차함수이다.

즉, $\lim_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$이므로 $f(c)<0$인 c가 구간 $(-\infty, -1)$에 존재한다. 이때 $f(1)>f(3)>0$이므로 사잇값의 정리에 의하여 $f(x)=0$인 x가 구간 $(c, 1)$에 존재한다. 그런데 $x\le1$일 때 함수 $f(x)$는 증가하므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 x축과 오직 한 점에서만 만난다. (참)

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

답 ⑤

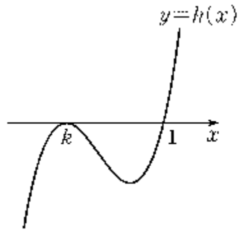
20

$h(x)=f(x)-g(x)$라 하면 함수 $h(x)$는 최고차항의 계수가 1인 삼차함수이고, 조건 (가)에 의하여 방정식 $h(x)=0$의 서로 다른 실근의 개수는 2이다. 또 조건 (나)에 의하여 $h(1)=0$이므로

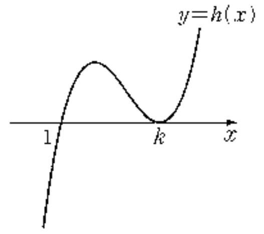
$h(x)=(x-1)(x-k)^2$ (단, k는 1이 아닌 상수)

로 놓을 수 있다.

즉, 함수 $y=h(x)$의 그래프는 다음 두 가지 중 하나이다.



[그림 1]



[그림 2]

이때 조건 (다)를 만족시키려면 함수 $y=h(x)$의 그래프는 [그림 1]과 같아야 하며 함수 $h(x)$는 $x=0$에서 극솟값을 가져야 한다.

$h'(x)=(x-k)^2+2(x-1)(x-k)$

$\quad=(x-k)(3x-k-2)$

이고 $h'(x)=0$에서

$x=k$ 또는 $x=\frac{k+2}{3}$이므로 $\frac{k+2}{3}=0$

$k=-2$

따라서 $h(x)=(x-1)(x+2)^2$이고

$f(x)=h(x)+g(x)=(x-1)(x+2)^2+x+3$

이므로

$f(2)=1\times16+5=21$

답 ①

21

$f(x)=3x^4-4x^3-12x^2+k$에서

$f'(x)=12x^3-12x^2-24x$

$\quad=12x(x^2-x-2)$

$\quad=12x(x+1)(x-2)$

이므로 $f'(x)=0$에서

$x=-1$ 또는 $x=0$ 또는 $x=2$ ⋯⋯ ㉠

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	극소	$\nearrow$	극대	$\searrow$	극소	$\nearrow$

이때 조건 (가)를 만족시키려면

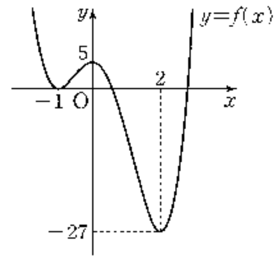
$f(-1)=0$ 또는 $f(0)=0$ 또는 $f(2)=0$

이어야 한다.

(i) $f(-1)=0$인 경우

$f(-1)=k-5=0$에서 $k=5$이므로

$f(x)=3x^4-4x^3-12x^2+5$이고, 함수 $y=f(x)$의 그래프는 [그림 1]과 같다.



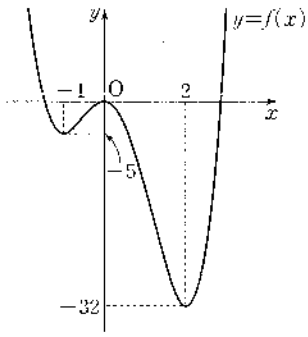
[그림 1]

이 경우 조건 (나)를 만족시킨다.

(ii) $f(0)=0$인 경우

$f(0)=k=0$이므로

$f(x)=3x^4-4x^3-12x^2$이고, 함수 $y=f(x)$의 그래프는 [그림 2]와 같다.



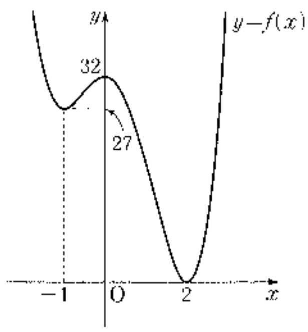
[그림 2]

이 경우 조건 (나)를 만족시킨다.

(iii) $f(2)=0$인 경우

$f(2)=k-32=0$에서 $k=32$이므로

$f(x)=3x^4-4x^3-12x^2+32$이고, 함수 $y=f(x)$의 그래프는 [그림 3]과 같다.



[그림 3]

이 경우 조건 (나)를 만족시키지 않는다.

ㄱ. ①에서 방정식 $f'(x)=0$은 서로 다른 세 실근을 갖는다. (참)

ㄴ. (i)에서 $k=5$인 경우 두 조건 (가), (나)를 모두 만족시키지만 함수 $f(x)$의 극댓값은 0이 아니다. (거짓)

ㄷ. (i), (ii), (iii)에서 조건을 만족시키는 모든 k의 값은

$k=5$ 또는 $k=0$

이므로 그 합은 5이다. (참)

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

답 ③

필수 유형 6

$f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ (a, b, c는 상수)라 하면

$f'(x)=3x^2+2ax+b$

함수 $g(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하므로 $g(x)$는 $x=0$에서 연속이다.

즉, $\lim_{x\to 0-} g(x)=\lim_{x\to 0+} g(x)=g(0)$이어야 한다.

이때

$\lim_{x\to 0-} g(x)=\lim_{x\to 0-} \frac{1}{2}=\frac{1}{2}$

$\lim_{x\to 0+} g(x)=\lim_{x\to 0+} f(x)=f(0)=c$

$g(0)=f(0)=c$이므로 $c=\frac{1}{2}$

한편, 함수 $g(x)$가 $x=0$에서 미분가능하므로

$\lim_{x\to 0-}\frac{g(x)-g(0)}{x}=\lim_{x\to 0+}\frac{g(x)-g(0)}{x}$이어야 한다.

이때

$\lim_{x\to 0-}\frac{g(x)-g(0)}{x}=\lim_{x\to 0-}\frac{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}}{x}=0$

$\lim_{x\to 0+}\frac{g(x)-g(0)}{x}=\lim_{x\to 0+}\frac{f(x)-f(0)}{x}=f'(0)=b$

이므로 $b=0$

그러므로 $f(x)=x^3+ax^2+\frac{1}{2}$, $f'(x)=3x^2+2ax$

ㄱ. $g(0)+g'(0)=f(0)+f'(0)=\frac{1}{2}+0=\frac{1}{2}$ (참)

ㄴ. $f'(x)=x(3x+2a)=0$에서

$x=0$ 또는 $x=-\frac{2}{3}a$

이때 $-\frac{2}{3}a<0$이면 함수 $g(x)$의 최솟값이 $\frac{1}{2}$이므로 조건을 만족시키지 않는다. 즉, $-\frac{2}{3}a>0$이므로 $a<0$

그러므로 $g(1)=f(1)=1+a+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}+a<\frac{3}{2}$ (참)

ㄷ. $x\ge 0$일 때 함수 $g(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	$\cdots$	$-\frac{2}{3}a$	$\cdots$
$g'(x)$		$-$	0	$+$
$g(x)$	$\frac{1}{2}$	↘	극소	↗

즉, 함수 $g(x)$는 $x=-\frac{2}{3}a$에서 극소이면서 최소이므로

$g\left(-\frac{2}{3}a\right)=f\left(-\frac{2}{3}a\right)=-\frac{8}{27}a^3+\frac{4}{9}a^3+\frac{1}{2}=\frac{4}{27}a^3+\frac{1}{2}=0$

에서

$a^3=-\frac{27}{8}$, $a=-\frac{3}{2}$

따라서 $f(x)=x^3-\frac{3}{2}x^2+\frac{1}{2}$이므로

$g(2)=f(2)=8-\frac{3}{2}\times 4+\frac{1}{2}=\frac{5}{2}$ (참)

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

답 ⑤

22

$f(x)=2x^3-3x^2-12x+a$에서

$f'(x)=6x^2-6x-12=6(x+1)(x-2)$

$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=2$이므로 닫힌구간 $[0, 4]$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	$\cdots$	2	$\cdots$	4
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	a	↘	$a-20$	↗	$a+32$

그러므로 닫힌구간 $[0, 4]$에서 함수 $f(x)$는 $x=2$일 때 최솟값 $a-20$을 갖고, $x=4$일 때 최댓값 $a+32$를 갖는다.

즉, $a-20=-18$이므로 $a=2$

이때 $M=a+32=2+32=34$

따라서 $a+M=2+34=36$

답 ③

23

$y=2x^4-3x^2-2x+4$에서 $y'=8x^3-6x-2$이므로 x좌표가 양수인 점에서 곡선 C에 접하는 접선의 접점의 x좌표를 t, 접선의 기울기를 $f(t)$라 하면

$f(t)=8t^3-6t-2\ (t>0)$

이때 $f'(t)=24t^2-6=0$에서 $t=\frac{1}{2}$이므로 함수 $f(t)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

t	(0)	$\cdots$	$\frac{1}{2}$	$\cdots$
$f'(t)$		$-$	0	$+$
$f(t)$	(-2)	↘	-4	↗

그러므로 함수 $f(t)$는 $t>0$에서 $t=\frac{1}{2}$일 때 최솟값 -4를 갖는다.

즉, 기울기가 최소인 접선의 접점은 점 $\left(\frac{1}{2}, \frac{19}{8}\right)$이고 기울기는 -4이므로 접선의 방정식은

$y-\frac{19}{8}=-4\left(x-\frac{1}{2}\right)$

$y=-4x+\frac{35}{8}$

따라서 구하는 접선의 y절편은 $\frac{35}{8}$이므로

$p+q=8+35=43$

답 ③

24

$g(x)=x^2-6x+10$이라 하자.

$g(t)=g(t+2)$에서

$t^2-6t+10=(t+2)^2-6(t+2)+10$

$4t=8$, $t=2$

(i) $0<t<2$일 때,

$g(t)>g(t+2)$이므로

$f(t)=t\times g(t+2)=t\{(t+2)^2-6(t+2)+10\}=t^3-2t^2+2t$

이때 $f'(t)=3t^2-4t+2$이고 이차방정식 $f'(t)=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=4-6=-2<0$

이므로 $f'(t)>0$이다.

즉, $0<t<2$에서 함수 $f(t)$는 증가한다.

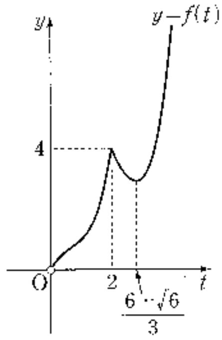
(ii) $t>2$일 때,

$g(t)\le g(t+2)$이므로

$f(t)=t\times g(t)=t^3-6t^2+10t$

이때 $f'(t)=3t^2-12t+10$이고 $f'(t)=0$에서 $t=\frac{6+\sqrt{6}}{3}$이며, $t=\frac{6+\sqrt{6}}{3}$의 좌우에서 $f'(t)$의 부호가 음에서 양으로 바뀌므로 함수 $f(t)$는 $t=\frac{6+\sqrt{6}}{3}$에서 극소이다.

$f(2)=4$이므로 (i), (ii)에 의하여 함수 $y=f(t)$의 그래프는 그림과 같다.



이때 $f(2)=4$이고 $t>2$에서 $f(t)=4$이면

$t^3-6t^2+10t=4$에서

$t^3-6t^2+10t-4=0$

$(t-2)(t^2-4t+2)=0$

$t>2$이므로 $t=2+\sqrt{2}$

그러므로 구간 $(0, a]$에서 함수 $f(t)$의 최댓값이 4가 되도록 하는 양수 a의 값의 범위는

$2\le a\le 2+\sqrt{2}$

따라서 $M=2+\sqrt{2}$, $m=2$이므로

$M+m=4+\sqrt{2}$

답 ②

25

$f(x)=x^3-5x^2+2x+13$에서

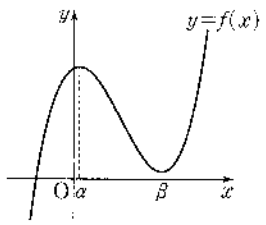
$f'(x)=3x^2-10x+2$이므로

$f'(x)=0$에서 $x=\frac{5\pm\sqrt{19}}{3}$

이때 $\alpha=\frac{5-\sqrt{19}}{3}$, $\beta=\frac{5+\sqrt{19}}{3}$라 하고, 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	α	$\cdots$	β	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

즉, 함수 $y=f(x)$의 그래프는 그림과 같다.



$k<\beta$, $k+2>\beta$일 때, $f(k)=f(k+2)$이면

$k^3-5k^2+2k+13=(k+2)^3-5(k+2)^2+2(k+2)+13$

$6k^2-8k-8=0$

$2(3k+2)(k-2)=0$

$\beta-2<k<\beta$이므로 $k=2$

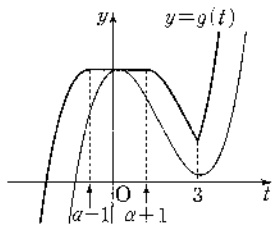
(i) $t+1\le\alpha$, 즉 $t\le\alpha-1$일 때,
 $g(t)=f(t+1)$

(ii) $t-1\le\alpha\le t+1$, 즉 $\alpha-1\le t\le\alpha+1$일 때,
 $g(t)=f(\alpha)$

(iii) $\alpha\le t-1\le 2$, 즉 $\alpha+1\le t\le 3$일 때,
 $g(t)=f(t-1)$

(iv) $t-1\ge 2$, 즉 $t\ge 3$일 때,
 $g(t)=f(t+1)$

(i)~(iv)에 의하여 함수 $y=g(t)$의 그래프는 그림과 같다.



즉, 함수 $g(t)$는 $t=3$에서 미분가능하지 않으므로 $a=3$

$t=2$일 때, $g(t)=f(t-1)$이므로

$g'(a-1)=g'(2)=f'(1)=3-10+2=-5$

$t=4$일 때, $g(t)=f(t+1)$이므로

$g'(a+1)=g'(4)=f'(5)=3\times5^2-10\times5+2=27$

따라서 $g'(a-1)+g'(a+1)=-5+27=22$

답 ②

필수 유형 ❾

$f(x)=2x^3-3x^2-12x+k$라 하면

$f'(x)=6x^2-6x-12=6(x+1)(x-2)$

이므로 $f'(x)=0$에서

$x=-1$ 또는 $x=2$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

이때 방정식 $f(x)=0$이 서로 다른 세 실근을 가지려면 (극댓값)>0이고 (극솟값)<0이어야 한다.

즉, $f(-1)=7+k>0$에서 $k>-7$이고

$f(2)=k-20<0$에서 $k<20$이므로

$-7<k<20$

따라서 조건을 만족시키는 정수 k는

$-6, -5, -4, \cdots, 17, 18, 19$

이므로 그 개수는 26이다.

답 ③

26

$f(x)=3x^4-8x^3-6x^2+24x$라 하자.

$f'(x)=12x^3-24x^2-12x+24=12(x+1)(x-1)(x-2)$

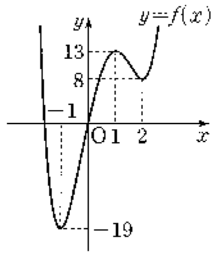
이므로 $f'(x)=0$에서

$x=-1$ 또는 $x=1$ 또는 $x=2$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	-19	↗	13	↘	8	↗

그러므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 그림과 같다.



이때 방정식 $f(x)-k=0$이 서로 다른 세 실근을 가지려면 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=k$가 서로 다른 세 점에서 만나야 한다.

따라서 $k=8$ 또는 $k=13$이므로 조건을 만족시키는 모든 상수 k의 값의 합은

$8+13=21$

답 ①

27

$f(x)=x^3-3x+n-2$라 하자.

$f'(x)=3x^2-3=3(x+1)(x-1)$

이므로 $f'(x)=0$에서

$x=-1$ 또는 $x=1$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	n	↘	$n-4$	↗

(i) $n>0$이므로 $n-4<0$이면 함수 $f(x)$의 극댓값이 양수이고 극솟값이 음수이다. 즉, 함수 $y=f(x)$의 그래프가 x축과 서로 다른 세 점에서 만나므로 방정식 $f(x)=0$의 서로 다른 실근의 개수는 3이다.
 그러므로 $n<4$일 때, $a_n=3$이다.

(ii) $n-4=0$이면 함수 $f(x)$의 극솟값이 0이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프가 x축과 접한다. 즉, 방정식 $f(x)=0$의 서로 다른 실근의 개수는 2이다.
 그러므로 $n=4$일 때, $a_n=2$이다.

(iii) $n-4>0$이면 함수 $f(x)$의 극댓값과 극솟값이 모두 양수이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 x축과 오직 한 점에서만 만난다.

즉, 방정식 $f(x)=0$의 실근의 개수는 1이다.

그러므로 $n>4$일 때, $a_n=1$이다.

(i), (ii), (iii)에 의하여

$$a_n=\begin{cases}3 & (n<4)\\ 2 & (n=4)\\ 1 & (n>4)\end{cases}$$

이므로

$$\sum_{n=1}^{10} a_n=3\times3+2+1\times6=17$$

답 ②

28

방정식 $f(x)=g(x)$에서

$2x^3+5x^2-7x=2x^2+5x+a$

$2x^3+3x^2-12x=a$

$h(x)=2x^3+3x^2-12x$라 하면

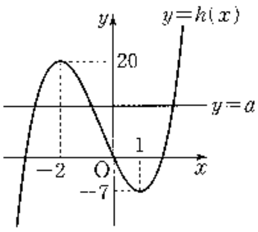
$h'(x)=6x^2+6x-12=6(x+2)(x-1)$

이므로 $h'(x)=0$에서

$x=-2$ 또는 $x=1$

함수 $h(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	1	$\cdots$
$h'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$h(x)$	↗	20	↘	-7	↗



그러므로 함수 $y=h(x)$의 그래프는 그림과 같다.

이때 방정식 $f(x)=g(x)$의 실근은 함수 $y=h(x)$의 그래프와 직선 $y=a$가 만나는 점의 x좌표이므로 주어진 조건을 만족시키려면 함수 $y=h(x)$의 그래프가 직선 $y=a$와 서로 다른 세 점에서 만나야 하고, 세 실근이 모두 양수일 수는 없으므로 그림과 같이 음의 실근 두 개와 양의 실근 한 개를 가져야 한다.

따라서 $0<a<20$이어야 하므로 조건을 만족시키는 모든 정수 a의 개수는 19이다.

답 ④

29

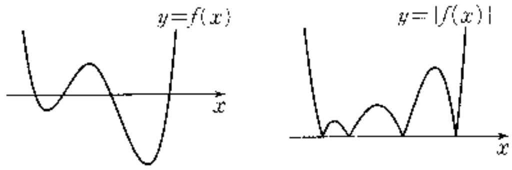
삼차방정식 $f'(x)=0$의 서로 다른 실근의 개수가 2 이하이면 함수 $|f(x)|$가 서로 다른 세 점에서 극소일 수 없으므로 방정식 $f'(x)=0$은 서로 다른 세 실근을 가져야 한다.

이때 함수 $f(x)$의 극솟값 중 양수인 것이 있으면 이 값이 함수 $|f(x)|$의 극솟값이기도 하므로 함수 $|f(x)|$의 극솟값이 모두 0이라는 조건을 만족시키지 않는다.

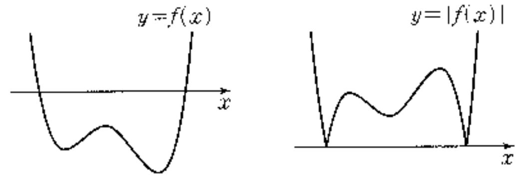
즉, 함수 $f(x)$의 극솟값은 모두 0보다 작거나 같아야 한다.

(i) 함수 $f(x)$의 극솟값이 모두 음수인 경우

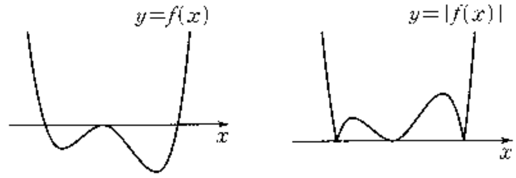
㉠ 함수 $f(x)$의 극댓값이 양수이면 다음 그림과 같이 함수 $|f(x)|$가 극소인 서로 다른 x의 값이 4개이므로 조건을 만족시키지 않는다.



㉡ 함수 $f(x)$의 극댓값이 음수이면 다음 그림과 같이 함수 $|f(x)|$의 0이 아닌 극솟값이 존재하므로 조건을 만족시키지 않는다.

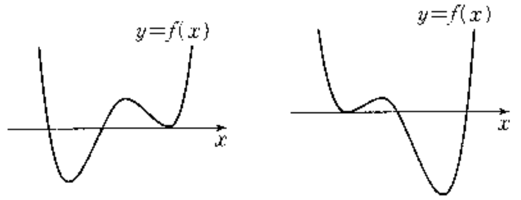


㉢ 함수 $f(x)$의 극댓값이 0이면 다음 그림과 같이 조건을 모두 만족시킨다.

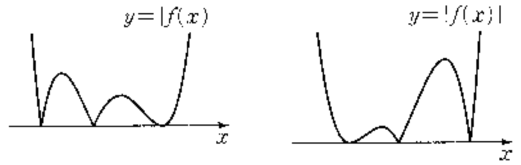


(ii) 함수 $f(x)$의 극솟값이 하나는 0이고 다른 하나는 음수인 경우

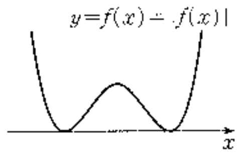
함수 $y=f(x)$의 그래프는 다음 두 가지 경우 중 하나이다.



두 경우 모두 함수 $y=|f(x)|$의 그래프가 다음과 같으므로 조건을 모두 만족시킨다.



(iii) 함수 $f(x)$의 극솟값이 모두 0인 경우



함수 $y=|f(x)|$의 그래프는 함수 $y=f(x)$의 그래프와 같다. 즉, 함수 $|f(x)|$가 극소인 서로 다른 x의 값이 2개이므로 조건을 만족시키지 않는다.

ㄱ. 조건을 만족시키는 (i)의 ㉢과 (ii)의 경우 모두 함수 $|f(x)|$가 극대인 서로 다른 x의 값이 2개이다. (참)

ㄴ. 조건을 만족시키는 (i)의 ㉢과 (ii)의 경우 모두 함수 $f(x)$의 극댓값은 0보다 크거나 같다. (참)

ㄷ. 조건을 만족시키는 (i)의 ㉢과 (ii)의 경우 모두 함수 $y=f(x)$의 그래프가 x축과 서로 다른 세 점에서 만나므로 방정식 $f(x)=0$의 서로 다른 실근의 개수는 3이다. (참)

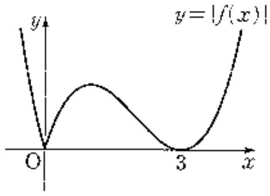
이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

답 ⑤

30

함수 $f(x)$의 최고차항의 계수를 a $(a>0)$이라 하면 조건 (가)에 의하여
$f(x)=ax(x-3)^2$ 또는 $f(x)=ax^2(x-3)$
으로 놓을 수 있다.
이때 조건 (나)를 만족시키려면 함수 $y=|f(x)|$의 그래프와 직선 $y=mx$가 서로 다른 세 점에서 만나도록 하는 실수 m의 값이 $\frac{9}{2}$뿐이어야 한다.

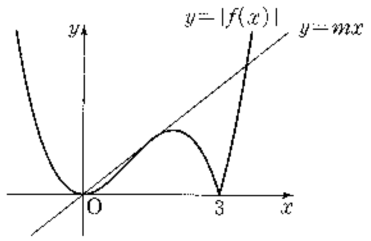
(i) $f(x)=ax(x-3)^2$인 경우
함수 $y=|f(x)|$의 그래프는 [그림 1]과 같다.



[그림 1]

$f(x)=ax(x-3)^2=ax^3-6ax^2+9ax$에서
$f'(x)=3ax^2-12ax+9a$이고 $f'(0)=9a$이므로 함수 $y=|f(x)|$의 그래프와 직선 $y=mx$는 $m=9a$일 때 서로 다른 두 점에서 만나고, $0<m<9a$일 때 서로 다른 세 점에서 만난다.
그러므로 조건 (나)를 만족시키지 않는다.

(ii) $f(x)=ax^2(x-3)$인 경우
함수 $y=|f(x)|$의 그래프는 [그림 2]와 같다.



[그림 2]

[그림 2]와 같이 직선 $y=mx$가 제1사분면에서 함수 $y=-f(x)$의 그래프와 접할 때 m의 값을 m_1이라 하면 함수 $y=|f(x)|$의 그래프와 직선 $y=mx$는 $m=m_1$인 때 서로 다른 세 점에서 만나고, $m>m_1$일 때 서로 다른 두 점에서, $0<m<m_1$일 때 서로 다른 네 점에서, $m\le0$일 때 서로 다른 두 점에서 만나므로 조건 (나)를 만족시킨다. 이때 $m_1=\frac{9}{2}$이어야 한다.

(i), (ii)에 의하여
$f(x)=ax^2(x-3)$ (단, a는 0보다 큰 상수)
로 놓을 수 있고, 직선 $y=\frac{9}{2}x$가 제1사분면에서 곡선 $y=-ax^2(x-3)$에 접해야 한다.
$y=-ax^2(x-3)=-ax^3+3ax^2$에서
$y'=-3ax^2+6ax$이므로 접점의 x좌표를 t $(t>0)$이라 하면
$-at^3+3at^2=\frac{9}{2}t$ ...... ㉠
$-3at^2+6at=\frac{9}{2}$ ...... ㉡
이어야 한다. $t>0$이므로 ㉠에서
$-at^2+3at=\frac{9}{2}$ ...... ㉢
㉡, ㉢에서 $-3at^2+6at=-at^2+3at$
$2at^2-3at=0$, $at(2t-3)=0$
$a\ne0$, $t>0$이므로 $t=\frac{3}{2}$
이것을 ㉢에 대입하면
$-\frac{9}{4}a+\frac{9}{2}a=\frac{9}{2}$
$\frac{9}{4}a=\frac{9}{2}$, $a=2$
그러므로 $f(x)=2x^2(x-3)$이고
$f'(x)=6x^2-12x=6x(x-2)$이므로 $f'(x)=0$에서
$x=0$ 또는 $x=2$
따라서 함수 $|f(x)|$는 $x=2$에서 극대이므로 구하는 극댓값은
$|f(2)|=|2\times4\times(-1)|=8$

답 ③

참고
직선 $y=\frac{9}{2}x$가 제1사분면에서 곡선 $y=-ax^2(x-3)$에 접하도록 하는 실수 a의 값은 다음과 같이 구할 수도 있다.
조건을 만족시키려면 방정식 $\frac{9}{2}x=-ax^2(x-3)$, 즉
$x\left(ax^2-3ax+\frac{9}{2}\right)=0$의 실근이 0과 양수인 중근이어야 하므로
이차방정식 $ax^2-3ax+\frac{9}{2}=0$의 판별식을 D라 하면
$D=9a^2-18a=9a(a-2)=0$이어야 한다.
따라서 $a=2$

필수 유형 ⑩

$h(x)=f(x)-g(x)$라 하면
$h(x)=x^3-x^2-x+6-a$
이때 $h'(x)=3x^2-2x-1=(3x+1)(x-1)$이므로
$h'(x)=0$에서 $x=-\frac{1}{3}$ 또는 $x=1$
함수 $h(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	$-\frac{1}{3}$	$\cdots$	1	$\cdots$
$h'(x)$	+	0	−	0	+
$h(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

즉, $x\ge0$일 때 함수 $h(x)$의 최솟값은 $h(1)$이다.
이때 $x\ge0$인 모든 실수 x에 대하여 $f(x)\ge g(x)$, 즉 $h(x)\ge0$이려면
$h(1)\ge0$이어야 하므로
$h(1)=5-a\ge0$
따라서 $a\le5$이므로 조건을 만족시키는 실수 a의 최댓값은 5이다.

답 ⑤

31

$f(x)=x^4+2x^3+x^2-12x+a$라 하면
$f'(x)=4x^3+6x^2+2x-12=2(x-1)(2x^2+5x+6)$
모든 실수 x에 대하여 $2x^2+5x+6>0$이므로 $f'(x)=0$에서 $x=1$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	$a-8$	$\nearrow$

즉, 함수 $f(x)$의 최솟값이 $a-8$이므로 주어진 부등식이 모든 실수 x에 대하여 성립하려면 $a-8\geq 0$이어야 한다.
따라서 $a\geq 8$이므로 구하는 실수 a의 최솟값은 8이다.

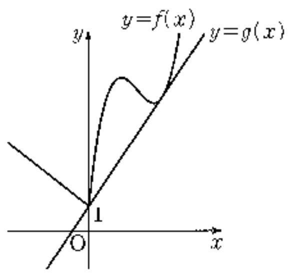
답 ③

32

$y=2x^3-9x^2+12x+1$에서
$y'=6x^2-18x+12=6(x-1)(x-2)$
$y'=0$에서 $x=1$ 또는 $x=2$
$x\geq 0$에서 함수 $y=2x^3-9x^2+12x+1$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	$\cdots$	1	$\cdots$	2	$\cdots$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$
y	1	$\nearrow$	6	$\searrow$	5	$\nearrow$

그러므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 그림과 같다.



그림과 같이 직선 $y=g(x)$가 제1사분면에서 곡선 $y=f(x)$에 접할 때의 m의 값을 구해 보자.
접점의 x좌표를 $t\ (t>0)$이라 하면 $f(t)=g(t)$이므로
$2t^3-9t^2+12t+1=mt+1$ $\cdots\cdots$ ㉠
$f'(t)=m$이므로
$6t^2-18t+12=m$ $\cdots\cdots$ ㉡
㉡을 ㉠에 대입하면
$2t^3-9t^2+12t+1=6t^3-18t^2+12t+1$
$4t^3-9t^2=0$
$t^2(4t-9)=0$
$t>0$이므로 $t=\frac{9}{4}$
이때 ㉡에서
$m=6\times\frac{81}{16}-18\times\frac{9}{4}+12=\frac{15}{8}$
따라서 모든 실수 x에 대하여 부등식 $f(x)\geq g(x)$가 성립하도록 하는 실수 m의 최댓값은 $\frac{15}{8}$이고, 최솟값은 직선 $y=1-x$의 기울기와 같은 -1이므로 구하는 합은
$\frac{15}{8}+(-1)=\frac{7}{8}$

답 ④

33

$g(x)=f(x)-f'(x)$에서 $f(0)=g(0)=0$이므로 $f'(0)=0$이다.
그러므로 $f(x)=x^3+ax^2$ (a는 상수)로 놓을 수 있다.
이때
$g(x)=x^3+ax^2-3x^2-2ax$
$=x^3+(a-3)x^2-2ax$
$=x\{x^2+(a-3)x-2a\}$
이차방정식 $x^2+(a-3)x-2a=0$의 판별식을 D라 하면
$D=(a-3)^2+8a=a^2+2a+9=(a+1)^2+8>0$
이므로 이차방정식 $x^2+(a-3)x-2a=0$은 서로 다른 두 실근을 갖는다.
이 두 실근을 α, β라 하자.
만약 $\alpha\beta=0$이면 $a=0$이고 이차방정식 $x^2-3x=0$의 두 실근은 0, 3이므로 조건을 만족시키지 않는다. 따라서 $\alpha\beta\neq 0$이고 조건을 만족시키려면 $\alpha+\beta>0$, $\alpha\beta>0$이어야 한다. 즉, $-a+3>0$, $-2a>0$이어야 하므로 $a<0$이다.
이때 함수 $f(x)$의 모든 항의 계수가 정수이므로 $a\leq -1$이어야 한다.
따라서 $f(3)=27+9a\leq 18$이므로 구하는 $f(3)$의 최댓값은 18이다.

답 ④

필수 유형 ⑪

점 P의 시각 $t\ (t\geq 0)$에서의 위치 x가
$x=-\frac{1}{3}t^3+3t^2+k$
이므로 시각 $t\ (t\geq 0)$에서의 속도를 v, 가속도를 a라 하면
$v=-t^2+6t$
$a=-2t+6$
점 P의 가속도가 0일 때
$-2t+6=0$에서 $t=3$이고 이때 점 P의 위치가 40이므로
$-\frac{1}{3}\times 3^3+3\times 3^2+k=40$
따라서 $k=40+9-27=22$

답 22

34

두 점 P, Q의 시각 $t\ (t\geq 0)$에서의 속도를 각각 v_1, v_2, 가속도를 각각 a_1, a_2라 하면
$v_1=6t^2-6t-4$, $v_2=2t+4$
$a_1=12t-6$, $a_2=2$
$v_1=v_2$에서
$6t^2-6t-4=2t+4$
$6t^2-8t-8=0$
$2(3t+2)(t-2)=0$
$t\geq 0$이므로 $t=2$
$t=2$일 때,
$a_1=12\times 2-6=18$, $a_2=2$
이므로 구하는 두 점 P, Q의 가속도의 합은
$18+2=20$

답 ⑤

35

점 P의 시각 t $(t \geq 0)$에서의 속도를 v, 가속도를 a라 하면

$v = t^3 - 12t + 9$

$a = 3t^2 - 12$

ㄱ. $v = (t-3)(t^2+3t-3) = 0$에서 $t \geq 0$이므로

$t = 3$ 또는 $t = \dfrac{-3+\sqrt{21}}{2}$ …… ㉠

이고 이 값의 좌우에서 v의 부호가 바뀌므로 점 P는 운동 방향을 두 번 바꾼다. (참)

ㄴ. $a = 3t^2 - 12 = 3(t+2)(t-2)$이므로 $a = 0$일 때 $t = 2$

$1 \leq t \leq 3$에서 함수 v의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

t	1	$\cdots$	2	$\cdots$	3
a		$-$	0	$+$	
v	-2	↘	-7	↗	0

그러므로 점 P의 속력 $|v|$는 $t=2$에서 최댓값 7을 갖는다. (참)

ㄷ. ㉠에서 $\dfrac{-3+\sqrt{21}}{2} < 3$이므로 점 P는 $t=3$에서 마지막으로 운동 방향을 바꾼다. 이때 가속도는

$a = 3 \times 3^2 - 12 = 15$ (참)

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

답 ⑤

36

점 P의 시각 t $(t \geq 0)$에서의 속도를 v라 하면

$v = 3t^2 - 2at + b = 3\left(t - \dfrac{a}{3}\right)^2 + b - \dfrac{a^2}{3}$

이때 조건 (가)에 의하여 점 P가 운동 방향을 바꾸지 않으므로 0 이상의 모든 실수 t에 대하여 $v \geq 0$이어야 한다. 이때 $a > 0$이므로

$b - \dfrac{a^2}{3} \geq 0$, 즉 $b \geq \dfrac{a^2}{3}$

한편, $t \geq 0$일 때 $v \geq 0$이므로 점 P의 속력은

$|v| = v = 3\left(t - \dfrac{a}{3}\right)^2 + b - \dfrac{a^2}{3}$

이다. 조건 (나)에 의하여 $|v|$이 $t = \dfrac{2}{3}$일 때 최소이므로

$\dfrac{a}{3} = \dfrac{2}{3}$, 즉 $a = 2$

그러므로 $b \geq \dfrac{a^2}{3} = \dfrac{4}{3}$

따라서 $x = t^3 - 2t^2 + bt$ $\left(b \geq \dfrac{4}{3}\right)$이고 점 P의 시각 $t=3$에서의 위치는

$27 - 2 \times 9 + 3b = 3b + 9 \geq 3 \times \dfrac{4}{3} + 9 = 13$

이므로 구하는 최솟값은 13이다.

답 13

06 다항함수의 적분법

정답 본문 66~75쪽

필수 유형 ❶ 4	01 ③	02 ③	03 ②
	04 ②	05 ②	
필수 유형 ❷ ①	06 ①	07 ①	08 ⑤
	09 ②	10 80	11 ③
필수 유형 ❸ 14	12 ③	13 ①	14 32
필수 유형 ❹ ①	15 ⑤	16 14	17 ①
	18 27	19 ③	20 ②
필수 유형 ❺ 5	21 ④	22 ③	23 ④
필수 유형 ❻ 36	24 8	25 ②	26 ③
	27 ③	28 ④	29 40
필수 유형 ❼ ②	30 ④	31 12	
필수 유형 ❽ ③	32 ②	33 ⑤	34 63

필수 유형 ❶

$f(x) = \int (3x^2 + 2x)\,dx = x^3 + x^2 + C$ (C는 적분상수)

이고, $f(0) = C = 2$

따라서 $f(x) = x^3 + x^2 + 2$이므로

$f(1) = 1 + 1 + 2 = 4$

답 4

01

$f(x) = \int (4x+3)\,dx = 2x^2 + 3x + C$ (C는 적분상수)

$f(1) = 2 + 3 + C = 0$에서 $C = -5$

따라서 $f(x) = 2x^2 + 3x - 5$이므로

$f(2) = 8 + 6 - 5 = 9$

답 ③

02

$f(x) = \int (5x-k)\,dx - \int (x+k)\,dx$

$= \int \{(5x-k) - (x+k)\}\,dx$

$= \int (4x - 2k)\,dx = 2x^2 - 2kx + C$ (C는 적분상수)

에서 $f'(x) = 4x - 2k$

$f'(1) = 2$에서 $4 - 2k = 2$이므로 $k = 1$

$f(1) = 0$에서 $2 - 2k + C = 0$이므로 $C = 0$

따라서 $f(x) = 2x^2 - 2x$이므로

$f(2) = 8 - 4 = 4$

답 ③

03

$G(x)=x^2f(x)-2x^6+3x^5$ …… ㉠

이때 $2xf(x)$의 한 부정적분이 $G(x)$이므로

$G'(x)=2xf(x)$

㉠의 양변을 x에 대하여 미분하면

$2xf(x)=2xf(x)+x^2f'(x)-12x^5+15x^4$

$x^2f'(x)=12x^5-15x^4$

$f(x)$는 다항함수이므로 $f'(x)=12x^3-15x^2$

$f(x)=\int(12x^3-15x^2)dx$

$\quad=3x^4-5x^3+C$ (C는 적분상수)

㉠에서 $G(1)=f(1)+1$이고, $G(1)=4$이므로

$4=f(1)+1$, $f(1)=3$

$f(1)=3-5+C=3$에서 $C=5$

따라서 $f(x)=3x^4-5x^3+5$이므로

$f(2)=48-40+5=13$

답 ②

04

조건 (가)에서 $f'(x)=kx(x-2)$이므로

$f(x)=\int f'(x)\,dx=\int kx(x-2)\,dx=\int(kx^2-2kx)\,dx$

$\quad=\frac{1}{3}kx^3-kx^2+C$ (C는 적분상수)

이고, $f(0)=2$이므로 $C=2$

함수 $f(x)$는 $x=0$, $x=2$에서 극값을 갖고, 조건 (나)에서

$f(0)+f(2)=0$이므로

$2+\left(\frac{8}{3}k-4k+2\right)=0$

$-\frac{4}{3}k+4=0$에서 $k=3$

따라서 $f(x)=x^3-3x^2+2$이므로

$f(-1)=-2$

답 ②

05

$f(x)=\int(3x^2+ax)\,dx=x^3+\frac{a}{2}x^2+C$ (C는 적분상수)

$\lim_{x\to1}\frac{f(x)}{x^2-1}=\frac{1}{2}$에서 $x\to1$일 때, 극한값이 존재하고 (분모) → 0이므로 (분자) → 0이어야 한다.

즉, $\lim_{x\to1}f(x)=f(1)=0$이므로

$1+\frac{a}{2}+C=0$ …… ㉠

$\lim_{x\to1}\frac{f(x)}{x^2-1}=\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{(x-1)(x+1)}=\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}\times\lim_{x\to1}\frac{1}{x+1}$

$\quad=\frac{1}{2}f'(1)=\frac{1}{2}$

에서 $f'(1)=1$

$f'(x)=3x^2+ax$에서 $f'(1)=3+a=1$이므로 $a=-2$

$a=-2$를 ㉠에 대입하면 $C=0$

따라서 $f(x)=x^3-x^2$이므로 $f(2)=8-4=4$

답 ②

필수 유형 ❷

$\int_0^2(3x^2+6x)\,dx=\left[x^3+3x^2\right]_0^2=(2^3+3\times2^2)-0=20$

답 ①

06

$\int_0^3(x^2+x|1-x|)\,dx$

$=\int_0^1(x^2+x|1-x|)\,dx+\int_1^3(x^2+x|1-x|)\,dx$

$=\int_0^1\{x^2+x(1-x)\}\,dx+\int_1^3\{x^2-x(1-x)\}\,dx$

$=\int_0^1x\,dx+\int_1^3(2x^2-x)\,dx=\left[\frac{1}{2}x^2\right]_0^1+\left[\frac{2}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2\right]_1^3$

$=\frac{1}{2}+\frac{40}{3}=\frac{83}{6}$

답 ①

07

$\int_0^1\left(\frac{2}{3}x^2+\frac{1}{9}x+\frac{k}{6}\right)dx=-\frac{1}{18}$의 양변에 18을 곱하면

$18\int_0^1\left(\frac{2}{3}x^2+\frac{1}{9}x+\frac{k}{6}\right)dx=-1$이므로

$18\int_0^1\left(\frac{2}{3}x^2+\frac{1}{9}x+\frac{k}{6}\right)dx=\int_0^1 18\left(\frac{2}{3}x^2+\frac{1}{9}x+\frac{k}{6}\right)dx$

$\quad=\int_0^1(12x^2+2x+3k)\,dx$

$\quad=\left[4x^3+x^2+3kx\right]_0^1=5+3k=-1$

따라서 $k=-2$

답 ①

08

$\int_0^1\{f(x)+x^2\}\,dx=\int_0^1\{(2x^2+6ax+10)+x^2\}\,dx$

$\quad=\int_0^1(3x^2+6ax+10)dx$

$\quad=\left[x^3+3ax^2+10x\right]_0^1=3a+11$

$f(1)=6a+12$

따라서 $3a+11=6a+12$이므로 $a=-\frac{1}{3}$

답 ⑤

09

$\int_0^a(3x^2+x+5)\,dx=\int_0^a(x+9)\,dx$에서

$\int_0^a(3x^2+x+5)\,dx-\int_0^a(x+9)\,dx=0$

$\int_0^a \{(3x^2+x+5)-(x+9)\}\,dx=0$

$\int_0^a (3x^2-4)\,dx=0$

$\Big[x^3-4x\Big]_0^a=a^3-4a=0,\ a(a-2)(a+2)=0$

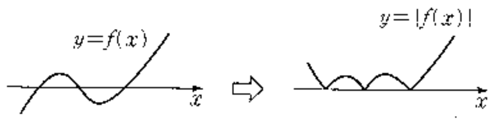
따라서 $a>0$이므로 $a=2$

답 ②

10

실수 a의 값에 따라 삼차함수 $y=f(x)$의 그래프는 그림과 같다.

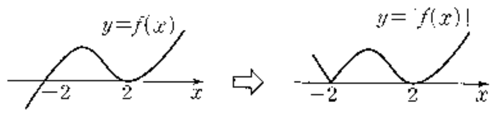
(i) $a\neq-2$이고 $a\neq2$일 때



$f(x)=(x-2)(x+2)(x+a)$이므로

함수 $y=|f(x)|$는 세 개의 x의 값에서 미분가능하지 않으므로 조건을 만족시키지 않는다.

(ii) $a=-2$일 때

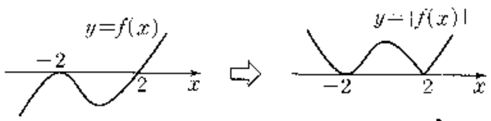


$f(x)=(x-2)^2(x+2)$이므로

함수 $y=|f(x)|$는 $x=-2$에서만 미분가능하지 않다.

즉, 음수인 한 개의 x의 값에서만 미분가능하지 않으므로 조건을 만족시키지 않는다.

(iii) $a=2$일 때



$f(x)=(x-2)(x+2)^2$이므로

함수 $y=|f(x)|$는 $x=2$에서만 미분가능하지 않다.

즉, 양수인 한 개의 x의 값에서만 미분가능하지 않으므로 조건을 만족시킨다.

따라서 $a=2$이고, $f(x)=(x-2)(x+2)^2$이므로

$\int_0^{2a} f'(x)\,dx=\int_0^4 f'(x)\,dx=\Big[(x-2)(x+2)^2\Big]_0^4$

$=72-(-8)=80$

답 80

11

조건 (가)에서 $x\to1$일 때, 극한값이 존재하고 (분모) $\to$ 0이므로 (분자) $\to$ 0이어야 한다. 즉,

$\lim_{x\to1} f(x)=f(1)=0$

조건 (나)에서 $f(a)-f(0)=f(a)-f(1)=0$이므로

$f(a)=f(0)=f(1)=0$

즉, $f(x)=x(x-1)(x-a)$이므로

$\lim_{x\to1}\frac{f(x)}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{x(x-1)(x-a)}{x-1}$

$=\lim_{x\to1}x(x-a)=1-a=-3$

에서 $a=4$

따라서 $f(x)=x(x-1)(x-4)=x^3-5x^2+4x$이므로

$\int_0^1 f(x)\,dx=\int_0^1 (x^3-5x^2+4x)\,dx=\Big[\frac{1}{4}x^4-\frac{5}{3}x^3+2x^2\Big]_0^1$

$=\frac{1}{4}-\frac{5}{3}+2=\frac{7}{12}$

답 ③

필수 유형 ❸

$\int_{-a}^{a} 3x(x+1)^2\,dx=\int_{-a}^{a}(3x^3+6x^2+3x)\,dx$

$=\int_{-a}^{a}6x^2\,dx+\int_{-a}^{a}(3x^3+3x)\,dx$

$=2\int_0^a 6x^2\,dx+0=2\Big[2x^3\Big]_0^a$

$=2\times2a^3=56$

따라서 $a^3=14$

답 14

12

$\int_{-1}^1 (4x^3+ax^2+ax)\,dx=\int_{-1}^1 ax^2\,dx+\int_{-1}^1 (4x^3+ax)\,dx$

$=2\int_0^1 ax^2\,dx+0=2\Big[\frac{a}{3}x^3\Big]_0^1=2\times\frac{a}{3}=2$

따라서 $a=3$

답 ③

13

$\int_{-1}^1 f(x)\,dx=2\int_0^1 ax^2\,dx=2\Big[\frac{a}{3}x^3\Big]_0^1=\frac{2}{3}a$

$\int_{-1}^1 xf(x)\,dx=2\int_0^1 (x^4+bx^2)\,dx=2\Big[\frac{1}{5}x^5+\frac{b}{3}x^3\Big]_0^1=\frac{2}{5}+\frac{2}{3}b$

이므로 조건 (가)에서

$4\int_{-1}^1 f(x)\,dx+5\int_{-1}^1 xf(x)\,dx=4\times\frac{2}{3}a+5\times\left(\frac{2}{5}+\frac{2}{3}b\right)=0$

$4a+5b+3=0$ …… ㉠

$f'(x)=3x^2+2ax+b$이므로 조건 (나)에서

$f'(1)=3+2a+b=0$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-2,\ b=1$

따라서 $f(x)=x^3-2x^2+x$이므로

$f(3)=27-18+3=12$

답 ①

14

$f'(x)=4x^3+ax^2+bx+c$ ($a,\ b,\ c$는 상수)라 하면

조건 (가)에서 $\int_{-a}^{a} f'(x)\,dx=2\int_0^a (ax^2+c)\,dx=0$

즉, $a=0,\ c=0$이므로 $f'(x)=4x^3+bx$

조건 (나)에서 $f(1)=0$, $f'(1)=0$이므로

$f'(1)=4+b=0$에서 $b=-4$

즉, $f'(x)=4x^3-4x$

$f(x)=x^4-2x^2+d$ (d는 상수)라 하면

$f(1)=1-2+d=0$에서 $d=1$

즉, $f(x)=x^4-2x^2+1$이므로

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx=2\int_0^1 (x^4-2x^2+1)\,dx=2\left[\frac{1}{5}x^5-\frac{2}{3}x^3+x\right]_0^1$$
$$=2\left(\frac{1}{5}-\frac{2}{3}+1\right)=\frac{16}{15}$$

따라서 $30\times\int_{-1}^{1} f(x)\,dx=30\times\frac{16}{15}=32$

답 32

필수 유형 ❹

$f(x)=4x^3+x\int_0^1 f(t)\,dt$에서

$\int_0^1 f(t)\,dt=k$ (k는 상수) $\quad\cdots\cdots$ ㉠

라 하면

$f(x)=4x^3+kx$

㉠에서

$$\int_0^1 f(t)\,dt=\int_0^1 (4t^3+kt)dt=\left[t^4+\frac{k}{2}t^2\right]_0^1=1+\frac{k}{2}=k$$

이므로 $k=2$

따라서 $f(x)=4x^3+2x$이므로

$f(1)=4+2=6$

답 ①

15

$f(x)=4x^2-6x+\int_0^1 tf(t)\,dt$에서

$\int_0^1 tf(t)\,dt=k$ (k는 상수) $\quad\cdots\cdots$ ㉠

라 하면

$f(x)=4x^2-6x+k$

㉠에서

$$\int_0^1 tf(t)\,dt=\int_0^1 t(4t^2-6t+k)\,dt=\int_0^1 (4t^3-6t^2+kt)\,dt$$
$$=\left[t^4-2t^3+\frac{k}{2}t^2\right]_0^1=-1+\frac{k}{2}=k$$

이므로 $k=-2$

따라서 $f(x)=4x^2-6x-2$이므로

$f(-1)=8$

답 ⑤

16

$f(x)=ax^2+\int_1^x (t-1)(t-5)\,dt \quad\cdots\cdots$ ㉠

㉠의 양변에 $x=1$을 대입하면

$f(1)=a+\int_1^1 (t-1)(t-5)\,dt=a+0=3$

에서 $a=3$

㉠의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f'(x)=2ax+(x-1)(x-5)$이므로

$f'(3)=6a+2\times(-2)=6\times3-4=14$

답 14

17

$f(x)=\int_0^x x(2t+a)\,dt=x\int_0^x (2t+a)\,dt$

의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f'(x)=\int_0^x (2t+a)\,dt+x(2x+a)$

따라서

$$f'(1)=\int_0^1 (2t+a)\,dt+(2+a)=\left[t^2+at\right]_0^1+(2+a)$$
$$=(1+a)+(2+a)=2a+3=5$$

이므로 $a=1$

답 ①

18

$\lim_{x\to1}\frac{f(x)-3}{x^2-1}=b$에서 $x\to1$일 때, 극한값이 존재하고 (분모) $\to0$이므로 (분자) $\to0$이어야 한다.

즉, $\lim_{x\to1}\{f(x)-3\}=f(1)-3=0$에서 $f(1)=3$

함수 $f(x)=\int_0^x (3t^2+a)\,dt$의 양변에 $x=1$을 대입하면

$f(1)=\int_0^1 (3t^2+a)\,dt=\left[t^3+at\right]_0^1=1+a=3$

에서 $a=2$

$$\lim_{x\to1}\frac{f(x)-3}{x^2-1}=\lim_{x\to1}\left\{\frac{1}{x+1}\times\frac{f(x)-f(1)}{x-1}\right\}$$
$$=\lim_{x\to1}\frac{1}{x+1}\times\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\frac{1}{2}f'(1)$$

함수 $f(x)=\int_0^x (3t^2+2)\,dt$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f'(x)=3x^2+2$이므로

$\frac{1}{2}f'(1)=\frac{1}{2}\times(3+2)=\frac{5}{2}$

따라서 $b=\frac{5}{2}$이므로

$a+10b=2+10\times\frac{5}{2}=27$

답 27

참고

$f(x)=\int_0^x (3t^2+2)\,dt=\left[t^3+2t\right]_0^x=x^3+2x$이므로

$$\lim_{x\to1}\frac{f(x)-3}{x^2-1}=\lim_{x\to1}\frac{x^3+2x-3}{x^2-1}$$
$$=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)(x^2+x+3)}{(x-1)(x+1)}$$
$$=\lim_{x\to1}\frac{x^2+x+3}{x+1}=\frac{5}{2}$$

따라서 $b=\frac{5}{2}$

19

$\int_1^x f(t)\,dt=(x+1)f(x)+x^3-3x$ ······ ㉠

㉠의 양변에 $x=1$을 대입하면

$\int_1^1 f(t)\,dt=2f(1)-2$

$0=2f(1)-2$이므로

$f(1)=1$ ······ ㉡

한편, ㉠의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x)=f(x)+(x+1)f'(x)+3x^2-3$

$(x+1)f'(x)=-3x^2+3=-3(x-1)(x+1)$

이 등식은 모든 실수 x에 대하여 성립하므로

$f'(x)=-3x+3$

$f(x)=\int f'(x)\,dx=\int(-3x+3)\,dx$

$=-\frac{3}{2}x^2+3x+C$ (C는 적분상수)

㉡에서 $f(1)=1$이므로

$-\frac{3}{2}+3+C=1$, $C=-\frac{1}{2}$

따라서 $f(x)=-\frac{3}{2}x^2+3x-\frac{1}{2}$이므로

$f(2)=-6+6-\frac{1}{2}=-\frac{1}{2}$

답 ③

20

조건 (가)에서 주어진 등식의 양변에 $x=1$을 대입하면

$0=1+a+b+1$

$a+b=-2$ ······ ㉠

조건 (가)에서 주어진 등식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f'(x)=3x^2+2ax+b$

조건 (나)에서 $f'(3)=0$이므로

$f'(3)=27+6a+b=0$

$6a+b=-27$ ······ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=-5$, $b=3$

즉, $f'(x)=3x^2-10x+3$이므로

$\int_1^3 f'(x)\,dx=\int_1^3(3x^2-10x+3)\,dx$

$=\Big[x^3-5x^2+3x\Big]_1^3$

$=(27-45+9)-(1-5+3)=-8$

답 ②

필수 유형 ❺

$g(x)=\int_0^x f(t)\,dt$에서

$g'(x)=\frac{d}{dx}\left\{\int_0^x f(t)\,dt\right\}=f(x)$

$=-x^2-4x+a$

$=-(x+2)^2+a+4$

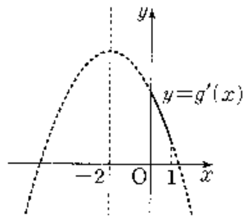
함수 $g(x)$가 닫힌구간 $[0, 1]$에서 증가하려면 닫힌구간 $[0, 1]$에서

$g'(x)\ge 0$이어야 한다.

즉, $g'(1)=a-5\ge 0$이어야 하므로

$a\ge 5$

따라서 a의 최솟값은 5이다.



답 5

21

$f(x)=\int_0^x(3t^2-4)\,dt=\Big[t^3-4t\Big]_0^x$

$=x^3-4x=x(x+2)(x-2)$

이때 $g'(x)=0$이면 $f(x)=0$이므로 $x=-2$ 또는 $x=0$ 또는 $x=2$이고, 함수 $g(x)$는 사차함수이므로 $x=0$에서 극댓값을 갖는다.

$g(x)=\int(x^3-4x)\,dx=\frac{1}{4}x^4-2x^2+C$ (C는 적분상수)

에서 $g(2)=0$이므로 $C=4$

따라서 함수 $g(x)$의 극댓값은 $g(0)=4$

답 ④

22

$f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ (a, b, c는 상수)라 하면

$f'(x)=3x^2+2ax+b$

주어진 조건에서 함수 $g(x)$가 $x=0$에서 극솟값 3을 가지므로

$g(0)=\int_0^0 f'(t)\,dt+(0+1)f(0)+1=f(0)+1=3$

즉, $f(0)=2$이므로 $c=2$

$g'(x)=f'(x)+f(x)+(x+1)f'(x)$에서

$g'(0)=f'(0)+f(0)+(0+1)f'(0)=2f'(0)+2=0$

이므로 $f'(0)=-1$

즉, $b=-1$

주어진 조건에서 $g(1)=8$이고 $f(x)=x^3+ax^2-x+2$이므로

$g(1)=\int_0^1 f'(t)\,dt+(1+1)f(1)+1$

$=\Big[f(t)\Big]_0^1+2f(1)+1$

$=f(1)-f(0)+2f(1)+1$

$=3f(1)-1$

$=3(1+a-1+2)-1$

$=3a+5=8$

에서 $a=1$

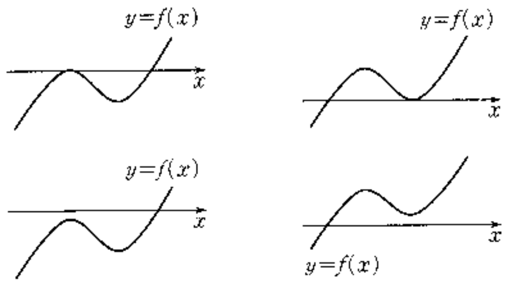
따라서 $f(x)=x^3+x^2-x+2$이므로

$f(-1)=-1+1+1+2=3$

답 ③

23

함수 $h(k)$의 최댓값이 2가 되려면 사차함수 $g(x)$가 극솟값을 갖는 x의 값이 오직 하나이어야 하므로 $g(x)$의 도함수인 삼차함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형은 다음과 같아야 한다.



즉, 방정식 $f(x)=0$의 서로 다른 실근의 개수가 1 또는 2이어야 한다.

$f(x)=x^3-3x^2+a$에서

$f'(x)=3x^2-6x=3x(x-2)$

$f(0)f(2)\geq 0$이어야 하므로

$a(a-4)\geq 0$

$a\leq 0$ 또는 $a\geq 4$에서 양수 a의 최솟값은 4이다.

답 ④

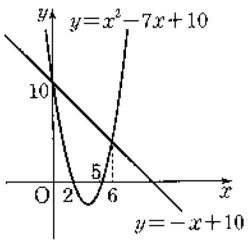
필수 유형 6

곡선 $y=x^2-7x+10$과 직선 $y=-x+10$의 교점의 x좌표는

$x^2-7x+10=-x+10$에서 $x^2-6x=0$, $x(x-6)=0$

$x=0$ 또는 $x=6$

따라서 곡선 $y=x^2-7x+10$과 직선 $y=-x+10$은 그림과 같으므로 구하는 넓이를 S라 하면



$$S=\int_0^6 |(-x+10)-(x^2-7x+10)|\,dx$$

$$=\int_0^6 (-x^2+6x)\,dx=\left[-\frac{1}{3}x^3+3x^2\right]_0^6$$

$$=-72+108=36$$

답 36

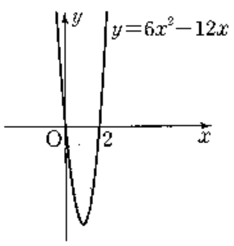
24

곡선 $y=6x^2-12x$와 x축의 교점의 x좌표는

$6x^2-12x=0$에서 $6x(x-2)=0$

$x=0$ 또는 $x=2$

따라서 구하는 넓이를 S라 하면



$$S=\int_0^2 |6x^2-12x|\,dx$$

$$=\int_0^2 (-6x^2+12x)\,dx$$

$$=\left[-2x^3+6x^2\right]_0^2$$

$$=8$$

답 8

25

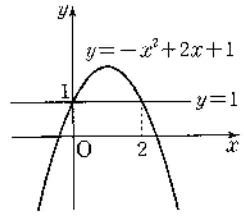
곡선 $y=-x^2+2x+1$과 직선 $y=1$의 교점의 x좌표는

$-x^2+2x+1=1$에서 $x^2-2x=0$

$x(x-2)=0$

$x=0$ 또는 $x=2$

곡선 $y=-x^2+2x+1$과 직선 $y=1$은 그림과 같다.



따라서 구하는 넓이는

$$\int_0^2 \{(-x^2+2x+1)-1\}\,dx=\int_0^2 (-x^2+2x)\,dx$$

$$=\left[-\frac{1}{3}x^3+x^2\right]_0^2$$

$$=-\frac{8}{3}+4=\frac{4}{3}$$

답 ②

26

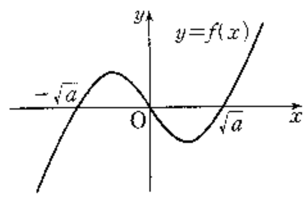
함수 $f(x)=x^3-ax$의 그래프와 x축의 교점의 x좌표는

$x^3-ax=0$에서 a가 양수이므로

$x(x+\sqrt{a})(x-\sqrt{a})=0$

$x=0$ 또는 $x=-\sqrt{a}$ 또는 $x=\sqrt{a}$

함수 $f(x)=x^3-ax$의 그래프는 그림과 같다.



따라서 모든 실수 x에 대하여 $f(-x)=-f(x)$이므로

구하는 넓이는

$$\int_{-\sqrt{a}}^{\sqrt{a}} |x^3-ax|\,dx=2\int_{-\sqrt{a}}^{0} (x^3-ax)\,dx=2\left[\frac{1}{4}x^4-\frac{a}{2}x^2\right]_{-\sqrt{a}}^{0}$$

$$=2\left(-\frac{1}{4}a^2+\frac{1}{2}a^2\right)=\frac{1}{2}a^2=18$$

$a^2=36$

$a>0$이므로 $a=6$

따라서 $f(x)=x^3-6x$이므로 $f(-1)=5$

답 ③

27

$f(x)=x^3-2x^2+k$에서 $f'(x)=3x^2-4x$이므로

$f'(x)=0$에서 $x(3x-4)=0$

$x=0$ 또는 $x=\frac{4}{3}$

즉, $x=0$에서 극댓값을 가지므로 곡선 $y=x^3-2x^2+k$ 위의 점 $(0, k)$에서의 접선의 방정식은 $y=k$이다.

곡선 $y=x^3-2x^2+k$와 직선 $y=k$의 교점의 x좌표는

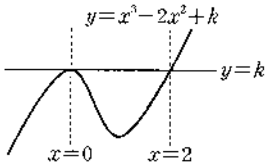
$x^3-2x^2+k=k$에서 $x^3-2x^2=0$이므로

$x^2(x-2)=0$

$x=0$ 또는 $x=2$

따라서 곡선 $y=x^3-2x^2+k$와 직선 $y=k$로 둘러싸인 부분의 넓이를 S라 하면

$$S=\int_0^2 |k-(x^3-2x^2+k)|\,dx$$
$$=\int_0^2 (-x^3+2x^2)\,dx$$
$$=\left[-\frac{1}{4}x^4+\frac{2}{3}x^3\right]_0^2$$
$$=\frac{4}{3}$$



답 ③

28

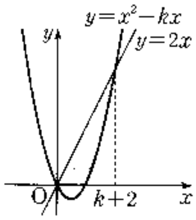
곡선 $y=x^2-kx$와 직선 $y=2x$의 교점의 x좌표는

$x^2-kx=2x$에서 $x^2-(k+2)x=0$

$x\{x-(k+2)\}=0$

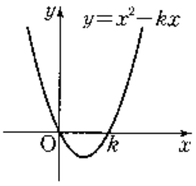
$x=0$ 또는 $x=k+2$

따라서 곡선 $y=x^2-kx$와 직선 $y=2x$로 둘러싸인 부분의 넓이 S_1은



$$S_1=\int_0^{k+2}\{2x-(x^2-kx)\}\,dx$$
$$=\int_0^{k+2}\{-x^2+(k+2)x\}\,dx$$
$$=\left[-\frac{1}{3}x^3+\frac{k+2}{2}x^2\right]_0^{k+2}=\frac{(k+2)^3}{6}$$

곡선 $y=x^2-kx$와 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이 S_2는



$$S_2=\int_0^k(-x^2+kx)\,dx$$
$$=\left[-\frac{1}{3}x^3+\frac{k}{2}x^2\right]_0^k=\frac{k^3}{6}$$

$S_1=8S_2$이므로 $(k+2)^3=(2k)^3$에서 $k+2=2k$

따라서 $k=2$

답 ④

29

조건 (나)에서 $x \to 0$일 때 극한값이 존재하고 (분모) $\to 0$이므로 (분자) $\to 0$이어야 한다.

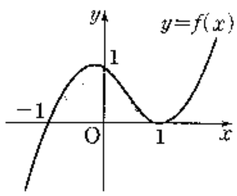
즉, $\lim\limits_{x\to 0}\{f(x)-1\}=0$에서 $f(0)=1$

이때 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-1}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=f'(0)=-1$이므로 $a=-1$

즉, $f'(x)=3x^2-2x-1$에서

$f(x)=x^3-x^2-x+C$ (C는 적분상수)이고, $f(0)=1$이므로 $C=1$

따라서 $f(x)=x^3-x^2-x+1=(x+1)(x-1)^2$이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이 S는



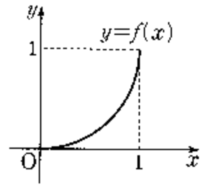
$$S=\int_{-1}^1(x^3-x^2-x+1)\,dx$$
$$=\int_{-1}^1(-x^2+1)\,dx+\int_{-1}^1(x^3-x)\,dx$$
$$=2\int_0^1(-x^2+1)\,dx+0$$
$$=2\left[-\frac{1}{3}x^3+x\right]_0^1=\frac{4}{3}$$

따라서 $30S=30\times\frac{4}{3}=40$

답 40

《필수 유형 ⑦》

주어진 조건에서 $f(0)=0$, $f(1)=1$, $\int_0^1 f(x)\,dx=\frac{1}{6}$

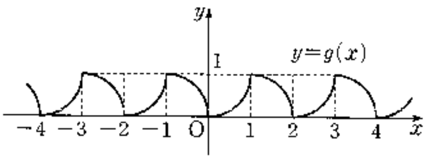


이므로 $0\le x\le 1$일 때, 함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형이 그림과 같다고 하자.

또한 조건 (가)에서

$-1<x<0$일 때, 함수 $y=g(x)$의 그래프는 $0<x<1$일 때의 함수 $y=f(x)$의 그래프를 x축에 대하여 대칭이동한 후 x축의 방향으로 -1만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것과 같다.

이때 조건 (나)에서 함수 $g(x)$는 주기가 2인 주기함수이므로 함수 $y=g(x)$의 그래프의 개형은 그림과 같이 나타낼 수 있다.



한편, $\int_0^1 g(x)\,dx=\int_0^1 f(x)\,dx=\frac{1}{6}$이고

$$\int_{-1}^0 g(x)\,dx=1-\int_0^1 f(x)\,dx=1-\frac{1}{6}=\frac{5}{6}$$

$$\int_{-1}^1 g(x)\,dx=\int_{-1}^0 g(x)\,dx+\int_0^1 f(x)\,dx=\frac{5}{6}+\frac{1}{6}=1$$

이때 함수 $g(x)$의 주기는 2이므로

$$\int_{-3}^2 g(x)\,dx=\int_{-3}^{-1}g(x)\,dx+\int_{-1}^1 g(x)\,dx+\int_1^2 g(x)\,dx$$
$$=\int_{-1}^1 g(x)\,dx+\int_{-1}^1 g(x)\,dx+\int_{-1}^0 g(x)\,dx$$
$$=1+1+\frac{5}{6}=\frac{17}{6}$$

답 ②

30

조건 (가)에서 함수 $f(x)$가 $x=0$에서 연속이므로

$\lim\limits_{x\to 0-}f(x)=\lim\limits_{x\to 0+}f(x)=f(0)$

에서 $b=3$

조건 (나)에서 $x=0$일 때, $f(-3)=f(3)$이고

$f(-3)=\lim\limits_{x\to -3-}f(x)=0$이므로

$0=9+3a+b$

$b=3$이므로 $a=-4$

따라서 $f(x)=\begin{cases} x+3 & (-3<x<0) \\ x^2-4x+3 & (0\le x\le 3)\end{cases}$이고

$f(x-3)=f(x+3)$에서 $f(x)=f(x+6)$

즉, $f(x)$는 주기가 6인 주기함수이므로

$$\int_{-33}^{-29} f(x)\,dx=\int_{-3}^1 f(x)\,dx$$

$$\int_{57}^{60} f(x)\,dx=\int_3^0 f(x)\,dx$$

따라서

$$\int_{-33}^{-29} f(x)\,dx-\int_{57}^{60} f(x)\,dx=\int_{-3}^{1} f(x)\,dx-\int_{-3}^{0} f(x)\,dx$$
$$=\int_{0}^{1} f(x)\,dx=\int_{0}^{1} (x^2-4x+3)\,dx$$
$$=\left[\frac{1}{3}x^3-2x^2+3x\right]_0^1$$
$$=\frac{1}{3}-2+3=\frac{4}{3}$$

답 ④

31

함수 $f(x)=-x^3+ax^2-3ax+10$의 도함수는

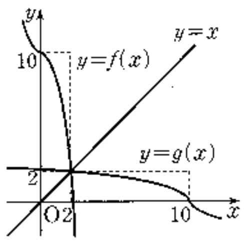
$f'(x)=-3x^2+2ax-3a$

이때 삼차함수 $f(x)=-x^3+ax^2-3ax+10$의 역함수가 존재하려면 극값을 갖지 않아야 한다. 즉, 이차방정식 $f'(x)=0$이 서로 다른 두 실근을 갖지 않아야 하므로 이차방정식 $f'(x)=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=a^2-9a=a(a-9)\le 0$

$0\le a\le 9$

따라서 a의 최솟값은 0이므로 $f(x)=-x^3+10$이고, 그 역함수인 $y=g(x)$의 그래프는 그림과 같다.



따라서

$$\int_{2}^{10} g(x)\,dx=\int_{0}^{2} f(x)\,dx-2\times 2=\int_{0}^{2}(-x^3+10)\,dx-4$$
$$=\left[-\frac{1}{4}x^4+10x\right]_0^2-4=16-4=12$$

답 12

필수 유형 ❽

$t\ge 3$일 때, $v(t)=2t-6\ge 0$이므로

$$\int_{3}^{k} |v(t)|\,dt=\int_{3}^{k}(2t-6)\,dt=\left[t^2-6t\right]_3^k=(k^2-6k)-(9-18)$$
$$=k^2-6k+9=25$$

$k^2-6k-16=0$, $(k+2)(k-8)=0$

따라서 $k>3$이므로 $k=8$

답 ③

32

시각 $t=0$에서의 위치를 a라 하면 시각 $t=4$에서의 위치는

$$a+\int_{0}^{4} v(t)\,dt=a+\int_{0}^{4}(-2t+10)\,dt=a+\left[-t^2+10t\right]_0^4$$
$$=a+(-16+40)=a+24$$

이때 시각 $t=4$에서의 위치가 30이므로

$a+24=30$, $a=6$

따라서 시각 $t=1$에서의 위치는

$$6+\int_{0}^{1} v(t)\,dt=6+\int_{0}^{1}(-2t+10)\,dt=6+\left[-t^2+10t\right]_0^1$$
$$=6+(-1+10)=15$$

답 ②

다른 풀이

점 P의 시각 $t=1$에서의 위치를 a라 하면 시각 $t=4$에서의 위치는

$$a+\int_{1}^{4} v(t)\,dt=a+\int_{1}^{4}(-2t+10)\,dt=a+\left[-t^2+10t\right]_1^4=a+15$$

이므로 $a+15=30$에서 $a=15$

따라서 점 P의 시각 $t=1$에서의 위치는 15이다.

33

시각 $t=1$에서의 점 P의 위치가 -5이므로

$$0+\int_{0}^{1} v(t)\,dt=\int_{0}^{1}(3t^2-4t+k)\,dt=\left[t^3-2t^2+kt\right]_0^1$$
$$=k-1=-5$$

에서 $k=-4$

즉, $v(t)=3t^2-4t-4$

점 P가 움직이는 방향이 바뀔 때 속도 $v(t)=0$이므로

$3t^2-4t-4=0$에서 $(3t+2)(t-2)=0$

$t>0$이므로 $t=2$

$0<t<2$일 때 $v(t)<0$이고 $t>2$일 때 $v(t)>0$이므로

시각 $t=2$일 때 점 P가 움직이는 방향을 바꾼다.

따라서 시각 $t=0$에서 시각 $t=2$까지 점 P가 움직인 거리는

$$\int_{0}^{2}|v(t)|\,dt=\int_{0}^{2}|3t^2-4t-4|\,dt=\int_{0}^{2}(-3t^2+4t+4)\,dt$$
$$=\left[-t^3+2t^2+4t\right]_0^2=8$$

답 ⑤

34

두 점 P, Q가 동시에 원점을 출발한 후 다시 만나는 위치 x가 $x=k$일 때의 시각을 $t=a\ (a>0)$이라 하면

$$0+\int_{0}^{a} v_1\,dt=0+\int_{0}^{a} v_2\,dt$$
$$\int_{0}^{a}(3t^2+t)\,dt=\int_{0}^{a}(2t^2+3t)\,dt$$
$$\left[t^3+\frac{1}{2}t^2\right]_0^a=\left[\frac{2}{3}t^3+\frac{3}{2}t^2\right]_0^a$$
$$a^3+\frac{1}{2}a^2=\frac{2}{3}a^3+\frac{3}{2}a^2$$
$$\frac{1}{3}a^3-a^2=\frac{1}{3}a^2(a-3)=0$$

$a>0$이므로 $a=3$

따라서 시각 $t=3$에서의 점 P의 위치(또는 점 Q의 위치) $x=k$에서

$k=3^3+\frac{1}{2}\times 3^2=\frac{63}{2}$이므로

$2k=2\times\frac{63}{2}=63$

답 63

07 경우의 수

정답				본문 78~85쪽
필수 유형 ❶	①	01 ②	02 ④	03 144
필수 유형 ❷	③	04 200	05 ⑤	06 ④
필수 유형 ❸	③	07 ②	08 18	09 ⑤
필수 유형 ❹	⑤	10 30	11 ③	12 ①
필수 유형 ❺	③	13 ③	14 ②	15 ⑤
필수 유형 ❻	①	16 ③	17 ②	18 ⑤
필수 유형 ❼	④	19 ④	20 ④	21 114
필수 유형 ❽	682	22 ④	23 8	24 ③

필수 유형 ❶

1학년 학생 2명을 1명으로 생각하고 2학년 학생 2명을 1명으로 생각하여 5명의 학생이 원 모양의 탁자에 둘러앉는 경우의 수는

$(5-1)!=4!=24$

위의 각각의 경우에 대하여 1학년 학생 2명이 자리를 바꾸는 경우의 수는

$2!=2$

위의 각각의 경우에 대하여 2학년 학생 2명이 자리를 바꾸는 경우의 수는

$2!=2$

따라서 구하는 경우의 수는

$24\times2\times2=96$

답 ①

01

남학생 A와 A의 양 옆에 앉은 남학생 2명을 1명으로 생각하여 6명의 학생이 원 모양의 탁자에 둘러앉는 경우의 수는

$(6-1)!=5!=120$

위의 각각의 경우에 대하여 남학생 A의 양 옆에 앉은 남학생 두 명이 자리를 바꾸는 경우의 수는

$2!=2$

따라서 구하는 경우의 수는

$120\times2=240$

답 ②

02

빨간색과 파란색을 제외한 4가지 색 중에서 2가지 색을 택하는 경우의 수는

${}_4C_2=6$

빨간색과 선택된 2가지 색을 정삼각형 내부의 3개의 영역에 칠하는 경우의 수는

$(3-1)!=2!=2$

위의 각각의 경우에 대하여 나머지 3개의 영역에 파란색을 포함한 나머지 3가지 색을 칠하는 경우의 수는

$3!=6$

따라서 구하는 경우의 수는

$6\times2\times6=72$

답 ④

다른 풀이

정삼각형 내부의 영역 중 한 영역에 빨간색을 칠하여 고정시키면 정삼각형 외부의 한 영역을 택하여 파란색으로 칠하는 경우의 수는 3이다.

위의 각각의 경우에 대하여 나머지 4개의 영역에 나머지 4가지 색을 칠하는 경우의 수는 $4!=24$이다.

따라서 구하는 경우의 수는

$3\times24=72$

03

이웃한 두 개의 접시에 적힌 수의 곱이 홀수이려면 두 개의 접시에 적힌 수가 모두 홀수이어야 하므로 1, 3, 5, 7이 적힌 접시 중에서 두 개의 접시만 이웃하여야 한다.

먼저 짝수가 적힌 세 개의 접시를 원형으로 배열하는 경우의 수는

$(3-1)!=2!=2$

홀수가 적힌 접시 중에서 이웃할 두 개의 접시를 택하는 경우의 수는

${}_4C_2=6$

위의 각각의 경우에 대하여 선택된 두 개의 접시를 한 묶음으로 생각하면 묶음 내에서 두 개의 접시의 순서를 바꾸는 경우의 수는 $2!=2$이고, 짝수가 적힌 세 개의 접시 사이사이에 선택된 접시 한 묶음과 나머지 홀수가 적힌 접시를 놓는 경우의 수는 $3!=6$이다.

따라서 구하는 경우의 수는

$2\times6\times2\times6=144$

답 144

필수 유형 ❷

조건 (가)에서 양 끝에 나열되는 문자는 X, Y 중에서 중복을 허락하여 정하면 되므로 양 끝에 나열되는 문자를 정하는 경우의 수는

${}_2\Pi_2=2^2=4$

위의 각각의 경우에 대하여 조건 (나)에서 문자 a의 위치를 정하는 경우의 수는

4

위의 각각의 경우에 대하여 나머지 3곳에 나열할 문자는 b, X, Y 중에서 중복을 허락하여 정하면 되므로 나머지 3곳에 나열되는 문자를 정하는 경우의 수는

${}_3\Pi_3=3^3=27$

따라서 구하는 경우의 수는

$4\times4\times27=432$

답 ③

04

(i) x가 1 또는 3 또는 5일 때

$xf(x)$가 짝수이려면 $f(x)$의 값은 2, 4 중 하나이므로 경우의 수는 서로 다른 2개에서 중복을 허락하여 3개를 택하여 나열하는 중복순열의 수와 같다.

즉, ${}_2\Pi_3=2^3=8$

(ii) x가 2 또는 4일 때

$f(x)$의 값에 관계없이 $xf(x)$는 항상 짝수이므로 경우의 수는 서로 다른 5개에서 중복을 허락하여 2개를 택하여 나열하는 중복순열의 수와 같다.

즉, ${}_5\Pi_2=5^2=25$

(i), (ii)에서 구하는 함수 f의 개수는

$8\times25=200$

답 200

05

(i) 일의 자리가 2인 경우

일의 자리를 제외한 나머지 4개의 자리 중에서 2가 들어갈 한 자리를 결정하는 경우의 수는

${}_4C_1=4$

위의 각각의 경우에 대하여 2가 있는 자리를 제외한 나머지 3개의 자리에는 1, 3, 4가 중복하여 들어갈 수 있으므로 나머지 3개의 자리의 숫자를 결정하는 경우의 수는

${}_3\Pi_3=3^3=27$

따라서 조건을 만족시키는 자연수의 개수는

$4\times27=108$

(ii) 일의 자리가 4인 경우

일의 자리를 제외한 나머지 4개의 자리 중에서 2가 들어갈 두 자리를 결정하는 수는

${}_4C_2=6$

위의 각각의 경우에 대하여 2가 있는 자리를 제외한 나머지 2개의 자리에는 1, 3, 4가 중복하여 들어갈 수 있으므로 나머지 2개의 자리의 숫자를 결정하는 경우의 수는

${}_3\Pi_2=3^2=9$

따라서 조건을 만족시키는 자연수의 개수는

$6\times9=54$

(i), (ii)에서 구하는 자연수의 개수는

$108+54=162$

답 ⑤

06

조건 (가)에서 숫자 1이 적힌 카드는 학생 A에게 나누어 준다. 나머지 4장의 카드를 세 명의 학생 A, B, C에게 남김없이 나누어 주는 경우의 수는 서로 다른 3개에서 중복을 허락하여 4개를 택하여 나열하는 중복순열의 수와 같으므로

${}_3\Pi_4=3^4=81$

이때 조건 (나)에서 적어도 두 명의 학생이 카드를 받아야 하므로 위의 경우에서 나머지 4장의 카드를 모두 A에게 나누어 주는 경우를 제외하여야 한다.

따라서 구하는 경우의 수는

$81-1=80$

답 ④

필수 유형 ❸

6개의 문자 중에서 같은 문자인 a가 3개, b가 2개 있다.

따라서 구하는 경우의 수는

$\frac{6!}{3!\times2!}=60$

답 ③

07

5의 배수이려면 일의 자리의 수가 5 또는 0이어야 하므로 구하는 자연수의 개수는 숫자 5를 일의 자리에 놓은 후 남은 5개의 숫자 1, 1, 1, 3, 5를 일렬로 나열하는 경우의 수와 같다.

따라서 구하는 경우의 수는

$\frac{5!}{3!}=20$

답 ②

08

(i) 양 끝에 a, b를 나열하는 경우

a의 바로 오른쪽 옆에는 대문자가 나와야 하므로 a는 왼쪽 끝, b는 오른쪽 끝에 나열하여야 한다.

a, ①, ②, ③, ④, b

①에는 반드시 대문자가 나와야 하므로 b는 ②, ③, ④ 중 한 곳에 나열하여야 한다. 즉, b의 자리를 정하는 경우의 수는 3이다. 나머지 문자 X, Y, Y를 나머지 빈 칸에 일렬로 나열하는 경우의 수는

$\frac{3!}{2!}=3$

따라서 조건을 만족시키는 경우의 수는

$3\times3=9$

(ii) 양 끝에 b, b를 나열하는 경우

b, ①, ②, ③, ④, b

a의 바로 오른쪽 옆에는 대문자가 나와야 하므로 a는 ①, ②, ③ 중 한 곳에 나열하여야 한다. 즉, a의 자리를 정하는 경우의 수는 3이다. 나머지 문자 X, Y, Y를 나머지 빈 칸에 일렬로 나열하는 경우의 수는

$\frac{3!}{2!}=3$

따라서 조건을 만족시키는 경우의 수는

$3\times3=9$

(i), (ii)에서 구하는 경우의 수는

$9+9=18$

답 18

09

a, b, c, d는 보두 1부터 6까지의 자연수이다.

1부터 6까지의 자연수 중 세 자연수의 곱이 12인 경우는

$12=1\times2\times6$

$\quad=1\times3\times4$

$\quad=2\times2\times3$

이므로 2가 반드시 포함되고 1부터 6까지의 자연수 중 네 자연수의 곱이 24인 경우는

$24=1\times2\times2\times6$

$\quad=1\times2\times3\times4$

$\quad=2\times2\times2\times3$

이다.

4개의 숫자 1, 2, 2, 6을 일렬로 나열하는 경우의 수는

$\dfrac{4!}{2!}=12$

4개의 숫자 1, 2, 3, 4를 일렬로 나열하는 경우의 수는

$4!=24$

4개의 숫자 2, 2, 2, 3을 일렬로 나열하는 경우의 수는

$\dfrac{4!}{3!}=4$

따라서 구하는 모든 순서쌍 (a, b, c, d)의 개수는

$12+24+4=40$

답 ⑤

필수 유형 ④

A지점에서 P지점까지 최단거리로 가려면 오른쪽으로 2칸, 위쪽으로 2칸 가야 한다. 이 경우의 수는 오른쪽으로 한 칸 이동하는 것을 a, 위쪽으로 한 칸 이동하는 것을 b라 할 때, 4개의 문자 a, a, b, b를 일렬로 나열하는 경우의 수와 같으므로

$\dfrac{4!}{2!\times2!}=6$

P지점에서 B지점까지 최단거리로 가려면 오른쪽으로 3칸, 위쪽으로 1칸 가야 한다. 이 경우의 수는 위와 마찬가지로 4개의 문자 a, a, a, b를 일렬로 나열하는 경우의 수와 같으므로

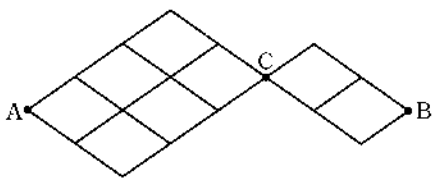
$\dfrac{4!}{3!}=4$

따라서 구하는 경우의 수는

$6\times4=24$

답 ⑤

10



그림과 같이 C지점을 정하면 A지점에서 B지점까지 갈 때 반드시 C지점을 지나야 한다.

오른쪽 위(↗)로 한 칸 이동하는 것을 a, 오른쪽 아래(↘)로 한 칸 이동하는 것을 b라 할 때, A지점에서 C지점으로 최단거리로 가려면 오른쪽 위로 3칸, 오른쪽 아래로 2칸 가야 한다. 이 경우의 수는 5개의 문자 a, a, a, b, b를 일렬로 나열하는 경우의 수와 같으므로

$\dfrac{5!}{3!\times2!}=10$

C지점에서 B지점으로 최단거리로 가려면 오른쪽 위로 1칸, 오른쪽 아래로 2칸 가야 한다. 이 경우의 수는 3개의 문자 a, b, b를 일렬로 나열하는 경우의 수와 같으므로

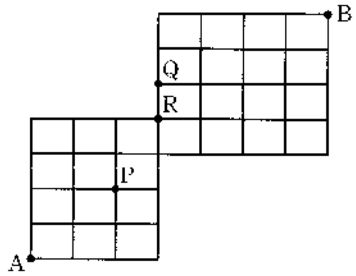
$\dfrac{3!}{2!}=3$

따라서 구하는 경우의 수는

$10\times3=30$

답 30

11



오른쪽으로 한 칸 이동하는 것을 a, 위쪽으로 한 칸 이동하는 것을 b라 할 때, A지점에서 P지점까지 최단거리로 가려면 오른쪽으로 2칸, 위쪽으로 2칸 가야 한다. 이 경우의 수는 4개의 문자 a, a, b, b를 일렬로 나열하는 경우의 수와 같으므로

$\dfrac{4!}{2!\times2!}=6$

그림과 같이 R지점을 정하면 P지점에서 Q지점까지 최단거리로 갈 때 반드시 R지점을 지나야 한다. P지점에서 R지점으로 최단거리로 가려면 오른쪽으로 1칸, 위쪽으로 2칸 가야 한다. 이 경우의 수는 3개의 문자 a, b, b를 일렬로 나열하는 경우의 수와 같으므로 $\dfrac{3!}{2!}=3$이고 R지점에서 Q지점으로 최단거리로 가는 경우의 수는 1이다. 즉, P지점에서 Q지점까지 최단거리로 가는 경우의 수는

$3\times1=3$

Q지점에서 B지점으로 최단거리로 가려면 오른쪽으로 4칸, 위쪽으로 2칸 가야 한다. 이 경우의 수는 6개의 문자 a, a, a, a, b, b를 일렬로 나열하는 경우의 수와 같으므로

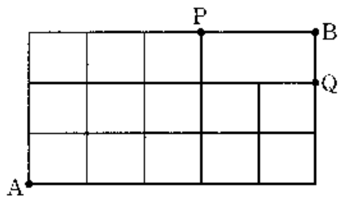
$\dfrac{6!}{4!\times2!}=15$

따라서 구하는 경우의 수는

$6\times3\times15=270$

답 ③

12



그림과 같이 P지점과 Q지점을 정하면 A지점에서 B지점까지 최단거리로 갈 때 P지점과 Q지점 중에서 반드시 한 곳만을 지나야 한다. 오른쪽으로 한 칸 이동하는 것을 a, 위쪽으로 한 칸 이동하는 것을 b라 하자.

(i) P지점을 지나는 경우

A지점에서 P지점으로 최단거리로 가려면 오른쪽으로 3칸, 위쪽으로 3칸 가야 한다. 이 경우의 수는 6개의 문자 a, a, a, b, b, b를 일렬로 나열하는 경우의 수와 같으므로 $\frac{6!}{3!\times3!}=20$이고 P지점에서 B지점으로 최단거리로 가는 경우의 수는 1이다. 즉, A지점에서 P지점을 지나 B지점까지 최단거리로 가는 경우의 수는

$20\times1=20$

(ii) Q지점을 지나는 경우

A지점에서 Q지점으로 최단거리로 가려면 오른쪽으로 5칸, 위쪽으로 2칸 가야 한다. 이 경우의 수는 7개의 문자 a, a, a, a, a, b, b를 일렬로 나열하는 경우의 수와 같으므로 $\frac{7!}{5!\times2!}=21$이고 Q지점에서 B지점으로 최단거리로 가는 경우의 수는 1이다. 즉, A지점에서 Q지점을 지나 B지점까지 최단거리로 가는 경우의 수는

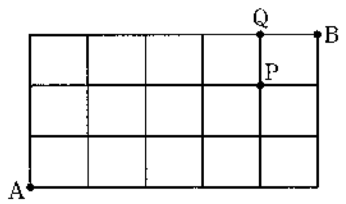
$21\times1=21$

(i), (ii)에서 구하는 경우의 수는

$20+21=41$

답 ①

다른 풀이



그림과 같이 P지점과 Q지점을 연결하는 도로가 있다고 생각할 때, 구하는 경우의 수는 A지점에서 B지점까지 최단거리로 가는 경우의 수에서 A지점에서 P지점과 Q지점을 모두 지나 B지점까지 최단거리로 가는 경우의 수를 뺀 것과 같다.

위 그림에서 A지점에서 B지점까지 최단거리로 가려면 오른쪽으로 5칸, 위쪽으로 3칸 가야 한다. 이 경우의 수는 오른쪽으로 한 칸 이동하는 것을 a, 위쪽으로 한 칸 이동하는 것을 b라 할 때, 8개의 문자 a, a, a, a, a, b, b, b를 일렬로 나열하는 경우의 수와 같으므로

$\frac{8!}{5!\times3!}=56$

A지점에서 P지점으로 최단거리로 가려면 오른쪽으로 4칸, 위쪽으로 2칸 가야 한다. 이 경우의 수는 6개의 문자 a, a, a, a, b, b를 일렬로 나열하는 경우의 수와 같으므로

$\frac{6!}{4!\times2!}=15$

P지점에서 Q지점으로 최단거리로 가는 경우의 수는 1이고, Q지점에서 B지점으로 최단거리로 가는 경우의 수도 1이다. 즉, A지점에서 P지점과 Q지점을 모두 지나 B지점까지 최단거리로 가는 경우의 수는

$15\times1\times1=15$

따라서 구하는 경우의 수는

$56-15=41$

필수 유형 ❺

3가지 색의 카드를 각각 한 장 이상 받는 학생에게는 노란색 카드 1장을 반드시 주어야 한다.

노란색 카드 1장을 받을 학생을 선택하는 경우의 수는

${}_3C_1=3$

위의 각각에 대하여 노란색 카드를 받은 학생에게 파란색 카드 1장을 먼저 준 후 나머지 파란색 카드 1장을 줄 학생을 선택하는 경우의 수는

${}_3C_1=3$

위의 각각에 대하여 노란색 카드를 받은 학생에게 빨간색 카드 1장도 먼저 준 후 나머지 빨간색 카드 3장을 나누어 줄 학생을 선택하는 경우의 수는

${}_3H_3={}_5C_3={}_5C_2=\frac{5\times4}{2\times1}=10$

따라서 구하는 경우의 수는

$3\times3\times10=90$

답 ③

13

세 학생 A, B, C는 각각 2개 이상의 사탕을 받아야 하므로 10개의 사탕 중에서 6개의 사탕을 학생 A, B, C에게 각각 2개씩 나누어 준다.

남은 4개의 사탕을 5명의 학생에게 나누어 주는 경우의 수는 서로 다른 5명의 학생 중에서 중복을 허락하여 4명을 택하는 중복조합의 수와 같으므로

${}_5H_4={}_8C_4=\frac{8\times7\times6\times5}{4\times3\times2\times1}=70$

따라서 구하는 경우의 수는 70이다.

답 ③

14

선택된 4장의 카드에 적혀 있는 수의 합이 홀수가 되는 경우의 수는 홀수가 적혀 있는 카드 3장과 짝수가 적혀 있는 카드 1장을 선택하는 경우의 수와, 홀수가 적혀 있는 카드 1장과 짝수가 적혀 있는 카드 3장을 선택하는 경우의 수의 합이다.

1부터 9까지의 자연수 중에는 홀수가 5개, 짝수가 4개 있으므로 중복을 허락하여 홀수가 적혀 있는 카드 3장과 짝수가 적혀 있는 카드 1장을 선택하는 경우의 수는

$$\begin{aligned}{}_5H_3\times{}_4C_1&={}_7C_3\times{}_4C_1\\&=\frac{7\times6\times5}{3\times2\times1}\times4\\&=140\end{aligned}$$

중복을 허락하여 홀수가 적혀 있는 카드 1장과 짝수가 적혀 있는 카드 3장을 선택하는 경우의 수는

$_5C_1\times{}_4H_3={}_5C_1\times{}_6C_3$

$=5\times\frac{6\times5\times4}{3\times2\times1}$

$=100$

따라서 구하는 경우의 수는

$140+100=240$

답 ②

15

조건 (가)에 의해 빵은 2명의 학생에게 2개, 1개씩 나누어 주거나 3명의 학생에게 1개씩 나누어 주어야 한다.

(i) 빵을 2명의 학생에게 2개, 1개씩 나누어 주는 경우

4명의 학생 중 2개의 빵을 받을 학생 한 명과 1개의 빵을 받을 학생 한 명을 택하는 경우의 수는

$_4P_2=4\times3=12$

위의 각각의 경우에 대하여 빵을 받은 2명의 학생에게 우유를 1병씩 나누어 준다. 나머지 4병의 우유를 네 명의 학생에게 나누어 주는 경우의 수는 서로 다른 4명의 학생 중에서 중복을 허락하여 4명을 택하는 중복조합의 수와 같으므로

$_4H_4={}_7C_4={}_7C_3=\frac{7\times6\times5}{3\times2\times1}=35$

따라서 조건을 만족시키는 경우의 수는

$12\times35=420$

(ii) 빵을 3명의 학생에게 1개씩 나누어 주는 경우

4명의 학생 중 빵을 1개씩 받을 3명의 학생을 택하는 경우의 수는

$_4C_3={}_4C_1=4$

위의 각각의 경우에 대하여 빵을 받은 3명의 학생에게는 우유를 1병씩 나누어 준다. 나머지 3병의 우유를 4명의 학생에게 나누어 주는 경우의 수는 서로 다른 4명의 학생 중에서 중복을 허락하여 3명을 택하는 중복조합의 수와 같으므로

$_4H_3={}_6C_3=\frac{6\times5\times4}{3\times2\times1}=20$

따라서 조건을 만족시키는 경우의 수는

$4\times20=80$

(i), (ii)에서 구하는 경우의 수는

$420+80=500$

답 ⑤

필수 유형 ⑥

조건 (나)에서

$a^2-b^2=-5$ 또는 $a^2-b^2=5$

즉,

$(b-a)(b+a)=5$ 또는 $(a-b)(a+b)=5$

이고, a, b는 자연수이므로

$b-a=1$, $b+a=5$ 또는 $a-b=1$, $a+b=5$

따라서 $a=2$, $b=3$ 또는 $a=3$, $b=2$이다.

또한 조건 (가)에서

$a+b+c+d+e=12$

이므로 $c+d+e=7$

c, d, e는 자연수이므로

$c=c'+1$, $d=d'+1$, $e=e'+1$ (c', d', e'은 음이 아닌 정수)

로 놓으면

$(c'+1)+(d'+1)+(e'+1)=7$

$c'+d'+e'=4$

이를 만족시키는 모든 순서쌍 (c', d', e')의 개수는

$_3H_4={}_6C_4={}_6C_2=\frac{6\times5}{2\times1}=15$

따라서 구하는 모든 순서쌍 (a, b, c, d, e)의 개수는

$2\times15=30$

답 ①

16

$a+b+c+\frac{2}{d+1}=8$에서 a, b, c, d가 모두 음이 아닌 정수이므로 $\frac{2}{d+1}$도 정수이고 $d=0$ 또는 $d=1$이다.

(i) $d=0$일 때

$a+b+c+2=8$에서 $a+b+c=6$이므로 구하는 모든 순서쌍 (a, b, c, d)의 개수는 방정식 $a+b+c=6$을 만족시키는 음이 아닌 정수 a, b, c의 모든 순서쌍 (a, b, c)의 개수와 같으므로

$_3H_6={}_8C_6={}_8C_2=\frac{8\times7}{2\times1}=28$

(ii) $d=1$일 때

$a+b+c+1=8$에서 $a+b+c=7$이므로 구하는 모든 순서쌍 (a, b, c, d)의 개수는 방정식 $a+b+c=7$을 만족시키는 음이 아닌 정수 a, b, c의 모든 순서쌍 (a, b, c)의 개수와 같으므로

$_3H_7={}_9C_7={}_9C_2=\frac{9\times8}{2\times1}=36$

(i), (ii)에서 구하는 모든 순서쌍 (a, b, c, d)의 개수는

$28+36=64$

답 ③

17

$1\le a<b\le c\le d<e\le6$을 만족시키는 자연수 a, b, c, d, e의 모든 순서쌍 (a, b, c, d, e)의 개수는

$2\le a+1\le b\le c\le d\le e-1\le5$를 만족시키는 자연수 a, b, c, d, e의 모든 순서쌍 (a, b, c, d, e)의 개수와 같다.

이때 $a+1=a'$, $e-1=e'$이라 하면 이는 $2\le a'\le b\le c\le d\le e'\le5$를 만족시키는 자연수 a', b, c, d, e'의 모든 순서쌍 (a', b, c, d, e')의 개수를 구하는 것과 같고, 이는 2 이상 5 이하의 4개의 자연수에서 중복을 허락하여 5개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

$_4H_5={}_8C_5={}_8C_3=\frac{8\times7\times6}{3\times2\times1}=56$

답 ②

18

30000보다 작은 다섯 자리의 자연수이므로 만의 자리의 수는 1 또는 2이다.

천의 자리의 수를 a, 백의 자리의 수를 b, 십의 자리의 수를 c, 일의 자리의 수를 d라 하자.

(i) 만의 자리의 수가 1인 경우

만약 $a=0$이라 하면 b, c, d는 어느 것도 0이 아니다. 또한, 만의 자리의 수가 1이므로 조건 (나)에 의하여 $b+c+d=7$이다. 즉, 구하는 경우의 수는 방정식

$b+c+d=7$ …… ㉠

을 만족시키는 자연수 b, c, d의 모든 순서쌍 (b, c, d)의 개수와 같다. $b=b'+1$, $c=c'+1$, $d=d'+1$이라 하면 b', c', d'은 음이 아닌 정수이고 ㉠에서

$b'+c'+d'=4$ …… ㉡

㉠을 만족시키는 자연수 b, c, d의 모든 순서쌍 (b, c, d)의 개수는 ㉡을 만족시키는 음이 아닌 정수 b', c', d'의 모든 순서쌍 (b', c', d')의 개수와 같으므로

${}_3H_4={}_6C_4={}_6C_2=\frac{6\times5}{2\times1}=15$

$b=0$ 또는 $c=0$ 또는 $d=0$인 경우도 각각의 경우에 대하여 나머지 세 자리의 수를 정하는 경우의 수가 15이므로 구하는 경우의 수는

$4\times15=60$

(ii) 만의 자리의 수가 2인 경우

만약 $a=0$이라 하면 b, c, d는 어느 것도 0이 아니다. 또한, 만의 자리의 수가 2이므로 조건 (나)에 의하여 $b+c+d=6$이다. 즉, 구하는 경우의 수는 방정식

$b+c+d=6$

을 만족시키는 자연수 b, c, d의 모든 순서쌍 (b, c, d)의 개수와 같고, 이 경우의 수는 (i)과 마찬가지 방법으로

${}_3H_3={}_5C_3={}_5C_2=\frac{5\times4}{2\times1}=10$

$b=0$ 또는 $c=0$ 또는 $d=0$인 경우도 각각의 경우에 대하여 나머지 세 자리의 수를 정하는 경우의 수가 10이므로 구하는 경우의 수는

$4\times10=40$

(i), (ii)에서 구하는 경우의 수는

$60+40=100$

답 ⑤

필수 유형 7

다항식 $(1+2x)^4$의 전개식의 일반항은

${}_4C_r\times1^{4-r}\times(2x)^r={}_4C_r\times2^r\times x^r$ $(r=0, 1, 2, 3, 4)$

이때 x^2항은 $r=2$일 때이므로 x^2의 계수는

${}_4C_2\times2^2=6\times4=24$

답 ④

19

$\left(x^2-\frac{1}{2x}\right)^5$의 전개식의 일반항은

${}_5C_r\times(x^2)^{5-r}\times\left(-\frac{1}{2x}\right)^r={}_5C_r\times\left(-\frac{1}{2}\right)^r\times x^{10-3r}$

$(r=0, 1, 2, \cdots, 5)$

이때 x^4항은 $r=2$일 때이므로 x^4의 계수는

${}_5C_2\times\left(-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{5}{2}$

답 ④

20

다항식 $(3x+ay)^4$의 전개식의 일반항은

${}_4C_r\times(3x)^{4-r}\times(ay)^r={}_4C_r\times3^{4-r}\times a^r\times x^{4-r}\times y^r$

$(r=0, 1, 2, 3, 4)$

이때 xy^3항은 $r=3$일 때이고 xy^3의 계수는 -96이므로

${}_4C_3\times3^1\times a^3=-96$

$a^3=-8$, $a=-2$

x^2y^2항은 $r=2$일 때이므로 x^2y^2의 계수는

${}_4C_2\times3^2\times(-2)^2=216$

답 ④

21

$\left(x+\frac{1}{x}\right)(x^2+a)^5$의 전개식에서 $\frac{1}{x}$항은 $x+\frac{1}{x}$에서 $\frac{1}{x}$항과 $(x^2+a)^5$의 전개식에서 상수항의 곱과 같다.

$(x^2+a)^5$의 전개식의 일반항은

${}_5C_r\times(x^2)^{5-r}\times a^r={}_5C_r\times a^r\times x^{10-2r}$ $(r=0, 1, 2, \cdots, 5)$ …… ㉠

이때 상수항은 $r=5$일 때이므로 상수항은

${}_5C_5\times a^5=a^5$

즉, $1\times a^5=32$에서 $a=2$

한편, $\left(x+\frac{1}{x}\right)(x^2+2)^5$의 전개식에서 x항은 $x+\frac{1}{x}$에서 x항과 $(x^2+2)^5$의 전개식에서 상수항의 곱과 $x+\frac{1}{x}$에서 $\frac{1}{x}$항과 $(x^2+2)^5$의 전개식에서 x^2항의 곱의 합과 같다.

$x+\frac{1}{x}$에서 x항은 x, $(x^2+2)^5$의 전개식에서 상수항은 32이다.

$x+\frac{1}{x}$에서 $\frac{1}{x}$항은 $\frac{1}{x}$, $(x^2+2)^5$의 전개식에서 x^2항은 ㉠에서 $r=4$일 때이므로 ${}_5C_4\times2^4\times x^2=80x^2$이다.

즉, $b=1\times32+1\times80=112$

따라서 $a+b=2+112=114$

답 114

필수 유형 8

다항식 $(1+x)^{2n}$의 전개식은

$(1+x)^{2n}={}_{2n}C_0+{}_{2n}C_1x+{}_{2n}C_2x^2+\cdots+{}_{2n}C_{2n}x^{2n}$ …… ㉠

등식 ㉠의 양변에 $x=1$을 대입하면

$2^{2n}={}_{2n}C_0+{}_{2n}C_1+{}_{2n}C_2+\cdots+{}_{2n}C_{2n}$ …… ㉡

등식 ㉠의 양변에 $x=-1$을 대입하면

$0={}_{2n}C_0-{}_{2n}C_1+{}_{2n}C_2-{}_{2n}C_3+\cdots-{}_{2n}C_{2n-1}+{}_{2n}C_{2n}$ …… ㉢

㉡−㉢을 한 후 양변을 2로 나누면

${}_{2n}C_1+{}_{2n}C_3+{}_{2n}C_5+\cdots+{}_{2n}C_{2n-1}=2^{2n-1}$

이므로

$$f(n)=\sum_{k=1}^{n}({}_{2k}C_1+{}_{2k}C_3+{}_{2k}C_5+\cdots+{}_{2k}C_{2k-1})$$
$$=\sum_{k=1}^{n}2^{2k-1}$$

이때 $f(n)$은 첫째항이 2이고 공비가 4인 등비수열의 첫째항부터 제n항까지의 합이므로

$$f(5)=\sum_{k=1}^{5}2^{2k-1}=\frac{2\times(4^5-1)}{4-1}=682$$

답 682

22

다항식 $(1+x)^{13}$의 전개식은

$(1+x)^{13}={}_{13}C_0+{}_{13}C_1x+{}_{13}C_2x^2+\cdots+{}_{13}C_{13}x^{13}$

위의 등식의 양변에 $x=1$을 대입하면

$2^{13}={}_{13}C_0+{}_{13}C_1+{}_{13}C_2+\cdots+{}_{13}C_{13}$

${}_{13}C_0={}_{13}C_{13}$, ${}_{13}C_1={}_{13}C_{12}$, $\cdots$, ${}_{13}C_6={}_{13}C_7$이므로

${}_{13}C_0+{}_{13}C_1+{}_{13}C_2+\cdots+{}_{13}C_6=\frac{2^{13}}{2}=2^{12}$

따라서

$$\log_8\left(\sum_{k=0}^{6}{}_{13}C_k\right)=\log_8({}_{13}C_0+{}_{13}C_1+{}_{13}C_2+\cdots+{}_{13}C_6)$$
$$=\log_8 2^{12}$$
$$=\log_{2^3}2^{12}$$
$$=\frac{12}{3}=4$$

답 ④

23

다항식 $(1+x)^{2n}$의 전개식은

$(1+x)^{2n}={}_{2n}C_0+{}_{2n}C_1x+{}_{2n}C_2x^2+\cdots+{}_{2n}C_{2n}x^{2n}$ …… ㉠

등식 ㉠의 양변에 $x=1$을 대입하면

$2^{2n}={}_{2n}C_0+{}_{2n}C_1+{}_{2n}C_2+\cdots+{}_{2n}C_{2n}$ …… ㉡

등식 ㉠의 양변에 $x=-1$을 대입하면

$0={}_{2n}C_0-{}_{2n}C_1+{}_{2n}C_2-{}_{2n}C_3+\cdots-{}_{2n}C_{2n-1}+{}_{2n}C_{2n}$ …… ㉢

㉡+㉢을 한 후 양변을 2로 나누면

${}_{2n}C_0+{}_{2n}C_2+{}_{2n}C_4+\cdots+{}_{2n}C_{2n}=2^{2n-1}$

즉, $\sum_{k=0}^{n}{}_{2n}C_{2k}=2^{2n-1}$

다항식 $(1+x)^{15}$의 전개식은

$(1+x)^{15}={}_{15}C_0+{}_{15}C_1x+{}_{15}C_2x^2+\cdots+{}_{15}C_{15}x^{15}$ …… ㉣

등식 ㉣의 양변에 $x=1$을 대입하면

$2^{15}={}_{15}C_0+{}_{15}C_1+{}_{15}C_2+\cdots+{}_{15}C_{15}$

즉, $\sum_{k=0}^{15}{}_{15}C_k=2^{15}$

$\sum_{k=0}^{n}{}_{2n}C_{2k}=\sum_{k=0}^{15}{}_{15}C_k$에서 $2^{2n-1}=2^{15}$이므로

$2n-1=15$

따라서 $n=8$

답 8

24

구하는 경우의 수는 학생 A를 제외한 15명의 학생 중에서 홀수 명의 학생을 택하는 경우의 수와 같으므로

${}_{15}C_1+{}_{15}C_3+{}_{15}C_5+\cdots+{}_{15}C_{15}$

이다.

$(1+x)^{15}$의 전개식은

$(1+x)^{15}={}_{15}C_0+{}_{15}C_1x+{}_{15}C_2x^2+\cdots+{}_{15}C_{15}x^{15}$ …… ㉠

등식 ㉠의 양변에 $x=1$을 대입하면

$2^{15}={}_{15}C_0+{}_{15}C_1+{}_{15}C_2+\cdots+{}_{15}C_{15}$ …… ㉡

등식 ㉠의 양변에 $x=-1$을 대입하면

$0={}_{15}C_0-{}_{15}C_1+{}_{15}C_2-\cdots-{}_{15}C_{15}$ …… ㉢

㉡−㉢을 한 후 양변을 2로 나누면

$2^{14}={}_{15}C_1+{}_{15}C_3+{}_{15}C_5+\cdots+{}_{15}C_{15}$

따라서 구하는 경우의 수는 2^{14}이다.

답 ③

8 확률

정답				본문 88~97쪽
필수 유형❶ ①	01 ③	02 ⑤	03 ②	
필수 유형❷ ③	04 ①	05 ①	06 ②	
	07 ④	08 ①	09 ④	
	10 ③			
필수 유형❸ ②	11 ①	12 ④	13 ③	
필수 유형❹ ③	14 ②	15 ④	16 ③	
필수 유형❺ ③	17 ②	18 ⑤	19 ②	
필수 유형❻ ⑤	20 ②	21 ②	22 521	
필수 유형❼ ②	23 ①	24 ⑤	25 ①	
	26 ④	27 ④		
필수 유형❽ ①	28 ③	29 ③	30 ②	
	31 325	32 ⑤		

필수 유형❶

주머니 A에서 꺼낸 카드에 적혀 있는 수를 a, 주머니 B에서 꺼낸 카드에 적혀 있는 수를 b라 하면
모든 순서쌍 (a, b)의 개수는
$3\times5=15$
이때 $|a-b|=1$인 순서쌍 (a, b)는
$(1, 2)$, $(2, 1)$, $(2, 3)$, $(3, 2)$, $(3, 4)$
이고 그 개수는 5이다.
따라서 구하는 확률은
$\frac{5}{15}=\frac{1}{3}$

답 ①

01

한 개의 주사위를 두 번 던져서 나오는 눈의 수를 차례로 a, b라 할 때, 모든 순서쌍 (a, b)의 개수는
$6\times6=36$
$10a+b$가 35보다 작은 짝수가 되는 모든 순서쌍 (a, b)는
$(1, 2)$, $(1, 4)$, $(1, 6)$, $(2, 2)$, $(2, 4)$, $(2, 6)$, $(3, 2)$, $(3, 4)$
이고 그 개수는 8이다.
따라서 구하는 확률은
$\frac{8}{36}=\frac{2}{9}$

답 ③

02

세 주머니에서 공을 한 개씩 동시에 꺼내는 경우의 수는
$3\times4\times2=24$
$\frac{ab}{c}$의 값이 자연수이려면 ab가 c의 배수이어야 한다.
(i) $c=3$인 경우
ab는 3의 배수이어야 하므로 이를 만족시키는 a, b의 모든 순서쌍 (a, b)는
$(1, 3)$, $(2, 3)$, $(3, 2)$, $(3, 3)$, $(3, 4)$, $(3, 5)$
이고 그 개수는 6이다.
(ii) $c=4$인 경우
ab는 4의 배수이어야 하므로 이를 만족시키는 a, b의 모든 순서쌍 (a, b)는
$(1, 4)$, $(2, 2)$, $(2, 4)$, $(3, 4)$
이고 그 개수는 4이다.
(i), (ii)에서 조건을 만족시키는 경우의 수는 합의 법칙에 의하여
$6+4=10$
따라서 구하는 확률은
$\frac{10}{24}=\frac{5}{12}$

답 ⑤

03

주머니에서 2장의 카드를 동시에 꺼내는 경우의 수는
${}_7C_2=\frac{7\times6}{2\times1}=21$
만약 카드에 적힌 두 수가 모두 짝수이면 a와 b도 모두 짝수이므로 a와 b는 서로소가 아니다. 즉, 꺼낸 두 장의 카드 중에 홀수인 15가 적힌 카드가 포함되어야 a와 b가 서로소일 수 있다.
이때 15는 3의 배수이면서 5의 배수이므로 나머지 한 장의 카드에 적힌 수가 6 또는 12이면 a와 b도 모두 3의 배수이고, 나머지 한 장의 카드에 적힌 수가 10이면 a와 b도 모두 5의 배수이므로 서로소가 아니다.
그러므로 꺼낸 2장의 카드에 적힌 수가 다음과 같은 경우에만 a와 b가 서로소인지 확인하면 된다.

카드에 적힌 수	a(두 수의 합)	b(두 수의 곱)
2, 15	17	30
4, 15	19	60
8, 15	23	120

위의 세 가지 경우 모두 a와 b는 서로소이므로 조건을 만족시키는 경우의 수는 3이다.
따라서 구하는 확률은
$\frac{3}{21}=\frac{1}{7}$

답 ②

필수 유형❷

숫자 1, 2, 3, 4, 5 중에서 중복을 허락하여 4개를 택해 일렬로 나열하여 만들 수 있는 모든 네 자리의 자연수의 개수는
${}_5\Pi_4=5^4$
이 중에서 3500보다 큰 경우는 다음과 같다.
(i) 천의 자리의 숫자가 3, 백의 자리의 숫자가 5인 경우
십의 자리의 숫자와 일의 자리의 숫자를 택하는 경우의 수는
${}_5\Pi_2=5^2$

(ii) 천의 자리의 숫자가 4 또는 5인 경우

천의 자리의 숫자를 택하는 경우의 수는 2

위의 각각에 대하여 나머지 세 자리의 숫자를 택하는 경우의 수는

${}_{5}\Pi_{3}=5^3$

이므로 이 경우의 수는

2×5^3

(i), (ii)에서 3500보다 큰 자연수의 개수는

$5^2+2\times5^3$

따라서 구하는 확률은

$\frac{5^2+2\times5^3}{5^4}=\frac{11}{25}$

답 ③

04

0, 1, 2, 3, 4를 일렬로 나열하여 만든 다섯 자리의 자연수의 개수는 0, 1, 2, 3, 4를 일렬로 나열하는 경우의 수에서 1, 2, 3, 4를 일렬로 나열하는 경우의 수를 뺀 것과 같으므로

$5!-4!=120-24=96$

0, 1, 2, 3, 4를 일렬로 나열하여 만들 수 있는 다섯 자리의 자연수가 홀수이려면 일의 자리의 수가 1 또는 3이어야 한다.

(i) 일의 자리의 수가 1인 경우

0, 2, 3, 4를 일렬로 나열한 경우의 수에서 2, 3, 4를 일렬로 나열한 경우의 수를 뺀 것과 같으므로

$4!-3!=24-6=18$

(ii) 일의 자리의 수가 3인 경우

0, 1, 2, 4를 일렬로 나열한 경우의 수에서 1, 2, 4를 일렬로 나열한 경우의 수를 뺀 것과 같으므로

$4!-3!=24-6=18$

(i), (ii)에서 조건을 만족시키는 경우의 수는 합의 법칙에 의하여

$18+18=36$

따라서 구하는 확률은

$\frac{36}{96}=\frac{3}{8}$

답 ①

05

주머니에서 4개의 공을 동시에 꺼내는 경우의 수는

${}_{9}C_{4}=\frac{9\times8\times7\times6}{4\times3\times2\times1}=126$

꺼낸 4개의 공에 적힌 수 중에서 가장 작은 수가 3의 배수이려면 가장 작은 수가 3 또는 6이어야 한다.

(i) 가장 작은 수가 3인 경우

3이 적혀 있는 공을 반드시 꺼내야 하므로 구하는 경우의 수는 4부터 10까지의 자연수가 하나씩 적혀 있는 7개의 공 중에서 3개의 공을 동시에 꺼내는 경우의 수와 같다.

${}_{7}C_{3}=\frac{7\times6\times5}{3\times2\times1}=35$

(ii) 가장 작은 수가 6인 경우

6이 적혀 있는 공을 반드시 꺼내야 하므로 구하는 경우의 수는 7부터 10까지의 자연수가 하나씩 적혀 있는 4개의 공 중에서 3개의 공을 동시에 꺼내는 경우의 수와 같다.

${}_{4}C_{3}={}_{4}C_{1}=4$

(i), (ii)에서 조건을 만족시키는 경우의 수는 합의 법칙에 의하여

$35+4=39$

따라서 구하는 확률은

$\frac{39}{126}=\frac{13}{42}$

답 ①

06

주머니에서 4개의 공을 동시에 꺼내는 경우의 수는

${}_{9}C_{4}=\frac{9\times8\times7\times6}{4\times3\times2\times1}=126$

빨간 공 2개, 노란 공 1개, 파란 공 1개를 꺼내는 경우의 수는

${}_{2}C_{2}\times{}_{3}C_{1}\times{}_{4}C_{1}=1\times3\times4=12$

빨간 공 1개, 노란 공 2개, 파란 공 1개를 꺼내는 경우의 수는

${}_{2}C_{1}\times{}_{3}C_{2}\times{}_{4}C_{1}={}_{2}C_{1}\times{}_{3}C_{1}\times{}_{4}C_{1}=2\times3\times4=24$

빨간 공 1개, 노란 공 1개, 파란 공 2개를 꺼내는 경우의 수는

${}_{2}C_{1}\times{}_{3}C_{1}\times{}_{4}C_{2}=2\times3\times\frac{4\times3}{2\times1}=36$

조건을 만족시키는 경우의 수는 합의 법칙에 의하여

$12+24+36=72$

따라서 구하는 확률은

$\frac{72}{126}=\frac{4}{7}$

답 ②

07

1학년 학생 3명과 2학년 학생 3명이 원 모양의 탁자에 둘러앉는 경우의 수는

$(6-1)!=5!=120$

같은 학년끼리는 이웃하지 않도록 앉으려면 먼저 1학년 학생이 앉는 자리를 정하고 그 사이사이에 2학년 학생이 앉으면 된다.

1학년 학생 3명의 자리를 정하는 경우의 수는

$(3-1)!=2!=2$

이때 1학년 학생 사이사이에 2학년 학생 3명의 자리를 정하는 경우의 수는

$3!=6$

조건을 만족시키는 경우의 수는 곱의 법칙에 의하여

$2\times6=12$

따라서 구하는 확률은

$\frac{12}{120}=\frac{1}{10}$

답 ④

08

$1\le a\le b\le c\le d\le6$을 만족시키는 자연수 a, b, c, d의 모든 순서쌍 (a, b, c, d)의 개수는 1 이상 6 이하의 6개의 자연수에서 중복을 허락하여 4개를 택하는 경우의 수와 같으므로

${}_{6}H_{4}={}_{9}C_{4}=\frac{9\times8\times7\times6}{4\times3\times2\times1}=126$

$a+d=6$에서

$a=1$, $d=5$ 또는 $a=2$, $d=4$ 또는 $a=3$, $d=3$이다.

(i) $a=1$, $d=5$인 경우

조건을 만족시키는 자연수 a, b, c, d의 순서쌍 (a, b, c, d)의 개수는 $1\le b\le c\le 5$를 만족시키는 자연수 b, c의 모든 순서쌍 (b, c)의 개수와 같고 이는 1 이상 5 이하의 5개의 자연수에서 중복을 허락하여 2개를 택하는 경우의 수와 같으므로

${}_5H_2={}_6C_2=\frac{6\times5}{2\times1}=15$

(ii) $a=2$, $d=4$인 경우

조건을 만족시키는 자연수 a, b, c, d의 순서쌍 (a, b, c, d)의 개수는 $2\le b\le c\le 4$를 만족시키는 자연수 b, c의 모든 순서쌍 (b, c)의 개수와 같고 이는 2 이상 4 이하의 3개의 자연수에서 중복을 허락하여 2개를 택하는 경우의 수와 같으므로

${}_3H_2={}_4C_2=\frac{4\times3}{2\times1}=6$

(iii) $a=3$, $d=3$인 경우

조건을 만족시키는 자연수 a, b, c, d의 순서쌍 (a, b, c, d)의 개수는 $3\le b\le c\le 3$을 만족시키는 자연수 b, c의 모든 순서쌍 (b, c)의 개수와 같고 이는 $b=c=3$인 경우뿐이므로 경우의 수는 1

(i), (ii), (iii)에서 조건을 만족시키는 경우의 수는 합의 법칙에 의하여

$15+6+1=22$

따라서 구하는 확률은

$\frac{22}{126}=\frac{11}{63}$

답 ①

09

집합 X에서 X로의 모든 함수 f의 개수는 0, 1, 2, 3 중에서 중복을 허락하여 4개를 택하여 일렬로 나열하는 경우의 수와 같으므로

${}_4\Pi_4=4^4=256$

$f(1)$, $f(2)$, $f(3)$ 중에서 0이 아닌 것이 2개 이상이면 조건 (가)를 만족시킬 수 없으므로 $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$ 중에서 0인 것의 개수는 2 이상이다.

(i) $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$ 중에서 0인 것의 개수가 2일 때

$f(1)$, $f(2)$, $f(3)$ 중에서 0인 것 두 개를 택하는 경우의 수는

${}_3C_2=3$

위의 각각의 경우에 대하여 $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$ 중 나머지 하나는 0이 아니어야 한다. 예를 들어 $f(1)=f(2)=0$이면 $f(3)$은 1, 2, 3의 값 중에서 하나를 가질 수 있고, 각각의 경우에 대하여 $f(0)$은 0, 1, 2, 3의 값 중에서 하나를 가질 수 있으므로 $f(3)$, $f(0)$의 값을 정하는 경우의 수는

$3\times4=12$

구하는 함수 f의 개수는

$3\times12=36$

(ii) $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$ 중에서 0인 것의 개수가 3일 때

$f(1)=f(2)=f(3)=0$이므로 조건 (나)를 만족시키려면 $f(0)$의 값은 1, 2, 3 중에서 하나이어야 한다.

구하는 함수 f의 개수는 ${}_3C_1=3$

(i), (ii)에서 조건을 만족시키는 경우의 수는 합의 법칙에 의하여

$36+3=39$

따라서 구하는 확률은

$\frac{39}{256}$

답 ④

10

주머니 A와 B에서 각각 2개의 공을 동시에 꺼내는 경우의 수는

${}_5C_2\times{}_4C_2=\frac{5\times4}{2\times1}\times\frac{4\times3}{2\times1}=60$

(i) 주머니 A에서 1, 3이 적혀 있는 공을 꺼내고 주머니 B에서 2가 적혀 있는 공을 2개 꺼내는 경우

주머니 B에서 2가 적혀 있는 공을 2개 꺼내는 경우의 수는

$1\times1=1$

주머니 B에서 흰 공과 검은 공을 꺼내게 되므로 주머니 A에서 꺼낸 공의 색에 관계없이 조건 (나)를 항상 만족시킨다.

주머니 A에는 1이 적혀 있는 공이 2개, 3이 적혀 있는 공이 1개 들어 있으므로 주머니 A에서 1, 3이 적혀 있는 공을 꺼내는 경우의 수는

${}_2C_1\times1=2$

이때의 경우의 수는

$1\times2=2$

(ii) 주머니 A에서 2가 적혀 있는 공을 2개 꺼내고 주머니 B에서 2가 적혀 있는 공을 2개 꺼내는 경우

주머니 A에서 2가 적혀 있는 공을 2개 꺼내는 경우의 수는

$1\times1=1$

주머니 B에서 2가 적혀 있는 공을 2개 꺼내는 경우의 수는

$1\times1=1$

이때의 경우의 수는

$1\times1=1$

이고 이 경우는 조건 (나)를 만족시킨다.

(iii) 주머니 A에서 2, 3이 적혀 있는 공을 꺼내고 주머니 B에서 1, 2가 적혀 있는 공을 꺼내는 경우

주머니 A에서 3이 적혀 있는 공을 꺼내야 하고 이 공은 흰 공이다. 주머니 A에는 2가 적혀 있는 흰 공과 검은 공이 있고, 주머니 B에는 1이 적혀 있는 흰 공과 검은 공, 2가 적혀 있는 흰 공과 검은 공이 있다. 따라서 조건 (나)를 만족시키려면 적어도 한 개는 검은 공을 꺼내야 하므로 그 경우의 수는

$2\times2\times2-1=7$

(i), (ii), (iii)에서 조건을 만족시키는 경우의 수는 합의 법칙에 의하여

$2+1+7=10$

따라서 구하는 확률은

$\frac{10}{60}=\frac{1}{6}$

답 ③

필수 유형 ❸

a, b의 모든 순서쌍 (a, b)의 개수는 $6\times6=36$이다.

(i) $|a-3|+|b-3|=2$인 사건을 A라 할 때, 사건 A가 일어나는 경우의 수는

$|a-3|=0$, $|b-3|=2$일 때, $(3, 1)$, $(3, 5)$

$|a-3|=1$, $|b-3|=1$일 때, $(2, 2)$, $(2, 4)$, $(4, 2)$, $(4, 4)$

$|a-3|=2$, $|b-3|=0$일 때, $(1, 3)$, $(5, 3)$

에서 $2+4+2=8$이므로

$\mathrm{P}(A)=\frac{8}{36}=\frac{2}{9}$

(ii) $a=b$인 사건을 B라 할 때, 사건 B가 일어나는 경우의 수는

$(1, 1)$, $(2, 2)$, $(3, 3)$, $(4, 4)$, $(5, 5)$, $(6, 6)$

에서 6이므로

$\mathrm{P}(B)=\frac{6}{36}=\frac{1}{6}$

(iii) 사건 $A\cap B$가 일어나는 경우의 수는

$(2, 2)$, $(4, 4)$에서 2이므로

$\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{2}{36}=\frac{1}{18}$

(i), (ii), (iii)에서 구하는 확률은 확률의 덧셈정리에 의하여

$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)$

$=\frac{2}{9}+\frac{1}{6}-\frac{1}{18}=\frac{1}{3}$

답 ②

11

확률의 덧셈정리에 의하여

$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)$

이므로

$\mathrm{P}(A\cup B)+\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)$

즉, $\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)=\frac{2}{3}$ ······ ㉠

$\mathrm{P}(A)=2\mathrm{P}(B)$를 ㉠에 대입하면

$3\mathrm{P}(B)=\frac{2}{3}$이므로 $\mathrm{P}(B)=\frac{2}{9}$

따라서 $\mathrm{P}(A)=2\mathrm{P}(B)=2\times\frac{2}{9}=\frac{4}{9}$

답 ①

12

한 개의 주사위를 두 번 던져서 나오는 눈의 수를 차례로 a, b라 하자.

모든 순서쌍 (a, b)의 개수는

$6\times6=36$

(i) $ab\ge20$인 경우

순서쌍 (a, b)는

$(4, 5)$, $(4, 6)$, $(5, 4)$, $(5, 5)$, $(5, 6)$, $(6, 4)$, $(6, 5)$, $(6, 6)$

으로 그 개수는 8이다. 즉, 이때의 확률은

$\frac{8}{36}=\frac{2}{9}$

(ii) ab가 홀수인 경우

a와 b가 모두 홀수이어야 하므로 순서쌍 (a, b)의 개수는

$3\times3=9$

이다. 즉, 이때의 확률은

$\frac{9}{36}=\frac{1}{4}$

(iii) $ab\ge20$이고 ab가 홀수인 경우

순서쌍 (a, b)는 $(5, 5)$로 그 개수는 1이다. 즉, 이때의 확률은

$\frac{1}{36}$

(i), (ii), (iii)에서 구하는 확률은 확률의 덧셈정리에 의하여

$\frac{2}{9}+\frac{1}{4}-\frac{1}{36}=\frac{16}{36}=\frac{4}{9}$

답 ④

13

방정식 $a+b+c+d=5$를 만족시키는 음이 아닌 정수 a, b, c, d의 모든 순서쌍 (a, b, c, d)의 개수는

${}_4\mathrm{H}_5={}_8\mathrm{C}_5={}_8\mathrm{C}_3=\frac{8\times7\times6}{3\times2\times1}=56$

$ab=0$에서 $a=0$ 또는 $b=0$이다.

(i) $a=0$인 경우

$a=0$일 때 방정식 $a+b+c+d=5$를 만족시키는 음이 아닌 정수 a, b, c, d의 모든 순서쌍 (a, b, c, d)의 개수는 방정식 $b+c+d=5$를 만족시키는 음이 아닌 정수 b, c, d의 모든 순서쌍 (b, c, d)의 개수와 같으므로

${}_3\mathrm{H}_5={}_7\mathrm{C}_5={}_7\mathrm{C}_2=\frac{7\times6}{2\times1}=21$

즉, 이때의 확률은 $\frac{21}{56}=\frac{3}{8}$

(ii) $b=0$인 경우

(i)과 마찬가지로 이때의 확률은 $\frac{3}{8}$

(iii) $a=b=0$인 경우

$a=b=0$일 때 방정식 $a+b+c+d=5$를 만족시키는 음이 아닌 정수 a, b, c, d의 모든 순서쌍 (a, b, c, d)의 개수는 방정식 $c+d=5$를 만족시키는 음이 아닌 정수 c, d의 모든 순서쌍 (c, d)의 개수와 같으므로

${}_2\mathrm{H}_5={}_6\mathrm{C}_5={}_6\mathrm{C}_1=6$

즉, 이때의 확률은 $\frac{6}{56}=\frac{3}{28}$

(i), (ii), (iii)에서 구하는 확률은 확률의 덧셈정리에 의하여

$\frac{3}{8}+\frac{3}{8}-\frac{3}{28}=\frac{9}{14}$

답 ③

필수 유형 ④

꺼낸 카드에 적혀 있는 세 자연수 중에서 가장 작은 수가 4 이하이거나 7 이상인 사건을 A라 하면 A의 여사건 A^C은 꺼낸 카드에 적혀 있는 세 자연수 중에서 가장 작은 수가 4보다 크고 7보다 작은 경우이다.

즉, A^C은 카드에 적혀 있는 세 자연수 중에서 가장 작은 수가 5 또는 6인 사건이다. 가장 작은 수가 5인 경우 6 이상 10 이하의 자연수 중에서 두 수를 택하면 되고, 가장 작은 수가 6인 경우 7 이상 10 이하의 자연수 중에서 두 수를 택하면 되므로

$\mathrm{P}(A^C)=\frac{{}_5\mathrm{C}_2+{}_4\mathrm{C}_2}{{}_{10}\mathrm{C}_3}=\frac{10+6}{120}=\frac{2}{15}$

따라서 구하는 확률은

$\mathrm{P}(A)=1-\mathrm{P}(A^C)=1-\frac{2}{15}=\frac{13}{15}$

답 ③

14

꺼낸 카드에 적혀 있는 세 자연수의 곱이 3의 배수인 사건을 A라 하면 A의 여사건 A^C은 세 자연수의 곱이 3의 배수가 아닌 사건이다.
주머니에서 카드 3장을 동시에 꺼내는 경우의 수는
$_9C_3=\frac{9\times8\times7}{3\times2\times1}=84$
꺼낸 3장의 카드에 적힌 수 중 적어도 하나가 3의 배수이면 곱이 3의 배수이므로 세 자연수의 곱이 3의 배수가 아니려면 3장의 카드에 적힌 수가 모두 3의 배수가 아니어야 하고, 이 경우의 수는
$_6C_3=\frac{6\times5\times4}{3\times2\times1}=20$
이므로
$\mathrm{P}(A^C)=\frac{20}{84}=\frac{5}{21}$
따라서 구하는 확률은
$\mathrm{P}(A)=1-\mathrm{P}(A^C)$
$=1-\frac{5}{21}=\frac{16}{21}$

답 ②

15

6명의 학생이 6개의 의자에 앉는 모든 경우의 수는
$6!=720$
A, B, C를 포함한 6명의 학생이 일렬로 나열된 6개의 의자에 앉을 때, A, B, C 중 적어도 한 명이 양 끝의 의자에 앉는 사건을 X라 하면 X의 여사건 X^C은 A, B, C 중 어느 학생도 양 끝의 의자에 앉지 않는 사건이다.
A, B, C를 제외한 나머지 3명의 학생 중 2명의 학생이 양 끝의 의자에 앉는 경우의 수는 $_3P_2=3\times2=6$
위의 각각의 경우에 대하여 나머지 4명의 학생이 4개의 의자에 앉는 경우의 수는 $4!=24$
이때의 경우의 수는 곱의 법칙에 의하여 $6\times24=144$이므로
$\mathrm{P}(X^C)=\frac{144}{720}=\frac{1}{5}$
따라서 구하는 확률은
$\mathrm{P}(X)=1-\mathrm{P}(X^C)$
$=1-\frac{1}{5}=\frac{4}{5}$

답 ④

16

집합 $X=\{1, 2, 3, 4\}$에서 집합 $Y=\{1, 2, 3\}$으로의 모든 함수 f의 개수는
$_3\Pi_4=3^4=81$
임의로 선택한 함수 f가 $f(1)+f(2)+f(3)>f(4)+1$인 사건을 A라 하면 A의 여사건 A^C은 임의로 선택한 함수 f가
$f(1)+f(2)+f(3)\le f(4)+1$인 사건이다.
사건 A^C은 다음 경우로 나누어 생각할 수 있다.
(i) $f(4)=1$인 경우
$f(1)+f(2)+f(3)\le f(4)+1$에서
$f(1)+f(2)+f(3)\le 2$ ...... ㉠
$f(1)$, $f(2)$, $f(3)$은 모두 1 이상의 자연수이므로 ㉠을 만족시키는 함수 f는 존재하지 않는다.
(ii) $f(4)=2$인 경우
$f(1)+f(2)+f(3)\le f(4)+1$에서
$f(1)+f(2)+f(3)\le 3$ ...... ㉡
$f(1)$, $f(2)$, $f(3)$은 모두 1 이상의 자연수이므로 ㉡을 만족시키려면 $f(1)=f(2)=f(3)=1$이다.
즉, 함수 f의 개수는 1이다.
(iii) $f(4)=3$인 경우
$f(1)+f(2)+f(3)\le f(4)+1$에서
$f(1)+f(2)+f(3)\le 4$ ...... ㉢
$f(1)$, $f(2)$, $f(3)$은 모두 1 이상 3 이하의 자연수이므로 ㉢을 만족시키려면 $f(1)=f(2)=f(3)=1$이거나 $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$ 중 두 개는 1, 나머지 한 개는 2이어야 한다.
$f(1)=f(2)=f(3)=1$인 함수 f의 개수는 1,
$f(1)$, $f(2)$, $f(3)$ 중 두 개는 1, 나머지 한 개는 2인 함수 f의 개수는 $_3C_2=3$이므로
구하는 함수 f의 개수는 $1+3=4$
(i), (ii), (iii)에서
$n(A^C)=0+1+4=5$이므로 $\mathrm{P}(A^C)=\frac{5}{81}$
따라서 구하는 확률은
$\mathrm{P}(A)=1-\mathrm{P}(A^C)$
$=1-\frac{5}{81}=\frac{76}{81}$

답 ③

필수 유형 ❺

한 개의 주사위를 두 번 던질 때, 6의 눈이 한 번도 나오지 않는 사건을 A, 두 눈의 수의 합이 4의 배수인 사건을 B라 하면 구하는 확률은 $\mathrm{P}(B|A)$이다.
6의 눈이 나오지 않으면 1부터 5까지의 눈만 나오는 것이므로
$\mathrm{P}(A)=\frac{5^2}{6^2}=\frac{25}{36}$
6의 눈이 나오지 않으면서 두 눈의 수의 합이 4의 배수이려면 합이 4 또는 8이 되어야 한다.
(i) 합이 4인 경우
(1, 3), (2, 2), (3, 1)의 3가지
(ii) 합이 8인 경우
(3, 5), (4, 4), (5, 3)의 3가지
이므로 $\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{3+3}{6^2}=\frac{1}{6}$
따라서 구하는 확률은
$$\mathrm{P}(B|A)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}=\frac{\frac{1}{6}}{\frac{25}{36}}=\frac{6}{25}$$

답 ③

17

$\mathrm{P}(B|A)=\dfrac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}$에서

$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\times\mathrm{P}(B|A)$이므로

$\mathrm{P}(A\cap B)=\dfrac{1}{4}\times\dfrac{1}{3}=\dfrac{1}{12}$

한편,

$\mathrm{P}(A^C)=1-\mathrm{P}(A)$

$=1-\dfrac{1}{4}=\dfrac{3}{4}$

이고, 확률의 덧셈정리에 의하여

$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)$

$=\dfrac{1}{4}+\dfrac{2}{3}-\dfrac{1}{12}=\dfrac{5}{6}$

$\mathrm{P}(A^C\cap B^C)=\mathrm{P}((A\cup B)^C)$

$=1-\mathrm{P}(A\cup B)$

$=1-\dfrac{5}{6}=\dfrac{1}{6}$

이므로

$\mathrm{P}(B^C|A^C)=\dfrac{\mathrm{P}(A^C\cap B^C)}{\mathrm{P}(A^C)}$

$=\dfrac{\frac{1}{6}}{\frac{3}{4}}=\dfrac{2}{9}$

답 ②

18

임의로 선택한 1명이 개인컵을 이용한 고객인 사건을 X, B 매장 고객인 사건을 Y라 하면 구하는 확률은 $\mathrm{P}(Y|X)$이다.

주어진 표에서 개인컵을 이용한 고객은 70명이고 이 중 B 매장 고객은 50명이므로

$n(X)=70$, $n(X\cap Y)=50$

따라서 구하는 확률은

$\mathrm{P}(Y|X)=\dfrac{n(X\cap Y)}{n(X)}=\dfrac{50}{70}=\dfrac{5}{7}$

답 ⑤

19

$a>b>c$인 사건을 X, $100a+10b+c$가 5의 배수인 사건을 Y라 하면 구하는 확률은 $\mathrm{P}(Y|X)$이다.

$a>b>c$를 만족시키는 모든 순서쌍 (a, b, c)의 개수는 10개의 공 중에서 3개의 공을 택하는 경우의 수와 같으므로

${}_{10}\mathrm{C}_3=\dfrac{10\times9\times8}{3\times2\times1}=120$

즉, $n(X)=120$

한편, $100a+10b+c$가 5의 배수이려면 c가 0 또는 5이어야 한다.

(i) $c=0$인 경우

$a>b>0$을 만족시키는 모든 순서쌍 (a, b)의 개수는 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9가 하나씩 적혀 있는 9개의 공 중에서 2개의 공을 택하는 경우의 수와 같으므로

${}_9\mathrm{C}_2=\dfrac{9\times8}{2\times1}=36$

(ii) $c=5$인 경우

$a>b>5$를 만족시키는 모든 순서쌍 (a, b)의 개수는 6, 7, 8, 9가 하나씩 적혀 있는 4개의 공 중에서 2개의 공을 택하는 경우의 수와 같으므로

${}_4\mathrm{C}_2=\dfrac{4\times3}{2\times1}=6$

(i), (ii)에서 $n(X\cap Y)=36+6=42$

따라서 $\mathrm{P}(Y|X)=\dfrac{n(X\cap Y)}{n(X)}=\dfrac{42}{120}=\dfrac{7}{20}$

답 ②

필수 유형 ⑤

주머니 B에서 흰 공을 꺼낼 확률은 주머니 A에서 흰 공을 꺼내는 경우와 검은 공을 꺼내는 경우로 나누어 구할 수 있다.

(i) 주머니 A에서 흰 공을 꺼내는 경우

주머니 B에는 흰 공 3개와 검은 공 3개가 들어 있으므로 주머니 B에서 꺼낸 공이 흰 공일 확률은

$\dfrac{2}{5}\times\dfrac{3}{6}=\dfrac{1}{5}$

(ii) 주머니 A에서 검은 공을 꺼내는 경우

주머니 B에는 흰 공 1개와 검은 공 5개가 들어 있으므로 주머니 B에서 꺼낸 공이 흰 공일 확률은

$\dfrac{3}{5}\times\dfrac{1}{6}=\dfrac{1}{10}$

(i), (ii)에서 구하는 확률은

$\dfrac{1}{5}+\dfrac{1}{10}=\dfrac{3}{10}$

답 ⑤

20

한 개의 주사위를 한 번 던져서 나온 눈의 수가 3의 배수인 사건을 A, 주머니에서 3개의 공을 동시에 꺼낼 때 흰 공 2개와 검은 공 1개를 꺼내는 사건을 B, 주머니에서 2개의 공을 동시에 꺼낼 때 흰 공 2개를 꺼내는 사건을 C라 하면 구하는 확률은 $\mathrm{P}(A\cap B)+\mathrm{P}(A^C\cap C)$이다.

$\mathrm{P}(A)=\dfrac{2}{6}=\dfrac{1}{3}$이므로

$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B|A)$

$=\dfrac{1}{3}\times\dfrac{{}_2\mathrm{C}_2\times{}_5\mathrm{C}_1}{{}_7\mathrm{C}_3}$

$=\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1\times5}{\frac{7\times6\times5}{3\times2\times1}}$

$=\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{7}=\dfrac{1}{21}$

$\mathrm{P}(A^C)=1-\mathrm{P}(A)=1-\dfrac{1}{3}=\dfrac{2}{3}$이므로

$\mathrm{P}(A^C\cap C)=\mathrm{P}(A^C)\mathrm{P}(C|A^C)$

$=\dfrac{2}{3}\times\dfrac{{}_2\mathrm{C}_2}{{}_7\mathrm{C}_2}$

$=\frac{2}{3}\times\frac{1}{\frac{7\times6}{2\times1}}$

$=\frac{2}{3}\times\frac{1}{21}=\frac{2}{63}$

따라서 구하는 확률은

$P(A\cap B)+P(A^C\cap C)=\frac{1}{21}+\frac{2}{63}=\frac{5}{63}$

답 ②

21

첫 번째 꺼낸 2개의 공에 적힌 두 수의 합이 4이려면 1, 3 또는 2, 2가 적힌 공을 꺼내야 한다. 또한 두 번째 꺼낸 공에 적힌 수가 홀수이려면 1 또는 3이 적힌 공을 꺼내야 하므로 다음과 같이 두 경우로 나눌 수 있다.

(i) 첫 번째에 1, 3이 적힌 공 2개를 꺼내고 두 번째에 홀수가 적힌 공을 꺼내는 경우

첫 번째에 1, 3이 적힌 공 2개를 꺼내면 주머니에는 1, 1, 2, 2가 적힌 공이 있으므로 1 또는 3이 적힌 공 1개를 꺼낼 확률은

$\frac{{}_3C_1\times{}_1C_1}{{}_6C_2}\times\frac{{}_2C_1}{{}_4C_1}=\frac{3\times1}{15}\times\frac{2}{4}=\frac{1}{10}$

(ii) 첫 번째에 2가 적힌 공 2개를 꺼내고 두 번째에 홀수가 적힌 공을 꺼내는 경우

첫 번째에 2가 적힌 공 2개를 꺼내면 주머니에는 1, 1, 1, 3이 적힌 공이 있으므로 1 또는 3이 적힌 공 1개를 꺼낼 확률은

$\frac{{}_2C_2}{{}_6C_2}\times\frac{{}_4C_1}{{}_4C_1}=\frac{1}{15}\times1=\frac{1}{15}$

(i), (ii)에서 구하는 확률은

$\frac{1}{10}+\frac{1}{15}=\frac{3+2}{30}=\frac{1}{6}$

답 ②

22

세 개의 동전을 동시에 던져서 모두 같은 면이 나오는 사건을 A라 하면

$P(A)=\frac{2}{8}=\frac{1}{4}$, $P(A^C)=1-P(A)=\frac{3}{4}$

점 P의 좌표가 1이려면 사건 A가 A의 여사건 A^C보다 1번 더 많이 나와야 하므로 A가 3번, A^C이 2번 나와야 한다.

또한 5번째 시행 후 처음으로 점 P의 좌표가 1이려면 4번째 시행 후에 점 P의 좌표는 0이고 3번째 시행 후에 점 P의 좌표는 -1이어야 한다. 즉, 3번째 시행까지 A가 1번, A^C이 2번 나오고, 4번째, 5번째 시행에서 모두 A가 나와야 한다. 이때 첫 번째 시행에서 A가 나오면 점 P의 좌표가 1이 되므로 첫 번째 시행에서 A^C이 나와야 한다.

5번째 시행 후 점 P의 좌표가 처음으로 1인 경우는

A^CAA^CAA, A^CA^CAAA

이므로 구하는 확률은

$\left(\frac{3}{4}\times\frac{1}{4}\times\frac{3}{4}\times\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{3}{4}\times\frac{3}{4}\times\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}\right)$

$=2\times\left(\frac{1}{4}\right)^3\times\left(\frac{3}{4}\right)^2=\frac{9}{512}$

따라서 $p=512$, $q=9$이므로 $p+q=521$

답 521

필수 유형 7

$P(A)=\frac{1}{6}$에서

$P(A^C)=1-P(A)=1-\frac{1}{6}=\frac{5}{6}$

두 사건 A와 B가 서로 독립이므로 두 사건 A와 B^C이 서로 독립이고, 두 사건 A^C과 B도 서로 독립이다.

따라서

$$\begin{aligned}P(A\cap B^C)+P(A^C\cap B)&=P(A)P(B^C)+P(A^C)P(B)\\&=P(A)\{1-P(B)\}+P(A^C)P(B)\\&=\frac{1}{6}\{1-P(B)\}+\frac{5}{6}P(B)\\&=\frac{1}{6}+\frac{2}{3}P(B)=\frac{1}{3}\end{aligned}$$

이므로 $\frac{2}{3}P(B)=\frac{1}{6}$, $P(B)=\frac{1}{4}$

답 ②

23

두 사건 A와 B가 서로 독립이므로

$P(A|B)=P(A|B^C)=P(A)$

$P(A|B)+P(A|B^C)=\frac{2}{5}$에서

$P(A)+P(A)=2P(A)=\frac{2}{5}$

$P(A)=\frac{1}{5}$

$$\begin{aligned}P(A\cup B)&=P(A)+P(B)-P(A\cap B)\\&=P(A)+P(B)-P(A)P(B)\\&=\frac{1}{5}+P(B)-\frac{1}{5}P(B)=\frac{4}{5}\end{aligned}$$

에서

$\frac{4}{5}P(B)=\frac{3}{5}$, $P(B)=\frac{3}{4}$

따라서 $P(B^C)=1-P(B)=1-\frac{3}{4}=\frac{1}{4}$

답 ①

24

이 학교 학생 중에서 임의로 선택한 1명이 여학생인 사건을 F, 디자인 A를 선택한 학생인 사건을 A라 하면

$P(F)=\frac{80}{200}=\frac{2}{5}$, $P(A)=\frac{160}{200}=\frac{4}{5}$

두 사건 F와 A가 서로 독립이므로

$P(F\cap A)=P(F)P(A)$에서

$P(F\cap A)=\frac{2}{5}\times\frac{4}{5}=\frac{8}{25}$

$P(A)=P(F\cap A)+P(F^C\cap A)$이므로

$P(F^C\cap A)=\frac{4}{5}-\frac{8}{25}=\frac{12}{25}$

따라서 이 학교 학생 중에서 임의로 선택한 1명이 남학생일 때, 이 학생이 디자인 A를 선택한 학생일 확률은

$$\mathrm{P}(A|F^C)=\frac{\mathrm{P}(F^C\cap A)}{\mathrm{P}(F^C)}=\frac{\mathrm{P}(F^C\cap A)}{1-\mathrm{P}(F)}$$
$$=\frac{\frac{12}{25}}{1-\frac{2}{5}}=\frac{12}{15}=\frac{4}{5}$$

답 ⑤

다른 풀이

이 학교 학생 중에서 임의로 선택한 1명이 여학생인 사건을 F, 디자인 A를 선택한 학생인 사건을 A라 하면 구하는 확률은 $\mathrm{P}(A|F^C)$이다.
두 사건 A와 F가 서로 독립이므로 두 사건 A와 F^C도 서로 독립이다.
따라서
$$\mathrm{P}(A|F^C)=\mathrm{P}(A)=\frac{160}{200}=\frac{4}{5}$$

25

두 주머니 A, B에서 꺼낸 공이 흰 공 1개, 검은 공 3개인 경우는 다음과 같다.

(i) 주머니 A에서 흰 공 1개, 검은 공 1개를 꺼내고, 주머니 B에서 검은 공 2개를 꺼내는 경우
주머니 A에서 흰 공 1개, 검은 공 1개를 꺼내는 사건을 A, 주머니 B에서 검은 공 2개를 꺼내는 사건을 B라 하면 두 사건 A와 B는 서로 독립이므로
$$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$$
$$=\frac{{}_3\mathrm{C}_1\times{}_2\mathrm{C}_1}{{}_5\mathrm{C}_2}\times\frac{{}_3\mathrm{C}_2}{{}_4\mathrm{C}_2}$$
$$=\frac{6}{10}\times\frac{3}{6}=\frac{3}{10}$$

(ii) 주머니 A에서 검은 공 2개를 꺼내고, 주머니 B에서 흰 공 1개, 검은 공 1개를 꺼내는 경우
주머니 A에서 검은 공 2개를 꺼내는 사건을 C, 주머니 B에서 흰 공 1개, 검은 공 1개를 꺼내는 사건을 D라 하면 두 사건 C와 D는 서로 독립이므로
$$\mathrm{P}(C\cap D)=\mathrm{P}(C)\mathrm{P}(D)$$
$$=\frac{{}_2\mathrm{C}_2}{{}_5\mathrm{C}_2}\times\frac{{}_1\mathrm{C}_1\times{}_3\mathrm{C}_1}{{}_4\mathrm{C}_2}$$
$$=\frac{1}{10}\times\frac{3}{6}=\frac{1}{20}$$

(i), (ii)에서 구하는 확률은
$$\frac{3}{10}+\frac{1}{20}=\frac{6+1}{20}=\frac{7}{20}$$

답 ①

26

사건 A는 2, 4, 6, 8, 10이 적힌 공이 나오는 경우이므로
$$\mathrm{P}(A)=\frac{5}{10}=\frac{1}{2}$$
두 사건 A와 B가 서로 독립이려면 $\mathrm{P}(B)>0$이고
$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$, 즉
$$\mathrm{P}(A)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(B)}=\frac{n(A\cap B)}{n(B)}=\frac{1}{2}$$
을 만족시키면 된다.

$n(B)=2n(A\cap B)$에서 $n(B)$는 짝수이고, 10 이하의 자연수 m의 약수의 개수는 1, 2, 3, 4 중의 하나이므로 다음의 두 경우로 나누어 생각할 수 있다.

(i) $n(B)=2$인 경우
10 이하의 자연수 m에 대하여 m의 약수의 개수가 2인 경우는 m이 2, 3, 5, 7일 때이다.
$m=2$이면 사건 $A\cap B$는 2가 적힌 공이 나오는 경우이므로
$n(A\cap B)=1$이 되어 조건을 만족시킨다.
$m=3$, 5, 7이면 $A\cap B=\varnothing$이므로 $n(A\cap B)=0$이 되어 조건을 만족시키지 못한다.

(ii) $n(B)=4$인 경우
10 이하의 자연수 m에 대하여 m의 약수의 개수가 4인 경우는 m이 6, 8, 10일 때이다.
$m=6$이면 사건 $A\cap B$는 2, 6이 적힌 공이 나오는 경우이므로
$n(A\cap B)=2$가 되어 조건을 만족시킨다.
$m=8$이면 사건 $A\cap B$는 2, 4, 8이 적힌 공이 나오는 경우이므로
$n(A\cap B)=3$이 되어 조건을 만족시키지 못한다.
$m=10$이면 사건 $A\cap B$는 2, 10이 적힌 공이 나오는 경우이므로
$n(A\cap B)=2$가 되어 조건을 만족시킨다.

(i), (ii)에서 구하는 m은 2, 6, 10으로 모든 m의 값의 합은
$2+6+10=18$

답 ④

27

한 개의 주사위를 한 번 던져서 나오는 눈의 수의 집합 S를
$S=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$으로 나타내어 보자.
$n(S)=6$이고 조건 (가)에서 $n(A)=4$, $n(B)=3$이므로
$$\mathrm{P}(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$$
$$\mathrm{P}(B)=\frac{n(B)}{n(S)}=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$$
조건 (나)에서 두 사건 A와 B가 서로 독립이므로
$$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$$
$$=\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}=\frac{2}{6}$$
$$=\frac{n(A\cap B)}{n(S)}$$
즉, $n(A\cap B)=2$이어야 한다.
사건 A를 정하는 경우의 수는 1, 2, 3, 4, 5, 6의 6개의 원소 중에서 서로 다른 4개의 원소를 택하는 조합의 수와 같으므로
$${}_6\mathrm{C}_4={}_6\mathrm{C}_2=\frac{6\times5}{2\times1}=15$$
이때 $n(A\cap B)=2$가 되기 위해서 사건 B는 사건 A의 원소 2개와 사건 A^C의 원소 1개를 원소로 가져야 한다. $n(A)=4$, $n(A^C)=2$이므로 사건 B를 정하는 경우의 수는
$${}_4\mathrm{C}_2\times{}_2\mathrm{C}_1=\frac{4\times3}{2\times1}\times2=12$$
따라서 구하는 두 사건 A, B의 모든 순서쌍 (A, B)의 개수는
$15\times12=180$

답 ④

필수 유형 ⑧

앞면을 H, 뒷면을 T로 나타내기로 하자.

(i) 앞면이 3번 나오는 경우

H 3개와 T 4개를 일렬로 나열하는 경우의 수는

$_7C_3=\frac{7\times6\times5}{3\times2\times1}=35$

H가 이웃하지 않는 경우의 수는

$_5C_3={}_5C_2=\frac{5\times4}{2\times1}=10$

즉, 조건 (나)를 만족시킬 확률은

$(35-10)\times\left(\frac{1}{2}\right)^7=25\times\left(\frac{1}{2}\right)^7$

(ii) 앞면이 4번 나오는 경우

H 4개와 T 3개를 일렬로 나열하는 경우의 수는

$_7C_4={}_7C_3=\frac{7\times6\times5}{3\times2\times1}=35$

H가 이웃하지 않는 경우의 수는 1

즉, 조건 (나)를 만족시킬 확률은

$(35-1)\times\left(\frac{1}{2}\right)^7=34\times\left(\frac{1}{2}\right)^7$

(iii) 앞면이 5번 이상 나오는 경우

조건 (나)를 항상 만족시키므로 이 경우의 확률은

$({}_7C_5+{}_7C_6+{}_7C_7)\times\left(\frac{1}{2}\right)^7=(21+7+1)\times\left(\frac{1}{2}\right)^7$

$=29\times\left(\frac{1}{2}\right)^7$

(i), (ii), (iii)에서 구하는 확률은

$(25+34+29)\times\left(\frac{1}{2}\right)^7=\frac{88}{128}=\frac{11}{16}$

답 ①

28

5번의 시행에서 1이 적힌 공이 나온 총 횟수를 a, 2가 적힌 공이 나온 총 횟수를 b라 하면 $a<b$인 경우의 모든 순서쌍 (a, b)는

$(0, 5)$, $(1, 4)$, $(2, 3)$이다.

한 번의 시행에서 1이 적힌 공이 나올 확률이 $\frac{2}{3}$이고 2가 적힌 공이 나올 확률이 $\frac{1}{3}$이므로

(i) $a=0$, $b=5$인 경우

이 확률은 $_5C_0\left(\frac{2}{3}\right)^0\left(\frac{1}{3}\right)^5=1\times\left(\frac{1}{3}\right)^5=\frac{1}{243}$

(ii) $a=1$, $b=4$인 경우

이 확률은 $_5C_1\left(\frac{2}{3}\right)^1\left(\frac{1}{3}\right)^4=5\times2\times\left(\frac{1}{3}\right)^5=\frac{10}{243}$

(iii) $a=2$, $b=3$인 경우

이 확률은 $_5C_2\left(\frac{2}{3}\right)^2\left(\frac{1}{3}\right)^3=10\times4\times\left(\frac{1}{3}\right)^5=\frac{40}{243}$

(i), (ii), (iii)에서 구하는 확률은

$\frac{1}{243}+\frac{10}{243}+\frac{40}{243}=\frac{51}{243}=\frac{17}{81}$

답 ③

29

한 개의 주사위를 4번 던져서 나온 눈의 수를 모두 곱한 수가 9의 배수가 되는 경우는 주사위를 던져서 나온 눈의 수 중 3의 배수가 2번 이상일 때이다. 한 개의 주사위를 던져서 나온 눈의 수가 3의 배수일 확률은

$\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$이므로 구하는 확률은

$_4C_2\left(\frac{1}{3}\right)^2\left(\frac{2}{3}\right)^2+{}_4C_3\left(\frac{1}{3}\right)^3\left(\frac{2}{3}\right)^1+{}_4C_4\left(\frac{1}{3}\right)^4\left(\frac{2}{3}\right)^0$

$=24\times\left(\frac{1}{3}\right)^4+8\times\left(\frac{1}{3}\right)^4+\left(\frac{1}{3}\right)^4$

$=(24+8+1)\times\left(\frac{1}{3}\right)^4$

$=\frac{33}{81}=\frac{11}{27}$

답 ③

다른 풀이

한 개의 주사위를 4번 던져서 나온 눈의 수를 모두 곱한 수가 9의 배수인 사건을 A라 하면 사건 A는 한 개의 주사위를 4번 던져서 나온 눈의 수 중 3의 배수가 2번 이상 나오는 사건이므로 A의 여사건 A^C은 3의 배수가 1번 이하로 나오는 경우이다.

$P(A)=1-P(A^C)$

$=1-\left\{{}_4C_0\left(\frac{1}{3}\right)^0\left(\frac{2}{3}\right)^4+{}_4C_1\left(\frac{1}{3}\right)^1\left(\frac{2}{3}\right)^3\right\}$

$=1-\left(\frac{16}{81}+\frac{32}{81}\right)$

$=\frac{33}{81}=\frac{11}{27}$

30

5개 반 중에서 같은 반 학생끼리 같은 종목을 택한 반이 2개 이상인 사건을 A라 하면 A의 여사건 A^C은 같은 반 학생끼리 같은 종목을 택한 반이 1개 이하인 사건이다.

같은 반 학생끼리 같은 종목을 택할 확률은 $1\times\frac{1}{3}=\frac{1}{3}$, 다른 종목을 택할 확률은 $1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$이므로 A의 여사건 A^C의 확률을 다음과 같이 구할 수 있다.

(i) 같은 반 학생끼리 같은 종목을 택한 반이 없는 경우

이 확률은 $_5C_0\left(\frac{1}{3}\right)^0\left(\frac{2}{3}\right)^5=\frac{32}{243}$

(ii) 같은 반 학생끼리 같은 종목을 택한 반이 1개인 경우

이 확률은 $_5C_1\left(\frac{1}{3}\right)^1\left(\frac{2}{3}\right)^4=\frac{5\times16}{243}=\frac{80}{243}$

(i), (ii)에서

$P(A^C)=\frac{32}{243}+\frac{80}{243}=\frac{112}{243}$

따라서 구하는 확률은

$P(A)=1-P(A^C)=1-\frac{112}{243}=\frac{131}{243}$

답 ②

31

$a\geq3$인 사건을 A라 하면 A는 한 개의 동전을 4번 던져서 앞면이 3번 이상 나온 경우이므로 이 확률은

$\mathrm{P}(A)={}_4\mathrm{C}_3\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)^1+{}_4\mathrm{C}_4\left(\frac{1}{2}\right)^4\left(\frac{1}{2}\right)^0$

$\quad\quad=(4+1)\times\left(\frac{1}{2}\right)^4=\frac{5}{2^4}$

$b>0$, 즉 $b=1, 2, 3, 4$인 사건을 B라 하면 B는 한 개의 주사위를 4번 던져서 5 이상의 눈의 수가 1번 이상 나오는 경우이므로 이 확률은 여사건의 확률에 의하여

$\mathrm{P}(B)=1-\mathrm{P}(B^C)$

$\quad\quad=1-{}_4\mathrm{C}_0\left(\frac{1}{3}\right)^0\left(\frac{2}{3}\right)^4$

$\quad\quad=1-\frac{16}{3^4}=\frac{65}{3^4}$

이때 두 사건 A와 B는 서로 독립이므로 구하는 확률은

$p=\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$

$\quad=\frac{5}{2^4}\times\frac{65}{3^4}=\frac{325}{6^4}$

따라서 $6^4p=6^4\times\frac{325}{6^4}=325$

답 325

32

2개의 주사위를 동시에 던져서 나온 눈의 수의 합이 7인 사건을 A, 주어진 시행에서 앞면이 나온 동전과 뒷면이 나온 동전의 개수가 서로 같은 사건을 B라 하자.

(i) 두 주사위의 눈의 수의 합이 7인 경우

두 주사위의 눈의 수가 각각 1, 6 또는 2, 5 또는 3, 4 또는 4, 3 또는 5, 2 또는 6, 1인 경우이므로

$\mathrm{P}(A)=\frac{6}{36}=\frac{1}{6}$

$\mathrm{P}(B|A)$는 6개의 동전 중 앞면, 뒷면이 나온 동전이 각각 3개일 확률이므로

$\mathrm{P}(B|A)={}_6\mathrm{C}_3\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)^3=20\times\frac{1}{64}=\frac{5}{16}$

$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B|A)$

$\quad\quad=\frac{1}{6}\times\frac{5}{16}=\frac{5}{96}$

(ii) 두 주사위의 눈의 수의 합이 7이 아닌 경우

$\mathrm{P}(A^C)=1-\mathrm{P}(A)=1-\frac{1}{6}=\frac{5}{6}$

$\mathrm{P}(B|A^C)$은 4개의 동전 중 앞면, 뒷면이 나온 동전이 각각 2개일 확률이므로

$\mathrm{P}(B|A^C)={}_4\mathrm{C}_2\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^2=6\times\frac{1}{16}=\frac{3}{8}$

$\mathrm{P}(A^C\cap B)=\mathrm{P}(A^C)\mathrm{P}(B|A^C)$

$\quad\quad=\frac{5}{6}\times\frac{3}{8}=\frac{5}{16}$

(i), (ii)에서 구하는 확률은

$\mathrm{P}(B)=\mathrm{P}(A\cap B)+\mathrm{P}(A^C\cap B)$

$\quad\quad=\frac{5}{96}+\frac{5}{16}=\frac{35}{96}$

답 ⑤

09 통계

정답				본문 100~111쪽
필수 유형 ❶ ④	01 29	02 ①	03 ②	
필수 유형 ❷ 78	04 ③	05 ④	06 ⑤	
	07 ①	08 ③		
필수 유형 ❸ 121	09 ③	10 ①	11 ④	
필수 유형 ❹ 47	12 ④	13 ①	14 29	
필수 유형 ❺ 31	15 ①	16 ③	17 ④	
필수 유형 ❻ ④	18 134	19 ②	20 ①	
	21 ②	22 ④		
필수 유형 ❼ ⑤	23 ①	24 217	25 ③	
필수 유형 ❽ ③	26 ③	27 ①	28 ②	
필수 유형 ❾ ②	29 ①	30 ④	31 4	
필수 유형 ❿ ⑤	32 ④	33 ③	34 58	
필수 유형 ⓫ 10	35 256	36 ③	37 36	

필수 유형 ❶

모든 확률의 합이 1이므로

$5b+2a+3a+b=5a+6b=1$ …… ㉠

$\mathrm{P}(X^2-3X<0)=\frac{7}{16}$에서

$\mathrm{P}(X(X-3)<0)=\mathrm{P}(0<X<3)$

$=\mathrm{P}(X=1)+\mathrm{P}(X=2)$

$=3a+b=\frac{7}{16}$ …… ㉡

㉠과 ㉡을 연립하여 풀면

$a=\frac{1}{8},\ b=\frac{1}{16}$

따라서 $a-b=\frac{1}{8}-\frac{1}{16}=\frac{1}{16}$

답 ④

01

모든 확률의 합이 1이므로

$\mathrm{P}(X=1)+\mathrm{P}(X=2)+\mathrm{P}(X=3)+\mathrm{P}(X=4)$

$=\frac{1^2}{k}+\frac{2^2}{k}+\frac{3^2}{k}+\frac{4^2}{k}=\frac{30}{k}=1$

그러므로 $k=30$

$\mathrm{P}\left(X\ge\frac{40}{k}\right)=\mathrm{P}\left(X\ge\frac{40}{30}\right)$

$=\mathrm{P}\left(X\ge\frac{4}{3}\right)$

$=1-\mathrm{P}\left(X<\frac{4}{3}\right)$

$=1-\mathrm{P}(X=1)$

$=1-\frac{1}{30}=\frac{29}{30}$

따라서 $k\times\mathrm{P}\left(X\ge\frac{40}{k}\right)=30\times\frac{29}{30}=29$

답 29

02

모든 확률의 합이 1이므로

$\frac{1}{1\times2}+\frac{1}{2\times3}+\cdots+\frac{1}{(n-1)n}+\frac{1}{12}=1$

$\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right)=\frac{11}{12}$

$1-\frac{1}{n}=\frac{n-1}{n}=\frac{11}{12}$

따라서 $n=12$이므로

$\mathrm{P}(2<X<n-3)=\mathrm{P}(2<X<9)$

$=\mathrm{P}(X=3)+\mathrm{P}(X=4)+\cdots+\mathrm{P}(X=8)$

$=\frac{1}{3\times4}+\frac{1}{4\times5}+\cdots+\frac{1}{8\times9}$

$=\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{5}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{8}-\frac{1}{9}\right)$

$=\frac{1}{3}-\frac{1}{9}=\frac{2}{9}$

답 ①

03

주머니에서 4개의 공을 꺼내는 경우의 수는

${}_9\mathrm{C}_4=\frac{9\times8\times7\times6}{4\times3\times2\times1}=126$

확률변수 X가 가질 수 있는 값은 0, 1, 2, 3, 4이므로

$\mathrm{P}(X<3)=1-\{\mathrm{P}(X=3)+\mathrm{P}(X=4)\}$

주머니에는 홀수가 적혀 있는 공이 5개, 짝수가 적혀 있는 공이 4개 들어 있으므로

$\mathrm{P}(X=3)=\frac{{}_5\mathrm{C}_3\times{}_4\mathrm{C}_1}{{}_9\mathrm{C}_4}=\frac{10\times4}{126}=\frac{20}{63}$

$\mathrm{P}(X=4)=\frac{{}_5\mathrm{C}_4}{{}_9\mathrm{C}_4}=\frac{5}{126}$

따라서 구하는 확률은

$\mathrm{P}(X<3)=1-\left(\frac{20}{63}+\frac{5}{126}\right)=\frac{81}{126}=\frac{9}{14}$

답 ②

필수 유형 ❷

확률변수 X의 확률분포가 $X=5$에 대하여 대칭이므로

$\mathrm{E}(X)=5$

$\mathrm{V}(X)=\mathrm{E}((X-5)^2)$

$=(-4)^2\times a+(-2)^2\times b+2^2\times b+4^2\times a$

$=32a+8b=\frac{31}{5}$

한편, 확률변수 Y의 확률분포가 $Y=5$에 대하여 대칭이므로

$\mathrm{E}(Y)=5$

$\mathrm{V}(Y)=\mathrm{E}((Y-5)^2)$

$=(-4)^2\times\left(a+\frac{1}{20}\right)+(-2)^2\times b+2^2\times b+4^2\times\left(a+\frac{1}{20}\right)$

$=32a+8b+\frac{8}{5}$

$=\frac{31}{5}+\frac{8}{5}=\frac{39}{5}$

따라서 $10\times V(Y)=10\times\frac{39}{5}=78$

답 78

다른 풀이

확률변수 X의 확률분포가 $X=5$에 대하여 대칭이므로

$E(X)=5$

$V(X)=\frac{31}{5}$에서

$V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2=\frac{31}{5}$이므로

$E(X^2)=\frac{31}{5}+5^2$

$E(X^2)=1^2\times a+3^2\times b+5^2\times c+7^2\times b+9^2\times a$

$=82a+58b+25c$

즉, $82a+58b+25c=\frac{31}{5}+25$ …… ㉠

한편, 확률변수 Y의 확률분포가 $Y=5$에 대하여 대칭이므로

$E(Y)=5$

$E(Y^2)=1^2\times\left(a+\frac{1}{20}\right)+3^2\times b+5^2\times\left(c-\frac{1}{10}\right)$

$+7^2\times b+9^2\times\left(a+\frac{1}{20}\right)$

$=82a+58b+25c+\frac{1}{20}-\frac{5}{2}+\frac{81}{20}$

$=82a+58b+25c+\frac{8}{5}$

㉠에서

$E(Y^2)=\left(\frac{31}{5}+25\right)+\frac{8}{5}=25+\frac{39}{5}$

따라서

$V(Y)=E(Y^2)-\{E(Y)\}^2$

$=\left(25+\frac{39}{5}\right)-5^2=\frac{39}{5}$

이므로 $10\times V(Y)=10\times\frac{39}{5}=78$

04

모든 확률의 합이 1이므로

$a+b+(2a+b)=1$

$3a+2b=1$ …… ㉠

$E(X)=\frac{15}{4}$이므로

$1\times a+3\times b+5\times(2a+b)=\frac{15}{4}$

$11a+8b=\frac{15}{4}$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=\frac{1}{4}$, $b=\frac{1}{8}$

따라서 $a-2b=\frac{1}{4}-2\times\frac{1}{8}=0$

답 ③

05

모든 확률의 합이 1이므로

$a+2a+(a+b)+(a-b)=1$

$5a=1$, $a=\frac{1}{5}$

$V(X)+\{E(X)\}^2=\frac{9}{10}$이므로

$V(X)+\{E(X)\}^2=E(X^2)-\{E(X)\}^2+\{E(X)\}^2$

$=E(X^2)=\frac{9}{10}$

에서

$E(X^2)=(-1)^2\times\frac{1}{5}+0^2\times\frac{2}{5}+1^2\times\left(\frac{1}{5}+b\right)+2^2\times\left(\frac{1}{5}-b\right)$

$=\frac{6}{5}-3b=\frac{9}{10}$

$3b=\frac{3}{10}$, $b=\frac{1}{10}$

따라서

$P(X<2)=1-P(X=2)$

$=1-(a-b)=1-\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{10}\right)=\frac{9}{10}$

답 ④

06

모든 확률의 합이 1이므로

$(1-a)+a^2+a^3+a^3=1$

$2a^3+a^2-a=0$, $a(2a-1)(a+1)=0$

$a>0$이므로 $a=\frac{1}{2}$

즉, 이산확률변수 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	1	2	4	8	합계
$P(X=x)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	1

$E(X)=1\times\frac{1}{2}+2\times\frac{1}{4}+4\times\frac{1}{8}+8\times\frac{1}{8}=\frac{5}{2}$

$E(X^2)=1^2\times\frac{1}{2}+2^2\times\frac{1}{4}+4^2\times\frac{1}{8}+8^2\times\frac{1}{8}=\frac{23}{2}$

따라서

$V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2=\frac{23}{2}-\left(\frac{5}{2}\right)^2=\frac{21}{4}$

답 ⑤

07

확률변수 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	1	2	4	합계
$P(X=x)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	1

$E(X)=1\times\frac{1}{3}+2\times\frac{1}{2}+4\times\frac{1}{6}=2$

$E(X^2)=1^2\times\frac{1}{3}+2^2\times\frac{1}{2}+4^2\times\frac{1}{6}=5$

$V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2=5-2^2=1$

따라서 $\sigma(X)=\sqrt{V(X)}=1$

답 ①

08

5개의 공이 들어 있는 주머니에서 동시에 2개의 공을 꺼낼 때 나오는 경우의 수는 ${}_5C_2=10$이고 확률변수 X가 가질 수 있는 값은 2, 3, 4, 5이다.

숫자 1, 2, 3이 적힌 흰 공을 각각 ①, ②, ③으로 나타내고, 숫자 1, 2가 적힌 검은 공을 각각 ❶, ❷로 나타내자.

(i) $X=2$는 ①, ❶을 꺼내는 경우이므로

$P(X=2)=\frac{1}{10}$

(ii) $X=3$은 ①, ② 또는 ①, ❷ 또는 ②, ❶ 또는 ❶, ❷를 꺼내는 경우이므로

$P(X=3)=\frac{4}{10}=\frac{2}{5}$

(iii) $X=4$는 ①, ③ 또는 ②, ❷ 또는 ③, ❶을 꺼내는 경우이므로

$P(X=4)=\frac{3}{10}$

(iv) $X=5$는 ②, ③ 또는 ③, ❷를 꺼내는 경우이므로

$P(X=5)=\frac{2}{10}=\frac{1}{5}$

(i)~(iv)에서 확률변수 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	2	3	4	5	합계
$P(X=x)$	$\frac{1}{10}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{5}$	1

따라서

$E(X)=2\times\frac{1}{10}+3\times\frac{2}{5}+4\times\frac{3}{10}+5\times\frac{1}{5}=\frac{18}{5}$

답 ③

다른 풀이

5개의 공이 들어 있는 주머니에서 동시에 2개의 공을 꺼낼 때 나오는 경우의 수는 ${}_5C_2=10$이고 확률변수 X가 가질 수 있는 값은 2, 3, 4, 5이다.

공에 적힌 수만을 고려하면 주머니에는 1이 적힌 공 2개, 2가 적힌 공 2개, 3이 적힌 공 1개가 들어 있으므로

$P(X=2)=\frac{{}_2C_2}{{}_5C_2}=\frac{1}{10}$

$P(X=3)=\frac{{}_2C_1\times{}_2C_1}{{}_5C_2}=\frac{2}{5}$

$P(X=4)=\frac{{}_2C_2+{}_2C_1\times{}_1C_1}{{}_5C_2}=\frac{3}{10}$

$P(X=5)=\frac{{}_2C_1\times{}_1C_1}{{}_5C_2}=\frac{1}{5}$

확률변수 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	2	3	4	5	합계
$P(X=x)$	$\frac{1}{10}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{5}$	1

따라서

$E(X)=2\times\frac{1}{10}+3\times\frac{2}{5}+4\times\frac{3}{10}+5\times\frac{1}{5}=\frac{18}{5}$

필수 유형 ❸

$E(X)=2$, $E(X^2)=5$에서

$V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2$

$=5-2^2=1$

$Y=10X+1$이므로

$E(Y)+V(Y)=E(10X+1)+V(10X+1)$

$=10E(X)+1+10^2V(X)$

$=10\times2+1+100\times1$

$=121$

답 121

09

$E(3X+1)=10$에서

$3E(X)+1=10$, $3E(X)=9$

$E(X)=3$

$E(X^2)=12$이므로

$V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2=12-3^2=3$

따라서

$V(-2X+1)=(-2)^2V(X)$

$=4\times3=12$

답 ③

10

주머니에는 6의 약수가 적힌 공 4개, 6의 약수가 아닌 수가 적힌 공 2개가 들어 있으므로 확률변수 X가 가질 수 있는 값은 1, 2, 3이다.

(i) $X=1$인 경우

6의 약수가 적힌 공 1개, 6의 약수가 아닌 수가 적힌 공 2개를 꺼내는 경우이므로

$P(X=1)=\frac{{}_4C_1\times{}_2C_2}{{}_6C_3}=\frac{4\times1}{20}=\frac{1}{5}$

(ii) $X=2$인 경우

6의 약수가 적힌 공 2개, 6의 약수가 아닌 수가 적힌 공 1개를 꺼내는 경우이므로

$P(X=2)=\frac{{}_4C_2\times{}_2C_1}{{}_6C_3}=\frac{6\times2}{20}=\frac{3}{5}$

(iii) $X=3$인 경우

6의 약수가 적힌 공 3개를 꺼내는 경우이므로

$P(X=3)=\frac{{}_4C_3}{{}_6C_3}=\frac{4}{20}=\frac{1}{5}$

(i), (ii), (iii)에서 확률변수 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	1	2	3	합계
$P(X=x)$	$\frac{1}{5}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{1}{5}$	1

$E(X)=1\times\frac{1}{5}+2\times\frac{3}{5}+3\times\frac{1}{5}=2$

$E(X^2)=1^2\times\frac{1}{5}+2^2\times\frac{3}{5}+3^2\times\frac{1}{5}=\frac{22}{5}$

$V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2=\frac{22}{5}-2^2=\frac{2}{5}$

$V(aX-3)=4$에서

$V(aX-3)=a^2V(X)=a^2\times\frac{2}{5}=4$

$a^2=10$

$a>0$이므로 $a=\sqrt{10}$

답 ①

11

확률변수 X가 가질 수 있는 값은 1, 2, 3, 4이고 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	1	2	3	4	합계
$P(X=x)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	1

이때

$E(X)=1\times\frac{1}{4}+2\times\frac{1}{4}+3\times\frac{1}{4}+4\times\frac{1}{4}=\frac{10}{4}=\frac{5}{2}$

$E(X^2)=1^2\times\frac{1}{4}+2^2\times\frac{1}{4}+3^2\times\frac{1}{4}+4^2\times\frac{1}{4}=\frac{30}{4}=\frac{15}{2}$

이므로

$V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2=\frac{15}{2}-\left(\frac{5}{2}\right)^2=\frac{5}{4}$

$\sigma(X)=\sqrt{V(X)}=\frac{\sqrt{5}}{2}$

확률변수 Y가 가질 수 있는 값은 7, 14, 21, 28이고 Y의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

Y	7	14	21	28	합계
$P(Y=y)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	1

이때 $Y=7X$이므로

$\sigma(Y)=\sigma(7X)=7\sigma(X)=7\times\frac{\sqrt{5}}{2}=\frac{7\sqrt{5}}{2}$

따라서

$\sigma(X)+\sigma(Y)=\frac{\sqrt{5}}{2}+\frac{7\sqrt{5}}{2}=4\sqrt{5}$

답 ④

필수 유형 ❹

두 주사위 A, B를 동시에 던질 때 나오는 경우의 수는

$6\times6=36$

사건 E가 일어나는 경우는 다음과 같다.

$m=1$일 때, $n^2\le24$에서

$n=1, 2, 3, 4$로 이 경우의 수는 4

$m=2$일 때, $n^2\le21$에서

$n=1, 2, 3, 4$로 이 경우의 수는 4

$m=3$일 때, $n^2\le16$에서

$n=1, 2, 3, 4$로 이 경우의 수는 4

$m=4$일 때, $n^2\le9$에서

$n=1, 2, 3$으로 이 경우의 수는 3

$m=5, 6$일 때 사건 E가 일어나지 않는다.

따라서

$P(E)=\frac{4+4+4+3}{36}=\frac{5}{12}$

이때 확률변수 X는 이항분포 $B\left(12, \frac{5}{12}\right)$를 따르므로

$V(X)=12\times\frac{5}{12}\times\frac{7}{12}=\frac{35}{12}$

따라서 $p=12$, $q=35$이므로

$p+q=12+35=47$

답 47

12

확률변수 X가 이항분포 $B\left(n, \frac{1}{4}\right)$을 따르므로

$E(X)=n\times\frac{1}{4}=\frac{n}{4}$

$V(X)=n\times\frac{1}{4}\times\frac{3}{4}=\frac{3}{16}n$

$V(2X+1)+E(2X+1)=76$에서

$V(2X+1)+E(2X+1)=2^2V(X)+2E(X)+1$

$=4\times\frac{3}{16}n+2\times\frac{n}{4}+1$

$=\frac{5}{4}n+1=76$

따라서 $n=75\times\frac{4}{5}=60$

답 ④

13

두 주사위의 눈의 수의 차가 4 이상인 사건을 A라 하자.

두 주사위의 눈의 수의 차가 4 이상인 경우는

(1, 5), (1, 6), (2, 6), (5, 1), (6, 1), (6, 2)

이므로 한 번의 시행을 할 때 사건 A가 일어날 확률은

$\frac{6}{36}=\frac{1}{6}$

45번의 시행에서 사건 A가 일어난 횟수를 확률변수 Y라 하면 Y는 이항분포 $B\left(45, \frac{1}{6}\right)$을 따르고

$E(Y)=45\times\frac{1}{6}=\frac{15}{2}$

확률변수 X는 45번 시행을 한 후 받은 점수의 합이므로

$X=3Y-(45-Y)=4Y-45$

따라서

$E(X)=E(4Y-45)=4E(Y)-45$

$=4\times\frac{15}{2}-45=-15$

답 ①

14

확률변수 X가 이항분포 $B(n, p)$를 따르므로

$P(X=x)={}_nC_xp^x(1-p)^{n-x}$ $(x=0, 1, 2, \cdots, n)$

$P(X=n-1)={}_nC_{n-1}p^{n-1}(1-p)^1={}_nC_1p^{n-1}(1-p)$

$=np^{n-1}(1-p)$

$P(X=n)={}_nC_np^n(1-p)^0=p^n$

조건 (가)에서 $P(X=n-1)=100P(X=n)$이므로

$np^{n-1}(1-p)=100p^n$

조건 (나)에서 $E(X)=np=5$이므로 $p>0$

$p\neq 0$이므로 $n(1-p)=100p$

$n=np+100p=5+100p$

$np=(5+100p)p=5$에서

$20p^2+p-1=0$

$(5p-1)(4p+1)=0$

$p>0$이므로 $p=\frac{1}{5}$

$n=\frac{5}{p}=\frac{5}{\frac{1}{5}}=25$

따라서 확률변수 X는 이항분포 $B\left(25, \frac{1}{5}\right)$을 따르므로

$V(X)=25\times\frac{1}{5}\times\frac{4}{5}=4$

$E(X^2)=V(X)+\{E(X)\}^2=4+5^2=29$

답 29

필수 유형 ❺

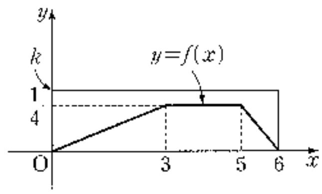
$0\le x\le 6$인 모든 실수 x에 대하여

$f(x)+g(x)=k$ (k는 상수)

이므로 $g(x)=k-f(x)$

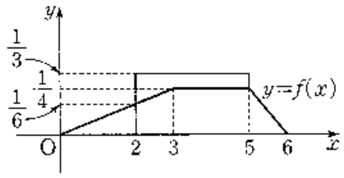
이때 함수 $g(x)$는 확률변수 Y의 확률밀도함수이므로 확률밀도함수의 정의에 의하여

$g(x)=k-f(x)\ge 0$, 즉 $k\ge f(x)$이고 그림과 같이 세 직선 $x=0$, $x=6$, $y=k$ 및 함수 $y=f(x)$의 그래프로 둘러싸인 색칠된 부분의 넓이는 1이다.



또한 $0\le x\le 6$에서 함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이도 1이므로 $k\times 6=2$, 즉 $k=\frac{1}{3}$이다.

따라서 $P(6k\le Y\le 15k)=P(2\le Y\le 5)$이고 이 값은 그림과 같이 세 직선 $x=2$, $x=5$, $y=\frac{1}{3}$ 및 함수 $y=f(x)$의 그래프로 둘러싸인 색칠된 부분의 넓이와 같다.



$0\le x\le 3$에서 $f(x)=\frac{1}{12}x$이므로

$$\begin{aligned}P(6k\le Y\le 15k)&=P(2\le Y\le 5)\\&=\frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{6}\right)\times 1+3\times\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)\\&=\frac{1}{24}+\frac{1}{4}=\frac{7}{24}\end{aligned}$$

따라서 $p=24$, $q=7$이므로

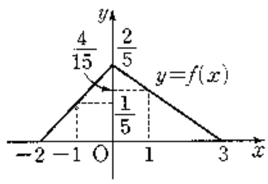
$p+q=31$

답 31

15

함수 $f(x)$가 확률밀도함수이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이는 1이다.

즉, $\frac{1}{2}\times\{3-(-2)\}\times a=1$에서 $a=\frac{2}{5}$



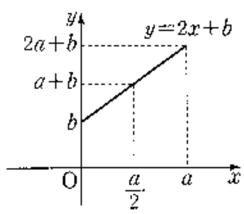
$$\begin{aligned}P(|X|\le 1)&=P(-1\le X\le 1)\\&=P(-1\le X\le 0)+P(0\le X\le 1)\\&=\frac{1}{2}\times 1\times\left(\frac{1}{5}+\frac{2}{5}\right)+\frac{1}{2}\times 1\times\left(\frac{2}{5}+\frac{4}{15}\right)\\&=\frac{3}{10}+\frac{1}{3}=\frac{19}{30}\end{aligned}$$

따라서 $a+P(|X|\le 1)=\frac{2}{5}+\frac{19}{30}=\frac{31}{30}$

답 ①

16

$a>0$, $b>0$이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 그림과 같다.



함수 $f(x)$가 확률밀도함수이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축 및 두 직선 $x=0$, $x=a$로 둘러싸인 부분의 넓이는 1이다.

즉, $\frac{1}{2}\times\{b+(2a+b)\}\times a=1$에서

$a(a+b)=1$ …… ㉠

$P\left(0\le X\le\frac{a}{2}\right)=\frac{3}{8}$에서

$$\begin{aligned}P\left(0\le X\le\frac{a}{2}\right)&=\frac{1}{2}\times\{b+(a+b)\}\times\frac{a}{2}\\&=\frac{1}{4}(a+2b)a=\frac{3}{8}\end{aligned}$$

$a(a+2b)=\frac{3}{2}$ …… ㉡

㉡÷㉠을 하면 $\frac{a+2b}{a+b}=\frac{3}{2}$

$2a+4b=3a+3b$, $a=b$

$a=b$를 ㉠에 대입하면 $2a^2=1$

이때 $a>0$이므로 $a=b=\frac{\sqrt{2}}{2}$

따라서 $a+b=\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}=\sqrt{2}$

답 ③

17

함수 $f(x)$가 확률밀도함수이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이는 1이다.

$\frac{1}{2}\times a\times b+\frac{1}{2}\times 2a\times 2b=1$에서

$ab=\frac{2}{5}$ $\cdots\cdots$ ㉠

$P(-a\le X\le 0)=\frac{1}{2}ab=\frac{1}{5}$

$P(0\le X\le a)=\frac{1}{2}\times a\times 2b=ab=\frac{2}{5}$

즉, $P(-a\le X\le a)=\frac{1}{5}+\frac{2}{5}=\frac{3}{5}$이고,

$P\left(-a\le X\le \frac{3}{2}a-5b\right)=\frac{3}{5}$이므로

$\frac{3}{2}a-5b=a$, $a=10b$

$a=10b$를 ㉠에 대입하면

$10b^2=\frac{2}{5}$, $b^2=\frac{1}{25}$

$b>0$이므로 $b=\frac{1}{5}$, $a=10\times\frac{1}{5}=2$

따라서 $a+b=2+\frac{1}{5}=\frac{11}{5}$

답 ④

필수 유형 ❻

확률변수 X가 정규분포 $N(8, 3^2)$을 따르므로 확률변수 $Z=\frac{X-8}{3}$은 표준정규분포 $N(0, 1)$을 따르고

확률변수 Y가 정규분포 $N(m, \sigma^2)$을 따르므로 확률변수 $Z=\frac{Y-m}{\sigma}$은 표준정규분포 $N(0, 1)$을 따른다.

$P(4\le X\le 8)+P(Y\ge 8)=\frac{1}{2}$에서

$P(4\le X\le 8)+P(Y\ge 8)$

$=P\left(\frac{4-8}{3}\le Z\le \frac{8-8}{3}\right)+P\left(Z\ge \frac{8-m}{\sigma}\right)$

$=P\left(-\frac{4}{3}\le Z\le 0\right)+P\left(Z\ge\frac{8-m}{\sigma}\right)$

$=P\left(0\le Z\le\frac{4}{3}\right)+P\left(Z\ge\frac{8-m}{\sigma}\right)=\frac{1}{2}$

이므로

$\frac{8-m}{\sigma}=\frac{4}{3}$, 즉 $m=8-\frac{4}{3}\sigma$

따라서

$$P\left(Y\le 8+\frac{2\sigma}{3}\right)=P\left(Z\le\frac{8+\frac{2\sigma}{3}-\left(8-\frac{4\sigma}{3}\right)}{\sigma}\right)$$

$=P\left(Z\le\frac{2\sigma}{\sigma}\right)=P(Z\le 2)$

$=P(Z\le 0)+P(0\le Z\le 2)$

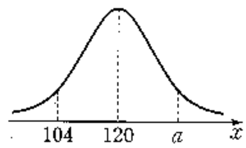
$=0.5+0.4772$

$=0.9772$

답 ④

18

확률변수 X가 정규분포 $N(120, 8^2)$을 따르므로 확률변수 X의 정규분포곡선은 직선 $x=120$에 대하여 대칭이다.



$P(X\le 104)=P(X\ge a)$에서

$\frac{104+a}{2}=120$이므로 $a=136$

또한 확률변수 $Z=\frac{X-120}{8}$은 표준정규분포 $N(0, 1)$을 따르므로

$P(X\le 104)=P(Z\le b)$에서

$P(X\le 104)=P\left(Z\le\frac{104-120}{8}\right)$

$=P(Z\le -2)$

따라서 $b=-2$이므로

$a+b=136+(-2)=134$

답 134

19

확률변수 X가 정규분포 $N(m, 4^2)$을 따르고

$P(X\le 7)=P(X\ge 11)$이 성립하므로

$m=\frac{7+11}{2}=9$

$Z=\frac{X-9}{4}$라 하면 확률변수 Z는 표준정규분포 $N(0, 1)$을 따른다.

따라서

$P(7\le X\le 15)=P\left(\frac{7-9}{4}\le Z\le\frac{15-9}{4}\right)$

$=P(-0.5\le Z\le 1.5)$

$=P(-0.5\le Z\le 0)+P(0\le Z\le 1.5)$

$=P(0\le Z\le 0.5)+P(0\le Z\le 1.5)$

$=0.1915+0.4332=0.6247$

답 ②

20

확률변수 X가 정규분포 $N(12, \sigma^2)$을 따르므로 $Z=\frac{X-12}{\sigma}$라 하면 확률변수 Z는 표준정규분포 $N(0, 1)$을 따른다.

$P(X\le 9\sigma)=P\left(Z\le\frac{9\sigma-12}{\sigma}\right)$

$=P\left(Z\le 9-\frac{12}{\sigma}\right)$

이때 $P(X\le 9\sigma)=0.8413>0.5$이므로 $9-\frac{12}{\sigma}>0$

즉,

$P\left(Z\le 9-\frac{12}{\sigma}\right)=P(Z\le 0)+P\left(0\le Z\le 9-\frac{12}{\sigma}\right)$

$=0.5+P\left(0\le Z\le 9-\frac{12}{\sigma}\right)$

이므로

$P\left(0\le Z\le 9-\frac{12}{\sigma}\right)=0.8413-0.5=0.3413$

$P(0 \le Z \le 1) = 0.3413$이므로

$9 - \frac{12}{\sigma} = 1$, $\sigma = \frac{3}{2}$

따라서

$$\begin{aligned} P(X \ge 10\sigma) &= P\left(X \ge 10 \times \frac{3}{2}\right) = P(X \ge 15) \\ &= P\left(Z \ge \frac{15-12}{\frac{3}{2}}\right) \\ &= P(Z \ge 2) \\ &= P(Z \ge 0) - P(0 \le Z \le 2) \\ &= 0.5 - 0.4772 = 0.0228 \end{aligned}$$

답 ①

21

$P(2a-2 \le X \le 2a+4)$ …… ㉠

정규분포 $N(m, 2^2)$을 따르는 확률변수 X의 확률밀도함수를 $f(x)$라 하면 함수 $y=f(x)$의 그래프는 직선 $x=m$에 대하여 대칭인 종 모양의 곡선이므로 ㉠의 값은 $2a-2$와 $2a+4$의 평균이 m일 때 최대가 된다.

$m = \frac{2a-2+2a+4}{2} = \frac{4a+2}{2} = 2a+1$

즉, $a = \frac{m-1}{2}$일 때 ㉠의 값은 최대이다.

한편, 확률변수 X는 정규분포 $N(m, 2^2)$을 따르므로 $Z = \frac{X-m}{2}$이라 하면 확률변수 Z는 표준정규분포 $N(0, 1)$을 따른다.

$$\begin{aligned} P(2a \le X \le 2a+2) &= P(m-1 \le X \le m+1) \\ &= P\left(\frac{m-1-m}{2} \le Z \le \frac{m+1-m}{2}\right) \\ &= P(-0.5 \le Z \le 0.5) \\ &= 2 \times P(0 \le Z \le 0.5) \\ &= 2 \times 0.1915 = 0.3830 \end{aligned}$$

답 ②

22

확률변수 X가 정규분포 $N(a, 2^2)$을 따르므로 $Z = \frac{X-a}{2}$라 하면 확률변수 Z는 표준정규분포 $N(0, 1)$을 따른다.

확률변수 Y가 정규분포 $N(b, 2^2)$을 따르므로 $Z = \frac{Y-b}{2}$라 하면 확률변수 Z는 표준정규분포 $N(0, 1)$을 따른다.

조건 (가) $P(X \le 6) = P(Y \ge 6)$에서

$$\begin{aligned} P\left(Z \le \frac{6-a}{2}\right) &= P\left(Z \ge \frac{6-b}{2}\right) \\ &= P\left(Z \le \frac{b-6}{2}\right) \end{aligned}$$

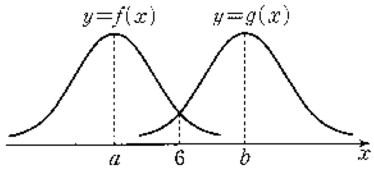
이므로

$\frac{6-a}{2} = \frac{b-6}{2}$

$a+b=12$, $\frac{a+b}{2} = 6$

한편, 두 확률변수 X, Y의 표준편차가 서로 같으므로 확률변수 X의 확률밀도함수를 $f(x)$, 확률변수 Y의 확률밀도함수를 $g(x)$라 하면 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$는 평행이동에 의하여 서로 겹쳐질 수 있다.

$a<b$이므로 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$는 그림과 같다.



따라서 $P(a \le X \le 6) = P(6 \le Y \le b)$이므로

조건 (나)에서

$P(a \le X \le 6) = \frac{1}{2} \times 0.9544 = 0.4772$

$$\begin{aligned} P(a \le X \le 6) &= P\left(\frac{a-a}{2} \le Z \le \frac{6-a}{2}\right) \\ &= P\left(0 \le Z \le \frac{6-a}{2}\right) \end{aligned}$$

이때 $P(0 \le Z \le 2) = 0.4772$이므로

$\frac{6-a}{2} = 2$, $a = 6-4 = 2$

$a+b=12$에서 $b=10$

따라서 $b-a = 10-2 = 8$

답 ④

필수 유형 ❼

이 농장에서 수확하는 파프리카 1개의 무게를 확률변수 X라 하면 X는 정규분포 $N(180, 20^2)$을 따르므로 $Z = \frac{X-180}{20}$이라 하면 확률변수 Z는 표준정규분포 $N(0, 1)$을 따른다.

따라서 구하는 확률은

$$\begin{aligned} P(190 \le X \le 210) &= P\left(\frac{190-180}{20} \le Z \le \frac{210-180}{20}\right) \\ &= P(0.5 \le Z \le 1.5) \\ &= P(0 \le Z \le 1.5) - P(0 \le Z \le 0.5) \\ &= 0.4332 - 0.1915 = 0.2417 \end{aligned}$$

답 ⑤

23

이 농장에서 수확한 고구마 1개의 무게를 확률변수 X라 하면 X는 정규분포 $N(310, 8^2)$을 따르고 $Z = \frac{X-310}{8}$이라 하면 확률변수 Z는 표준정규분포 $N(0, 1)$을 따른다.

따라서 고구마 1개의 무게가 290 g 이하이거나 330 g 이상일 확률은

$$\begin{aligned} &P(X \le 290) + P(X \ge 330) \\ &= P\left(Z \le \frac{290-310}{8}\right) + P\left(Z \ge \frac{330-310}{8}\right) \\ &= P(Z \le -2.5) + P(Z \ge 2.5) \\ &= 2P(Z \ge 2.5) \\ &= 2 \times \{0.5 - P(0 \le Z \le 2.5)\} \\ &= 2 \times (0.5 - 0.4938) \\ &= 0.0124 \end{aligned}$$

답 ①

24

이 공장에서 생산되는 A 제품 1개의 무게를 확률변수 X라 하면 X는 정규분포 $\mathrm{N}(120,\ 4^2)$을 따르므로 $Z=\frac{X-120}{4}$이라 하면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.
이 공장에서 생산되는 B 제품 1개의 무게를 확률변수 Y라 하면 Y는 정규분포 $\mathrm{N}(196,\ 7^2)$을 따르므로 $Z=\frac{Y-196}{7}$이라 하면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.
$\mathrm{P}(X\geq 132)+\mathrm{P}(Y\leq a)=1$에서
$\mathrm{P}(X\geq 132)=\mathrm{P}\left(Z\geq\frac{132-120}{4}\right)=\mathrm{P}(Z\geq 3)$
$\mathrm{P}(Y\leq a)=\mathrm{P}\left(Z\leq\frac{a-196}{7}\right)$
따라서 $\mathrm{P}(Z\geq 3)+\mathrm{P}\left(Z\leq\frac{a-196}{7}\right)=1$이므로
$3=\frac{a-196}{7}$
$a=196+21=217$

답 217

25

이 공장에서 생산한 비누 제품 한 개의 무게를 확률변수 X라 하면 X는 정규분포 $\mathrm{N}(176,\ 2^2)$을 따르므로 $Z=\frac{X-176}{2}$이라 하면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.
한 개의 비누 제품이 정품으로 인정될 확률이 0.9332이므로

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(X\geq a)&=\mathrm{P}\left(Z\geq\frac{a-176}{2}\right)\\&=\mathrm{P}\left(Z\leq\frac{176-a}{2}\right)\end{aligned}$$

이때 $\mathrm{P}(X\geq a)=0.9332>0.5$이므로 $\frac{176-a}{2}>0$
즉,

$$\begin{aligned}\mathrm{P}\left(Z\leq\frac{176-a}{2}\right)&=\mathrm{P}(Z\leq 0)+\mathrm{P}\left(0\leq Z\leq\frac{176-a}{2}\right)\\&=0.5+\mathrm{P}\left(0\leq Z\leq\frac{176-a}{2}\right)\end{aligned}$$

이므로
$\mathrm{P}\left(0\leq Z\leq\frac{176-a}{2}\right)=0.9332-0.5=0.4332$
$\mathrm{P}(0\leq Z\leq 1.5)=0.4332$이므로
$\frac{176-a}{2}=1.5$
따라서 $a=176-3=173$

답 ③

필수 유형 ⑬

100권의 공책 중 A회사 제품의 개수를 확률변수 X라 하면 X는 이항분포 $\mathrm{B}(100,\ 0.1)$을 따르므로
$\mathrm{E}(X)=100\times 0.1=10$
$\mathrm{V}(X)=100\times 0.1\times 0.9=9$
이때 100은 충분히 큰 수이므로 확률변수 X는 근사적으로 정규분포 $\mathrm{N}(10,\ 3^2)$을 따르고, $Z=\frac{X-10}{3}$이라 하면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.
따라서 구하는 확률은

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(X\geq 13)&=\mathrm{P}\left(Z\geq\frac{13-10}{3}\right)\\&=\mathrm{P}(Z\geq 1)\\&=0.5-\mathrm{P}(0\leq Z\leq 1)\\&=0.5-0.3413\\&=0.1587\end{aligned}$$

답 ③

26

확률변수 X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(162,\ \frac{1}{3}\right)$을 따르므로
$\mathrm{E}(X)=162\times\frac{1}{3}=54$
$\mathrm{V}(X)=162\times\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}=36$
이때 162는 충분히 큰 수이므로 확률변수 X는 근사적으로 정규분포 $\mathrm{N}(54,\ 6^2)$을 따르고, $Z=\frac{X-54}{6}$라 하면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.
따라서

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(X\leq 51)&=\mathrm{P}\left(Z\leq\frac{51-54}{6}\right)\\&=\mathrm{P}(Z\leq -0.5)\\&=\mathrm{P}(Z\geq 0.5)\\&=0.5-\mathrm{P}(0\leq Z\leq 0.5)\\&=0.5-0.1915\\&=0.3085\end{aligned}$$

답 ③

27

이항분포 $\mathrm{B}(432,\ p)$를 따르는 확률변수 X의 평균이 108이므로
$\mathrm{E}(X)=432p=108$에서 $p=\frac{1}{4}$
$\mathrm{V}(X)=432p(1-p)=432\times\frac{1}{4}\times\frac{3}{4}=81$
이때 432는 충분히 큰 수이므로 확률변수 X는 근사적으로 정규분포 $\mathrm{N}(108,\ 9^2)$을 따르고, $Z=\frac{X-108}{9}$이라 하면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(X\geq a)&=\mathrm{P}\left(Z\geq\frac{a-108}{9}\right)\\&=\mathrm{P}\left(Z\leq\frac{108-a}{9}\right)\end{aligned}$$

이때 $\mathrm{P}(X\geq a)\geq 0.9772>0.5$이므로 $\frac{108-a}{9}>0$
즉,

$\mathrm{P}\left(Z\le\frac{108-a}{9}\right)=\mathrm{P}(Z\le 0)+\mathrm{P}\left(0\le Z\le\frac{108-a}{9}\right)$

$=0.5+\mathrm{P}\left(0\le Z\le\frac{108-a}{9}\right)$

이므로

$\mathrm{P}\left(0\le Z\le\frac{108-a}{9}\right)\ge 0.9772-0.5=0.4772$

$\mathrm{P}(0\le Z\le 2)=0.4772$이므로

$\frac{108-a}{9}\ge 2$

$a\le 108-18=90$

이어야 한다.

따라서 구하는 자연수 a의 최댓값은 90이다.

답 ①

28

한 번의 시행에서 같은 색의 공이 나온 확률은

$\frac{{}_2C_2+{}_3C_2}{{}_5C_2}=\frac{1+3}{10}=\frac{2}{5}$

이므로 150번의 시행 중 같은 색의 공이 나오는 횟수를 확률변수 X라 하면 X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(150,\ \frac{2}{5}\right)$를 따른다.

$\mathrm{E}(X)=150\times\frac{2}{5}=60$

$\mathrm{V}(X)=150\times\frac{2}{5}\times\frac{3}{5}=36$

이때 150은 충분히 큰 수이므로 확률변수 X는 근사적으로 정규분포 $\mathrm{N}(60,\ 6^2)$을 따르고 $Z=\frac{X-60}{6}$이라 하면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

따라서 구하는 확률은

$\mathrm{P}(54\le X\le 66)=\mathrm{P}\left(\frac{54-60}{6}\le Z\le\frac{66-60}{6}\right)$

$=\mathrm{P}(-1\le Z\le 1)$

$=2\mathrm{P}(0\le Z\le 1)$

$=2\times 0.3413$

$=0.6826$

답 ②

필수 유형 ❾

정규분포 $\mathrm{N}(20,\ 5^2)$을 따르는 확률변수를 X라 하면

$\mathrm{E}(X)=20,\ \sigma(X)=5$

이 모집단에서 크기가 16인 표본을 임의추출하여 구한 표본평균이 $\bar{X}$이므로

$\mathrm{E}(\bar{X})+\sigma(\bar{X})=\mathrm{E}(X)+\frac{\sigma(X)}{\sqrt{16}}$

$=20+\frac{5}{4}$

$=\frac{85}{4}$

답 ②

29

첫 번째 뽑은 수를 X_1, 두 번째 뽑은 수를 X_2, 세 번째 뽑은 수를 X_3이라 하면

$\bar{X}=\frac{X_1+X_2+X_3}{3}$

$\bar{X}=1$, 즉 $X_1+X_2+X_3=3$인 경우는 $(X_1,\ X_2,\ X_3)$이

$(-1,\ 2,\ 2),\ (2,\ -1,\ 2),\ (2,\ 2,\ -1)$일 때이므로

$\mathrm{P}(\bar{X}=1)=3\times\frac{1}{6}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{18}$

$\bar{X}=2$, 즉 $X_1+X_2+X_3=6$인 경우는

$X_1=X_2=X_3=2$일 때뿐이므로

$\mathrm{P}(\bar{X}=2)=\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{27}$

따라서

$\mathrm{P}(\bar{X}=1)+\mathrm{P}(\bar{X}=2)=\frac{1}{18}+\frac{1}{27}=\frac{5}{54}$

답 ①

30

모든 확률의 합이 1이므로

$a+b+\frac{3}{8}=1,\ a+b=\frac{5}{8}$ …… ㉠

$\mathrm{E}(\bar{X})=\mathrm{E}(X)=2\times a+4\times b+6\times\frac{3}{8}=4$에서

$a+2b=\frac{7}{8}$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=\frac{3}{8},\ b=\frac{1}{4}$

$\mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2$

$=\left(2^2\times\frac{3}{8}+4^2\times\frac{1}{4}+6^2\times\frac{3}{8}\right)-4^2$

$=19-16=3$

따라서

$\mathrm{V}(\bar{X})=\frac{\mathrm{V}(X)}{6}=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$

이므로

$\sigma(\bar{X})=\sqrt{\mathrm{V}(\bar{X})}=\frac{\sqrt{2}}{2}$

답 ④

31

주머니에서 한 장의 카드를 꺼낼 때, 나온 카드에 적혀 있는 수를 확률변수 Y라 하면 Y의 확률질량함수는

$\mathrm{P}(Y=i)=\frac{1}{8}\ (i=1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ 8)$

$\mathrm{E}(Y)=\sum_{i=1}^{8}\{i\times\mathrm{P}(Y=i)\}$

$=\frac{1}{8}(1+2+3+\cdots+8)$

$=\frac{1}{8}\times\frac{8\times 9}{2}=\frac{9}{2}$

$\mathrm{E}(Y^2)=\sum_{i=1}^{8}\{i^2\times\mathrm{P}(Y=i)\}$

$=\frac{1}{8}(1^2+2^2+3^2+\cdots+8^2)$

$=\frac{1}{8}\times\frac{8\times 9\times 17}{6}=\frac{51}{2}$

$V(Y)=E(Y^2)-\{E(Y)\}^2$

$\quad=\frac{51}{2}-\left(\frac{9}{2}\right)^2=\frac{21}{4}$

크기가 3인 표본을 임의추출하여 구한 표본평균을 $\overline{Y}$라 하면

$V(\overline{Y})=\frac{V(Y)}{3}=\frac{1}{3}\times\frac{21}{4}=\frac{7}{4}$

한편, $\overline{Y}=\frac{X}{3}$, 즉 $X=3\overline{Y}$이므로

$V(X)=3^2V(\overline{Y})=9\times\frac{7}{4}=\frac{63}{4}$

$V(aX+1)=252$에서

$V(aX+1)=a^2V(X)=a^2\times\frac{63}{4}=252$

이므로 $a^2=16$

이때 $a>0$이므로 $a=4$

답 4

필수 유형 ⑩

확률변수 X의 표준편차를 σ라 하면 확률변수 X는 정규분포 $N(220,\ \sigma^2)$을 따르므로 확률변수 $\overline{X}$는 정규분포 $N\left(220,\ \left(\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)^2\right)$을 따르고, $Z=\frac{\overline{X}-220}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$이라 하면 확률변수 Z는 표준정규분포 $N(0,\ 1)$을 따른다.

$P(\overline{X}\le215)=0.1587$에서

$$P(\overline{X}\le215)=P\left(Z\le\frac{215-220}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\right)$$
$$=P\left(Z\le-\frac{5\sqrt{n}}{\sigma}\right)$$
$$=P\left(Z\ge\frac{5\sqrt{n}}{\sigma}\right)$$
$$=0.5-P\left(0\le Z\le\frac{5\sqrt{n}}{\sigma}\right)=0.1587$$

이므로

$P\left(0\le Z\le\frac{5\sqrt{n}}{\sigma}\right)=0.5-0.1587=0.3413$

이때 $P(0\le Z\le1)=0.3413$이므로 $\frac{5\sqrt{n}}{\sigma}=1$

즉, $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}=5$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

한편, 확률변수 Y의 평균은 240이고 표준편차는 $\frac{3\sigma}{2}$이므로 확률변수 Y는 정규분포 $N\left(240,\ \left(\frac{3\sigma}{2}\right)^2\right)$을 따른다.

확률변수 $\overline{Y}$는 정규분포 $N\left(240,\ \left(\frac{\frac{3\sigma}{2}}{3\sqrt{n}}\right)^2\right)$, 즉 $N\left(240,\ \left(\frac{\sigma}{2\sqrt{n}}\right)^2\right)$을 따르고 ㉠에서 $\frac{\sigma}{2\sqrt{n}}=\frac{1}{2}\times\frac{\sigma}{\sqrt{n}}=\frac{5}{2}$이므로 $Z=\frac{\overline{Y}-240}{\frac{5}{2}}$이라 하면 확률변수 Z는 표준정규분포 $N(0,\ 1)$을 따른다.

따라서

$$P(\overline{Y}\ge235)=P\left(Z\ge\frac{235-240}{\frac{5}{2}}\right)$$
$$=P(Z\ge-2)$$
$$=P(-2\le Z\le0)+P(Z\ge0)$$
$$=P(0\le Z\le2)+0.5$$
$$=0.4772+0.5$$
$$=0.9772$$

답 ⑤

32

확률변수 X는 정규분포 $N(10,\ \sigma^2)$을 따르므로 $Z=\frac{X-10}{\sigma}$이라 하면 확률변수 Z는 표준정규분포 $N(0,\ 1)$을 따른다.

크기가 9인 표본의 표본평균 $\overline{X}$는

$E(\overline{X})=E(X)=10$

$V(\overline{X})=\frac{V(X)}{9}=\frac{\sigma^2}{9}=\left(\frac{\sigma}{3}\right)^2$

이므로 확률변수 $\overline{X}$는 정규분포 $N\left(10,\ \left(\frac{\sigma}{3}\right)^2\right)$을 따르고

$Z=\frac{\overline{X}-10}{\frac{\sigma}{3}}$이라 하면 확률변수 Z는 표준정규분포 $N(0,\ 1)$을 따른다.

$P(X\le7)+P(\overline{X}\ge11)=0.0456$에서

$P(X\le7)=P\left(Z\le\frac{7-10}{\sigma}\right)=P\left(Z\le-\frac{3}{\sigma}\right)=P\left(Z\ge\frac{3}{\sigma}\right)$

$P(\overline{X}\ge11)=P\left(Z\ge\frac{11-10}{\frac{\sigma}{3}}\right)=P\left(Z\ge\frac{3}{\sigma}\right)$

이므로

$P(X\le7)+P(\overline{X}\ge11)=2P\left(Z\ge\frac{3}{\sigma}\right)=0.0456$

$P\left(Z\ge\frac{3}{\sigma}\right)=0.0228$

$$P\left(0\le Z\le\frac{3}{\sigma}\right)=0.5-P\left(Z\ge\frac{3}{\sigma}\right)$$
$$=0.5-0.0228$$
$$=0.4772$$

이때 $P(0\le Z\le2)=0.4772$이므로

$\frac{3}{\sigma}=2$

따라서 $\sigma=\frac{3}{2}$

답 ④

33

이 농가에서 생산한 옥수수 한 개의 무게를 확률변수 X라 하면 X는 정규분포 $N(110,\ 12^2)$을 따르고 임의추출한 36개의 옥수수의 무게의 평균을 $\overline{X}$라 하면

$\mathrm{E}(\overline{X})=\mathrm{E}(X)=110$

$\sigma(\overline{X})=\frac{12}{\sqrt{36}}=\frac{12}{6}=2$

이므로 확률변수 $\overline{X}$는 정규분포 $\mathrm{N}(110,\ 2^2)$을 따른다.

이때 $Z=\frac{\overline{X}-110}{2}$이라 하면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따르므로 구하는 확률은

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(\overline{X}\ge 113)&=\mathrm{P}\left(Z\ge\frac{113-110}{2}\right)\\&=\mathrm{P}(Z\ge 1.5)\\&=\mathrm{P}(Z\ge 0)-\mathrm{P}(0\le Z\le 1.5)\\&=0.5-0.4332\\&=0.0668\end{aligned}$$

답 ③

34

이 제과점에서 생산하는 빵 한 개의 무게를 확률변수 X라 하면 X는 정규분포 $\mathrm{N}(15,\ 1^2)$을 따르고 한 상자에 담긴 빵 4개의 무게의 평균을 $\overline{X}$라 하면 확률변수 $\overline{X}$는 정규분포 $\mathrm{N}\left(15,\ \left(\frac{1}{2}\right)^2\right)$을 따른다.

$Z=\frac{\overline{X}-15}{\frac{1}{2}}$라 하면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

한 상자에 들어 있는 빵 4개의 무게의 합이 a g이면 이들의 평균은 $\frac{a}{4}$ g이고 할인된 가격으로 판매할 상자일 확률이 0.1587이므로

$$\begin{aligned}\mathrm{P}\left(\overline{X}\le\frac{a}{4}\right)&=\mathrm{P}\left(Z\le\frac{\frac{a}{4}-15}{\frac{1}{2}}\right)=\mathrm{P}\left(Z\le\frac{a}{2}-30\right)\\&=\mathrm{P}\left(Z\ge 30-\frac{a}{2}\right)\end{aligned}$$

이때 $\mathrm{P}\left(\overline{X}\le\frac{a}{4}\right)=0.1587<0.5$이므로 $30-\frac{a}{2}>0$

즉,

$$\begin{aligned}\mathrm{P}\left(Z\ge 30-\frac{a}{2}\right)&=\mathrm{P}(Z\ge 0)-\mathrm{P}\left(0\le Z\le 30-\frac{a}{2}\right)\\&=0.5-\mathrm{P}\left(0\le Z\le 30-\frac{a}{2}\right)\end{aligned}$$

이므로

$\mathrm{P}\left(0\le Z\le 30-\frac{a}{2}\right)=0.5-0.1587=0.3413$

$\mathrm{P}(0\le Z\le 1)=0.3413$이므로

$30-\frac{a}{2}=1$

따라서 $a=2\times 29=58$

답 58

필수 유형 ⑪

고객의 주문 대기 시간은 평균이 m분, 표준편차가 σ분인 정규분포를 따를 때, 64명을 임의추출하여 얻은 표본평균을 $\overline{x}$라 하면 고객의 주문 대기 시간의 평균 m에 대한 신뢰도 95 %의 신뢰구간은

$\overline{x}-1.96\times\frac{\sigma}{\sqrt{64}}\le m\le\overline{x}+1.96\times\frac{\sigma}{\sqrt{64}}$

즉, $\overline{x}-1.96\times\frac{\sigma}{8}\le m\le\overline{x}+1.96\times\frac{\sigma}{8}$

이때 $a\le m\le b$이고 $b-a=4.9$이므로

$b-a=2\times 1.96\times\frac{\sigma}{8}=0.49\sigma=4.9$

따라서 $\sigma=10$

답 10

35

모표준편차가 4인 정규분포를 따르는 모집단에서 임의추출한 크기가 n인 표본의 표본평균을 $\overline{x}$라 하면 모평균 m에 대한 신뢰도 95 %의 신뢰구간은

$\overline{x}-1.96\times\frac{4}{\sqrt{n}}\le m\le\overline{x}+1.96\times\frac{4}{\sqrt{n}}$

이므로

$b-a=2\times 1.96\times\frac{4}{\sqrt{n}}$

$b-a=0.98$에서

$2\times 1.96\times\frac{4}{\sqrt{n}}=0.98$

$\sqrt{n}=16$

따라서 $n=256$

답 256

36

모표준편차가 6, 표본의 크기가 n, 표본평균이 220일 때 모평균 m에 대한 신뢰도 99 %의 신뢰구간은

$220-2.58\times\frac{6}{\sqrt{n}}\le m\le 220+2.58\times\frac{6}{\sqrt{n}}$

이때 신뢰구간이 $218.28\le m\le a$이므로

$220-2.58\times\frac{6}{\sqrt{n}}=218.28$

$\sqrt{n}=\frac{2.58\times 6}{220-218.28}=\frac{258\times 6}{172}=9$

에서 $n=81$

$a=220+2.58\times\frac{6}{\sqrt{81}}=221.72$

따라서 $a+n=221.72+81=302.72$

답 ③

37

모표준편차가 10인 정규분포를 따르는 모집단에서 임의추출한 크기가 196인 표본의 표본평균을 $\overline{x_1}$라 하면 모평균 m에 대한 신뢰도 95 %의 신뢰구간은

$\overline{x_1}-1.96\times\frac{10}{\sqrt{196}}\le m\le\overline{x_1}+1.96\times\frac{10}{\sqrt{196}}$

$\overline{x_1}-1.96\times\frac{5}{7}\le m\le\overline{x_1}+1.96\times\frac{5}{7}$

이므로

$b-a=2\times 1.96\times\frac{5}{7}=2.8$ ······ ㉠

같은 모집단에서 임의추출한 크기가 n인 표본의 표본평균을 $\overline{x_2}$라 하면 모평균 m에 대한 신뢰도 99 %인 신뢰구간은

$\overline{x_2}-2.58\times\frac{10}{\sqrt{n}}\le m\le\overline{x_2}+2.58\times\frac{10}{\sqrt{n}}$

이므로

$$d-c=2\times2.58\times\frac{10}{\sqrt{n}}=\frac{51.6}{\sqrt{n}} \qquad \cdots\cdots ㉡$$

㉠, ㉡에서

$$\frac{d-c}{b-a}=\frac{\frac{51.6}{\sqrt{n}}}{2.8}=\frac{516}{28\sqrt{n}}=\frac{129}{7\sqrt{n}}$$

$\frac{d-c}{b-a}\le\frac{43}{14}$에서

$$\frac{129}{7\sqrt{n}}\le\frac{43}{14}$$

$$\sqrt{n}\ge\frac{129}{7}\times\frac{14}{43}$$

$\sqrt{n}\ge6$, $n\ge36$

따라서 구하는 자연수 n의 최솟값은 36이다.

답 36

실전 모의고사 1회 본문 114~125쪽

01 ①	02 ②	03 ④	04 ⑤	05 ③
06 ④	07 ④	08 ①	09 ④	10 ①
11 ②	12 ⑤	13 ⑤	14 ⑤	15 ①
16 97	17 16	18 20	19 3	20 15
21 39	22 320	23 ③	24 ②	25 ④
26 ②	27 ⑤	28 ③	29 107	30 38

01

$2^{\log_2 5}=5$, $(\sqrt{5})^{-2}=\frac{1}{(\sqrt{5})^2}=\frac{1}{5}$이므로

$2^{\log_2 5}\times(\sqrt{5})^{-2}=5\times\frac{1}{5}=1$

답 ①

02

$f(x)=2x^3+4x^2-5x+1$에서

$f'(x)=6x^2+8x-5$

따라서 $f'(1)=6+8-5=9$

답 ②

03

등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d라 하면

$a_5-a_2=3d=12$에서 $d=4$

따라서 $a_4=a_1+3d=3+3\times4=15$

답 ④

다른 풀이

$a_5-a_2=a_4-a_1=12$이고

$a_1=3$이므로 $a_4=15$

04

$\lim_{x\to 0-}f(x)=3$

$\lim_{x\to 2+}\{xf(x)\}=\lim_{x\to 2+}x\times\lim_{x\to 2+}f(x)=2\times2=4$

따라서 $\lim_{x\to 0-}f(x)+\lim_{x\to 2+}\{xf(x)\}=3+4=7$

답 ⑤

05

$\lim_{x\to1}\frac{f(x)}{x-1}=3$에서 $x\to1$일 때 (분모) → 0이고 극한값이 존재하므로

(분자) → 0이어야 한다.

즉, $\lim_{x\to1}f(x)=0$에서 $f(1)=0$

또한 다항함수 $f(x)$는 $x=1$에서 미분가능하므로

$\lim_{x\to1}\frac{f(x)}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=f'(1)=3$

한편, $g(x)=xf(x)+2$에서 $g'(x)=f(x)+xf'(x)$이므로

$g'(1)=f(1)+1\times f'(1)=0+1\times3=3$

답 ③

06

$\tan\theta-\frac{4}{1+\tan\theta}=2$에서

$\tan\theta(1+\tan\theta)-4=2(1+\tan\theta)$

$\tan^2\theta-\tan\theta-6=0$, $(\tan\theta+2)(\tan\theta-3)=0$

$\pi<\theta<\frac{3}{2}\pi$에서 $\tan\theta>0$이므로

$\tan\theta=3$

즉, $\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=3$에서

$\sin\theta=3\cos\theta$ …… ㉠

이때 $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$이므로

$9\cos^2\theta+\cos^2\theta=1$, $\cos^2\theta=\frac{1}{10}$

$\pi<\theta<\frac{3}{2}\pi$에서 $\cos\theta<0$이므로

$\cos\theta=-\frac{1}{\sqrt{10}}$

$\cos\theta=-\frac{1}{\sqrt{10}}$을 ㉠에 대입하면

$\sin\theta=-\frac{3}{\sqrt{10}}$

따라서 $\sin\theta+\cos\theta=-\frac{3}{\sqrt{10}}+\left(-\frac{1}{\sqrt{10}}\right)=-\frac{2\sqrt{10}}{5}$

답 ④

07

$t^3-12t^2+36t=t^2-6t$에서

$t^3-13t^2+42t=0$, $t(t-6)(t-7)=0$

$t=0$ 또는 $t=6$ 또는 $t=7$

두 점 P, Q가 출발한 후 처음으로 속도가 같아지는 시각은 $t=6$이다.

즉, $a=6$이고 $\frac{a}{2}=3$

따라서 시각 $t=3$에서 $t=6$까지 점 Q가 움직인 거리는

$$\int_3^6|t^2-6t|\,dt=\int_3^6(6t-t^2)\,dt=\left[3t^2-\frac{1}{3}t^3\right]_3^6$$
$$=(108-72)-(27-9)=18$$

답 ④

08

$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)-x^3}{3x^2}=-1$에서

$f(x)-x^3=-3x^2+ax+b$ (a, b는 상수)

로 놓을 수 있다.

즉, $f(x)=x^3-3x^2+ax+b$

$\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{9x}=-1$에서 $x\to0$일 때 (분모) → 0이고 극한값이 존재하므로 (분자) → 0이어야 한다.

즉, $\lim_{x\to0}f(x)=0$에서 $f(0)=b=0$

이때 $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{9x}=\lim_{x\to 0}\frac{x^3-3x^2+ax}{9x}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2-3x+a}{9}=\frac{a}{9}$이므로

$\frac{a}{9}=-1$에서 $a=-9$

$f(x)=x^3-3x^2-9x$에서

$f'(x)=3x^2-6x-9=3(x+1)(x-3)$

$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=3$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

따라서 함수 $f(x)$의 극댓값은

$f(-1)=-1-3+9=5$

답 ①

09

$\sum_{k=1}^{n}S_k=T_n=2n^3+4n^2+2n$이라 하면

$T_n-T_{n-1}=S_n\ (n\geq 2)$에서

$S_n=(2n^3+4n^2+2n)-\{2(n-1)^3+4(n-1)^2+2(n-1)\}$

$=6n^2+2n\ (n\geq 2)$

한편, $\sum_{k=1}^{n}a_k=S_n$이므로

$a_3=S_3-S_2=(6\times 3^2+2\times 3)-(6\times 2^2+2\times 2)$

$=60-28=32$

답 ④

10

삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이가 $\sqrt{7}$이므로 사인법칙에 의하여

$\frac{\overline{BC}}{\sin\frac{2}{3}\pi}=2\sqrt{7}$

$\overline{BC}=2\sqrt{7}\times\sin\frac{2}{3}\pi=2\sqrt{7}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{21}$

삼각형 ABD의 외접원의 반지름의 길이가 $\sqrt{7}$이므로 사인법칙에 의하여

$\frac{\overline{AB}}{\sin(\angle BDA)}=2\sqrt{7}$

$\overline{AB}=2\sqrt{7}\sin(\angle BDA)=2\sqrt{7}\times\frac{\sqrt{21}}{7}=2\sqrt{3}$

삼각형 ABC에서 $\overline{AC}=x\ (x>0)$이라 하면 코사인법칙에 의하여

$\overline{BC}^2=\overline{AB}^2+\overline{AC}^2-2\times\overline{AB}\times\overline{AC}\times\cos\frac{2}{3}\pi$

$(\sqrt{21})^2=(2\sqrt{3})^2+x^2-2\times 2\sqrt{3}\times x\times\left(-\frac{1}{2}\right)$

$x^2+2\sqrt{3}x-9=0,\ (x+3\sqrt{3})(x-\sqrt{3})=0$

$x>0$이므로 $x=\sqrt{3}$

직선 AD가 $\angle BAC$를 이등분하므로 $\overline{AB}:\overline{AC}=\overline{BE}:\overline{CE}$

즉, $2\sqrt{3}:\sqrt{3}=\overline{BE}:\overline{CE}$에서 $\overline{BE}=2\overline{CE}$

따라서 $\overline{BE}=\frac{2}{3}\overline{BC}=\frac{2\sqrt{21}}{3}$, $\overline{CE}=\frac{1}{3}\overline{BC}=\frac{\sqrt{21}}{3}$이므로

$\overline{BE}^2+\overline{CE}^2=\left(\frac{2\sqrt{21}}{3}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{21}}{3}\right)^2=\frac{35}{3}$

답 ①

11

$f(x)=3x^2+ax-(2x-1)\int_0^1 f(t)\,dt$이고

$f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{7}{4}$이므로 $f\left(\frac{1}{2}\right)=3\times\frac{1}{4}+a\times\frac{1}{2}=\frac{7}{4}$에서 $a=2$

$\int_0^1 f(t)\,dt=k$ (k는 상수)라 하면 $f(x)=3x^2+2x-(2x-1)k$

$f(x)=3x^2+2(1-k)x+k$이고

$\int_0^1\{3x^2+2(1-k)x+k\}\,dx=k$

이때

$\int_0^1\{3x^2+2(1-k)x+k\}\,dx=\Big[x^3+(1-k)x^2+kx\Big]_0^1$

$=1+(1-k)+k=2$

이므로 $k=2$

따라서 $f(x)=3x^2-2x+2$이므로

$f(2)=3\times 4-2\times 2+2=10$

답 ②

12

함수 $f(x)=a\cos\frac{\pi x}{b}$의 주기는 $\frac{2\pi}{\frac{\pi}{b}}=2b$이고, 최댓값은 a, 최솟값은 $-a$이다.

$f(x)=-a$에서

$a\cos\frac{\pi x}{b}=-a$, $\cos\frac{\pi x}{b}=-1$

$\frac{\pi x}{b}=\pi$, $x=b$

즉, 점 A의 좌표는 $(b, -a)$이다.

$f(x)=\frac{a}{2}$에서

$a\cos\frac{\pi x}{b}=\frac{a}{2}$, $\cos\frac{\pi x}{b}=\frac{1}{2}$

$\frac{\pi x}{b}=\frac{\pi}{3}$ 또는 $\frac{\pi x}{b}=\frac{5\pi}{3}$

$x=\frac{b}{3}$ 또는 $x=\frac{5b}{3}$

$\overline{OB}<\overline{OC}$이므로 두 점 B, C의 좌표는 $B\left(\frac{b}{3}, \frac{a}{2}\right)$, $C\left(\frac{5b}{3}, \frac{a}{2}\right)$이다.

함수 $y=f(x)$의 그래프가 직선 $x=b$에 대하여 대칭이므로

$\overline{AB}=\overline{AC}$

이때 $\overline{AB}=\overline{BC}$이므로 삼각형 ABC는 정삼각형이다.

점 A에서 선분 BC에 내린 수선의 발을 H라 하면 직각삼각형 ABH에서

$\overline{BH}=\frac{1}{2}\left(\frac{5b}{3}-\frac{b}{3}\right)=\frac{2}{3}b$, $\overline{AH}=\frac{a}{2}-(-a)=\frac{3}{2}a$이므로

$\tan\frac{\pi}{3}=\frac{\overline{AH}}{\overline{BH}}=\frac{\frac{3}{2}a}{\frac{2}{3}b}=\sqrt{3}$, $a=\frac{4\sqrt{3}}{9}b$

따라서 직선 OA의 기울기는 $-\frac{a}{b}$이고, 직선 OB의 기울기는 $\frac{3a}{2b}$이므로 직선 OA의 기울기와 직선 OB의 기울기의 곱은

$-\frac{a}{b}\times\frac{3a}{2b}=-\frac{3a^2}{2b^2}=-\frac{3}{2b^2}\times\left(\frac{4\sqrt{3}}{9}b\right)^2=-\frac{8}{9}$

답 ⑤

13

수열 $\{a_n\}$이 $a_1=2$, $a_n a_{n+1}=(-1)^n$을 만족시키므로 각 항을 차례로 구하면

$a_1a_2=-1$에서 $a_2=-\frac{1}{2}$

$a_2a_3=1$에서 $a_3=-2$

$a_3a_4=-1$에서 $a_4=\frac{1}{2}$

$a_4a_5=1$에서 $a_5=2$

$\vdots$

$a_1=2$이므로 $b_1=1-2$

$a_2=-\frac{1}{2}$이므로 $b_2=2-\left(-\frac{1}{2}\right)=2+\frac{1}{2}$

$a_3=-2$이므로 $b_3=3-(-2)=3+2$

$a_4=\frac{1}{2}$이므로 $b_4=4-\frac{1}{2}$

$a_5=2$이므로 $b_5=5-2$

$\vdots$

따라서

$$b_n=\begin{cases} n-2 & (n=4m-3) \\ n+\frac{1}{2} & (n=4m-2) \\ n+2 & (n=4m-1) \\ n-\frac{1}{2} & (n=4m) \end{cases} \text{ (단, } m\text{은 자연수)}$$

자연수 k에 대하여 b_{2k}는 수열 $\{b_n\}$의 짝수번째 항을 의미하므로

$$b_{2k}=\begin{cases} 2k+\frac{1}{2} & (2k=4m-2) \\ 2k-\frac{1}{2} & (2k=4m) \end{cases} \text{ (단, } m\text{은 자연수)}$$

$$b_{2k}+b_{2k+2}=\left(2k+\frac{1}{2}\right)+\left(2k+2-\frac{1}{2}\right)=4k+2$$

또는 $b_{2k}+b_{2k+2}=\left(2k-\frac{1}{2}\right)+\left(2k+2+\frac{1}{2}\right)=4k+2$

따라서 $\sum_{k=1}^{10}(b_{2k}+b_{2k+2})=\sum_{k=1}^{10}(4k+2)=4\times\frac{10\times11}{2}+2\times10=240$

답 ⑤

다른 풀이

조건 (가)에 의하여 $a_2=-\frac{1}{2}$이고

자연수 n에 대하여

$a_{2n}a_{2n+1}=(-1)^{2n}=1$, $a_{2n+1}a_{2n+2}=(-1)^{2n+1}=-1$이므로

$a_{2n+2}=\frac{-1}{a_{2n+1}}=-a_{2n}$을 만족시킨다.

따라서 $a_{2n}=\frac{(-1)^n}{2}$

조건 (나)에 의하여 $a_{2n}+b_{2n}=2n$에서

$b_{2n}=2n-a_{2n}=2n-\frac{(-1)^n}{2}$이므로

$$\sum_{k=1}^{10}(b_{2k}+b_{2k+2})=\sum_{k=1}^{10}\left\{2k-\frac{(-1)^k}{2}+2k+2-\frac{(-1)^{k+1}}{2}\right\}$$

$$=\sum_{k=1}^{10}(4k+2)$$

$$=240$$

14

ㄱ. $f(x)+xf'(x)=-4x^3+6x$에서 $\{xf(x)\}'=-4x^3+6x$이므로

$xf(x)=\int(-4x^3+6x)\,dx$

$=-x^4+3x^2+C$ (단, C는 적분상수) …… ㉠

㉠의 양변에 $x=0$을 대입하면

$0\times f(0)=C$, 즉 $C=0$

$C=0$을 ㉠에 대입하면

$xf(x)=-x^4+3x^2$

$f(x)$가 다항함수이므로 $f(x)=-x^3+3x$

따라서 $f(-1)=-2$ (참)

ㄴ. $f'(x)=-3x^2+3=-3(x+1)(x-1)$

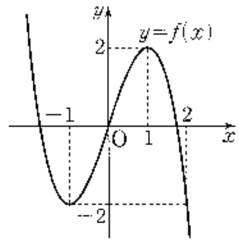
$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=1$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘	극소	↗	극대	↘

함수 $f(x)$는 $x=-1$에서 극소이고, $x=1$에서 극대이다.

$f(-1)=-2$, $f(1)=2$이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 그림과 같다.



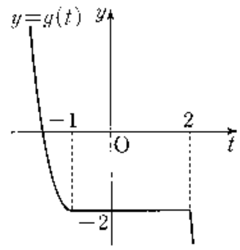
$f(x)=-2$에서

$-x^3+3x=-2$

$(x+1)^2(x-2)=0$

$x=-1$ 또는 $x=2$

함수 $g(t)=\begin{cases} f(t) & (t\le-1 \text{ 또는 } t\ge2) \\ f(-1) & (-1<t<2) \end{cases}$이므로 함수 $y=g(t)$의 그래프는 그림과 같다.



따라서 함수 $g(t)$는 $t=2$에서만 미분가능하지 않다. (참)

ㄷ. $|f(t)-g(t)|=\begin{cases} 0 & (t\le-1 \text{ 또는 } t\ge2) \\ f(t)+2 & (-1<t<2) \end{cases}$

따라서 $|f(t)-g(t)|$는 $t=1$일 때 최댓값 $f(1)+2=2+2=4$를 갖는다. (참)

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

답 ⑤

15

첫째항이 2이고 공차가 3인 등차수열 $\{a_n\}$의 일반항은 $a_n=3n-1$이므로 집합 A의 원소는 3으로 나눈 나머지가 2인 자연수로만 이루어져 있다.

한편, 수열 $\{b_n\}$의 일반항은 $b_n=2n-1$이므로 수열 $\{b_n\}$의 각 항 중에서 3으로 나눈 나머지가 2가 아닌 수가 집합 $B-A$의 원소가 된다.

(i) $n=3k-2$ (k는 자연수)일 때

$b_{3k-2}=2(3k-2)-1$에서

$2(3k-2)-1=6k-5=3(2k-1)-2$이므로

$n=3k-2$일 때 b_n은 3으로 나눈 나머지가 1인 자연수이다.

따라서 b_{3k-2}는 집합 $B-A$의 원소이다.

(ii) $n=3k-1$ (k는 자연수)일 때

$b_{3k-1}=2(3k-1)-1$에서

$2(3k-1)-1=6k-3=3(2k-1)$이므로

$n=3k-1$일 때 b_n은 3의 배수이다.

따라서 b_{3k-1}은 집합 $B-A$의 원소이다.

(iii) $n=3k$ (k는 자연수)인 때

$b_{3k}=2\times 3k-1$에서

$2\times 3k-1=3\times 2k-1$이므로

$n=3k$일 때 b_n은 3으로 나눈 나머지가 2인 자연수이다.

따라서 b_{3k}는 집합 $B-A$의 원소가 아니다.

(i), (ii), (iii)에서 $B-A=\{b_1, b_2, b_4, b_5, b_7, b_8, \cdots\}$

이때 $d_n=b_{3n-2}+b_{3n-1}$이라 하면 $d_1=b_1+b_2=4$이고

$$\begin{aligned}d_{n+1}-d_n&=(b_{3n+1}+b_{3n+2})-(b_{3n-2}+b_{3n-1})\\&=\{2(3n+1)-1+2(3n+2)-1\}\\&\qquad-\{2(3n-2)-1+2(3n-1)-1\}\\&=(12n+4)-(12n-8)=12\end{aligned}$$

이므로 수열 $\{d_n\}$은 첫째항이 4이고 공차가 12인 등차수열이다.

이때 수열 $\{d_n\}$의 첫째항부터 제k항까지의 합을 S_k라 하면

$S_k=\dfrac{k\{2\times 4+12(k-1)\}}{2}>140$에서

$k(12k-4)>280$, $3k^2-k-70>0$, $(3k+14)(k-5)>0$

$k>0$에서 $k>5$이므로 부등식을 만족시키는 자연수 k의 최솟값은 6이다.

이때 $S_6=(b_1+b_2)+(b_4+b_5)+\cdots+(b_{16}+b_{17})=\sum_{k=1}^{12}c_k=204$

한편, $b_{17}=2\times 17-1=33$에서 $S_6-b_{17}=171$이다. 집합 $B-A$에 속하는 모든 원소를 작은 것부터 크기순으로 나열할 때, 첫번째 원소부터 n번째 원소까지의 합이 처음으로 140보다 큰 경우는

$b_1+b_2+b_4+b_5+\cdots+b_{16}=\sum_{k=1}^{11}c_k$인 경우이므로 자연수 n의 최솟값은 11이다.

답 ①

다른 풀이

조건을 만족시키는 집합 $B-A$의 원소는 $b_1, b_2, b_4, b_5, b_7, b_8, \cdots$이다. 수열 $\{b_n\}$의 첫째항부터 제$3n$항까지의 합에서 수열 $\{b_{3n}\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 뺀 것을 S_n이라 하자.

수열 $\{b_{3n}\}$은 첫째항이 $b_3=5$이고 공차가 6인 등차수열이므로

$$\begin{aligned}S_n&=\sum_{k=1}^{3n}b_k-\sum_{k=1}^{n}b_{3k}\\&=\frac{3n\{2+2(3n-1)\}}{2}-\frac{n\{10+6(n-1)\}}{2}=\frac{18n^2}{2}-\frac{6n^2+4n}{2}\\&=6n^2-2n=2n(3n-1)\end{aligned}$$

$2n(3n-1)>140$에서 $3n^2-n-70>0$이고

$(3n+14)(n-5)>0$에서 n은 자연수이므로 $n>5$이고, 자연수 n의 최솟값은 6이다.

이때 $S_6=b_1+b_2+b_4+b_5+\cdots+b_{16}+b_{17}=\sum_{k=1}^{12}c_k=204$이고

$b_{17}=2\times 17-1=33$이므로

$b_1+b_2+b_4+b_5+\cdots+b_{16}=\sum_{k=1}^{11}c_k=171>140$이 성립한다.

따라서 집합 $B-A$에 속하는 모든 원소를 작은 것부터 크기순으로 나열할 때, 첫번째 원소부터 n번째 원소까지의 합이 처음으로 140보다 큰 경우는 $b_1+b_2+b_4+b_5+\cdots+b_{16}=\sum_{k=1}^{11}c_k$인 경우이므로 자연수 n의 최솟값은 11이다.

16

$\sum_{k=1}^{10}(k+2a_k)=\sum_{k=1}^{10}k+2\sum_{k=1}^{10}a_k=\dfrac{10\times 11}{2}+2\times 21=97$

답 97

17

$f(x)=\int(3x^2+2x+a)\,dx=x^3+x^2+ax+C$ (C는 적분상수)이고,

함수 $f(x)$는 삼차함수이므로 $x=0$에서 연속이고 미분가능하다.

$\lim_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=2$에서 $x\to 0$일 때 (분모)$\to 0$이고 극한값이 존재하므로

(분자)$\to 0$이어야 한다.

$\lim_{x\to 0}f(x)=f(0)=0$

즉, $C=0$이고 $f(x)=x^3+x^2+ax$

또한 $\lim_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=\lim_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=f'(0)=2$이므로

$f'(x)=3x^2+2x+a$에서 $a=2$

따라서 $f(x)=x^3+x^2+2x$이므로 $f(2)=8+4+4=16$

답 16

18

조건 (가)에서 $\log_8 a+\log_8 b=\log_2 12-\log_2 3$이므로

$\log_8 ab=\log_2 4$, $\log_8 ab=2$

$ab=64$ ...... ㉠

조건 (나)에서 $\log_3 16\times\log_2 9=\dfrac{4\log 2}{\log 3}\times\dfrac{2\log 3}{\log 2}=8$이므로

$\log_2 a\times\log_2 b=8$ ...... ㉡

㉠에서 $b=\dfrac{64}{a}$이므로 이를 ㉡에 대입하면

$\log_2 a\times\log_2\dfrac{64}{a}=8$, $\log_2 a\times(6-\log_2 a)=8$

$(\log_2 a)^2-6\log_2 a+8=0$, $(\log_2 a-2)(\log_2 a-4)=0$

$\log_2 a=2$ 또는 $\log_2 a=4$

$a=4$ 또는 $a=16$

$a=4$일 때 $b=16$이고, $a=16$일 때 $b=4$이다.

따라서 $a+b=4+16=20$

답 20

19

$f'(x)=x^2-2ax+1$에서 함수 $f(x)$가 극값이 존재하지 않으려면 이차방정식 $f'(x)=0$이 중근 또는 허근을 가져야 한다.

즉, 이차방정식 $x^2-2ax+1=0$의 판별식을 D라 하면

$\dfrac{D}{4}=(-a)^2-1\le 0$, $a^2\le 1$, $-1\le a\le 1$

따라서 정수 a의 값은 -1, 0, 1이고, 그 개수는 3이다.

답 3

20

조건 (가)에서 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=2x$가 만나는 두 점의 x좌표를 각각 α, β $(\alpha<\beta)$라 하자.

또 함수 $|f(x)-2x|$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하므로

$f(x)-2x=(x-\alpha)^2(x-\beta)^2$, 즉 $f(x)=(x-\alpha)^2(x-\beta)^2+2x$

로 놓을 수 있다.

조건 (나)에서

$$\lim_{x\to 0}\frac{(x-\alpha)^2(x-\beta)^2}{x^2}=16 \quad \cdots\cdots ㉠$$

$x\to 0$일 때 (분모) $\to 0$이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\to 0$이어야 한다.

즉, $\lim_{x\to 0}(x-\alpha)^2(x-\beta)^2=\alpha^2\beta^2=0$에서 $\alpha=0$ 또는 $\beta=0$

(i) $\alpha=0$일 때, ㉠에서

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2(x-\beta)^2}{x^2}=\lim_{x\to 0}(x-\beta)^2=\beta^2=16$$

$\beta>0$이므로 $\beta=4$이고 $f(x)=x^2(x-4)^2+2x$

이때 $f(1)=11<15$이므로 조건 (다)를 만족시키지 못한다.

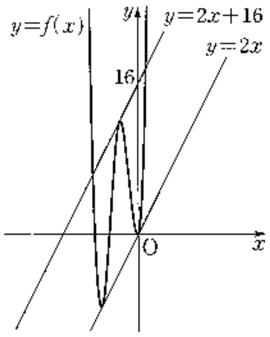
(ii) $\beta=0$일 때, ㉠에서

$$\lim_{x\to 0}\frac{(x-\alpha)^2x^2}{x^2}=\lim_{x\to 0}(x-\alpha)^2=\alpha^2=16$$

$\alpha<0$이므로 $\alpha=-4$이고 $f(x)=x^2(x+4)^2+2x$

이때 $f(1)=27>15$이므로 조건 (다)를 만족시킨다.

(i), (ii)에서



$f(x)=x^2(x+4)^2+2x$

$\quad=x^4+8x^3+16x^2+2x$

$f'(x)=4x^3+24x^2+32x+2$

$f'(x)=2$에서

$4x^3+24x^2+32x+2=2$

$4x(x+4)(x+2)=0$

$x=-4$ 또는 $x=-2$ 또는 $x=0$

$f(-2)=12$이므로 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(-2,\ 12)$에서의 접선의 방정식은

$y-12=2(x+2)$, 즉 $y=2x+16$

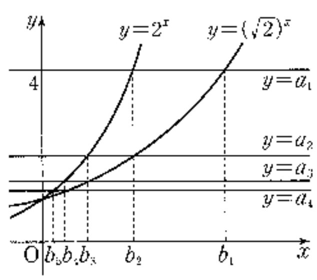
곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=2x+k$가 서로 다른 네 점에서 만나도록 하는 k의 값의 범위는

$0<k<16$

따라서 정수 k는 1, 2, 3, $\cdots$, 15이고, 그 개수는 15이다.

답 15

21



위의 그림에서 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$의 각 항을 구하면 다음과 같다.

(i) 직선 $y=a_1=4$가 곡선 $y=(\sqrt{2})^x$과 만나는 점의 x좌표가 b_1이므로

$4=(\sqrt{2})^x$에서 $x=b_1=4$이고 곡선 $y=2^x$과 만나는 점의 x좌표가 b_2이므로 $4=2^x$에서 $x=b_2=2$

직선 $y=a_2$가 곡선 $y=(\sqrt{2})^x$과 만나는 점의 x좌표가 b_2이므로 $b_2=2$에서 $a_2=(\sqrt{2})^2=2$

따라서 $\dfrac{a_1}{b_1}=\dfrac{4}{4}=1$, $\dfrac{a_2}{b_2}=\dfrac{2}{2}=1$

(ii) 직선 $y=a_2=2$가 곡선 $y=2^x$과 만나는 점의 x좌표가 b_3이므로

$2=2^x$에서 $x=b_3=1$

$a_3=(\sqrt{2})^1=\sqrt{2}$

따라서 $\dfrac{a_3}{b_3}=\dfrac{\sqrt{2}}{1}=\sqrt{2}=2^{\frac{1}{2}}$

(iii) 직선 $y=a_3=\sqrt{2}$가 곡선 $y=2^x$과 만나는 점의 x좌표가 b_4이므로

$\sqrt{2}=2^x$에서 $x=b_4=\dfrac{1}{2}=2^{-1}$

$a_4=(\sqrt{2})^{\frac{1}{2}}=2^{\frac{1}{4}}$

따라서 $\dfrac{a_4}{b_4}=\dfrac{2^{\frac{1}{4}}}{2^{-1}}=2^{\frac{5}{4}}$

(iv) 직선 $y=a_4=2^{\frac{1}{4}}$이 곡선 $y=2^x$과 만나는 점의 x좌표가 b_5이므로

$2^{\frac{1}{4}}=2^x$에서 $x=b_5=\dfrac{1}{4}=2^{-2}$

$a_5=(\sqrt{2})^{\frac{1}{4}}=2^{\frac{1}{8}}$

따라서 $\dfrac{a_5}{b_5}=\dfrac{2^{\frac{1}{8}}}{2^{-2}}=2^{\frac{17}{8}}$

(i)~(iv)에서

$$\sum_{n=1}^{5}\log_2\frac{a_n}{b_n}=\log_2\frac{a_1}{b_1}+\log_2\frac{a_2}{b_2}+\log_2\frac{a_3}{b_3}+\log_2\frac{a_4}{b_4}+\log_2\frac{a_5}{b_5}$$

$$=\log_2\left(\frac{a_1}{b_1}\times\frac{a_2}{b_2}\times\frac{a_3}{b_3}\times\frac{a_4}{b_4}\times\frac{a_5}{b_5}\right)$$

$$=\log_2\left(1\times1\times2^{\frac{1}{2}}\times2^{\frac{5}{4}}\times2^{\frac{17}{8}}\right)$$

$$=\log_2 2^{\frac{1}{2}+\frac{5}{4}+\frac{17}{8}}=\frac{31}{8}$$

따라서 $p=8$, $q=31$이므로 $p+q=8+31=39$

답 39

다른 풀이

$a_n=(\sqrt{2})^{b_n}=2^{b_{n+1}}$에서 $2^{\frac{1}{2}b_n}=2^{b_{n+1}}$이므로

$b_{n+1}=\dfrac{1}{2}b_n$이고

$a_1=(\sqrt{2})^{b_1}=4$에서 $b_1=4$

따라서 수열 $\{b_n\}$은 첫째항이 4이고 공비가 $\dfrac{1}{2}$인 등비수열이다.

즉, $b_n=4\times\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}=2^{3-n}$

한편, $2^{b_{n+1}}=a_n$에서 $b_{n+1}=2^{2-n}$이므로 $a_n=2^{2^{2-n}}$

따라서 $\log_2\dfrac{a_n}{b_n}=\log_2\dfrac{2^{2^{2-n}}}{2^{3-n}}=2^{2-n}+(n-3)$

$$\sum_{n=1}^{5}(2^{2-n}+n-3)=\frac{2\times\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^5\right\}}{1-\frac{1}{2}}+\frac{5\times6}{2}-3\times5$$

$$=4-4\times\left(\frac{1}{2}\right)^5+15-15$$

$$=4-\frac{1}{8}=\frac{31}{8}$$

즉, $p=8$, $q=31$이므로 $p+q=8+31=39$

22

방정식 $f(x)=0$의 두 실근을 α, β $(\alpha<\beta)$라 하면

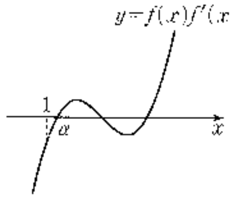
$f(x)=(x-\alpha)(x-\beta)$, $f'(x)=2x-\alpha-\beta$이므로

$f(x)f'(x)=2(x-\alpha)(x-\beta)\left(x-\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right)$

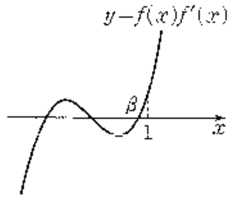
이때 $\alpha<\dfrac{\alpha+\beta}{2}<\beta$이다.

(i) $\alpha>1$ 또는 $\beta<1$일 때

함수 $y=f(x)f'(x)$의 그래프의 개형은 그림과 같다.

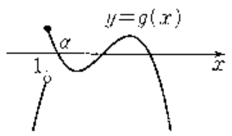


[$\alpha>1$일 때]

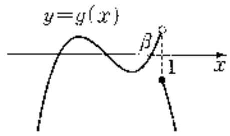


[$\beta<1$일 때]

함수 $y=g(x)$의 그래프의 개형은 그림과 같다.



[$\alpha>1$일 때]

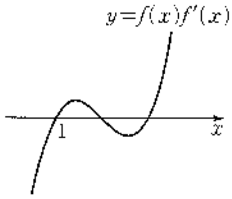


[$\beta<1$일 때]

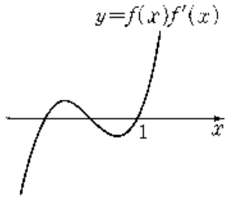
이때 함수 $g(x)$는 $x=1$에서 불연속이므로 조건 (나)를 만족시키지 못한다.

(ii) $\alpha=1$ 또는 $\beta=1$일 때

함수 $y=f(x)f'(x)$의 그래프의 개형은 그림과 같다.

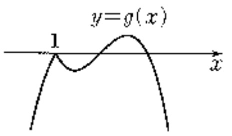


[$\alpha=1$일 때]

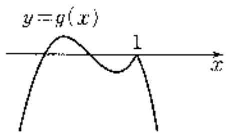


[$\beta=1$일 때]

함수 $y=g(x)$의 그래프의 개형은 그림과 같다.



[$\alpha=1$일 때]

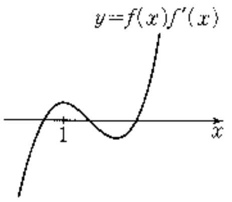


[$\beta=1$일 때]

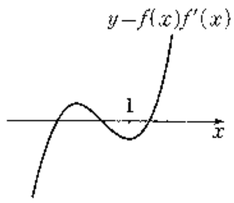
함수 $g(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이므로 조건 (나)를 만족시키지만 $h(k)=2$이고 $\lim\limits_{t\to k-}h(t)>\lim\limits_{t\to k+}h(t)$를 만족시키는 실수 k가 존재하지 않으므로 조건 (다)를 만족시키지 못한다.

(iii) $\alpha<1<\dfrac{\alpha+\beta}{2}$ 또는 $\dfrac{\alpha+\beta}{2}<1<\beta$일 때

함수 $y=f(x)f'(x)$의 그래프의 개형은 그림과 같다.

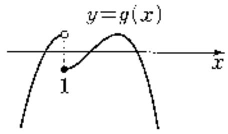


$\left[\alpha<1<\dfrac{\alpha+\beta}{2}\text{일 때}\right]$

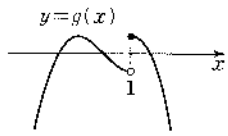


$\left[\dfrac{\alpha+\beta}{2}<1<\beta\text{일 때}\right]$

함수 $y=g(x)$의 그래프의 개형은 그림과 같다.



$\left[\alpha<1<\dfrac{\alpha+\beta}{2}\text{일 때}\right]$

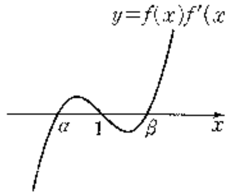


$\left[\dfrac{\alpha+\beta}{2}<1<\beta\text{일 때}\right]$

이때 함수 $g(x)$는 $x=1$에서 불연속이므로 조건 (나)를 만족시키지 못한다.

(iv) $\dfrac{\alpha+\beta}{2}=1$일 때

함수 $y=f(x)f'(x)$의 그래프의 개형은 그림과 같다.

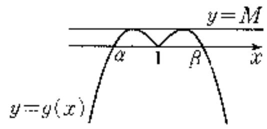


$i(x)=f(x+1)f'(x+1)$이라 하면

$i(x)=2x(x-\alpha+1)(x+\alpha-1)$이므로 $i(-x)=-i(x)$이다.

즉, 함수 $y=i(x)$의 그래프는 원점에 대하여 대칭이므로 $i(x)$의 극댓값을 M이라 하면 $i(x)$의 극솟값은 $-M$이다.

따라서 함수 $y=f(x)f'(x)$의 그래프는 점 $(1, 0)$에 대하여 대칭이고, 극댓값은 M, 극솟값은 $-M$이므로 함수 $y=g(x)$의 그래프의 개형은 그림과 같다.



함수 $g(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이므로 조건 (나)를 만족시킨다.

또 $h(k)=2$이고 $\lim\limits_{t\to k-}h(t)>\lim\limits_{t\to k+}h(t)$를 만족시키는 실수 $k=M$이 존재하므로 조건 (다)를 만족시킨다.

(i)~(iv)에서 $\dfrac{\alpha+\beta}{2}=1$이므로 $f(x)=x^2-2x+a$ (a는 상수)로 놓을 수 있다.

$f'(x)=2(x-1)$이므로

$x<1$일 때 $g(x)=2(x-1)(x^2-2x+a)$

$g(-1)=2\times(-2)\times(3+a)=20$에서 $a=-8$이므로

$g(x)=2(x-1)(x^2-2x-8)$

$\quad=2(x+2)(x-1)(x-4)$

한편, $x\geq1$일 때 $g(x)=-2(x+2)(x-1)(x-4)$이므로

$g(x)=\begin{cases}2(x+2)(x-1)(x-4) & (x<1)\\ -2(x+2)(x-1)(x-4) & (x\geq1)\end{cases}$

따라서

$g(0)=2\times2\times(-1)\times(-4)=16$,

$g(3)=-2\times5\times2\times(-1)=20$

이므로

$g(0)\times g(3)=16\times20$

$\quad=320$

답 320

23

$V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2$이므로

$V(X)=12-3^2=3$

답 ③

24

(i) 2□□□□3인 경우

숫자 2, 3, 5, 5를 일렬로 나열하는 경우의 수는

$\frac{4!}{2!}=12$

(ii) 3□□□□2인 경우

숫자 2, 3, 5, 5를 일렬로 나열하는 경우의 수는

$\frac{4!}{2!}=12$

(iii) 5□□□□5인 경우

숫자 2, 2, 3, 3을 일렬로 나열하는 경우의 수는

$\frac{4!}{2!\times 2!}=6$

(i), (ii), (iii)에서 구하는 자연수의 개수는

$12+12+6=30$

답 ②

25

$(1+x)^n$의 전개식의 일반항은 ${}_nC_r x^r$ $(r=0, 1, 2, \cdots, n)$이므로

x의 계수는 ${}_nC_1$

x^2의 계수는 ${}_nC_2$

x^3의 계수는 ${}_nC_3$

이 세 수는 이 순서대로 등차수열을 이루므로

${}_nC_2=\frac{{}_nC_1+{}_nC_3}{2}$

$2\times {}_nC_2={}_nC_1+{}_nC_3$

$2\times\frac{n(n-1)}{2}=n+\frac{n(n-1)(n-2)}{3\times 2\times 1}$

이를 정리하면

$n^2-9n+14=0$

$(n-2)(n-7)=0$

n은 3 이상의 자연수이므로 구하는 n의 값은 7이다.

답 ④

26

주머니 A에서 꺼낸 2개의 공이 같은 색인 사건을 X, 주머니 B에서 꺼낸 2개의 공이 모두 흰 공인 사건을 Y라 하면 구하는 확률은 $P(X\cap Y)+P(X^C\cap Y)$이다.

(i) 주머니 A에서 꺼낸 2개의 공이 같은 색인 경우

주머니 A에서 임의로 흰 공 2개를 동시에 꺼내거나 검은 공 2개를 동시에 꺼낼 확률은

$P(X)=\frac{{}_3C_2+{}_2C_2}{{}_5C_2}=\frac{2}{5}$

주머니 B에 흰 공 1개를 넣은 후 주머니 B에서 임의로 흰 공 2개를 동시에 꺼낼 확률은

$P(Y|X)=\frac{{}_5C_2}{{}_6C_2}=\frac{2}{3}$

이때

$P(X\cap Y)=P(X)P(Y|X)$

$=\frac{2}{5}\times\frac{2}{3}=\frac{4}{15}$

(ii) 주머니 A에서 꺼낸 2개의 공이 다른 색인 경우

주머니 A에서 임의로 흰 공 1개, 검은 공 1개를 동시에 꺼낼 확률은

$P(X^C)=\frac{{}_3C_1\times{}_2C_1}{{}_5C_2}=\frac{3}{5}$

주머니 B에 검은 공 1개를 넣은 후 주머니 B에서 임의로 흰 공 2개를 동시에 꺼낼 확률은

$P(Y|X^C)=\frac{{}_4C_2}{{}_6C_2}=\frac{2}{5}$

이때

$P(X^C\cap Y)=P(X^C)P(Y|X^C)$

$=\frac{3}{5}\times\frac{2}{5}=\frac{6}{25}$

(i), (ii)에서

$P(X\cap Y)+P(X^C\cap Y)=\frac{4}{15}+\frac{6}{25}$

$=\frac{38}{75}$

답 ②

27

공을 꺼낸 후 다시 넣는 시행을 반복하므로 매번 이벤트에 참여한 고객이 상자에서 흰 공을 꺼낼 확률은 $\frac{1}{7}$로 일정하다.

따라서 이벤트에 참여하여 흰 공을 뽑은 사람의 수를 확률변수 X라 하면 확률변수 X는 이항분포 $B\left(294, \frac{1}{7}\right)$을 따른다.

이때 $E(X)=294\times\frac{1}{7}=42$, $\sigma(X)=\sqrt{294\times\frac{1}{7}\times\frac{6}{7}}=6$이고 294는 충분히 크므로 확률변수 X는 근사적으로 정규분포 $N(42, 6^2)$을 따른다.

$Z=\frac{X-42}{6}$라 하면 확률변수 Z는 표준정규분포 $N(0, 1)$을 따르므로 구하는 확률은

$P(30\le X\le 60)=P\left(\frac{30-42}{6}\le Z\le\frac{60-42}{6}\right)$

$=P(-2\le Z\le 3)$

$=P(-2\le Z\le 0)+P(0\le Z\le 3)$

$=P(0\le Z\le 2)+P(0\le Z\le 3)$

$=0.4772+0.4987=0.9759$

답 ⑤

28

(i) 네 명의 학생 A, B, C, D가 받는 볼펜의 개수를 각각 a, b, c, d (a, b, c, d는 자연수)라 하면

$a+b+c+d=16$ ······ ㉠

조건 (나)에 의하여 a, b는 홀수, c, d는 짝수이므로

$a=2a'+1$, $b=2b'+1$, $c=2c'+2$, $d=2d'+2$

(a', b', c', d'은 음이 아닌 정수)

로 놓을 수 있다.

㉠에서

$(2a'+1)+(2b'+1)+(2c'+2)+(2d'+2)=16$

$a'+b'+c'+d'=5$ ...... ㉡

방정식 ㉡을 만족시키는 음이 아닌 정수 a', b', c', d'의 모든 순서쌍 (a', b', c', d')의 개수는

${}_4H_5={}_{4+5-1}C_5={}_8C_5={}_8C_3=56$

(ii) 네 명의 학생 A, B, C, D가 받는 수정테이프의 개수를 각각 p, q, r, s (p, q, r, s는 음이 아닌 정수)라 하면

$p+q+r+s=7$ ...... ㉢

조건 (다)에 의하여 $r=s+3$이므로 ㉢에서

$p+q+2s=4$

ⓐ $s=0$일 때

$p+q=4$ ...... ㉣

방정식 ㉣을 만족시키는 음이 아닌 정수 p, q의 모든 순서쌍 (p, q)의 개수는

${}_2H_4={}_{2+4-1}C_4={}_5C_4={}_5C_1=5$

ⓑ $s=1$일 때

$p+q=2$ ...... ㉤

방정식 ㉤을 만족시키는 음이 아닌 정수 p, q의 모든 순서쌍 (p, q)의 개수는

${}_2H_2={}_{2+2-1}C_2={}_3C_2={}_3C_1=3$

ⓒ $s=2$일 때

$p+q=0$ ...... ㉥

이때 $p=0$, $q=0$이므로 방정식 ㉥을 만족시키는 음이 아닌 정수 p, q의 순서쌍은 $(0, 0)$이므로 그 개수는 1이다.

ⓐ, ⓑ, ⓒ에 의하여 네 명의 학생 A, B, C, D에게 수정테이프를 나누어 주는 경우의 수는

$5+3+1=9$

(i), (ii)에서 구하는 경우의 수는

$56\times 9=504$

답 ③

29

평균이 m, 표준편차가 20, 표본의 크기가 n, 표본평균이 $\overline{x_1}$일 때 모평균 m에 대한 신뢰도 95 %의 신뢰구간은

$\overline{x_1}-1.96\times\dfrac{20}{\sqrt{n}}\le m\le\overline{x_1}+1.96\times\dfrac{20}{\sqrt{n}}$

따라서 $a=\overline{x_1}-1.96\times\dfrac{20}{\sqrt{n}}$, $b=\overline{x_1}+1.96\times\dfrac{20}{\sqrt{n}}$ ...... ㉠

또 $4n$개를 다시 임의추출하여 구한 표본평균이 $\overline{x_2}$이므로 모평균 m에 대한 신뢰도 99 %의 신뢰구간은

$\overline{x_2}-2.58\times\dfrac{20}{\sqrt{4n}}\le m\le\overline{x_2}+2.58\times\dfrac{20}{\sqrt{4n}}$이고

$\overline{x_2}=600$에서 $\overline{x_2}=\overline{x_1}+2$이므로 $\overline{x_1}=598$ ...... ㉡

$c=2.58\times\dfrac{20}{\sqrt{4n}}$

㉠에서 $b-a=2\times1.96\times\dfrac{20}{\sqrt{n}}$이므로

$-a+b-c=5.26$에서

$2\times1.96\times\dfrac{20}{\sqrt{n}}-2.58\times\dfrac{20}{\sqrt{4n}}=5.26$

$\dfrac{10}{\sqrt{n}}(4\times1.96-2.58)=5.26$

$\dfrac{10\times5.26}{\sqrt{n}}=5.26$, $\sqrt{n}=10$

따라서 $n=100$ ...... ㉢

㉡, ㉢을 ㉠에 대입하면

$a=598-1.96\times\dfrac{20}{\sqrt{100}}=598-3.92=594.08$

$b=598+1.96\times\dfrac{20}{\sqrt{100}}=598+3.92=601.92$

이므로 신뢰구간 $594.08\le m\le 601.92$에 포함되는 자연수는 595, 596, $\cdots$, 601로 그 개수는 7이다.

따라서 $n+k=100+7=107$

답 107

30

$a\le b$이고 $c\le b$인 사건을 X, b가 홀수인 사건을 Y라 하면 구하는 확률은 $\mathrm{P}(Y|X)$이다.

(i) $b=1$인 경우

세 사람 A, B, C가 꺼낸 공에 적혀 있는 수 a, b, c가 각각 1, 1, 1일 확률은

$\dfrac{3}{6}\times\dfrac{2}{5}\times\dfrac{1}{4}=\dfrac{1}{20}$

(ii) $b=2$인 경우

세 사람 A, B, C가 꺼낸 공에 적혀 있는 수 a, b, c가 각각 1, 2, 1 또는 1, 2, 2 또는 2, 2, 1일 확률은

$\dfrac{3}{6}\times\dfrac{2}{5}\times\dfrac{2}{4}+\dfrac{3}{6}\times\dfrac{2}{5}\times\dfrac{1}{4}+\dfrac{2}{6}\times\dfrac{1}{5}\times\dfrac{3}{4}=\dfrac{1}{5}$

(iii) $b=3$인 경우

세 사람 A, B, C가 꺼낸 공에 적혀 있는 수 a, b, c가 각각 1, 3, 1 또는 1, 3, 2 또는 2, 3, 1 또는 2, 3, 2일 확률은

$\dfrac{3}{6}\times\dfrac{1}{5}\times\dfrac{2}{4}+\dfrac{3}{6}\times\dfrac{1}{5}\times\dfrac{2}{4}+\dfrac{2}{6}\times\dfrac{1}{5}\times\dfrac{3}{4}+\dfrac{2}{6}\times\dfrac{1}{5}\times\dfrac{1}{4}=\dfrac{1}{6}$

(i), (ii), (iii)에서

$\mathrm{P}(X)=\dfrac{1}{20}+\dfrac{1}{5}+\dfrac{1}{6}=\dfrac{5}{12}$,

$\mathrm{P}(X\cap Y)=\dfrac{1}{20}+\dfrac{1}{6}=\dfrac{13}{60}$

이므로

$$\mathrm{P}(Y|X)=\dfrac{\mathrm{P}(X\cap Y)}{\mathrm{P}(X)}=\dfrac{\frac{13}{60}}{\frac{5}{12}}=\dfrac{13}{25}$$

따라서 $p=25$, $q=13$이므로

$p+q=25+13=38$

답 38

실전 모의고사 2회 본문 126~137쪽

01 ④	02 ②	03 ⑤	04 ①	05 ②
06 ③	07 ④	08 ③	09 ②	10 ④
11 ⑤	12 ⑤	13 ⑤	14 ①	15 ②
16 7	17 127	18 124	19 581	20 42
21 14	22 109	23 ⑤	24 ①	25 ⑤
26 ②	27 ③	28 ④	29 25	30 61

01

$9^{\sqrt{2}}\times 3^{1-2\sqrt{2}}=(3^2)^{\sqrt{2}}\times 3^{1-2\sqrt{2}}=3^{2\sqrt{2}}\times 3^{1-2\sqrt{2}}=3^{2\sqrt{2}+(1-2\sqrt{2})}=3$

답 ④

02

$f(x)=(3x^2-2)(x^2+2x+5)$에서

$f'(x)=6x(x^2+2x+5)+(3x^2-2)(2x+2)$

따라서 $f'(1)=6\times 8+1\times 4=52$

답 ②

03

$\lim\limits_{x\to -1-} f(x)=2$, $\lim\limits_{x\to 2+} f(x)=3$

따라서 $\lim\limits_{x\to -1-} f(x)+\lim\limits_{x\to 2+} f(x)=2+3=5$

답 ⑤

04

등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공차를 d라 하면

$a_3=8$에서 $a+2d=8$ …… ㉠

$a_2+a_6=\frac{1}{2}a_{15}$에서 $(a+d)+(a+5d)=\frac{1}{2}(a+14d)$

$4a+12d=a+14d$, $3a=2d$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=2$, $d=3$

즉, 수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 2이고 공차가 3인 등차수열이므로

$a_k=2+(k-1)\times 3=3k-1$

$a_k=3k-1>100$에서 $k>\frac{101}{3}$

따라서 조건을 만족시키는 자연수 k의 최솟값은 34이다.

답 ①

05

$\sum\limits_{k=1}^{10}(a_k+2b_k)=30$에서

$\sum\limits_{k=1}^{10}a_k+2\sum\limits_{k=1}^{10}b_k=30$ …… ㉠

$\sum\limits_{k=1}^{10}\left(b_k-\frac{1}{2}\right)=\frac{11}{2}$에서

$\sum\limits_{k=1}^{10}b_k-\frac{1}{2}\times 10=\frac{11}{2}$, $\sum\limits_{k=1}^{10}b_k=\frac{11}{2}+5=\frac{21}{2}$ …… ㉡

㉡을 ㉠에 대입하면 $\sum\limits_{k=1}^{10}a_k+21=30$

따라서 $\sum\limits_{k=1}^{10}a_k=30-21=9$

답 ②

06

시각 $t=1$에서 $t=3$까지 점 P의 위치의 변화량은

$\int_1^3 v(t)\,dt=\int_1^3(2t^2+at+2)\,dt=\left[\frac{2}{3}t^3+\frac{a}{2}t^2+2t\right]_1^3$

$=\left(18+\frac{9}{2}a+6\right)-\left(\frac{2}{3}+\frac{a}{2}+2\right)=4a+\frac{64}{3}$

이므로 $4a+\frac{64}{3}=\frac{100}{3}$에서 $4a=12$

따라서 $a=3$

답 ③

07

직각삼각형 AOH에서 $\overline{AH}=\sqrt{\overline{OA}^2-\overline{OH}^2}=\sqrt{10^2-6^2}=8$이므로

$\angle AOH=\alpha$라 하면 $\sin\alpha=\frac{4}{5}$, $\cos\alpha=\frac{3}{5}$

직선 l과 x축의 교점을 B라 하면 직각삼각형 AOH와 직각삼각형 ABO는 서로 닮음이므로

$\angle ABO=\angle AOH=\alpha$

이때 $\theta=\pi-\alpha$이므로

$\sin\theta=\sin(\pi-\alpha)=\sin\alpha=\frac{4}{5}$

$\cos\theta=\cos(\pi-\alpha)=-\cos\alpha=-\frac{3}{5}$

따라서 $\sin\theta+\cos\theta=\frac{4}{5}+\left(-\frac{3}{5}\right)=\frac{1}{5}$

답 ④

08

$f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ (a, b, c는 상수)라 하면

$f'(x)=3x^2+2ax+b$

곡선 $y=f(x)$가 점 $(1, 3)$에서 직선 $y=4x-1$에 접하므로

$f(1)=3$, $f'(1)=4$

함수 $f(x)$가 $x=\frac{1}{3}$에서 극소이므로 $f'\left(\frac{1}{3}\right)=0$

$f'(1)=3+2a+b=4$에서 $2a+b=1$ …… ㉠

$f'\left(\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{3}+\frac{2}{3}a+b=0$에서 $2a+3b=-1$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=1$, $b=-1$이므로

$f'(x)=3x^2+2x-1=(3x-1)(x+1)$

$f'(x)=0$에서 $x=\frac{1}{3}$ 또는 $x=-1$이므로 함수 $f(x)$는 $x=-1$에서 극대이다.

한편, $f(x)=x^3+x^2-x+c$이고 $f(1)=3$이므로

$1+1-1+c=3$에서 $c=2$

따라서 $f(x)=x^3+x^2-x+2$이므로 구하는 함수 $f(x)$의 극댓값은

$f(-1)=-1+1-(-1)+2=3$

답 ③

09

$\log_2 f(1)+\log_2(1-3)^2=5$에서 $\log_2 f(1)=3$이므로 $f(1)=8$

$f(1)-8=0$ …… ㉠

또한 $\log_2 f(5)+\log_2(5-3)^2=5$에서 $\log_2 f(5)=3$이므로 $f(5)=8$

$f(5)-8=0$ …… ㉡

㉠, ㉡에서

$f(x)-8=a(x-1)(x-5)$ (a는 양수)

$f(x)=a(x-1)(x-5)+8=a(x-3)^2-4a+8$

이차함수 $f(x)$는 $x=3$에서 최솟값 4를 가져야 하므로

$-4a+8=4$에서 $a=1$

따라서 $f(x)=(x-1)(x-5)+8$이므로

$f(0)=(-1)\times(-5)+8=13$

답 ②

10

$f(0)=5$이므로

$f(x)=ax^3+bx^2+cx+5$ (a, b, c는 상수이고 $a\neq 0$)이라 하면

$$g(x)=\int_{-x}^{x} f(t)\,dt=\int_{-x}^{x}(at^3+bt^2+ct+5)\,dt$$

$$=2\int_0^x (bt^2+5)\,dt=2\left[\frac{b}{3}t^3+5t\right]_0^x=\frac{2b}{3}x^3+10x$$

$g(1)=12$이므로

$\frac{2b}{3}+10=12$, $b=3$

따라서 $g(x)=2x^3+10x$이므로

$$\int_0^2 g(x)\,dx=\int_0^2 (2x^3+10x)\,dx=\left[\frac{1}{2}x^4+5x^2\right]_0^2=8+20=28$$

답 ④

11

함수 $f(x)$의 최댓값과 최솟값은 각각 $a+c$, $-a+c$이므로

조건 (가)에 의하여

$(a+c)+(-a+c)=2c=6$에서 $c=3$

함수 $f(x)$의 주기는 $\frac{2\pi}{|b\pi|}=\frac{2}{b}$

또한 $g(x)=\left|\cos\left(3\pi x-\frac{1}{2}\right)\right|+1=\left|\cos 3\pi\left(x-\frac{1}{6\pi}\right)\right|+1$이므로

함수 $g(x)$의 주기는 $\frac{\pi}{3\pi}=\frac{1}{3}$

조건 (나)에 의하여 두 함수 $f(x)$와 $g(x)$의 주기가 서로 같으므로

$\frac{2}{b}=\frac{1}{3}$에서 $b=6$

즉, $f(x)=a\sin(6\pi x)+3$이고 $f\left(\frac{1}{4}\right)=1$이므로

$f\left(\frac{1}{4}\right)=a\sin\left(\frac{3}{2}\pi\right)+3=-a+3=1$에서 $a=2$

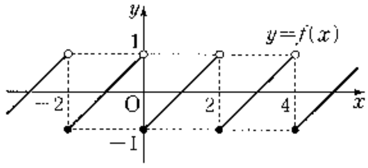
따라서 $f(x)=2\sin(6\pi x)+3$이므로

$f\left(\frac{1}{9}\right)=2\sin\left(\frac{2}{3}\pi\right)+3=2\times\frac{\sqrt{3}}{2}+3=3+\sqrt{3}$

답 ⑤

12

함수 $y=f(x)$의 그래프는 그림과 같다.



ㄱ. $-2\le x<0$일 때, $f(x)=x+1$이므로

$\lim_{x\to 0-} f(x)=\lim_{x\to 0-}(x+1)=1$

$2\le x<4$일 때, $f(x)=x-3$이므로

$\lim_{x\to 2+} f(x)=\lim_{x\to 2+}(x-3)=-1$

그러므로 $\lim_{x\to 0-} f(x)+\lim_{x\to 2+} f(x)=1+(-1)=0$ (참)

ㄴ. 함수 $f(x)$가 $x=2n$ (n은 정수)에서만 불연속이므로 함수 $|f(x)|$가 $x=2n$ (n은 정수)에서 연속이면 실수 전체의 집합에서 연속이다.

앞의 그림에 의하면 모든 정수 n에 대하여

$\lim_{x\to 2n-} f(x)=1$이므로 $\lim_{x\to 2n-}|f(x)|=1$

$\lim_{x\to 2n+} f(x)=-1$이므로 $\lim_{x\to 2n+}|f(x)|=1$

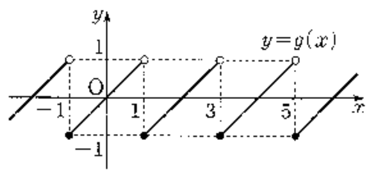
$|f(2n)|=|-1|=1$

즉, $\lim_{x\to 2n}|f(x)|=\lim_{x\to 2n-}|f(x)|=|f(2n)|$이므로 함수 $|f(x)|$는 $x=2n$ (n은 정수)에서 연속이다.

그러므로 함수 $|f(x)|$는 실수 전체의 집합에서 연속이다. (참)

ㄷ. 모든 정수 n에 대하여 함수 $f(x)$는 $x=2n$에서만 불연속이고, 함수 $f(x+1)$은 $x=2n-1$에서만 불연속이므로 함수 $f(x)f(x+1)$이 $x=n$ (n은 정수)에서 연속이면 실수 전체의 집합에서 연속이다.

$g(x)=f(x+1)$이라 하면 $-1\le x<1$일 때 $g(x)=x$이고, 모든 실수 x에 대하여 $g(x)=g(x+2)$이므로 함수 $y=g(x)$의 그래프는 그림과 같다.



정수 n에 대하여

(i) $\lim_{x\to 2n-} f(x)f(x+1)=\lim_{x\to 2n-} f(x)g(x)=1\times 0=0$

$\lim_{x\to 2n+} f(x)f(x+1)=\lim_{x\to 2n+} f(x)g(x)=(-1)\times 0=0$

$f(2n)f(2n+1)=f(2n)g(2n)=(-1)\times 0=0$

즉, 모든 정수 n에 대하여

$\lim_{x\to 2n-} f(x)f(x+1)=\lim_{x\to 2n+} f(x)f(x+1)$

$=f(2n)f(2n+1)$

이므로 함수 $f(x)f(x+1)$은 $x=2n$ (n은 정수)에서 연속이다.

(ii) $\lim_{x\to(2n-1)-} f(x)f(x+1)=\lim_{x\to(2n-1)-} f(x)g(x)=0\times 1=0$

$\lim_{x\to(2n-1)+} f(x)f(x+1)=\lim_{x\to(2n-1)-} f(x)g(x)=0\times(-1)=0$

$f(2n-1)f(2n)=f(2n-1)g(2n-1)=0\times(-1)=0$

즉, 모든 정수 n에 대하여

$\lim_{x\to(2n-1)-} f(x)f(x+1)=\lim_{x\to(2n-1)+} f(x)f(x+1)$

$=f(2n-1)f(2n)$

이므로 함수 $f(x)f(x+1)$은 $x=2n-1$ (n은 정수)에서 연속이다.

(i), (ii)에 의하여 함수 $f(x)f(x+1)$은 $x=n$ (n은 정수)에서 연속이므로 실수 전체의 집합에서 연속이다. (참)

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

답 ⑤

13

두 점 A, B의 좌표는 각각

$A(t,\ \log_2 t)$, $B(t,\ \log_2 16t)$

점 C의 y좌표는 점 A의 y좌표와 같으므로 점 C의 x좌표를 a라 하면

$\log_2 16a=\log_2 t$에서 $16a=t$, 즉 $a=\dfrac{t}{16}$

점 D의 y좌표는 점 B의 y좌표와 같으므로 점 D의 x좌표를 b라 하면

$\log_2 b=\log_2 16t$에서 $b=16t$

즉, $C\left(\dfrac{t}{16},\ \log_2 t\right)$, $D(16t,\ \log_2 16t)$이므로 삼각형 ABC의 무게중심 G_1의 좌표는

$$G_1\left(\frac{t+t+\frac{t}{16}}{3},\ \frac{\log_2 t+\log_2 16t+\log_2 t}{3}\right)$$

즉, $G_1\left(\dfrac{11}{16}t,\ \dfrac{4}{3}+\log_2 t\right)$

이고, 삼각형 ADB의 무게중심 G_2의 좌표는

$$G_2\left(\frac{t+16t+t}{3},\ \frac{\log_2 t+\log_2 16t+\log_2 16t}{3}\right)$$

즉, $G_2\left(6t,\ \dfrac{8}{3}+\log_2 t\right)$

이므로 직선 G_1G_2의 기울기는

$$\frac{\left(\frac{8}{3}+\log_2 t\right)-\left(\frac{4}{3}+\log_2 t\right)}{6t-\frac{11}{16}t}=\frac{\frac{4}{3}}{\frac{85}{16}t}=\frac{64}{255t}$$

즉, $\dfrac{64}{255t}=\dfrac{16}{255}$이므로 $t=4$

따라서 $A(4,\ 2)$, $B(4,\ 6)$, $D(64,\ 6)$이므로 삼각형 ADB의 넓이는

$$\frac{1}{2}\times(64-4)\times(6-2)=\frac{1}{2}\times 60\times 4=120$$

답 ⑤

14

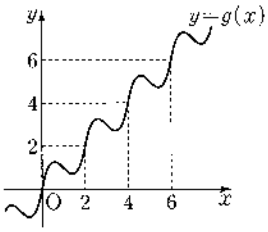
삼차함수 $f(x)$의 최고차항의 계수를 a라 하면 방정식 $f(x)-x=0$의 세 실근이 0, 1, 2이므로

$f(x)-x=ax(x-1)(x-2)\ (a>0)$

으로 놓을 수 있다.

즉, $f(x)=ax(x-1)(x-2)+x$이고, $f(0)=0$, $f(1)=1$, $f(2)=2$이다.

한편, 함수 $g(x)$는 $0\le x\le 2$일 때 $g(x)=f(x)$이고, 모든 실수 x에 대하여 $g(x+2)=g(x)+2$를 만족시키므로 함수 $y=g(x)$의 그래프는 그림과 같이 생각할 수 있다.



이때

$$\int_0^2 f(x)\,dx=\int_0^2 \{ax(x-1)(x-2)+x\}\,dx$$
$$=\int_0^2 \{ax^3-3ax^2+(2a+1)x\}\,dx$$
$$=\left[\frac{a}{4}x^4-ax^3+\frac{2a+1}{2}x^2\right]_0^2$$
$$=4a-8a+4a+2=2$$

이고, 자연수 k에 대하여

$$\int_{2k-2}^{2k} g(x)\,dx=2\times(2k-2)+\int_0^2 g(x)\,dx=(4k-4)+\int_0^2 f(x)\,dx$$
$$=(4k-4)+2=4k-2$$

이므로

$$\int_0^{2n} g(x)\,dx=\int_0^2 g(x)\,dx+\int_2^4 g(x)\,dx+\cdots+\int_{2n-2}^{2n} g(x)\,dx$$
$$=\sum_{k=1}^{n}(4k-2)=4\times\frac{n(n+1)}{2}-2n=2n^2$$

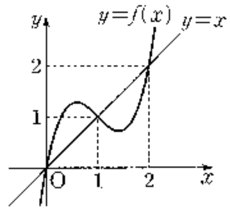
따라서 $2n^2=72$에서 $n^2=36$

n은 자연수이므로 $n=6$

답 ①

참고

함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x$가 세 점 (0, 0), (1, 1), (2, 2)에서 만나므로 함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형은 그림과 같다.



$f(x)=ax(x-1)(x-2)+x$에서

$$f(x+1)-1=ax(x+1)(x-1)+x$$
$$=ax^3+(1-a)x$$

이므로 함수 $y=f(x+1)-1$의 그래프는 원점에 대하여 대칭이다.

이때 함수 $y=f(x)$의 그래프는 함수 $y=f(x+1)-1$의 그래프를 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 점 (1, 1)에 대하여 대칭이다.

따라서 그림의 색칠된 부분의 넓이는 한 변의 길이가 2인 정사각형의 넓이의 $\dfrac{1}{2}$이므로 2이다.

즉, $\displaystyle\int_0^2 f(x)\,dx=2$

15

선분 CD가 원의 지름이므로 $\angle CPD=\dfrac{\pi}{2}$

직각삼각형 PCD에서 $\overline{CD}^2=\overline{PC}^2+\overline{PD}^2$이므로

$\overline{PD}=\sqrt{\overline{CD}^2-\overline{PC}^2}=\sqrt{(2\sqrt{5})^2-4^2}=2$

삼각형 APD의 넓이가 $\dfrac{\sqrt{5}}{3}$이므로 $\angle APD=\theta$라 하면

$$\frac{1}{2}\times\overline{PA}\times\overline{PD}\times\sin\theta=\frac{\sqrt{5}}{3}$$

$$\frac{1}{2}\times 1\times 2\times\sin\theta=\frac{\sqrt{5}}{3},\ \sin\theta=\frac{\sqrt{5}}{3}$$

선분 AB가 원의 지름이므로 $\angle APB=\dfrac{\pi}{2}$

직각삼각형 PAB에서 $\overline{AB}^2=\overline{PA}^2+\overline{PB}^2$이므로

$\overline{PB}=\sqrt{\overline{AB}^2-\overline{PA}^2}=\sqrt{(\sqrt{10})^2-1^2}=3$

삼각형 BPC에서 $\angle BPC=\pi-\theta$이고 $\dfrac{\pi}{2}<\theta<\pi$이므로

$$\cos(\pi-\theta)=-\cos\theta=\sqrt{1-\sin^2\theta}=\sqrt{1-\left(\frac{\sqrt{5}}{3}\right)^2}=\frac{2}{3}$$

코사인법칙에 의하여

$$\overline{BC}^2=\overline{PB}^2+\overline{PC}^2-2\times\overline{PB}\times\overline{PC}\times\cos(\pi-\theta)$$
$$=3^2+4^2-2\times 3\times 4\times\frac{2}{3}=9+16-16=9$$

$\overline{BC}>0$이므로 $\overline{BC}=3$

답 ②

16

함수 $f(x)=2x^3-x+1$에 대하여 x의 값이 -2에서 2까지 변할 때의 함수 $f(x)$의 평균변화율은

$$\frac{f(2)-f(-2)}{2-(-2)}=\frac{(16-2+1)-(-16+2+1)}{4}=\frac{28}{4}=7$$

답 7

17

$\log_2 \frac{128}{n}=m$ (m은 자연수)로 놓으면

$\frac{128}{n}=2^m$에서 $2^{7-m}=n$

n이 자연수이므로 $7-m\ge 0$

즉, m은 $1\le m\le 7$인 자연수이므로 조건을 만족시키는 n은

$2^0,\ 2^1,\ 2^2,\ 2^3,\ 2^4,\ 2^5,\ 2^6$

따라서 모든 n의 값의 합은 $\frac{1\times(2^7-1)}{2-1}=2^7-1=127$

답 127

18

함수 $f(x)$의 차수가 3 이상이면

$\lim_{x\to\infty}\frac{f(2x)+3x^2}{x^2-1}=\infty$ 또는 $\lim_{x\to\infty}\frac{f(2x)+3x^2}{x^2-1}=-\infty$

이므로 조건을 만족시키지 않고, 함수 $f(x)$의 차수가 1 이하이면

$\lim_{x\to\infty}\frac{f(2x)+3x^2}{x^2-1}=3$

이므로 조건을 만족시키지 않는다. 그러므로 함수 $f(x)$는 이차함수이다.

$f(x)=ax^2+bx+c$ (a, b, c는 상수, $a\ne 0$)이라 하면

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(2x)+3x^2}{x^2-1}=\lim_{x\to\infty}\frac{4ax^2+2bx+c+3x^2}{x^2-1}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{4a+3+\frac{2b}{x}+\frac{c}{x^2}}{1-\frac{1}{x^2}}=4a+3$$

이므로 $4a+3=7$에서 $a=1$

즉, $f(x)=x^2+bx+c$이고

$\lim_{x\to\infty}f\left(\frac{1}{x}\right)=\lim_{t\to 0+}f(t)=\lim_{t\to 0+}(t^2+bt+c)=c$

이므로 $c=4$

그러므로 $f(x)=x^2+bx+4$이고

$f(x)=\left(x+\frac{b}{2}\right)^2+4-\frac{b^2}{4}$

이므로 함수 $f(x)$는 $x=-\frac{b}{2}$일 때 최솟값을 갖는다.

즉, $-\frac{b}{2}=-1$에서 $b=2$

따라서 $f(x)=x^2+2x+4$이므로 $f(10)=100+20+4=124$

답 124

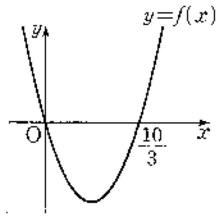
19

$\int_0^1 f(t)\,dt=k$ (k는 상수)로 놓으면 $f(x)=x^2+(k-2)x$이고

$\int_0^1 \{t^2+(k-2)t\}\,dt=\left[\frac{1}{3}t^3+\frac{k-2}{2}t^2\right]_0^1=\frac{1}{3}+\frac{k-2}{2}=\frac{k}{2}-\frac{2}{3}$

이므로 $\frac{k}{2}-\frac{2}{3}=k$에서 $k=-\frac{4}{3}$

즉, $f(x)=x^2-\frac{10}{3}x$이고 함수 $y=f(x)$의 그래프는 그림과 같다.



따라서 곡선 $y=f(x)$와 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이는

$$\int_0^{\frac{10}{3}}|f(x)|\,dx=\int_0^{\frac{10}{3}}\{-f(x)\}\,dx$$

$$=\int_0^{\frac{10}{3}}\left(-x^2+\frac{10}{3}x\right)dx$$

$$=\left[-\frac{1}{3}x^3+\frac{5}{3}x^2\right]_0^{\frac{10}{3}}=-\frac{1000}{81}+\frac{500}{27}=\frac{500}{81}$$

즉, $p=81$, $q=500$이므로 $p+q=81+500=581$

답 581

20

조건 (다)에서 n이 홀수이면 $n+2$가 홀수이므로 $f(n)$의 값에 상관없이 $a_n=1$

n이 짝수이면 $n+2$가 짝수이므로

$f(n)>0$이면 $a_n=2$

$f(n)=0$이면 $a_n=1$, $f(n)<0$이면 $a_n=0$

$\sum_{n=1}^{10}a_n=10$에서 $\sum_{n=1}^{10}a_n=\sum_{n=1}^{5}a_{2n-1}+\sum_{n=1}^{5}a_{2n}=5+\sum_{n=1}^{5}a_{2n}=10$

즉, $\sum_{n=1}^{5}a_{2n}=5$ …… ㉠

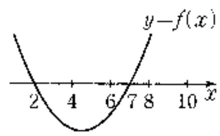
조건 (나)에서 $f(n)=0$인 10 이하의 자연수 n의 값이 2개 이하이므로 ㉠을 만족시키려면 a_2, a_4, a_6, a_8, a_{10} 중에서 $a_n=1$인 짝수 n이 반드시 1개 존재해야 하고 $a_n=2$인 짝수 n이 2개, $a_n=0$인 짝수 n이 2개 존재해야 한다.

즉, 10 이하의 자연수 n 중에서 $f(n)=0$인 짝수 n이 1개, $f(n)>0$인 짝수 n이 2개, $f(n)<0$인 짝수 n이 2개 존재한다.

이때 이차방정식 $f(x)=0$은 서로 다른 두 실근을 갖고 조건 (나)에 의하여 $f(n)=0$인 10 이하의 홀수 n이 하나 존재한다.

(i) $f(2)=0$인 경우

조건 (가)에서 $f(1)>0$이므로 $f(4)$와 $f(6)$의 값이 모두 음수이고 $f(8)$과 $f(10)$의 값이 모두 양수이어야 한다.



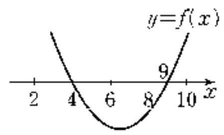
조건 (나)에 의하여 $f(7)=0$이므로

$f(x)=(x-2)(x-7)$

(ii) $f(4)=0$인 경우

$f(2)<0$이면 방정식 $f(x)=0$의 한 실근이 사잇값의 정리에 의하여 1과 2 사이에 존재해야 하므로 조건 (나)를 만족시키지 않는다.

즉, $f(2)>0$이므로 $f(6)$과 $f(8)$의 값이 모두 음수이고 $f(10)$의 값이 양수이어야 한다.



조건 (나)에 의하여 $f(9)=0$이므로

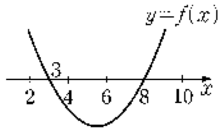
$f(x)=(x-4)(x-9)$

(iii) $f(6)=0$인 경우

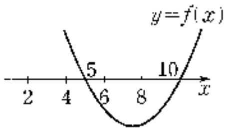
$f(4)>0$이면 $f(2)>0$이고 $f(8)$과 $f(10)$의 값이 모두 음수이어야 한다. 즉, 방정식 $f(x)=0$의 한 실근이 10보다 커야 하므로 조건 (나)를 만족시키지 않는다.

즉, $f(4)<0$이면 $f(8)$과 $f(10)$의 값이 모두 양수이어야 한다.
따라서 $f(2)<0$이고 $f(1)=0$이어야 하는데 조건 (가)를 만족시키지 않으므로 조건을 만족시키는 $f(x)$는 존재하지 않는다.

(iv) $f(8)=0$인 경우
$f(6)>0$이면 $f(2)$와 $f(4)$의 값도 모두 양수이므로 조건을 만족시키지 않는다.
즉, $f(6)<0$이므로 $f(4)<0$이고 $f(2)$와 $f(10)$의 값이 모두 양수이어야 한다.
조건 (나)에 의하여 $f(3)=0$이므로
$f(x)=(x-3)(x-8)$



(v) $f(10)=0$인 경우
$f(8)>0$이면 $f(2)$, $f(4)$, $f(6)$의 값이 모두 양수이므로 조건을 만족시키지 않는다.
즉, $f(8)<0$이므로 $f(6)<0$이고 $f(2)$와 $f(4)$의 값이 모두 양수이어야 한다.
조건 (나)에 의하여 $f(5)=0$이므로
$f(x)=(x-5)(x-10)$



(i)~(v)에서 조건을 만족시키는 $f(x)$는
$f(x)=(x-2)(x-7)$ 또는 $f(x)=(x-4)(x-9)$
또는 $f(x)=(x-3)(x-8)$ 또는 $f(x)=(x-5)(x-10)$
따라서 $f(11)$의 값은 $9\times4=36$, $7\times2=14$, $8\times3=24$, $6\times1=6$이므로 최솟값은 6, 최댓값은 36이고, 그 합은 42이다.

답 42

21

$p<0$이라 하면 자연수 n에 대하여 $a_n\ge0$이면 $a_{n+1}=a_n-p>a_n$, 즉 $a_{21}\ne a_1$이므로 조건을 만족시키지 않는다. 즉, p는 자연수이다.
a_1, a_2, $\cdots$, a_{20} 중 음수인 것의 개수를 k라 하면 0 이상인 것의 개수는 $20-k$이므로
$a_{21}=a_1-(20-k)p+kpq$
$k=20$이면 $a_1>0$에 모순이므로 k는 19 이하인 자연수이다.
$a_{21}=a_1$에서
$(20-k)p=kpq$, $kp(q+1)=20p$
$p\ne0$이므로 $k(q+1)=20$
q는 정수이고 k는 19 이하의 자연수이므로 k는 19 이하인 20의 양의 약수이다. 즉, k는 1, 2, 4, 5, 10

(i) $k=1$인 경우, $q=19$
18 이하의 자연수 n_1에 대하여
$a_{n_1+1}=a_1-n_1p\ge0$, $a_{n_1+2}=a_1-(n_1+1)p<0$
즉, $\frac{40}{n_1+1}<p\le\frac{40}{n_1}$일 때
$a_{n_1+3}=a_1-(n_1+1)p+19p=a_1+(18-n_1)p$
$n_1\ge14$일 때, $2<\frac{40}{n_1+1}<\frac{40}{n_1}<3$이므로 이를 만족시키는 자연수 p가 존재하지 않는다.
$n_1=13$일 때, $\frac{20}{7}<p\le\frac{40}{13}$이므로 $p=3$
$n_1\le12$일 때, $3<\frac{40}{n_1+1}<p$이므로 자연수 p가 존재하면 $p>3$
따라서 $p\ge3$이므로 이 경우에 $p+q$의 최솟값은 $3+19=22$

(ii) $k=2$인 경우, $q=9$
8 이하의 자연수 n_1에 대하여
$a_{n_1+1}=a_1-n_1p\ge0$, $a_{n_1+2}=a_1-(n_1+1)p<0$
즉, $\frac{40}{n_1+1}<p\le\frac{40}{n_1}$일 때
$a_{n_1+3}=a_1-(n_1+1)p+9p=a_1+(8-n_1)p\ge0$
$a_{n_1+4}=a_1+(7-n_1)p$
$\vdots$
$a_{n_1+3+(8-n_1)}=a_1$, 즉 $a_{11}=a_1$이고 $a_{n+10}=a_n$
모든 자연수 n에 대하여 $a_{n+10}=a_n$을 만족시키므로 $a_{21}=a_1$을 만족시킨다.
$n_1=8$일 때, $\frac{40}{9}<p\le5$이므로 $p=5$
$n_1\le7$일 때, $5\le\frac{40}{n_1+1}$이므로 자연수 p가 존재하면 $p>5$
따라서 $p\ge5$이므로 이 경우에 $p+q$의 최솟값은 $5+9=14$

(iii) $k=4$인 경우, $q=4$
3 이하의 자연수 n_1에 대하여
$a_{n_1+1}=a_1-n_1p\ge0$, $a_{n_1+2}=a_1-(n_1+1)p<0$
즉, $\frac{40}{n_1+1}<p\le\frac{40}{n_1}$일 때
$a_{n_1+3}=a_1-(n_1+1)p+4p=a_1+(3-n_1)p\ge0$
$a_{n_1+4}=a_1+(2-n_1)p$
$\vdots$
$a_{n_1+3+(3-n_1)}=a_1$, 즉 $a_6=a_1$이고 $a_{n+5}=a_n$
모든 자연수 n에 대하여 $a_{n+5}=a_n$을 만족시키므로 $a_{21}=a_1$을 만족시킨다.
$n_1=3$일 때, $10<p\le\frac{40}{3}$이므로 $p=11$, 12, 13
$n_1\le2$일 때, $13<\frac{40}{n_1+1}$이므로 자연수 p가 존재하면 $p>13$
따라서 $p\ge11$이므로 이 경우에 $p+q$의 최솟값은 $11+4=15$

(iv) $k=5$인 경우, $q=3$
$a_3=a_1-2p\ge0$, $a_4=a_1-3p<0$인 경우
즉, $\frac{40}{3}<p\le20$에서 $p=14$, 15, $\cdots$, 20인 경우
$a_5=a_1-3p+3p=a_1$
$a_2=a_1-p\ge0$, $a_3=a_1-2p<0$인 경우
즉, $\frac{40}{2}<p\le40$에서 $p=21$, 22, $\cdots$, 40
$a_4=a_1-2p+3p=a_1+p>0$, 즉 $a_5=a_1$이고 $a_{n+4}=a_n$
모든 자연수 n에 대하여 $a_{n+4}=a_n$을 만족시키므로 $a_{21}=a_1$을 만족시킨다.
따라서 $p\ge14$이므로 이 경우에 $p+q$의 최솟값은 $14+3=17$

(v) $k=10$인 경우, $q=1$
$a_2=a_1-p<0$, 즉 $p>40$을 만족시키고 $a_3=a_1-p+p=a_1$이므로 주기가 2이다. 즉, 모든 자연수 n에 대하여 $a_{n+2}=a_n$을 만족시키므로 $a_{21}=a_1$을 만족시킨다.
따라서 이 경우에 $p+q$의 최솟값은
$41+1=42$

(i)~(v)에서 $p+q$의 최솟값은 14이다.

답 14

22

함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하므로 $x=k$에서 연속이어야 한다. 즉, $f(k)=\lim_{x\to k-}f(x)=\lim_{x\to k+}f(x)$이어야 하므로

$f(k)=k^3-3k+a=-k^2+13k+b$

이때

$$\lim_{x\to k-}\frac{f(x)-f(k)}{x-k}=\lim_{x\to k-}\frac{(x^3-3x+a)-(k^3-3k+a)}{x-k}$$
$$=\lim_{x\to k-}\frac{(x-k)(x^2+kx+k^2-3)}{x-k}$$
$$=\lim_{x\to k-}(x^2+kx+k^2-3)=3k^2-3$$

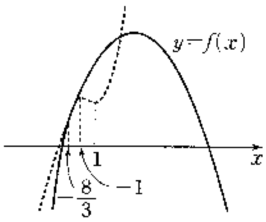
$$\lim_{x\to k+}\frac{f(x)-f(k)}{x-k}=\lim_{x\to k+}\frac{(-x^2+13x+b)-(-k^2+13k+b)}{x-k}$$
$$=\lim_{x\to k+}\frac{-(x-k)(x+k-13)}{x-k}$$
$$=\lim_{x\to k+}(-x-k+13)=-2k+13$$

이고, 함수 $f(x)$가 $x=k$에서 미분가능하므로

$3k^2-3=-2k+13$, $3k^2+2k-16=0$, $(3k+8)(k-2)=0$

$k=-\frac{8}{3}$ 또는 $k=2$

이때 함수 $y=x^3-3x+a$에서 $y'=3x^2-3=3(x+1)(x-1)$이므로 함수 $y=x^3-3x+a$는 $x=1$ 또는 $x=-1$에서 극값을 갖는데, $k=-\frac{8}{3}$이면 함수 $y=f(x)$의 그래프가 [그림 1]과 같으므로 조건 (나)를 만족시킬 수 없다.



[그림 1]

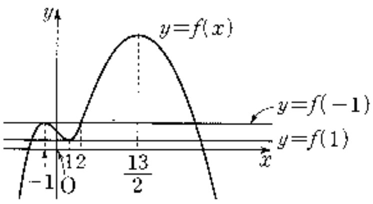
즉, $k=2$이므로

$$f(x)=\begin{cases}x^3-3x+a & (x<2)\\ -x^2+13x+b & (x\ge 2)\end{cases}$$

이고, 함수 $f(x)$가 $x=2$에서 연속이어야 하므로 $2+a=22+b$

$a-b=20$ ······ ㉠

한편, $f(-1)=f(2)<f\left(\frac{13}{2}\right)$이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 [그림 2]와 같다. 즉, 방정식 $f(x)=c$의 서로 다른 실근의 개수가 3이 되는 경우는 $c=f(-1)$ 또는 $c=f(1)$인 경우이다.



[그림 2]

$f(-1)=2+a$, $f(1)=-2+a$이므로

$(2+a)+(-2+a)=8$에서 $a=4$

㉠에서 $b=a-20=-16$

즉, $f(x)=\begin{cases}x^3-3x+4 & (x<2)\\ -x^2+13x-16 & (x\ge 2)\end{cases}$

이고, 방정식 $f(x)=d$의 서로 다른 실근의 개수가 1이 되는 경우는 $d=f\left(\frac{13}{2}\right)$인 경우이므로 구하는 실수 d의 값은

$$d=f\left(\frac{13}{2}\right)=-\left(\frac{13}{2}\right)^2+13\times\frac{13}{2}-16=\frac{105}{4}$$

따라서 $p=4$, $q=105$이므로 $p+q=4+105=109$

답 109

23

$\left(x+\frac{2}{x}\right)^{10}$의 전개식에서 일반항은

${}_{10}C_r x^{10-r}\left(\frac{2}{x}\right)^r={}_{10}C_r 2^r x^{10-2r}$ $(r=0, 1, 2, \cdots, 10)$

이때 $10-2r=6$에서 $r=2$이므로 x^6의 계수는

${}_{10}C_2\times 2^2=45\times 4=180$

답 ⑤

24

$a+\left(a-\frac{1}{2}\right)+(2a-1)=1$이므로

$4a-\frac{3}{2}=1$, $4a=\frac{5}{2}$, $a=\frac{5}{8}$

즉,

$P(X=0)=a=\frac{5}{8}$,

$P(X=1)=a-\frac{1}{2}=\frac{5}{8}-\frac{1}{2}=\frac{1}{8}$,

$P(X=2)=2a-1=2\times\frac{5}{8}-1=\frac{1}{4}$

이므로

$E(X)=0\times\frac{5}{8}+1\times\frac{1}{8}+2\times\frac{1}{4}=\frac{1}{8}+\frac{1}{2}=\frac{5}{8}$

따라서 $E(8X+1)=8E(X)+1=8\times\frac{5}{8}+1=6$

답 ①

25

$(A\cap B^C)\cup(A\cap B)=A$이고 두 사건 $A\cap B^C$, $A\cap B$는 서로 배반사건이므로

$P(A\cap B^C)+P(A\cap B)=P(A)$

$\frac{1}{4}+P(A\cap B)=P(A)$ ······ ㉠

또 $(A^C\cap B)\cup(A\cap B)=B$이고 두 사건 $A^C\cap B$, $A\cap B$는 서로 배반사건이므로

$P(A^C\cap B)+P(A\cap B)=P(B)$

$\frac{1}{8}+P(A\cap B)=P(B)$ ······ ㉡

㉠, ㉡에서 $\frac{1}{4}+P(A\cap B)+\frac{1}{8}+P(A\cap B)=P(A)+P(B)$이므로

$$P(A\cap B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)-\frac{1}{4}-\frac{1}{8}$$
$$=P(A\cup B)-\frac{3}{8}$$
$$=\frac{11}{24}-\frac{3}{8}=\frac{1}{12}$$

따라서

$$P(A^C\cup B^C)=P((A\cap B)^C)=1-P(A\cap B)$$
$$=1-\frac{1}{12}=\frac{11}{12}$$

답 ⑤

다른 풀이

$A\cup B=(A\cap B^C)\cup B$이고, 두 사건 $A\cap B^C$, B는 서로 배반사건이므로

$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A\cap B^C)+\mathrm{P}(B)$

또 $B=(A^C\cap B)\cup(A\cap B)$이고, 두 사건 $A^C\cap B$, $A\cap B$는 서로 배반사건이므로

$\mathrm{P}(B)=\mathrm{P}(A^C\cap B)+\mathrm{P}(A\cap B)$

즉, $\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A\cap B^C)+\mathrm{P}(A^C\cap B)+\mathrm{P}(A\cap B)$이므로

$$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A\cup B)-\mathrm{P}(A\cap B^C)-\mathrm{P}(A^C\cap B)=\frac{11}{24}-\frac{1}{4}-\frac{1}{8}=\frac{1}{12}$$

따라서

$$\mathrm{P}(A^C\cup B^C)=\mathrm{P}((A\cap B)^C)=1-\mathrm{P}(A\cap B)=1-\frac{1}{12}=\frac{11}{12}$$

26

주머니 3개에 넣는 젤리의 개수에 따라 다음과 같은 경우로 나누어 생각할 수 있다.

(i) 주머니 3개에 젤리를 각각 1개, 1개, 0개로 나누어 넣는 경우

서로 다른 3개의 주머니 중 젤리를 넣는 2개의 주머니를 택하는 경우의 수는 ${}_3\mathrm{C}_2=3$

젤리가 들어 있는 주머니 2개에 각각 사탕을 2개씩 넣고 젤리가 들어 있지 않은 주머니에 사탕을 1개 넣는다.

남아 있는 같은 종류의 사탕 5개를 서로 다른 주머니 3개에 나누어 넣는 경우의 수는

${}_3\mathrm{H}_5={}_{3+5-1}\mathrm{C}_5={}_7\mathrm{C}_5={}_7\mathrm{C}_2=\frac{7\times 6}{2\times 1}=21$

따라서 이 경우의 수는 $3\times 21=63$

(ii) 주머니 3개에 젤리를 각각 2개, 0개, 0개로 나누어 넣는 경우

서로 다른 3개의 주머니 중 젤리 2개를 넣는 1개의 주머니를 택하는 경우의 수는 ${}_3\mathrm{C}_1=3$

젤리가 들어 있는 주머니에 사탕을 3개 넣고 젤리가 들어 있지 않은 주머니 2개에 각각 사탕을 1개씩 넣는다.

남아 있는 같은 종류의 사탕 5개를 서로 다른 주머니 3개에 나누어 넣는 경우의 수는

${}_3\mathrm{H}_5={}_{3+5-1}\mathrm{C}_5={}_7\mathrm{C}_5={}_7\mathrm{C}_2=\frac{7\times 6}{2\times 1}=21$

따라서 이 경우의 수는 $3\times 21=63$

(i), (ii)에서 구하는 경우의 수는

$63+63=126$

답 ②

27

이 밭에서 수확한 매론 중에서 임의추출한 64개의 무게를 조사하여 구한 표본평균이 $\bar{x}$ kg, 표준편차가 1.2 kg이므로 이를 이용하여 구한 모평균 m kg에 대한 신뢰도 95 %의 신뢰구간은

$\bar{x}-1.96\times\frac{1.2}{\sqrt{64}}\le m\le\bar{x}+1.96\times\frac{1.2}{\sqrt{64}}$

이므로 $a=\bar{x}-1.96\times\frac{1.2}{\sqrt{64}}$이고 $\bar{x}+1.96\times\frac{1.2}{\sqrt{64}}=9.594$

$\bar{x}+1.96\times\frac{1.2}{\sqrt{64}}=9.594$에서

$\bar{x}=9.594-1.96\times\frac{1.2}{8}=9.594-0.294=9.3$

$a=9.3-0.294=9.006$

따라서 $\bar{x}+a=9.3+9.006=18.306$

답 ③

28

(i) 치역의 원소의 개수가 4인 경우

치역이 $\{2, 4, 6, 8\}$이어야 하고, 치역의 서로 다른 네 원소에 정의역의 네 원소가 하나씩 대응되어야 하므로 이 경우 함수 f의 개수는

${}_4\mathrm{P}_4=4\times 3\times 2\times 1=24$

(ii) 치역의 원소의 개수가 3인 경우

치역이 $\{2, 6, 12\}$ 또는 $\{2, 8, 10\}$ 또는 $\{4, 6, 10\}$이어야 한다.

치역을 $\{a, b, c\}$라 하면 치역의 세 원소 중 한 원소에는 정의역의 두 원소가 대응되어야 한다.

예를 들어 치역의 원소 a에 대응되는 정의역의 원소가 2개인 경우 함수 f의 개수는 네 文자 a, a, b, c를 일렬로 나열하는 경우의 수와 같으므로

$\frac{4!}{2!}=12$

치역의 원소 b 또는 c에 대응되는 정의역의 원소가 2개인 경우도 마찬가지로 12가지씩이고, 원소의 개수가 3인 치역의 개수가 3이므로 이 경우 함수 f의 개수는

$12\times 3\times 3=108$

(iii) 치역의 원소의 개수가 2인 경우

치역이 $\{8, 12\}$이어야 하고 함수 f의 개수는

${}_2\Pi_4-2=2^4-2=14$

(i), (ii), (iii)에서 조건을 만족시키는 함수 f의 개수는

$24+108+14=146$

답 ④

29

조건 (가)에서 $f(20)<f(6)<f(12)$이므로

$|12-m|<|6-m|<|20-m|$을 만족시킨다.

$m\le 6$이면 $|6-m|<|12-m|<|20-m|$이고

$m\ge 20$이면 $|6-m|>|12-m|>|20-m|$이므로 조건을 만족시키지 않는다.

(i) $6<m\le 12$인 경우

$|12-m|<|6-m|$에서 $12-m<m-6$, $m>9$

$|6-m|<|20-m|$에서 $m-6<20-m$, $m<13$

즉, $9<m\le 12$이므로 자연수 m의 값은 10, 11, 12이다.

(ii) $12<m<20$인 경우

$|12-m|<|6-m|$에서 $m-12<m-6$이므로 항상 성립한다.

$|6-m|<|20-m|$에서 $m-6<20-m$에서 $m<13$

즉, $12<m<13$이므로 조건을 만족시키는 자연수 m은 존재하지 않는다.

(i), (ii)에서 m의 값은 10, 11, 12이다.

확률변수 X는 정규분포 $\mathrm{N}(m, \sigma^2)$을 따르므로 $Z=\frac{X-m}{\sigma}$으로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0, 1)$을 따른다.
이때 조건 (나)에서

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(|X-m|\ge 3)&=\mathrm{P}\left(\left|\frac{X-m}{\sigma}\right|\ge\frac{3}{\sigma}\right)\\&=\mathrm{P}\left(|Z|\ge\frac{3}{\sigma}\right)\\&=1-\mathrm{P}\left(|Z|\le\frac{3}{\sigma}\right)\\&=1-2\mathrm{P}\left(0\le Z\le\frac{3}{\sigma}\right)\end{aligned}$$

즉, $1-2\mathrm{P}\left(0\le Z\le\frac{3}{\sigma}\right)\le 0.1336$이므로

$1-0.1336\le 2\mathrm{P}\left(0\le Z\le\frac{3}{\sigma}\right)$

$0.8664\le 2\mathrm{P}\left(0\le Z\le\frac{3}{\sigma}\right)$

$\mathrm{P}\left(0\le Z\le\frac{3}{\sigma}\right)\ge 0.4332$

즉, $\frac{3}{\sigma}\ge 1.5$에서 $\sigma\le 2$이므로 자연수 σ의 값은 1 또는 2이다.
따라서 $m+\sigma$의 최댓값은 $m=12$, $\sigma=2$일 때 14이고 최솟값은 $m=10$, $\sigma=1$일 때 11이므로 그 합은 25이다.

답 25

30

주머니 B에서 꺼낸 공에 적혀 있는 모든 수의 합이 짝수인 사건을 X, 주머니 A에서 꺼낸 2개의 공에 적혀 있는 수의 합이 짝수인 사건을 Y라 하면 구하는 확률은 $\mathrm{P}(Y|X)$이다.
사건 X의 확률은 다음과 같이 경우를 나누어 생각할 수 있다.

(i) 주머니 A에서 꺼낸 2개의 공에 적혀 있는 수의 합이 홀수인 경우
주머니 A에서 꺼낸 2개의 공에 적혀 있는 수의 합이 홀수일 확률은

$\frac{{}_2\mathrm{C}_1\times{}_3\mathrm{C}_1}{{}_5\mathrm{C}_2}=\frac{2\times 3}{10}=\frac{3}{5}$

ⓐ 주머니 A에서 꺼낸 2개의 공 중에서 1이 적혀 있는 공을 주머니 B에 넣은 경우
주머니 B에는 숫자 1, 3, 3, 4가 하나씩 적혀 있는 4개의 공이 들어 있고, 이 중에서 2개의 공을 꺼낼 때 꺼낸 공에 적혀 있는 수의 합이 짝수인 경우는 홀수가 적혀 있는 공을 2개 꺼내는 경우이다.
그러므로 이 경우의 확률은

$\frac{1}{2}\times\frac{{}_3\mathrm{C}_2}{{}_4\mathrm{C}_2}=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$

ⓑ 주머니 A에서 꺼낸 2개의 공 중에서 2가 적혀 있는 공을 주머니 B에 넣은 경우
주머니 B에는 숫자 2, 3, 3, 4가 하나씩 적혀 있는 4개의 공이 들어 있고, 이 중에서 2개의 공을 꺼낼 때 꺼낸 공에 적혀 있는 수의 합이 짝수인 경우는 홀수가 적혀 있는 공을 2개 꺼내거나 짝수가 적혀 있는 공을 2개 꺼내는 경우이다.
그러므로 이 경우의 확률은

$\frac{1}{2}\times\frac{{}_2\mathrm{C}_2+{}_2\mathrm{C}_2}{{}_4\mathrm{C}_2}=\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$

ⓐ, ⓑ에 의하여 주머니 A에서 꺼낸 2개의 공에 적혀 있는 수의 합이 홀수이면서 주머니 B에서 꺼낸 2개의 공에 적혀 있는 수의 합이 짝수인 확률은

$\frac{3}{5}\times\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{6}\right)=\frac{3}{5}\times\frac{5}{12}=\frac{1}{4}$

(ii) 주머니 A에서 꺼낸 2개의 공에 적혀 있는 수의 합이 짝수인 경우
ⓐ 주머니 A에서 1이 적혀 있는 공 2개를 꺼낸 경우
주머니 A에서 1이 적혀 있는 공 2개를 꺼낼 확률은

$\frac{{}_2\mathrm{C}_2}{{}_5\mathrm{C}_2}=\frac{1}{10}$

이 경우 두 공을 모두 주머니 B에 넣으면 주머니 B에는 숫자 1, 1, 3, 3, 4가 하나씩 적혀 있는 5개의 공이 들어 있고, 이 중에서 3개의 공을 꺼낼 때 꺼낸 공에 적혀 있는 수의 합이 짝수인 경우는 홀수가 적혀 있는 공을 2개, 짝수가 적혀 있는 공을 1개 꺼내는 경우이다.
그러므로 이 경우의 확률은

$\frac{1}{10}\times\frac{{}_4\mathrm{C}_2\times{}_1\mathrm{C}_1}{{}_5\mathrm{C}_3}=\frac{1}{10}\times\frac{3}{5}=\frac{3}{50}$

ⓑ 주머니 A에서 2가 적혀 있는 공 2개를 꺼낸 경우
주머니 A에서 2가 적혀 있는 공 2개를 꺼낼 확률은

$\frac{{}_3\mathrm{C}_2}{{}_5\mathrm{C}_2}=\frac{3}{10}$

이 경우 두 공을 모두 주머니 B에 넣으면 주머니 B에는 숫자 2, 2, 3, 3, 4가 하나씩 적혀 있는 5개의 공이 들어 있고, 이 중에서 3개의 공을 꺼낼 때 꺼낸 공에 적혀 있는 수의 합이 짝수인 경우는 홀수가 적혀 있는 공을 2개, 짝수가 적혀 있는 공을 1개 꺼내거나 짝수가 적혀 있는 공만 3개 꺼내는 경우이다.
그러므로 이 경우의 확률은

$\frac{3}{10}\times\frac{{}_2\mathrm{C}_2\times{}_3\mathrm{C}_1+{}_3\mathrm{C}_3}{{}_5\mathrm{C}_3}=\frac{3}{10}\times\frac{2}{5}=\frac{3}{25}$

ⓐ, ⓑ에 의하여 주머니 A에서 꺼낸 2개의 공에 적혀 있는 수의 합이 짝수이면서 주머니 B에서 꺼낸 3개의 공에 적혀 있는 수의 합이 짝수일 확률은

$\frac{3}{50}+\frac{3}{25}=\frac{9}{50}$

(i), (ii)에서

$\mathrm{P}(X)=\frac{1}{4}+\frac{9}{50}=\frac{43}{100}$, $\mathrm{P}(X\cap Y)=\frac{9}{50}$

이므로

$$\mathrm{P}(Y|X)=\frac{\mathrm{P}(X\cap Y)}{\mathrm{P}(X)}=\frac{\frac{9}{50}}{\frac{43}{100}}=\frac{18}{43}$$

따라서 $p=43$, $q=18$이므로
$p+q=43+18=61$

답 61

실전 모의고사 3회 본문 138~149쪽

01 ②	02 ③	03 ①	04 ⑤	05 ⑤
06 ④	07 ②	08 ②	09 ⑤	10 ③
11 ④	12 ②	13 ③	14 ②	15 ③
16 6	17 31	18 22	19 2	20 4
21 8	22 45	23 ⑤	24 ⑤	25 ②
26 ④	27 ④	28 ③	29 37	30 130

01

$8^{\frac{\sqrt{3}}{3}}\times\left(\frac{1}{2}\right)^{\sqrt{3}-1}=(2^3)^{\frac{\sqrt{3}}{3}}\times(2^{-1})^{\sqrt{3}+1}=2^{\sqrt{3}-\sqrt{3}-1}=2^{-1}=\frac{1}{2}$

답 ②

02

$f(x)=3x^3-6x^2+2$에서 $f'(x)=9x^2-12x$

따라서 $f'(1)=9-12=-3$

답 ③

03

등비수열 $\{a_n\}$의 공비를 r라 하면

$a_4=4a_2$에서 $a_1r^3=4a_1r$, $r^2=4$

모든 항이 양수이므로 $r=2$

따라서 $a_1=a_3\times\frac{1}{r^2}=4\times\frac{1}{2^2}=1$

답 ①

다른 풀이

등비수열 $\{a_n\}$의 공비를 r라 하면

$a_4=a_3\times r=4r$이므로

$a_4=4a_2$에서 $4r=4a_1\times r$

따라서 $a_1=1$

04

$\lim_{x\to-1-}f(x)=1$, $\lim_{x\to0-}f(x)=2$, $f(1)=-1$이므로

$\lim_{x\to-1-}f(x)+\lim_{x\to0+}f(x)+f(1)=1+2+(-1)=2$

답 ⑤

05

$\sin\theta-\cos\theta=\frac{1}{3}$의 양변을 제곱하면

$\sin^2\theta-2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta=\frac{1}{9}$

$1-2\sin\theta\cos\theta=\frac{1}{9}$, $\sin\theta\cos\theta=\frac{4}{9}$

$(\sin\theta+\cos\theta)^2=\sin^2\theta+2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta$

$=1+2\times\frac{4}{9}=\frac{17}{9}$

$0<\theta<\frac{\pi}{2}$에서 $\sin\theta>0$, $\cos\theta>0$이므로 $\sin\theta+\cos\theta>0$

따라서 $\sin\theta+\cos\theta=\frac{\sqrt{17}}{3}$

답 ⑤

06

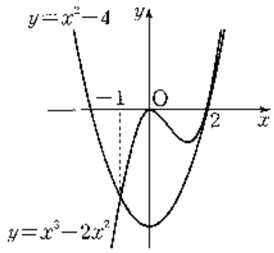
두 곡선 $y=x^3-2x^2$과 $y=x^2-4$가 만나는 점의 x좌표를 구하면

$x^3-2x^2=x^2-4$에서

$x^3-3x^2+4=0$, $(x+1)(x-2)^2=0$

$x=-1$ 또는 $x=2$

두 곡선 $y=x^3-2x^2$과 $y=x^2-4$는 그림과 같다.



따라서 구하는 넓이를 S라 하면

$S=\int_{-1}^{2}|(x^3-2x^2)-(x^2-4)|\,dx$

$=\int_{-1}^{2}(x^3-3x^2+4)\,dx$

$=\left[\frac{1}{4}x^4-x^3+4x\right]_{-1}^{2}$

$=(4-8+8)-\left(\frac{1}{4}+1-4\right)=\frac{27}{4}$

답 ④

07

$9^{x-1}-k\times3^x+9=0$의 양변에 9를 곱하면

$9^x-9k\times3^x+81=0$

$3^x=X\ (X>0)$이라 하면

$X^2-9kX+81=0$ …… ㉠

이 방정식이 오직 하나의 양의 실근을 가져야 한다.

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 두 근의 곱이 $81>0$이므로 두 근의 부호는 같다. 따라서 이차방정식이 오직 하나의 양의 실근을 가지려면 ㉠의 판별식을 D라 할 때, $D=0$이어야 한다.

즉, $D=(-9k)^2-4\times81=0$에서

$k^2-4=0$, $k^2=4$

이때 이 중근이 양수이어야 하므로 이차방정식의 두 근의 합이 양수이다.

즉, $9k>0$에서 $k>0$이므로

$k=2$

$X^2-18X+81=0$에서

$(X-9)^2=0$, $X=9$, $3^x=9$, $x=2$

즉, $\alpha=2$

따라서 $k+\alpha=2+2=4$

답 ②

08

두 함수 $f(x)$와 $f(x)+5$는 $x=a$에서만 불연속이므로 함수 $f(x)\{f(x)+5\}$가 실수 전체의 집합에서 연속이려면 $x=a$에서 연속이어야 한다. 즉,

$\lim_{x\to a-}f(x)\{f(x)+5\}=\lim_{x\to a+}f(x)\{f(x)+5\}=f(a)\{f(a)+5\}$ …… ㉠

$\lim_{x\to a-}f(x)\{f(x)+5\}=(a+1)(a+6)$

$\lim_{x\to a+}f(x)\{f(x)+5\}=(a-5)a$

$f(a)\{f(a)+5\}=(a+1)(a+6)$

이므로 ㉠에서 $(a+1)(a+6)=(a-5)a$

$a^2+7a+6=a^2-5a$, $12a=-6$

따라서 $a=-\frac{1}{2}$

답 ②

09

$a_3=\frac{1}{6}$에서

$a_3=\frac{1}{4-8a_2}$이므로 $\frac{1}{6}=\frac{1}{4-8a_2}$, $a_2=-\frac{1}{4}$

$a_2=\frac{1}{4-8a_1}$이므로 $-\frac{1}{4}=\frac{1}{4-8a_1}$, $a_1=1$

또한 $a_3=\frac{1}{6}$에서

$a_4=\frac{1}{4-8a_3}=\frac{1}{4-8\times\frac{1}{6}}=\frac{3}{8}$

$a_5=\frac{1}{4-8a_4}=\frac{1}{4-8\times\frac{3}{8}}=1$

즉, 수열 $\{a_n\}$은 $1, -\frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \frac{3}{8}, 1, -\frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \frac{3}{8}, \cdots$으로 첫째항부터 네 개의 수 $1, -\frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \frac{3}{8}$이 이 순서대로 반복하여 나타난다.

따라서

$$\sum_{n=1}^{25}a_n=\sum_{n=1}^{24}a_n+a_{25}=6(a_1+a_2+a_3+a_4)+a_1$$
$$=6\left(1-\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\frac{3}{8}\right)+1=6\times\frac{31}{24}+1=\frac{35}{4}$$

답 ⑤

10

$y=x^3-x-1$에서 $y'=3x^2-1$

점 $A(-1, -1)$에서의 접선의 기울기는 $3\times(-1)^2-1=2$이므로

곡선 $y=x^3-x-1$ 위의 점 $A(-1, -1)$에서의 접선의 방정식은

$y+1=2(x+1)$, 즉 $y=2x+1$

곡선 $y=x^3-x-1$과 직선 $y=2x+1$이 만나는 점의 x좌표는

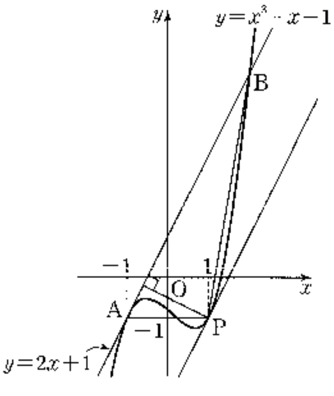
$x^3-x-1=2x+1$에서 $(x+1)^2(x-2)=0$

$x=-1$ 또는 $x=2$

따라서 $A(-1, -1)$, $B(2, 5)$이므로

$\overline{AB}=\sqrt{(2+1)^2+(5+1)^2}=\sqrt{45}=3\sqrt{5}$

삼각형 APB의 넓이는 그림과 같이 점 P에서의 접선의 기울기가 직선 AB의 기울기 2와 같을 때 최대가 된다.



$y'=3x^2-1$에서

점 P의 x좌표를 t라 하면

$3t^2-1=2$

$3(t+1)(t-1)=0$

이때 $t\neq-1$이므로

$t=1$

점 P는 곡선 $y=x^3-x-1$ $(-1<x<2)$ 위의 점이므로 y좌표는

$y=1^3-1-1=-1$

즉, $P(1, -1)$

점 $P(1, -1)$과 직선 $y=2x+1$, 즉 $2x-y+1=0$ 사이의 거리는

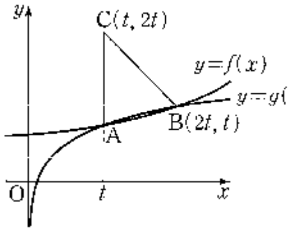
$\frac{|2\times1-(-1)+1|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=\frac{4}{\sqrt{5}}$

따라서 삼각형 APB의 넓이의 최댓값은 $\frac{1}{2}\times3\sqrt{5}\times\frac{4}{\sqrt{5}}=6$

답 ③

11

조건 (가)에서 직선 OC의 기울기가 2이므로 점 C의 좌표를 $(t, 2t)$라 하면 점 B의 좌표는 $(2t, t)$이다.



점 B가 곡선 $y=f(x)$ 위의 점이므로

$a^{2t}+4=t$ ⋯⋯ ㉠

점 B가 곡선 $y=g(x)$ 위의 점이므로

$\frac{1}{4}\log_a 2t=t$, $a^{4t}=2t$ ⋯⋯ ㉡

㉡에서 $t=\frac{1}{2}a^{4t}$이므로 이를 ㉠에 대입하면

$a^{2t}+4=\frac{1}{2}a^{4t}$

$a^{2t}=k$ $(k>0)$이라 하면

$k+4=\frac{1}{2}k^2$, $k^2-2k-8=0$, $(k+2)(k-4)=0$

$k>0$이므로 $k=4$

$a^{2t}=4$이므로 ㉠에서 $t=8$이고, $a^{16}=4$에서 $a=4^{\frac{1}{16}}=2^{\frac{1}{8}}$이다.

즉, 점 B의 좌표는 $(16, 8)$, 점 C의 좌표는 $(8, 16)$이다.

$f(x)=2^{\frac{1}{8}x}+4$이고, 조건 (나)에서 두 점 A, C의 x좌표가 같으므로

$f(8)=2^1+4=6$

에서 점 A의 좌표는 $(8, 6)$이다.

$\overline{AC}=16-6=10$이고, 점 B와 직선 AC 사이의 거리는 $16-8=8$이므로 삼각형 ABC의 넓이는

$\frac{1}{2}\times10\times8=40$

답 ④

12

$f(x)=x^4-\frac{4}{3}kx^3-4k^2x^2$에서

$f'(x)=4x^3-4kx^2-8k^2x=4x(x^2-kx-2k^2)$

$f'(x)=0$에서 $4x(x+k)(x-2k)=0$

$x=-k$ 또는 $x=0$ 또는 $x=2k$

$k>0$이므로 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

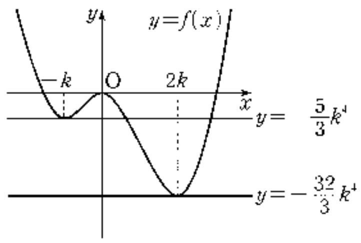
x	$\cdots$	$-k$	$\cdots$	0	$\cdots$	$2k$	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0		0	$+$
$f(x)$	↘	극소	↗	극대	↘	극소	↗

함수 $f(x)$는 $x=-k$와 $x=2k$에서 극소이고 $x=0$에서 극대이다.

$f(-k)=k^4+\frac{4}{3}k^4-4k^4=-\frac{5}{3}k^4$, $f(0)=0$,

$f(2k)=16k^4-\frac{32}{3}k^4-16k^4=-\frac{32}{3}k^4$

함수 $y=f(x)$의 그래프는 그림과 같다.



곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=-\frac{32}{3}k^4$은 오직 한 점에서만 만나므로

조건 (가)에서

$a=-\frac{32}{3}k^4$

직선 $y=0$과 직선 $y=-\frac{5}{3}k^4$은 곡선 $y=f(x)$와 각각 서로 다른 세 점에서 만나므로 조건 (나)에서

$b=-\frac{5}{3}k^4$ 또는 $b=0$

(i) $a=-\frac{32}{3}k^4$, $b=0$일 때, $b-a=0-\left(-\frac{32}{3}k^4\right)=\frac{32}{3}k^4$

(ii) $a=-\frac{32}{3}k^4$, $b=-\frac{5}{3}k^4$일 때, $b-a=-\frac{5}{3}k^4-\left(-\frac{32}{3}k^4\right)=9k^4$

따라서 $b-a$의 모든 값의 합은

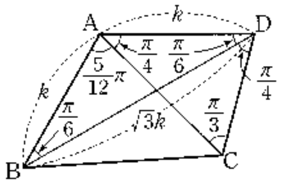
$\frac{32}{3}k^4+9k^4=\frac{59}{3}k^4=236$

이므로 $k^4=12$

답 ②

13

선분 AD의 길이를 $k\ (k>0)$이라 하자.



$\angle ABD=\angle BDA=\frac{\pi}{6}$이므로

$\overline{BD}=2\times\overline{AB}\times\cos\frac{\pi}{6}=\sqrt{3}k$

삼각형 ABD에서 사인법칙에 의하여

$\frac{k}{\sin(\angle ABD)}=2R_1$이므로

$R_1=\frac{k}{2\sin\frac{\pi}{6}}=k$

삼각형 ACD에서 사인법칙에 의하여

$\frac{\overline{AD}}{\sin(\angle ACD)}=\frac{\overline{CD}}{\sin(\angle CAD)}$이므로

$\frac{k}{\sin\frac{\pi}{3}}=\frac{\overline{CD}}{\sin\frac{\pi}{4}}$

$\overline{CD}=\boxed{\frac{\sqrt{6}}{3}k}$

삼각형 BCD에서 코사인법칙에 의하여

$\overline{BC}^2=\overline{BD}^2+\overline{CD}^2-2\times\overline{BD}\times\overline{CD}\times\cos(\angle CDB)$

$=(\sqrt{3}k)^2+\left(\frac{\sqrt{6}}{3}k\right)^2-2\times\sqrt{3}k\times\frac{\sqrt{6}}{3}k\times\frac{\sqrt{2}}{2}$

$=3k^2+\frac{2}{3}k^2-2k^2=\frac{5}{3}k^2$

$\overline{BC}=\boxed{\frac{\sqrt{15}}{3}k}$

삼각형 BCD에서 사인법칙에 의하여

$\frac{\overline{BC}}{\sin(\angle CDB)}=2R_2$, $R_2=\boxed{\frac{\sqrt{30}}{6}k}$

이므로 $R_1 : R_2=k : \boxed{\frac{\sqrt{30}}{6}k}$이다.

따라서 $f(k)=\frac{\sqrt{6}}{3}k$, $g(k)=\frac{\sqrt{15}}{3}k$, $h(k)=\frac{\sqrt{30}}{6}k$이므로

$\frac{f(3)\times g(3)}{h(6)}=\frac{\sqrt{6}\times\sqrt{15}}{\sqrt{30}}=\sqrt{3}$

답 ③

14

ㄱ. $f(x)g(x)=\begin{cases}(-x^2+x)g(x) & (x<0)\\(x^2-2x)g(x) & (x\ge 0)\end{cases}$

$=\begin{cases}-x(x-1)g(x) & (x<0)\\x(x-2)g(x) & (x\ge 0)\end{cases}$

$f(0)=0$이므로 $f(0)g(0)=0$

$\lim_{x\to 0-}\frac{f(x)g(x)}{x}=\lim_{x\to 0-}\{-(x-1)g(x)\}=g(0)$

$\lim_{x\to 0+}\frac{f(x)g(x)}{x}=\lim_{x\to 0+}\{(x-2)g(x)\}=-2g(0)$

함수 $f(x)g(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하므로 $x=0$에서도 미분가능하다.

즉, $\lim_{x\to 0+}\frac{f(x)g(x)}{x}=\lim_{x\to 0-}\frac{f(x)g(x)}{x}$에서

$g(0)=-2g(0)$, $g(0)=0$ (참)

ㄴ. ㄱ에서 $g(0)=0$이므로 일차함수 $g(x)$는

$g(x)=mx$ (m은 0이 아닌 상수)

로 놓을 수 있다.

$\int_{-1}^{0}f(x)\,dx=\int_{-1}^{0}f(x)g(x)\,dx$에서

$\int_{-1}^{0}f(x)\,dx=\int_{-1}^{0}(-x^2+x)\,dx=\left[-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2\right]_{-1}^{0}$

$=0-\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\right)=-\frac{5}{6}$

$\int_{-1}^{0}f(x)g(x)\,dx=\int_{-1}^{0}mx(-x^2+x)\,dx=m\int_{-1}^{0}(-x^3+x^2)\,dx$

$=m\left[-\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{3}x^3\right]_{-1}^{0}$

$=m\times\left\{0-\left(-\frac{1}{4}-\frac{1}{3}\right)\right\}=\frac{7}{12}m$

$-\frac{5}{6}=\frac{7}{12}m$에서 $m=-\frac{10}{7}$

따라서 $g(x)=-\frac{10}{7}x$이므로 $g(-1)=\frac{10}{7}$ (참)

ㄷ. $\int_{-1}^{1}f(x)g(x)\,dx=0$인 일차함수 $g(x)=mx$ (m은 0이 아닌 상수)가 존재한다고 하자.

$\int_{-1}^{1}f(x)g(x)\,dx=\int_{-1}^{0}mx(-x^2+x)\,dx+\int_{0}^{1}mx(x^2-2x)\,dx$

이때 ㄴ에서

$\int_{-1}^{0}mx(-x^2+x)\,dx=\frac{7}{12}m$

$$\int_0^1 mx(x^2-2x)\,dx=m\int_0^1(x^3-2x^2)\,dx=m\left[\frac{1}{4}x^4-\frac{2}{3}x^3\right]_0^1$$
$$=m\left(\frac{1}{4}-\frac{2}{3}\right)=-\frac{5}{12}m$$

따라서

$$\int_{-1}^1 f(x)g(x)\,dx=\frac{7}{12}m+\left(-\frac{5}{12}m\right)=\frac{m}{6}=0$$

이므로 $m=0$이 되어 모순이다.

즉, $\int_{-1}^1 f(x)g(x)\,dx=0$을 만족시키는 일차함수 $g(x)$가 존재하지 않는다. (거짓)

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

답 ②

15

등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공차를 d $(d>0)$이라 하자.

$a_na_{n+5}\le 0$에서 $a_n(a_n+5d)\le 0$

$-5d\le a_n\le 0$ …… ㉠

$S_n=\dfrac{n(a+a_n)}{2}$

$S_{n+5}=\dfrac{(n+5)(a+a_{n+5})}{2}=\dfrac{(n+5)(a+a_n+5d)}{2}$

n은 자연수이므로 $S_nS_{n+5}\le 0$에서

$(a+a_n)(a+5d+a_n)\le 0$

$d>0$이므로 $-a-5d\le a_n\le -a$ …… ㉡

한편, $a\ge 0$이면 $a_n\ge 0$에서 $n(A)\le 1$이므로 $n(A\cap B)=3$을 만족시킬 수 없다. 즉, $a<0$

$n(A\cap B)=3$이므로 ㉡에서 $-a-5d<0$ …… ㉢

따라서 $A\cap B=\{n\mid -a-5d\le a_n\le 0,\ n$은 자연수$\}$이다.

한편, $S_m=a_m$인 짝수인 자연수 m이 존재하므로

$a_m=S_m-S_{m-1}$에서 $S_m=S_m-S_{m-1}$, $S_{m-1}=0$

$\dfrac{(m-1)(a+a_{m-1})}{2}=0$, $a+a_{m-1}=0$

$a+\{a+(m-2)d\}=0$

$m=2k$ (k는 자연수)라 하면 $2a+(2k-2)d=0$

즉, $-a=(k-1)d$인 자연수 k가 존재한다.

㉢에서 $-a-5d=(k-1)d-5d=(k-6)d<0$이므로 k는 5 이하의 자연수이다.

$-a=(k-1)d$에서

$a_n=a+(n-1)d=-(k-1)d+(n-1)d=(n-k)d$

이므로

$A\cap B=\{n\mid(k-6)d\le(n-k)d\le 0,\ n$은 자연수$\}$

$=\{n\mid k-6\le n-k\le 0,\ n$은 자연수$\}$

$=\{n\mid 2k-6\le n\le k,\ n$은 자연수$\}$

k의 값에 따라 집합 $A\cap B$를 구하면 다음과 같다.

$k=1$이면 $A\cap B=\{1\}$

$k=2$이면 $A\cap B=\{1, 2\}$

$k=3$이면 $A\cap B=\{1, 2, 3\}$

$k=4$이면 $A\cap B=\{2, 3, 4\}$

$k=5$이면 $A\cap B=\{4, 5\}$

이때 $n(A\cap B)=3$이므로 $k=3$ 또는 $k=4$

(i) $k=3$일 때, $a=-2d$이고

$a_n=(n-k)d=(n-3)d$

㉠에서 $-5d\le(n-3)d\le 0$, $-5\le n-3\le 0$, $-2\le n\le 3$이므로

$A=\{1, 2, 3\}$

㉡에서 $2d-5d\le(n-3)d\le 2d$, $-3\le n-3\le 2$, $0\le n\le 5$이므로

$B=\{1, 2, 3, 4, 5\}$

이때 $A-B=\varnothing$이다.

(ii) $k=4$일 때, $a=-3d$이고

$a_n=(n-k)d=(n-4)d$

㉠에서 $-5d\le(n-4)d\le 0$, $-5\le n-4\le 0$, $-1\le n\le 4$이므로

$A=\{1, 2, 3, 4\}$

㉡에서 $3d-5d\le(n-4)d\le 3d$, $-2\le n-4\le 3$, $2\le n\le 7$이므로

$B=\{2, 3, 4, 5, 6, 7\}$

이때 $A-B=\{1\}\ne\varnothing$이다.

(i), (ii)에서 $k=4$이고 $m=2k=8$이다.

$a=-3d$이므로

$a_m=a_8=a+7d=-3d+7d=4d$,

$a_{m+10}=a_{18}=a+17d=-3d+17d=14d$

따라서 $\dfrac{a_{m+10}}{a_m}=\dfrac{14d}{4d}=\dfrac{7}{2}$

답 ③

16

$t=0$에서 $t=2$까지 점 P가 움직인 거리를 s라 하면

$s=\int_0^2|v(t)|\,dt=\int_0^2|6t^2-6t|\,dt$

$=\int_0^1(6t-6t^2)\,dt+\int_1^2(6t^2-6t)\,dt$

$=\left[3t^2-2t^3\right]_0^1+\left[2t^3-3t^2\right]_1^2$

$=(3-2)-0+(16-12)-(2-3)=1+5=6$

답 6

17

선분 AB의 중점의 x좌표가 1이므로

$\dfrac{\log_2 a+\log_2\frac{2}{3}}{2}=1$, $\log_2\frac{2}{3}a=2$

$\frac{2}{3}a=4$, $a=6$

선분 AB의 중점의 y좌표가 0이므로

$\dfrac{-2+\log_5 b}{2}=0$, $\log_5 b=2$

$b=25$

따라서 $a+b=6+25=31$

답 31

18

$\int_2^x(t^2+2t-1)\,dt=ax^3+3x-f(x)$ …… ㉠

㉠의 양변을 x에 대하여 미분하면

$x^2+2x-1=3ax^2+3-f'(x)$

$f'(x)=-x^3+3ax^2-2x+4$

$f'(2)=16$에서

$-8+12a-4+4=16$

$12a=24,\ a=2$

㉠의 양변에 $x=2$를 대입하면

$\int_2^2 (t^3+2t-1)\,dt=8a+6-f(2)$

$0=16+6-f(2)$

따라서 $f(2)=22$

답 22

19

$\sum_{k=1}^{5}(k+a)^2=50+\sum_{k=1}^{5}k(k+a)$에서

$\sum_{k=1}^{5}(k^2+2ak+a^2)=50+\sum_{k=1}^{5}(k^2+ak),\ \sum_{k=1}^{5}(ak+a^2)=50$

$a\times\frac{5\times6}{2}+5a^2=50,\ 5a^2+15a-50=0$

$a^2+3a-10=0,\ (a+5)(a-2)=0$

a는 양수이므로 $a=2$

답 2

20

$f(x)=\begin{cases}-2x+2 & (x\le0)\\ 2 & (0<x\le2)\\ 2x-2 & (x>2)\end{cases}$에서

(i) 직선 $y=2x-2$와 곡선 $y=\frac{1}{2}x^2-x+k$가 접하는 경우

이차방정식 $2x-2=\frac{1}{2}x^2-x+k$, 즉 $\frac{1}{2}x^2-3x+k+2=0$의 판별식을 D_1이라 하면

$D_1=(-3)^2-2(k+2)=0,\ k=\frac{5}{2}$

이고, 이때 접점의 좌표는 $(3,\ 4)$이다.

직선 $y=-2x+2$와 곡선 $y=\frac{1}{2}x^2-x+k$가 접하는 경우

이차방정식 $-2x+2=\frac{1}{2}x^2-x+k$, 즉 $\frac{1}{2}x^2+x+k-2=0$의 판별식을 D_2라 하면

$D_2=1^2-2(k-2)=0,\ k=\frac{5}{2}$

이고, 이때 접점의 좌표는 $(-1,\ 4)$이다.

직선 $y=2$와 곡선 $y=\frac{1}{2}x^2-x+k$가 접하는 경우

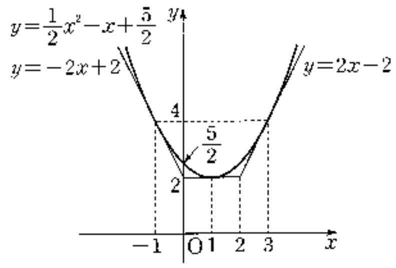
이차방정식 $\frac{1}{2}x^2-x+k=2$, 즉 $\frac{1}{2}x^2-x+k-2=0$의 판별식을 D_3이라 하면

$D_3=(-1)^2-2(k-2)=0,\ k=\frac{5}{2}$

이고, 이때 접점의 좌표는 $(1,\ 2)$이다.

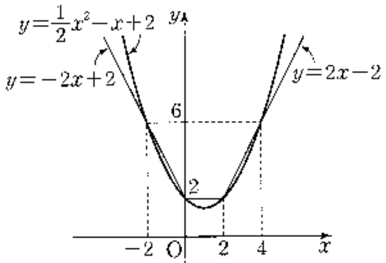
따라서 $k=\frac{5}{2}$일 때 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프는 세 점 $(3,\ 4)$, $(-1,\ 4)$, $(1,\ 2)$에서 접하므로

$h\left(\frac{5}{2}\right)=3$

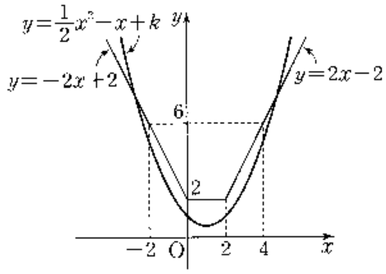


(ii) 함수 $y=g(x)$의 그래프가 함수 $y=f(x)$의 그래프 위의 두 점 $(0,\ 2)$, $(2,\ 2)$를 지나면, 즉 $k=2$이면 함수 $y=f(x)$의 그래프와 서로 다른 두 점 $(-2,\ 6)$, $(4,\ 6)$에서도 만나므로

$h(2)=4$



(iii) $k<2$이면 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프가 만나는 서로 다른 점의 개수는 2이다.



(i), (ii), (iii)에서 함수 $h(k)$는 다음과 같다.

$h(k)=\begin{cases}2 & (k<2)\\ 4 & (k=2)\\ 6 & \left(2<k<\frac{5}{2}\right)\\ 3 & \left(k=\frac{5}{2}\right)\\ 0 & \left(k>\frac{5}{2}\right)\end{cases}$

$h\left(\frac{5}{2}\right)+\lim_{k\to a+}h(k)=9$에서

$\lim_{k\to a-}h(k)=9-h\left(\frac{5}{2}\right)=9-3=6$

$2\le a<\frac{5}{2}$이므로 구하는 실수 a의 최솟값은 $p=2$

따라서 $h(2)=4$

답 4

21

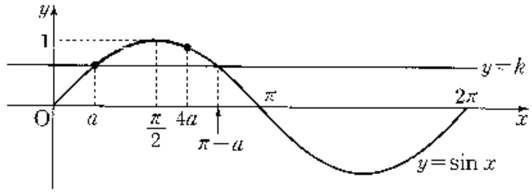
$0<a<\frac{\pi}{2}$에서 $0<4a<2\pi$이고,

$a\le x\le4a$에서 방정식 $\sin x=1$의 해가 존재하므로 $4a\ge\frac{\pi}{2}$이다.

즉, $\frac{\pi}{2}\le4a<2\pi$

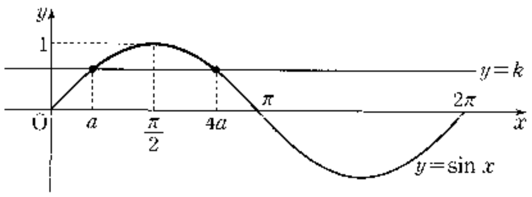
$\sin a=\sin(\pi-a)$이므로 $4a$의 값과 $\pi-a$의 값의 대소 관계에 따라 다음과 같이 경우를 나눌 수 있다.

(i) $\frac{\pi}{2}\le 4a<\pi-a$인 경우



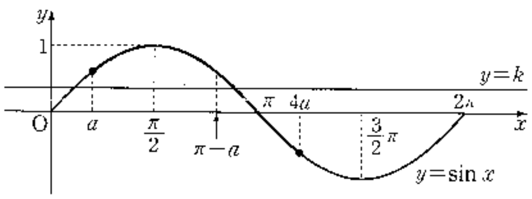
$\sin a\le k<\sin 4a$ 또는 $k=1$이면 $a\le x\le 4a$에서 방정식 $\sin x=k$는 오직 한 개의 실근을 갖는다.

(ii) $4a=\pi-a$인 경우



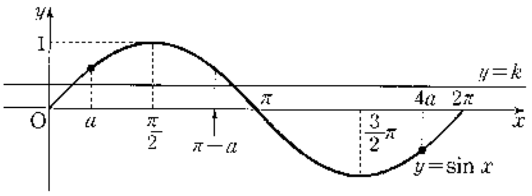
$k=1$이면 $a\le x\le 4a$에서 방정식 $\sin x=k$는 오직 한 개의 실근을 갖는다. $k\ne 1$이면 $a\le x\le 4a$에서 방정식 $\sin x=k$의 서로 다른 실근의 개수는 0 또는 2이다.

(iii) $\pi-a<4a\le\frac{3}{2}\pi$인 경우



$\sin 4a\le k<\sin a$ 또는 $k=1$이면 $a\le x\le 4a$에서 방정식 $\sin x=k$는 오직 한 개의 실근을 갖는다.

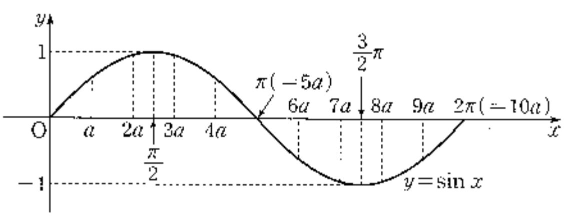
(iv) $\frac{3}{2}\pi<4a<2\pi$인 경우



$\sin 4a<k<\sin a$ 또는 $k=1$ 또는 $k=-1$이면 $a\le x\le 4a$에서 방정식 $\sin x=k$는 오직 한 개의 실근을 갖는다.

(i)~(iv)에서 방정식 $\sin x=k$가 오직 한 개의 실근을 갖도록 하는 실수 k의 값이 1뿐인 경우는 (ii)이다.

즉, $4a=\pi-a$이므로 $a=\frac{\pi}{5}$



한편, m, n $(m<n)$이 10 이하의 두 자연수일 때, 닫힌구간 $[ma, na]$에서 함수 $y=\sin x$의 최댓값과 최솟값의 합이 0인 경우는

㉠ $0<ma\le\frac{\pi}{2}$이고 $\frac{3}{2}\pi\le na\le 2\pi$인 경우

(최댓값 1, 최솟값 -1)

㉡ $\frac{\pi}{2}<ma<\pi<na<\frac{3}{2}\pi$이고 $ma+na=2\pi$인 경우

(최댓값 $\sin ma$, 최솟값 $\sin na=\sin(2\pi-ma)=-\sin ma$)

이다.

㉠에서 m의 값은 1 또는 2이고 n의 값은 8 또는 9 또는 10이므로 순서쌍 (m, n)의 개수는 $2\times 3=6$

㉡에서 가능한 순서쌍 (m, n)은 $(3, 7)$, $(4, 6)$으로 그 개수는 2

따라서 조건을 만족시키는 모든 순서쌍 (m, n)의 개수는

$6+2=8$

답 8

22

조건 (가)의 $\lim_{x\to 2}\frac{f(x)}{x-2}=6$에서 $x\to 2$일 때 (분모) $\to 0$이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\to 0$이어야 한다.

즉, $\lim_{x\to 2}f(x)=0$이고 $f(x)$는 다항함수이므로 $f(2)=0$

조건 (나)에서 모든 실수 x에 대하여 $|f(x)|\le|xg(x)|$인 연속함수 $g(x)$가 존재하므로 $0\le|f(0)|\le|0\times g(0)|=0$에서 $f(0)=0$

따라서 최고차항의 계수가 1인 사차함수 $f(x)$를

$f(x)=x(x-2)(x^2+ax+b)$ (a, b는 상수)

로 놓을 수 있다.

$6=\lim_{x\to 2}\frac{f(x)}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{x(x-2)(x^2+ax+b)}{x-2}$

$=\lim_{x\to 2}x(x^2+ax+b)=2(4+2a+b)$

에서 $2a+b=-1$

$b=-1-2a$ ...... ㉠

또한 $x\ne 0$일 때 $\left|\frac{f(x)}{x}\right|\le|g(x)|$에서 $-|g(x)|\le\frac{f(x)}{x}\le|g(x)|$

함수의 극한의 대소 관계에 의하여

$-\lim_{x\to 0}|g(x)|\le\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}\le\lim_{x\to 0}|g(x)|$

이고 함수 $g(x)$는 연속함수이므로

$-|g(0)|\le\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}\le|g(0)|$

$-6\le f'(0)\le 6$ ...... ㉡

$f(x)=(x^2-2x)(x^2+ax+b)$에서

$f'(x)=(2x-2)(x^2+ax+b)+(x^2-2x)(2x+a)$이므로

$f'(0)=-2b$ ...... ㉢

㉢을 ㉡에 대입하면 $-6\le -2b\le 6$, $-3\le b\le 3$

㉠에서 $-3\le -2a-1\le 3$, $-2\le a\le 1$

$f(3)=3(9+3a+b)=3(9+3a-1-2a)=3(a+8)$

따라서 $f(3)=3(a+8)$은

$a=-2$일 때 최소이고 최솟값은 $3\times 6=18$,

$a=1$일 때 최대이고 최댓값은 $3\times 9=27$이므로 구하는 합은

$18+27=45$

답 45

23

두 사건 A와 B가 서로 독립이므로 두 사건 A와 B^C도 서로 독립이다.

$\mathrm{P}(A\cap B^C)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B^C)$

$=\frac{2}{3}\times\mathrm{P}(B^C)=\frac{1}{4}$

에서 $\mathrm{P}(B^C)=\frac{1}{4}\times\frac{3}{2}=\frac{3}{8}$

여사건의 확률에 의하여

$\mathrm{P}(B)=1-\mathrm{P}(B^C)$

$=1-\frac{3}{8}=\frac{5}{8}$

답 ⑤

24

$\left(x^2+\frac{1}{2x}\right)^9$의 전개식의 일반항은

${}_9\mathrm{C}_r\times(x^2)^{9-r}\times\left(\frac{1}{2x}\right)^r={}_9\mathrm{C}_r\times\left(\frac{1}{2}\right)^r\times x^{18-3r}$ $(r=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ 9)$

이때 $18-3r=0$에서 $r=6$이므로 상수항은

${}_9\mathrm{C}_6\times\left(\frac{1}{2}\right)^6={}_9\mathrm{C}_3\times\left(\frac{1}{2}\right)^6=\frac{9\times8\times7}{3\times2\times1}\times\frac{1}{64}=\frac{21}{16}$

답 ⑤

25

4개의 사탕을 A, B에게 나누어 주는 경우의 수는 서로 다른 2명의 학생 중에서 중복을 허락하여 4명을 택하는 중복조합의 수와 같으므로

${}_2\mathrm{H}_4={}_5\mathrm{C}_4={}_5\mathrm{C}_1=5$

A와 B가 받는 사탕의 개수의 합이 4이므로 C, D, E가 받는 사탕의 개수의 합은 6이다. C는 적어도 한 개의 사탕을 받아야 하므로 C에게 사탕 1개를 나누어 준다. 나머지 5개의 사탕을 C, D, E에게 나누어 주는 경우의 수는 서로 다른 3명의 학생 중에서 중복을 허락하여 5명을 택하는 중복조합의 수와 같으므로

${}_3\mathrm{H}_5={}_7\mathrm{C}_5={}_7\mathrm{C}_2=21$

따라서 구하는 경우의 수는

$5\times21=105$

답 ②

26

확률변수 X의 평균과 표준편차를 각각 m, σ라 하고 확률변수 Y의 평균과 표준편차를 각각 m', σ'이라 하자.

모든 실수 x에 대하여 $f(x+1)=g(x-1)$, 즉 $f(x+2)=g(x)$이므로 함수 $y=g(x)$의 그래프는 함수 $y=f(x)$의 그래프를 x축의 방향으로 -2만큼 평행이동시킨 것이다.

따라서 $m'=m-2$, $\sigma'=\sigma$

확률변수 X는 정규분포 $\mathrm{N}(m,\ \sigma^2)$을 따르므로 $Z=\frac{X-m}{\sigma}$으로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따르고, 확률변수 Y는 정규분포 $\mathrm{N}(m-2,\ \sigma^2)$을 따르므로 $Z=\frac{Y-m+2}{\sigma}$로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

$\mathrm{P}(X\ge12)=\mathrm{P}(Y\le22)=0.9332$이므로

$\mathrm{P}\left(Z\ge\frac{12-m}{\sigma}\right)=\mathrm{P}\left(Z\le\frac{22-m+2}{\sigma}\right)$

$=\mathrm{P}\left(Z\ge\frac{m-24}{\sigma}\right)$

$\frac{12-m}{\sigma}=\frac{m-24}{\sigma}$에서

$12-m=m-24$, $m=18$

또한

$\mathrm{P}\left(Z\ge\frac{12-m}{\sigma}\right)=\mathrm{P}\left(Z\ge-\frac{6}{\sigma}\right)=\mathrm{P}\left(Z\le\frac{6}{\sigma}\right)$

$=\mathrm{P}(Z\le0)+\mathrm{P}\left(0\le Z\le\frac{6}{\sigma}\right)$

$=0.5+\mathrm{P}\left(0\le Z\le\frac{6}{\sigma}\right)=0.9332$

에서 $\mathrm{P}\left(0\le Z\le\frac{6}{\sigma}\right)=0.9332-0.5=0.4332$

이때 $\mathrm{P}(0\le Z\le1.5)=0.4332$이므로

$\frac{6}{\sigma}=1.5$, $\sigma=4$

따라서 확률변수 Y는 정규분포 $\mathrm{N}(16,\ 4^2)$을 따르므로

$\mathrm{P}(Y\le14)=\mathrm{P}\left(Z\le\frac{14-16}{4}\right)=\mathrm{P}(Z\le-0.5)$

$=\mathrm{P}(Z\ge0.5)=0.5-\mathrm{P}(0\le Z\le0.5)$

$=0.5-0.1915=0.3085$

답 ④

27

숫자 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 중에서 서로 다른 4개를 택해 일렬로 나열하여 만들 수 있는 모든 네 자리의 자연수의 개수는

${}_8\mathrm{P}_4$

택한 수가 10과 서로소인 사건을 A, 5000 이상인 사건을 B라 하면 구하는 확률은 $\mathrm{P}(A\cup B)$이다.

만든 네 자리의 자연수가 10과 서로소가 아니려면 2의 배수 또는 5의 배수이어야 하므로 일의 자리의 수가 2, 4, 5, 6, 8 중 하나이어야 한다. 즉, 10과 서로소이려면 일의 자리의 수가 1, 3, 7 중 하나이어야 한다. 만들 수 있는 자연수 중에서 일의 자리의 수가 1인 자연수의 개수는 1을 제외한 나머지 7개의 숫자 중에서 서로 다른 3개를 택하여 일렬로 나열하는 경우의 수와 같으므로 ${}_7\mathrm{P}_3$이다. 일의 자리의 수가 3, 7인 자연수의 개수도 각각 ${}_7\mathrm{P}_3$이므로

$\mathrm{P}(A)=\frac{3\times{}_7\mathrm{P}_3}{{}_8\mathrm{P}_4}$

$=\frac{3\times(7\times6\times5)}{8\times7\times6\times5}=\frac{3}{8}$

만든 네 자리의 자연수가 5000 이상이려면 천의 자리의 수가 5, 6, 7, 8 중 하나이어야 한다. 만들 수 있는 자연수 중에서 천의 자리의 수가 5인 자연수의 개수는 5를 제외한 나머지 7개의 숫자 중에서 서로 다른 3개를 택하여 일렬로 나열하는 경우의 수와 같으므로 ${}_7\mathrm{P}_3$이다. 천의 자리의 수가 6, 7, 8인 자연수의 개수도 각각 ${}_7\mathrm{P}_3$이므로

$\mathrm{P}(B)=\frac{4\times{}_7\mathrm{P}_3}{{}_8\mathrm{P}_4}$

$=\frac{4\times(7\times6\times5)}{8\times7\times6\times5}=\frac{1}{2}$

만든 네 자리의 자연수가 10과 서로소이면서 5000 이상이려면 천의 자리의 수는 5, 6, 7, 8 중 하나이고 일의 자리의 수는 1, 3, 7 중 하나이어야 한다. 천의 자리의 수를 정하는 경우의 수는 4, 일의 자리의 수를 정하는 경우의 수는 3이고, 이 중에서 천의 자리와 일의 자리에 동시에 7이 올 수 없으므로 천의 자리의 수와 일의 자리의 수를 정하는 경우의 수는 $4\times3-1=11$이다. 각각의 경우에 대하여 백의 자리의 수와 십의 자리의 수를 정하는 경우의 수는 ${}_6\mathrm{P}_2$이므로

$$\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{11\times{}_6\mathrm{P}_2}{{}_8\mathrm{P}_4}$$

$$=\frac{11\times6\times5}{8\times7\times6\times5}=\frac{11}{56}$$

따라서 구하는 확률은 확률의 덧셈정리에 의하여

$$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)$$

$$=\frac{3}{8}+\frac{1}{2}-\frac{11}{56}=\frac{19}{28}$$

답 ④

다른 풀이

숫자 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 중에서 서로 다른 4개를 택해 일렬로 나열하여 만들 수 있는 모든 네 자리의 자연수의 개수는

${}_8\mathrm{P}_4$

택한 수가 10과 서로소인 사건을 A, 5000 이상인 사건을 B라 하면 구하는 확률은 $\mathrm{P}(A\cup B)$이다. 여사건의 확률을 이용하기 위하여 $\mathrm{P}(A^C\cap B^C)$을 구하자. 사건 $A^C\cap B^C$은 택한 수가 10과 서로소가 아니고 5000 미만인 사건이다.

만든 네 자리의 자연수가 10과 서로소가 아니려면 2의 배수 또는 5의 배수이어야 하므로 일의 자리의 수가 2, 4, 5, 6, 8 중 하나이어야 한다. 또한 만든 네 자리의 자연수가 5000 미만이려면 천의 자리의 수가 1, 2, 3, 4이어야 한다.

(i) 일의 자리의 수가 2 또는 4인 경우

천의 자리의 수는 1, 2, 3, 4 중에서 일의 자리의 수를 제외한 나머지 세 수 중의 하나이어야 하므로 그 경우의 수는

${}_3\mathrm{C}_1=3$

각각의 경우에 대하여 백의 자리의 수와 십의 자리의 수를 정하는 경우의 수는

${}_6\mathrm{P}_2=30$

(ii) 일의 자리의 수가 5, 6, 8인 경우

천의 자리의 수는 1, 2, 3, 4 중에서 하나이어야 하므로 그 경우의 수는

${}_4\mathrm{C}_1=4$

각각의 경우에 대하여 백의 자리의 수와 십의 자리의 수를 정하는 경우의 수는

${}_6\mathrm{P}_2=30$

(i), (ii)에서

$n(A^C\cap B^C)=2\times3\times30+3\times4\times30=540$

따라서 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(A\cup B)=1-\mathrm{P}(A^C\cap B^C)$$

$$=1-\frac{540}{{}_8\mathrm{P}_4}=1-\frac{540}{8\times7\times6\times5}$$

$$=1-\frac{9}{28}=\frac{19}{28}$$

28

확률변수 X는 두 상자 A, B에서 꺼낸 공에 적힌 두 수의 차이므로 X가 가질 수 있는 값은 0, 1, 2, 3이다.

상자 A에서 꺼낸 공에 적힌 수가 α, 상자 B에서 꺼낸 공에 적힌 수가 β인 경우를 순서쌍 (α, β)로 나타내 보자.

(i) $X=0$일 때

(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4)인 경우이므로

$$\mathrm{P}(X=0)=\frac{1}{10}\times\frac{1}{10}+\frac{2}{10}\times\frac{2}{10}+\frac{3}{10}\times\frac{3}{10}+\frac{4}{10}\times\frac{4}{10}$$

$$=\frac{30}{100}=\frac{3}{10}$$

(ii) $X=1$일 때

(1, 2), (2, 3), (3, 4), (2, 1), (3, 2), (4, 3)인 경우이므로

$$\mathrm{P}(X=1)=2\times\frac{1}{10}\times\frac{2}{10}+2\times\frac{2}{10}\times\frac{3}{10}+2\times\frac{3}{10}\times\frac{4}{10}$$

$$=\frac{40}{100}=\frac{2}{5}$$

(iii) $X=2$일 때

(1, 3), (2, 4), (3, 1), (4, 2)인 경우이므로

$$\mathrm{P}(X=2)=2\times\frac{1}{10}\times\frac{3}{10}+2\times\frac{2}{10}\times\frac{4}{10}$$

$$=\frac{22}{100}=\frac{11}{50}$$

(iv) $X=3$일 때

(1, 4), (4, 1)인 경우이므로

$$\mathrm{P}(X=3)=2\times\frac{1}{10}\times\frac{4}{10}=\frac{8}{100}=\frac{2}{25}$$

확률변수 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	0	1	2	3	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{3}{10}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{11}{50}$	$\frac{2}{25}$	1

$$\mathrm{E}(X)=0\times\frac{3}{10}+1\times\frac{2}{5}+2\times\frac{11}{50}+3\times\frac{2}{25}=\frac{27}{25}$$

$\mathrm{E}(aX+3)=30$에서

$$\mathrm{E}(aX+3)=a\mathrm{E}(X)+3=a\times\frac{27}{25}+3=30$$

$$a\times\frac{27}{25}=27$$

따라서 $a=25$

답 ③

29

집합 $X=\{1, 2, 3, 4, 5\}$에 대하여 X에서 X로의 일대일대응의 개수는 $5!$이다.

함수 f가 $f(1)f(2)$의 값이 4의 약수이고 $f(1)<f(5)$를 만족시키는 사건을 A, $f(2)f(5)$의 값이 6의 배수이고 $f(1)<f(5)$를 만족시키는 사건을 B라 하자.

(i) 함수 f에 대하여 $f(1)$, $f(2)$의 값을 순서쌍 $(f(1), f(2))$로 나타내 보자.

사건 A는 함수 f가 일대일대응이므로 순서쌍 $(f(1), f(2))$가 (1, 2), (2, 1), (1, 4), (4, 1)인 경우이다.

ⓐ 순서쌍 $(f(1), f(2))$가 $(1, 2)$, $(2, 1)$, $(1, 4)$인 경우
각 순서쌍에 대하여 $f(1)<f(5)$이고 일대일대응이 되도록 $f(3)$, $f(4)$, $f(5)$의 값을 정하는 경우의 수는 $3!$이므로
이 경우의 수는 $3\times3!=18$

ⓑ 순서쌍 $(f(1), f(2))$가 $(4, 1)$인 경우
$f(1)<f(5)$이고 일대일대응이려면 $f(5)=5$이어야 하므로 $f(3)$, $f(4)$의 값을 정하는 경우의 수는 $2!$, 즉 이 경우의 수는
$1\times2!=2$

따라서 사건 A가 일어날 확률은

$\mathrm{P}(A)=\dfrac{18+2}{5!}=\dfrac{20}{5!}=\dfrac{1}{6}$

(ii) 함수 f에 대하여 $f(2)$, $f(5)$의 값을 순서쌍 $(f(2), f(5))$로 나타내 보자.
사건 B는 함수 f가 일대일대응이므로 순서쌍 $(f(2), f(5))$가 $(2, 3)$, $(3, 2)$, $(3, 4)$, $(4, 3)$인 경우이다.

ⓐ 순서쌍 $(f(2), f(5))$가 $(3, 2)$, $(2, 3)$인 경우
각 순서쌍에 대하여 $f(1)<f(5)$이고 일대일대응이려면 $f(1)=1$이어야 하므로 $f(3)$, $f(4)$의 값을 정하는 경우의 수는 $2!$, 즉 이 경우의 수는
$2\times2!=4$

ⓑ 순서쌍 $(f(2), f(5))$가 $(3, 4)$, $(4, 3)$인 경우
각 순서쌍에 대하여 $f(1)<f(5)$이고 일대일대응이려면 $f(1)$의 값은 1, 2 중 하나이고 $f(3)$, $f(4)$의 값을 정하는 경우의 수는 $2!$이므로 이 경우의 수는
$2\times(2\times2!)=8$

따라서 사건 B가 일어날 확률은

$\mathrm{P}(B)=\dfrac{4+8}{5!}=\dfrac{12}{5!}=\dfrac{1}{10}$

(iii) 함수 f에 대하여 $f(1)$, $f(2)$, $f(5)$의 값을 순서쌍 $(f(1), f(2), f(5))$로 나타내 보자.
사건 $A\cap B$는 f가 일대일대응이므로 순서쌍 $(f(1), f(2), f(5))$가 $(1, 2, 3)$, $(1, 4, 3)$인 경우이다.
각 순서쌍은 $f(1)<f(5)$이므로 f가 일대일대응이 되도록 $f(3)$, $f(4)$의 값을 정하는 경우의 수는 $2!$, 즉 이 경우의 수는
$2\times2!=4$
따라서 사건 $A\cap B$가 일어날 확률은

$\mathrm{P}(A\cap B)=\dfrac{4}{5!}=\dfrac{1}{30}$

(i), (ii), (iii)에서 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)$$
$$=\frac{1}{6}+\frac{1}{10}-\frac{1}{30}=\frac{7}{30}$$

따라서 $p=30$, $q=7$이므로
$p+q=30+7=37$

답 37

30

이웃한 두 장의 카드에 적힌 수의 곱으로 가능한 값은 0, 1, 2, 4이므로 이웃한 두 장의 카드에 적힌 수의 곱이 항상 0이거나 2이려면 1이 적힌 카드끼리는 서로 이웃하지 않고, 2가 적힌 카드끼리도 서로 이웃하지 않아야 한다.

0이 적힌 카드 3장과 2가 적힌 카드 2장을 일렬로 나열하는 경우의 수는

$\dfrac{5!}{3!\times2!}=10$

예를 들어 그림과 같이 0이 적힌 카드 3장과 2가 적힌 카드 2장을 일렬로 나열하였다고 하자.

$\vee\ \boxed{0}\ \vee\ \boxed{2}\ \vee\ \boxed{0}\ \vee\ \boxed{2}\ \vee\ \boxed{0}\ \vee$

0 또는 2가 적힌 카드 사이사이 및 양 끝의 6개의 자리 중 4개의 자리를 택하여 1이 적힌 카드 4장을 한 장씩 놓는 경우의 수는

${}_6\mathrm{C}_4=15$

이므로 주어진 9장의 카드를 일렬로 나열할 때, 1이 적힌 카드끼리는 서로 이웃하지 않도록 나열하는 경우의 수는

$10\times15=150$ …… ㉠

이 중에서 2가 적힌 카드 2장이 이웃한 경우를 제외하여야 한다. 0이 적힌 카드 3장과 2가 적힌 카드 2장을 일렬로 나열할 때, 2가 적힌 카드 2장이 이웃하도록 나열하는 경우의 수는

$\dfrac{4!}{3!}=4$

예를 들어 그림과 같이 2가 적힌 카드 2장을 이웃하도록 나열하였다고 하자.

$\vee\ \boxed{0}\ \vee\ \boxed{2}\boxed{2}\ \vee\ \boxed{0}\ \vee\ \boxed{0}\ \vee$

2가 적힌 카드 2장 1개의 묶음과 0이 적힌 카드 3장의 사이사이 및 양 끝의 5개의 자리 중 4개의 자리를 택하여 1이 적힌 카드 4장을 한 장씩 놓는 경우의 수는

${}_5\mathrm{C}_4=5$

이므로 주어진 9장의 카드를 일렬로 나열할 때, 2가 적힌 카드 2장이 이웃하면서 1이 적힌 카드가 이웃하지 않도록 나열하는 경우의 수는

$4\times5=20$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 구하는 경우의 수는

$150-20=130$

답 130

다른 풀이

이웃한 두 장의 카드에 적힌 수의 곱으로 가능한 값은 0, 1, 2, 4이므로 이웃한 두 장의 카드에 적힌 수의 곱이 항상 0 이거나 2이려면 1이 적힌 카드끼리는 서로 이웃하지 않고, 2가 적힌 카드끼리도 서로 이웃하지 않아야 한다.

그림과 같이 1이 적힌 카드 4장을 일렬로 나열하였을 때, 카드의 양 옆을 왼쪽부터 차례로 ①, ②, ③, ④, ⑤라 하자.

① $\boxed{1}$ ② $\boxed{1}$ ③ $\boxed{1}$ ④ $\boxed{1}$ ⑤

①, ②, ③, ④, ⑤에 나열할 카드의 장수를 각각 a, b, c, d, e라 하면 1이 적힌 카드끼리는 이웃하지 않아야 하므로

$a+b+c+d+e=9-4=5$ $(b\ge1,\ c\ge1,\ d\ge1)$

$b=b'+1$, $c=c'+1$, $d=d'+1$ (b', c', d'은 음이 아닌 정수)로 놓으면

$a+b'+c'+d'+e=2$

이를 만족시키는 음이 아닌 정수 a, b', c', d', e의 모든 순서쌍 (a, b', c', d', e)의 개수는

${}_5\mathrm{H}_2={}_6\mathrm{C}_2=15$

즉, 0이 적힌 카드 3장과 2가 적힌 카드 2장을 모두 같은 종류의 카드로 생각하여 1이 적힌 카드끼리는 이웃하지 않도록 9장의 카드를 일렬로

나열하는 경우의 수는 15이고, 각 경우마다 0이 적힌 카드 3장과 2가 적힌 카드 2장을 정하는 경우의 수는 ${}_5C_3={}_5C_2=10$이므로 주어진 9장의 카드를 일렬로 나열할 때, 1이 적힌 카드끼리는 서로 이웃하지 않도록 나열하는 경우의 수는

$15\times10=150$ ⋯⋯ ㉠

이제 1이 적힌 카드끼리는 서로 이웃하지 않고, 2가 적힌 카드끼리는 서로 이웃하도록 나열하는 경우의 수를 구하기 위해 2가 적힌 카드 2장은 1개의 묶음으로 생각하자.

① $\boxed{1}$ ② $\boxed{1}$ ③ $\boxed{1}$ ④ $\boxed{1}$ ⑤

①, ②, ③, ④, ⑤에 나열할 카드의 장수를 각각 p, q, r, s, t라 하면 1이 적힌 카드끼리는 이웃하지 않아야 하므로

$p+q+r+s+t=8-4=4$ $(q\geq1,\ r\geq1,\ s\geq1)$

$q=q'+1$, $r=r'+1$, $s=s'+1$ (q', r', s'은 음이 아닌 정수)로 놓으면

$p+q'+r'+s'+t=1$

이를 만족시키는 음이 아닌 정수 p, q', r', s', t의 모든 순서쌍 (p, q', r', s', t)의 개수는

${}_5H_1={}_5C_1=5$

즉, 0이 적힌 카드 3장과 2가 적힌 카드 묶음 1개를 모두 같은 종류의 카드로 생각하여 1이 적힌 카드끼리는 이웃하지 않도록 9장의 카드를 일렬로 나열하는 경우의 수는 5이고, 각 경우마다 0이 적힌 카드 3장과 2가 적힌 카드 2장의 묶음 1개를 정하는 경우의 수는 ${}_4C_3={}_4C_1=4$이므로 주어진 9장의 카드를 일렬로 나열할 때, 1이 적힌 카드끼리는 서로 이웃하지 않고, 2가 적힌 카드는 서로 이웃하도록 나열하는 경우의 수는

$5\times4=20$ ⋯⋯ ㉡

㉠, ㉡에서 구하는 경우의 수는

$150-20=130$

실전 모의고사 4회

본문 150~161쪽

01 ①	02 ④	03 ②	04 ⑤	05 ⑤
06 ③	07 ④	08 ③	09 ⑤	10 ②
11 ②	12 ①	13 ①	14 ⑤	15 ②
16 6	17 8	18 62	19 10	20 54
21 135	22 52	23 ③	24 ③	25 ④
26 ⑤	27 ③	28 ⑤	29 9	30 404

01

$$2^{\sqrt{2}-1}\times\left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{1}{2}}=2^{\sqrt{2}-1}\times(2^{-2})^{\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{1}{2}}=2^{\sqrt{2}-1}\times2^{-2\times\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{1}{2}\right)}$$

$$=2^{\sqrt{2}-1-\sqrt{2}-1}=2^{-2}=\frac{1}{4}$$

답 ①

02

$f(x)=(x+1)(x^2+2)$에서

$f'(x)=1\times(x^2+2)+(x+1)\times2x$

$=x^2+2+2x^2+2x$

$=3x^2+2x+2$

따라서 $f'(2)=3\times2^2+2\times2+2=18$

답 ④

03

등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공비를 r라 하자.

$a_2=10$에서 $ar=10$ ⋯⋯ ㉠

$\frac{a_4}{a_1}=8$에서 $\frac{ar^3}{a}=r^3=8$

등비수열 $\{a_n\}$의 모든 항이 실수이므로

$r=2$ ⋯⋯ ㉡

㉡을 ㉠에 대입하면

$2a=10$, $a=5$

따라서 $a_5=ar^4=5\times2^4=80$

답 ②

04

$\lim_{x\to0+}f(x)=1$, $\lim_{x\to1-}f(x)=2$, $\lim_{x\to2+}f(x)=2$이므로

$\lim_{x\to0+}f(x)+\lim_{x\to1-}f(x)\times\lim_{x\to2+}f(x)=1+2\times2=5$

답 ⑤

05

$\sin\theta-\cos\theta=\frac{1}{2}$의 양변을 제곱하면

$\sin^2\theta-2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta=\frac{1}{4}$

$(\sin^2\theta+\cos^2\theta)-2\sin\theta\cos\theta=\frac{1}{4}$

$1-2\sin\theta\cos\theta=\frac{1}{4}$

$\sin\theta\cos\theta=\frac{3}{8}$

$|\sin\theta+\cos\theta|^2=(\sin\theta+\cos\theta)^2$

$=\sin^2\theta+2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta$

$=(\sin^2\theta+\cos^2\theta)+2\sin\theta\cos\theta$

$=1+2\times\frac{3}{8}=\frac{7}{4}$

$|\sin\theta+\cos\theta|\ge 0$이므로

$|\sin\theta+\cos\theta|=\frac{\sqrt{7}}{2}$

답 ⑤

06

방정식 $x^3+x^2+4=x^2+3x+k$, 즉 $x^3-3x+4=k$의 서로 다른 실근의 개수가 2이다.

$h(x)=x^3-3x+4$라 하면

$h'(x)=3x^2-3=3(x+1)(x-1)$

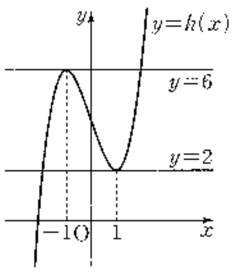
$h'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=1$

함수 $h(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
$h'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$h(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

$h(-1)=6$, $h(1)=2$

함수 $y=h(x)$의 그래프는 그림과 같다.



곡선 $y=h(x)$와 직선 $y=k$가 만나는 점의 개수가 2이려면 $k=2$ 또는 $k=6$이어야 한다.

따라서 모든 실수 k의 값의 합은

$2+6=8$

답 ③

07

$a_1=10$이고 10은 짝수이므로 $a_2=\frac{1}{2}a_1=\frac{1}{2}\times10=5$

$a_2=5$이고 5는 홀수이므로 $a_3=a_2+1=5+1=6$

$a_3=6$이고 6은 짝수이므로 $a_4=\frac{1}{2}a_3=\frac{1}{2}\times6=3$

$a_4=3$이고 3은 홀수이므로 $a_5=a_4+1=3+1=4$

$a_5=4$이고 4는 짝수이므로 $a_6=\frac{1}{2}a_5=\frac{1}{2}\times4=2$

$a_6=2$이고 2는 짝수이므로 $a_7=\frac{1}{2}a_6=\frac{1}{2}\times2=1$

$a_7=1$이고 1은 홀수이므로 $a_8=a_7+1=1+1=2$

$a_8=2$이고 2는 짝수이므로 $a_9=\frac{1}{2}a_8=\frac{1}{2}\times2=1$

이와 같은 과정을 반복하면

$a_6=a_8=a_{10}=\cdots=2$

$a_7=a_9=a_{11}=\cdots=1$

따라서 모든 자연수 n에 대하여 $a_n\ge1$이고, $n\le5$이면 $a_n\ge3$,

$a_6+a_7=2+1=3$이므로 $a_k+a_{k+1}=3$을 만족시키는 자연수 k의 최솟값은 6이다.

답 ④

08

직사각형 ABCD의 넓이가 6이므로 선분 AB와 곡선 $y=kx^2$ 및 두 직선 $x=-1$, $x=1$로 둘러싸인 부분의 넓이가 3이다.

$\int_{-1}^{1}(2-kx^2)\,dx=2\int_0^1(2-kx^2)\,dx=2\left[2x-\frac{kx^3}{3}\right]_0^1=2\left(2-\frac{k}{3}\right)$

$2\left(2-\frac{k}{3}\right)=3$에서 $2-\frac{k}{3}=\frac{3}{2}$, $\frac{k}{3}=\frac{1}{2}$

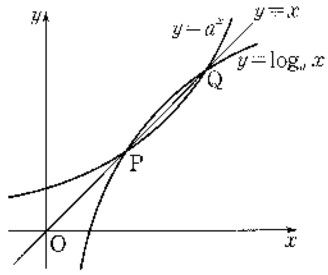
따라서 $k=\frac{3}{2}$

답 ③

09

$f(x)=a^x$, $g(x)=\log_a x$라 하면 두 함수 $f(x)$, $g(x)$는 서로 역함수 관계이고, 함수 $f(x)$는 실수 전체의 집합에서 증가하므로 두 곡선 $y=a^x$, $y=\log_a x$의 교점은 곡선 $y=a^x$과 직선 $y=x$의 교점과 같다.

즉, 두 점 P, Q는 직선 $y=x$ 위의 점이다.



$\overline{OP}=\overline{PQ}$이므로 양수 k에 대하여 점 P의 좌표를 (k, k)라 하면 점 Q의 좌표는 $(2k, 2k)$이다.

두 점 P, Q는 곡선 $y=a^x$ 위의 점이므로

$a^k=k$ …… ㉠

$a^{2k}=2k$ …… ㉡

㉡에서 $a^{2k}=(a^k)^2$이므로 ㉠을 대입하면 $k^2=2k$, $k(k-2)=0$

$k>0$이므로 $k=2$ …… ㉢

㉢을 ㉠에 대입하면 $a^2=2$

$a>1$이므로 $a=\sqrt{2}$

답 ⑤

10

$g(x)=2x+4$라 하면 $f'(1)=g'(1)$, $f(1)=g(1)$이므로 함수 $f(x)-g(x)$는 $(x-1)^2$을 인수로 갖는다.

또 $f'(2)=g'(2)$, $f(2)=g(2)$이므로 함수 $f(x)-g(x)$는 $(x-2)^2$을 인수로 갖는다. 즉, $f(x)-g(x)=(x-1)^2(x-2)^2$이므로

$f(x)=(x-1)^2(x-2)^2+2x+4$

따라서 $f(3)=(3-1)^2\times(3-2)^2+2\times3+4=14$

답 ②

11

점 C의 y좌표를 t라 하면

$S_1=\frac{1}{2}\times\overline{AB}\times(1-t)$, $S_2=\frac{1}{2}\times\overline{OD}\times t$이므로

$\frac{S_2}{S_1}=\frac{\overline{OD}\times t}{\overline{AB}\times(1-t)}$

$\frac{\overline{OD}\times t}{\overline{AB}\times(1-t)}=\frac{\overline{OD}}{\overline{AB}}$에서 $1-t=t$, 즉 $t=\frac{1}{2}$

곡선 $y=f(x-a)$는 곡선 $y=f(x)$를 x축의 방향으로 a만큼 평행이동한 것이므로 두 점 A, B의 x좌표는 각각 $\frac{1}{2}$, $a+\frac{1}{2}$이고,

점 C의 x좌표는 $\dfrac{\frac{1}{2}+\left(a+\frac{1}{2}\right)}{2}=\frac{1}{2}a+\frac{1}{2}$

즉, $C\left(\frac{1}{2}a+\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$이고 점 C는 곡선 $y=f(x)$ 위의 점이므로

$\frac{1}{2}=\sin\left\{\left(\frac{1}{2}a+\frac{1}{2}\right)\pi\right\}$

한편, $0<a<1$에서 $\frac{\pi}{2}<\left(\frac{1}{2}a+\frac{1}{2}\right)\pi<\pi$이고

$\sin\frac{5}{6}\pi=\frac{1}{2}$이므로 $\left(\frac{1}{2}a+\frac{1}{2}\right)\pi=\frac{5}{6}\pi$

따라서 $\frac{1}{2}a+\frac{1}{2}=\frac{5}{6}$이므로 $a=\frac{2}{3}$

답 ②

12

$\lim_{x\to-1}|g(x)|=\lim_{x\to-1}\left|\frac{x^3+x+1}{f(x)}\right|$

$\lim_{x\to-1}(x^3+x+1)=-1$이므로 조건 (가)를 만족시키려면

$\lim_{x\to-1}|f(x)|=0$

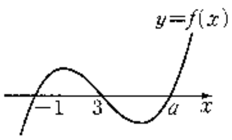
즉, 함수 $f(x)$는 $x+1$을 인수로 갖는다.

$\lim_{x\to3}g(x)=\lim_{x\to3}\frac{x^3+x+1}{f(x)}$

$\lim_{x\to3}(x^3+x+1)=31$이므로 $\lim_{x\to3}f(x)=0$이고 함수 $f(x)$는 $x-3$을 인수로 갖는다.

$f(x)=(x+1)(x-3)(x-a)$ (a는 상수)라 하자.

$a>3$이면 함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형은 그림과 같다.



$x\to3+$일 때 $f(x)\to0-$이므로

$\lim_{x\to3+}g(x)=-\infty$이고

$x\to3-$일 때 $f(x)\to0+$이므로 $\lim_{x\to3-}g(x)=\infty$이다.

따라서 조건 (나)를 만족시키지 않는다.

마찬가지로 $a<3$인 경우도 조건 (나)를 만족시키지 않는다.

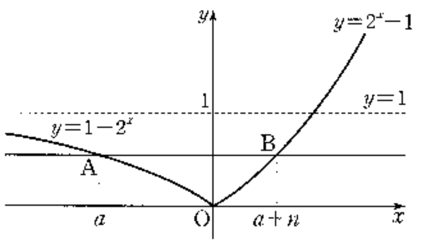
$a=3$이면 $f(x)=(x+1)(x-3)^2$, $g(x)=\frac{x^3+x+1}{(x+1)(x-3)^2}$이므로

조건 (나)를 만족시킨다.

따라서 $f(5)=6\times4=24$

답 ①

13



$f(x)=|2^x-1|=\begin{cases}1-2^x & (x<0)\\ 2^x-1 & (x\geq0)\end{cases}$

이고, 곡선 $y=f(x)$의 점근선은 $y=1$이다.

곡선 $y=1-2^x$ $(x<0)$ 위의 점 A, 곡선 $y=2^x-1$ $(x>0)$ 위의 점 B를 직선 AB가 x축과 평행하고 $\overline{AB}=n$이 되도록 잡는다.

점 A의 x좌표를 a라 하면 점 B의 x좌표는 $a+n$이므로

$1-2^a=2^{a+n}-1$, $(2^n+1)\times2^a=2$, $2^a=\frac{2}{2^n+1}$

즉, $a=\log_2\frac{2}{2^n+1}$

(i) $t<a$일 때

닫힌구간 $[t, t+n]$에서 함수 $f(x)=|2^x-1|$의 최댓값은 $f(t)$

(ii) $t=a$일 때

닫힌구간 $[t, t+n]$에서 함수 $f(x)=|2^x-1|$의 최댓값은 $f(t)=f(t+n)$

(iii) $t>a$일 때

닫힌구간 $[t, t+n]$에서 함수 $f(x)=|2^x-1|$의 최댓값은 $f(t+n)$

(i), (ii), (iii)에서 $t\geq a$일 때, 닫힌구간 $[t, t+n]$에서 함수 $f(x)=|2^x-1|$의 최댓값이 $f(t+n)$이므로 닫힌구간 $[t, t+n]$에서 함수 $f(x)=|2^x-1|$의 최댓값이 $f(t+n)$이 되도록 하는 실수 t의 최솟값은 $a=\log_2\frac{2}{2^n+1}$이고 $g(n)=\log_2\frac{2}{2^n+1}$이다.

$2^{g(n)}=\frac{2}{2^n+1}$, $\frac{1}{2^{g(n)}}=\frac{2^n+1}{2}$이므로

$\frac{1}{2^{g(3)}}=\frac{2^3+1}{2}=\frac{9}{2}$

$\frac{1}{2^{g(4)}}=\frac{2^4+1}{2}=\frac{17}{2}$

$\frac{1}{2^{g(5)}}=\frac{2^5+1}{2}=\frac{33}{2}$

따라서 $\frac{1}{2^{g(3)}}+\frac{1}{2^{g(4)}}+\frac{1}{2^{g(5)}}=\frac{9}{2}+\frac{17}{2}+\frac{33}{2}=\frac{59}{2}$

답 ①

14

ㄱ. $a=0$이면 $v(t)=t^2(t-2)=t^3-2t^2$이므로

$x(1)=\int_0^1(t^3-2t^2)\,dt=\left[\frac{1}{4}t^4-\frac{2}{3}t^3\right]_0^1$

$=\frac{1}{4}-\frac{2}{3}=-\frac{5}{12}<0$ (참)

ㄴ. $x(2)=\int_0^2v(t)dt=\int_0^2t(t-2)(t-a)\,dt$

$=\int_0^2\{t^3-(a+2)t^2+2at\}\,dt=\left[\frac{1}{4}t^4-\frac{a+2}{3}t^3+at^2\right]_0^2$

$=4-\frac{8(a+2)}{3}+4a=\frac{4a-4}{3}$

$\frac{4a-4}{3}=a$에서 $a=4$ (참)

ㄷ. $x(a)=\int_0^av(t)\,dt=\int_0^at(t-2)(t-a)\,dt$

$=\int_0^a\{t^3-(a+2)t^2+2at\}\,dt=\left[\frac{1}{4}t^4-\frac{a+2}{3}t^3+at^2\right]_0^a$

$=\frac{1}{4}a^4-\frac{a+2}{3}\times a^3+a^3=-\frac{1}{12}a^4+\frac{1}{3}a^3$

$-\frac{1}{12}a^4+\frac{1}{3}a^3=-a^2$에서

$a>0$이므로 $-\frac{1}{12}a^2+\frac{1}{3}a=-1$

$a^2-4a-12=0$, $(a+2)(a-6)=0$

$a>0$이므로 $a=6$, 즉 $x(6)=-6^2$

$0\le t\le 2$에서 $v(t)\ge 0$이고, $2\le t\le 6$에서 $v(t)\le 0$이므로

$$\begin{aligned}\int_0^6 |v(t)|\,dt&=\int_0^2 v(t)\,dt+\int_2^6 \{-v(t)\}\,dt\\&=\int_0^2 v(t)\,dt-\int_2^6 v(t)\,dt\\&=\int_0^2 v(t)\,dt-\left(\int_0^6 v(t)\,dt-\int_0^2 v(t)\,dt\right)\\&=2\int_0^2 v(t)\,dt-\int_0^6 v(t)\,dt\\&=2\times x(2)-x(6)=2\times x(2)-(-6^2)\\&=2\times x(2)+36\ (\text{참})\end{aligned}$$

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

답 ⑤

15

x에 대한 방정식 $\sin x-|\sin t|=0$에서

$0<t<\frac{\pi}{2}$일 때, $x=t$ 또는 $x=\pi-t$

$\frac{\pi}{2}<t<\pi$일 때, $x=\pi-t$ 또는 $x=t$

$\pi<t<\frac{3}{2}\pi$일 때, $x=t-\pi$ 또는 $x=2\pi-t$

$\frac{3}{2}\pi<t<2\pi$일 때, $x=2\pi-t$ 또는 $x=t-\pi$

x에 대한 방정식 $|\sin x|-\sin t=0$에서

$0<t<\frac{\pi}{2}$일 때, $x=t$ 또는 $x=\pi-t$ 또는 $x=\pi+t$ 또는 $x=2\pi-t$

$\frac{\pi}{2}<t<\pi$일 때, $x=\pi-t$ 또는 $x=t$ 또는 $x=2\pi-t$ 또는 $x=\pi+t$

$\pi<t<\frac{3}{2}\pi$일 때, 실근은 존재하지 않는다.

$\frac{3}{2}\pi<t<2\pi$일 때, 실근은 존재하지 않는다.

그러므로 각 경우의 $0<x<2\pi$에서 x에 대한 방정식 $(\sin x-|\sin t|)(|\sin x|-\sin t)=0$의 실근을 크기순으로 나열하고 서로 다른 모든 실근의 합을 구하면

(i) $0<t<\frac{\pi}{2}$일 때

$x=t$ 또는 $x=\pi-t$ 또는 $x=\pi+t$ 또는 $x=2\pi-t$이므로 서로 다른 모든 실근의 합은

$t+(\pi-t)+(\pi+t)+(2\pi-t)=4\pi$

(ii) $\frac{\pi}{2}<t<\pi$일 때

$x=\pi-t$ 또는 $x=t$ 또는 $x=2\pi-t$ 또는 $x=\pi+t$이므로 서로 다른 모든 실근의 합은

$(\pi-t)+t+(2\pi-t)+(\pi+t)=4\pi$

(iii) $\pi<t<\frac{3}{2}\pi$일 때

$x=t-\pi$ 또는 $x=2\pi-t$이므로 서로 다른 모든 실근의 합은

$(t-\pi)+(2\pi-t)=\pi$

(iv) $\frac{3}{2}\pi<t<2\pi$일 때

$x=2\pi-t$ 또는 $x=t-\pi$이므로 서로 다른 모든 실근의 합은

$(2\pi-t)+(t-\pi)=\pi$

즉,

$$f(t)=\begin{cases}t & \left(0<t<\frac{\pi}{2}\right)\\ \pi-t & \left(\frac{\pi}{2}<t<\pi\right)\\ t-\pi & \left(\pi<t<\frac{3}{2}\pi\right)\\ 2\pi-t & \left(\frac{3}{2}\pi<t<2\pi\right)\end{cases},\quad g(t)=\begin{cases}2\pi-t & \left(0<t<\frac{\pi}{2}\right)\\ \pi+t & \left(\frac{\pi}{2}<t<\pi\right)\\ 2\pi-t & \left(\pi<t<\frac{3}{2}\pi\right)\\ t-\pi & \left(\frac{3}{2}\pi<t<2\pi\right)\end{cases}$$

$$g(t)-f(t)=\begin{cases}2\pi-2t & \left(0<t<\frac{\pi}{2}\right)\\ 2t & \left(\frac{\pi}{2}<t<\pi\right)\\ 3\pi-2t & \left(\pi<t<\frac{3}{2}\pi\right)\\ 2t-3\pi & \left(\frac{3}{2}\pi<t<2\pi\right)\end{cases},\quad h(t)=\begin{cases}4\pi & \left(0<t<\frac{\pi}{2}\right)\\ 4\pi & \left(\frac{\pi}{2}<t<\pi\right)\\ \pi & \left(\pi<t<\frac{3}{2}\pi\right)\\ \pi & \left(\frac{3}{2}\pi<t<2\pi\right)\end{cases}$$

$0<t<\pi\ \left(t\ne\frac{\pi}{2}\right)$에서 $\pi<kh(t)<2\pi$일 때

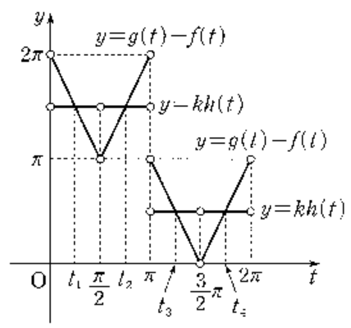
방정식 $g(t)-f(t)=kh(t)$의 두 실근을 t_1, t_2라 하면

$\frac{t_1+t_2}{2}=\frac{\pi}{2}$에서 $t_1+t_2=\pi$

$\pi<t<2\pi\ \left(t\ne\frac{3}{2}\pi\right)$에서 $0<kh(t)<\pi$일 때

방정식 $g(t)-f(t)=kh(t)$의 두 실근을 t_3, t_4라 하면

$\frac{t_3+t_4}{2}=\frac{3}{2}\pi$에서 $t_3+t_4=3\pi$



$t_1+t_2+t_3+t_4=(t_1+t_2)+(t_3+t_4)=\pi+3\pi=4\pi$이므로

$0<t<\pi\ \left(t\ne\frac{\pi}{2}\right)$에서 $\pi<kh(t)<2\pi$이고

$\pi<t<2\pi\ \left(t\ne\frac{3}{2}\pi\right)$에서 $0<kh(t)<\pi$인 경우에만

방정식 $g(t)-f(t)=kh(t)$의 모든 실근의 합이 4π이다.

$0<t<\pi\ \left(t\ne\frac{\pi}{2}\right)$에서 $h(t)=4\pi$이므로 $\pi<4\pi k<2\pi$

$\frac{1}{4}<k<\frac{1}{2}$ …… ㉠

$\pi<t<2\pi\ \left(t\ne\frac{3}{2}\pi\right)$에서 $h(t)=\pi$이므로 $0<\pi k<\pi$

$0<k<1$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 모든 실수 k의 값의 범위는 $\frac{1}{4}<k<\frac{1}{2}$

따라서 $\alpha=\frac{1}{4}$, $\beta=\frac{1}{2}$이므로 $\alpha\beta=\frac{1}{4}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{8}$

답 ②

16

$$\log_2 9\times\frac{1}{\log_8 3}=\log_2 9\times\log_3 8=\frac{\log 9}{\log 2}\times\frac{\log 8}{\log 3}$$

$$=\frac{2\log 3}{\log 2}\times\frac{3\log 2}{\log 3}=2\times3=6$$

답 6

17

$$f(x)=\int(3x^2+4x+1)\,dx$$

$$=x^3+2x^2+x+C\ (\text{단, } C\text{는 적분상수})$$

한편, $f(0)=4$이므로 $C=4$

따라서 $f(x)=x^3+2x^2+x+4$이므로

$f(1)=1^3+2\times1^2+1+4=8$

답 8

18

$$\sum_{k=1}^{10}(a_k+2)(b_k+2)=\sum_{k=1}^{10}(a_kb_k+2a_k+2b_k+4)$$

$$=\sum_{k=1}^{10}a_kb_k+2\sum_{k=1}^{10}(a_k+b_k)+40$$

$150=\sum_{k=1}^{10}a_kb_k+2\times24+40$에서

$\sum_{k=1}^{10}a_kb_k=150-(48+40)=62$

답 62

19

이차함수 $f(x)$가 최고차항의 계수가 1이고

모든 실수 x에 대하여 $f(1+x)=f(1-x)$이므로

$f(x)=(x-1)^2+k=x^2-2x+(k+1)$ (단, k는 실수)

조건 (가)에서 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $\mathrm{A}(a,\ f(a))$에서의 접선 l_1은

$y=f'(a)(x-a)+f(a)$

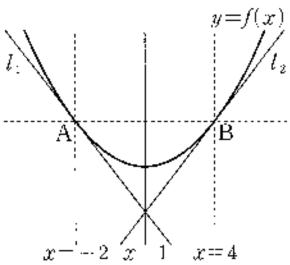
이고, 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $\mathrm{B}(b,\ f(b))$에서의 접선 l_2는

$y=f'(b)(x-b)+f(b)$

이므로 x에 대한 방정식 $f'(a)(x-a)+f(a)=f'(b)(x-b)+f(b)$의 근은 두 직선 l_1, l_2의 교점의 x좌표와 같다.

$\frac{a+b}{2}=1$인 경우에만 두 직선 l_1, l_2의 교점의 x좌표가 1이므로

$a+b=2$ ...... ㉠



$\frac{a+b}{2}=1$에서 $f(a)=f(b)$이므로

조건 (나)에서

$\sqrt{(b-a)^2+\{f(b)-f(a)\}^2}$

$=\sqrt{(b-a)^2}$

$=b-a=6$ ...... ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=-2,\ b=4$

따라서 $f'(x)=2x-2$, $a+2b=(-2)+2\times4=6$이므로

$f'(a+2b)=f'(6)=2\times6-2=10$

답 10

20

조건 (가)에서

$\int_0^6 xf(x)\,dx-6\int_0^6 f(x)\,dx=0$

$\int_0^6 xf(x)\,dx=6\int_0^6 f(x)\,dx$ ...... ㉠

조건 (나)에서

$2\int_0^6 xf(x)\,dx+3\int_0^6 f(x)\,dx=90$ ...... ㉡

$\int_0^6 f(x)\,dx=A$, $\int_0^6 xf(x)\,dx=B$라 하면

㉠에서 $B=6A$, ㉡에서 $2B+3A=90$

두 식을 연립하여 풀면

$A=\int_0^6 f(x)\,dx=6,\ B=\int_0^6 xf(x)\,dx=36$ ...... ㉢

$f(x)=x^2+ax+b$ (a, b는 상수)라 하면

$$\int_0^6 f(x)\,dx=\int_0^6(x^2+ax+b)\,dx=\left[\frac{1}{3}x^3+\frac{a}{2}x^2+bx\right]_0^6$$

$$=72+18a+6b=6(12+3a+b)$$

㉢에 의하여 $12+3a+b=1$, $3a+b=-11$ ...... ㉣

$$\int_0^6 xf(x)\,dx=\int_0^6(x^3+ax^2+bx)\,dx=\left[\frac{1}{4}x^4+\frac{a}{3}x^3+\frac{b}{2}x^2\right]_0^6$$

$$=\frac{1}{4}\times6^4+\frac{a}{3}\times6^3+\frac{b}{2}\times6^2=36\left(9+2a+\frac{b}{2}\right)$$

㉢에 의하여 $9+2a+\frac{b}{2}=1$, $4a+b=-16$ ...... ㉤

㉣, ㉤을 연립하여 풀면 $a=-5$, $b=4$

따라서 $f(x)=x^2-5x+4$이므로

$f(10)=10^2-5\times10+4=54$

답 54

21

등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항이 $\frac{4}{3}$이고, 공차가 $\frac{1}{3}$이므로 모든 자연수 n에 대하여 $a_n<a_{n+1}$이고, 2와 3의 최소공배수는 6이다.

$m=6$일 때, $A_6=\{a_2,\ a_4,\ a_6,\ \cdots,\ a_{12}\}$, $B_6=\{a_3,\ a_6,\ a_9,\ \cdots,\ a_{18}\}$

$A_6\cap B_6=\{a_6,\ a_{12}\}$, $b_6=a_{12}$

$m=7$일 때, $A_7=\{a_2,\ a_4,\ a_6,\ \cdots,\ a_{14}\}$, $B_7=\{a_3,\ a_6,\ a_9,\ \cdots,\ a_{21}\}$

$A_7\cap B_7=\{a_6,\ a_{12}\}$, $b_7=a_{12}$

$m=8$일 때, $A_8=\{a_2,\ a_4,\ a_6,\ \cdots,\ a_{16}\}$, $B_8=\{a_3,\ a_6,\ a_9,\ \cdots,\ a_{24}\}$

$A_8\cap B_8=\{a_6,\ a_{12}\}$, $b_8=a_{12}$

$m=9$일 때, $A_9=\{a_2,\ a_4,\ a_6,\ \cdots,\ a_{18}\}$, $B_9=\{a_3,\ a_6,\ a_9,\ \cdots,\ a_{27}\}$

$A_9\cap B_9=\{a_6,\ a_{12},\ a_{18}\}$, $b_9=a_{18}$

$m=10$일 때, $A_{10}=\{a_2,\ a_4,\ a_6,\ \cdots,\ a_{20}\}$, $B_{10}=\{a_3,\ a_6,\ a_9,\ \cdots,\ a_{30}\}$

$A_{10}\cap B_{10}=\{a_6,\ a_{12},\ a_{18}\}$, $b_{10}=a_{18}$

$m=11$일 때, $A_{11}=\{a_2,\ a_4,\ a_6,\ \cdots,\ a_{22}\}$, $B_{11}=\{a_3,\ a_6,\ a_9,\ \cdots,\ a_{33}\}$

$A_{11}\cap B_{11}=\{a_6,\ a_{12},\ a_{18}\}$, $b_{11}=a_{18}$

⋮

이와 같은 과정을 반복하면

$b_{3k+3}=b_{3k+4}=b_{3k+5}=a_{6k+6}\ (k=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$

$a_n=\frac{4}{3}+(n-1)\times\frac{1}{3}$이므로

$a_{6k+6}=\frac{4}{3}+\{(6k+6)-1\}\times\frac{1}{3}=2k+3$

따라서

$\sum_{m=6}^{20}b_m=\sum_{k=1}^{5}(b_{3k+3}+b_{3k+4}+b_{3k+5})=\sum_{k=1}^{5}3a_{6k+6}$

$=3\sum_{k=1}^{5}a_{6k+6}=3\sum_{k=1}^{5}(2k+3)=3\times\left(2\times\frac{5\times6}{2}+3\times5\right)=135$

답 135

22

$f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ (a, b, c는 상수)라 하면

$f'(x)=3x^2+2ax+b$

(i) 함수 $g(x)$는 $x=2$에서 연속이므로

$\lim_{x\to2}g(x)=\lim_{x\to2-}\frac{f'(x+2)-f'(x-2)}{x-2}$

$g(2)=2\times f(2)$ ······ ㉠

$x\to2-$일 때 (분모) $\to$ 0이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\to$ 0 이어야 한다.

즉, $\lim_{x\to2}\{f'(x+2)-f'(x-2)\}=0$이고 $f'(x)$가 연속이므로

$f'(4)=f'(0)$

$3\times4^2+2\times a\times4+b=b$에서

$a=-6$

또한 $f'(x)=3x^2-12x+b$에서

$f'(x+2)-f'(x-2)$

$=3(x+2)^2-12(x+2)+b-3(x-2)^2+12(x-2)-b$

$=3x^2+12x+12-12x-24-3x^2+12x-12+12x-24$

$=24(x-2)$

이므로

$\lim_{x\to2-}g(x)=\lim_{x\to2-}\frac{24(x-2)}{x-2}=24$

$f(x)=x^3-6x^2+bx+c$에서 $f(2)=2b+c-16$

㉠에 의하여 $2(2b+c-16)=24$

$2b+c=28$ ······ ㉡

(ii) 함수 $g(x)$는 $x=2$에서 미분가능하므로

$x<2$일 때, $g(x)=24$이고 $g'(x)=0$

$\lim_{x\to2-}\frac{g(x)-g(2)}{x-2}=0$ ······ ㉢

$x\geq2$일 때, $g(x)=xf(x)$이고

$\lim_{x\to2+}\frac{xf(x)-2f(2)}{x-2}=\lim_{x\to2+}\frac{(x-2)f(x)+2\{f(x)-f(2)\}}{x-2}$

$=\lim_{x\to2+}f(x)+2\lim_{x\to2+}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}$

$=f(2)+2f'(2)$ ······ ㉣

이때 $f'(2)=12-24+b=b-12$이고 ㉡에서 $f(2)=12$이므로

$f(2)+2f'(2)=12+2(b-12)=2b-12$

$g(x)$가 $x=2$에서 미분가능하므로 ㉢=㉣

$2b-12=0$에서 $b=6$

$b=6$을 ㉡에 대입하면

$12+c=28$에서 $c=16$

(i), (ii)에 의하여 $f(x)=x^3-6x^2+6x+16$이므로

$f(6)=6^3-6\times6^2+6\times6+16=52$

답 52

23

4개의 문자 a, b, c, d에서 중복을 허락하여 2개를 택하는 경우의 수는

${}_4\mathrm{H}_2={}_5\mathrm{C}_2=\frac{5\times4}{2}=10$

답 ③

24

확률변수 X가 이항분포 $\mathrm{B}\left(n,\ \frac{1}{4}\right)$을 따르므로

$\mathrm{E}(X)=n\times\frac{1}{4}=\frac{n}{4}$

$\mathrm{V}(X)=n\times\frac{1}{4}\times\frac{3}{4}=\frac{3n}{16}$

$\mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2$이고 $\mathrm{E}(X^2)=19$이므로

$\frac{3n}{16}=19-\left(\frac{n}{4}\right)^2$에서

$\frac{3n}{16}=19-\frac{n^2}{16}$

$n^2+3n-16\times19=0$

$(n+19)(n-16)=0$

n은 자연수이므로 $n=16$

답 ③

25

$\left(x+\frac{1}{x}\right)^6\left(x-\frac{1}{x}\right)^6=\left\{\left(x+\frac{1}{x}\right)\left(x-\frac{1}{x}\right)\right\}^6$

$=\left(x^2-\frac{1}{x^2}\right)^6$

$\left(x^2-\frac{1}{x^2}\right)^6$의 전개식에서 일반항은

${}_6\mathrm{C}_r(x^2)^{6-r}(-x^{-2})^r={}_6\mathrm{C}_r(-1)^rx^{12-4r}$ ($r=0, 1, 2, \cdots, 6$)

상수항은 $12-4r=0$일 때이므로 $r=3$

따라서 구하는 상수항은

${}_6\mathrm{C}_3(-1)^3=-20$

답 ④

26

k가 짝수인 경우, 즉 $2\times f(2)$, $4\times f(4)$는 모두 짝수이므로

$\sum_{k=1}^{5}\{k\times f(k)\}$의 값이 홀수이려면 k가 홀수인 경우, 즉 $1\times f(1)$, $3\times f(3)$, $5\times f(5)$는 모두 홀수이거나, 홀수가 1개, 짝수가 2개이어야 한다.

(i) $1\times f(1)$, $3\times f(3)$, $5\times f(5)$가 모두 홀수인 경우

$f(1)$, $f(3)$, $f(5)$가 모두 홀수이고, $f(2)$, $f(4)$는 홀수이든 짝수이든 상관없다.

따라서 이 경우 함수 f의 개수는

${}_2\Pi_3\times{}_5\Pi_2=2^3\times5^2=200$

(ii) $1\times f(1)$, $3\times f(3)$, $5\times f(5)$ 중에서 홀수가 1개, 짝수가 2개인 경우

$f(1)$, $f(3)$, $f(5)$ 중에서 홀수가 1개, 짝수가 2개이다.

$f(1)$, $f(3)$, $f(5)$ 중에서 홀수인 것 1개를 정하는 경우의 수는 3이고, 공역에 홀수가 2개, 짝수가 3개 있으므로 함숫값이 홀수인 것 1개를 정하여 공역의 홀수 7, 9에 대응시키는 방법의 수는

$3\times2=6$

함숫값이 짝수인 것 2개를 공역의 짝수 6, 8, 10에 대응시키는 방법의 수는

${}_3\Pi_2=3^2=9$

이때 $f(2)$, $f(4)$는 홀수이든 짝수이든 상관없다.

따라서 이 경우 함수 f의 개수는

$6\times9\times{}_5\Pi_2=6\times9\times5^2=1350$

(i), (ii)에서 구하는 함수의 개수는

$200+1350=1550$

답 ⑤

27

모집단의 모표준편차를 σ라 하고 Z가 표준정규분포를 따르는 확률변수일 때 $\mathrm{P}(|Z|\le\alpha)=\dfrac{k}{100}$라 하자. (단, α는 양수)

모평균이 m인 정규분포를 따르는 모집단에서 크기가 n_1인 표본을 임의추출하여 얻은 표본평균이 $\overline{x_1}$일 때, 모평균 m에 대한 신뢰도 k %의 신뢰구간은

$\overline{x_1}-\alpha\times\dfrac{\sigma}{\sqrt{n_1}}\le m\le\overline{x_1}+\alpha\times\dfrac{\sigma}{\sqrt{n_1}}$이므로

$a=\overline{x_1}-\alpha\times\dfrac{\sigma}{\sqrt{n_1}}$, $b=\overline{x_1}+\alpha\times\dfrac{\sigma}{\sqrt{n_1}}$

같은 모집단에서 크기가 n_2인 표본을 임의추출하여 얻은 표본평균이 $\overline{x_2}$일 때, 모평균 m에 대한 신뢰도 k %의 신뢰구간은

$\overline{x_2}-\alpha\times\dfrac{\sigma}{\sqrt{n_2}}\le m\le\overline{x_2}+\alpha\times\dfrac{\sigma}{\sqrt{n_2}}$이므로

$c=\overline{x_2}-\alpha\times\dfrac{\sigma}{\sqrt{n_2}}$, $d=\overline{x_2}+\alpha\times\dfrac{\sigma}{\sqrt{n_2}}$

$b-a=\overline{x_2}-\overline{x_1}$에서

$\left(\overline{x_1}+\alpha\times\dfrac{\sigma}{\sqrt{n_1}}\right)-\left(\overline{x_1}-\alpha\times\dfrac{\sigma}{\sqrt{n_1}}\right)=\overline{x_2}-\overline{x_1}$

$\overline{x_2}-\overline{x_1}=2\times\alpha\times\dfrac{\sigma}{\sqrt{n_1}}$ $\cdots\cdots$ ㉠

$b-c=\dfrac{\overline{x_2}-\overline{x_1}}{4}$에서

$\left(\overline{x_1}+\alpha\times\dfrac{\sigma}{\sqrt{n_1}}\right)-\left(\overline{x_2}-\alpha\times\dfrac{\sigma}{\sqrt{n_2}}\right)=\dfrac{\overline{x_2}-\overline{x_1}}{4}$

$-(\overline{x_2}-\overline{x_1})+\alpha\times\dfrac{\sigma}{\sqrt{n_1}}+\alpha\times\dfrac{\sigma}{\sqrt{n_2}}=\dfrac{\overline{x_2}-\overline{x_1}}{4}$

$\overline{x_2}-\overline{x_1}=\dfrac{4}{5}\left(\alpha\times\dfrac{\sigma}{\sqrt{n_1}}+\alpha\times\dfrac{\sigma}{\sqrt{n_2}}\right)$ $\cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡에서

$2\times\alpha\times\dfrac{\sigma}{\sqrt{n_1}}=\dfrac{4}{5}\left(\alpha\times\dfrac{\sigma}{\sqrt{n_1}}+\alpha\times\dfrac{\sigma}{\sqrt{n_2}}\right)$

$\dfrac{6}{5}\times\alpha\times\dfrac{\sigma}{\sqrt{n_1}}=\dfrac{4}{5}\times\alpha\times\dfrac{\sigma}{\sqrt{n_2}}$, $\dfrac{\sqrt{n_2}}{\sqrt{n_1}}=\dfrac{2}{3}$

따라서 $\dfrac{n_2}{n_1}=\left(\dfrac{2}{3}\right)^2=\dfrac{4}{9}$

답 ③

28

$n=1$일 때, (흰 돌의 개수)$-$(검은 돌의 개수)의 최댓값은 1이므로

$\mathrm{P}_1=0$

$n=2$일 때, (흰 돌의 개수)$-$(검은 돌의 개수)의 최댓값은 2이므로

$\mathrm{P}_2=0$

$3\le n\le10$일 때, n번의 시행에서 앞면이 나온 횟수를 $a\,(0\le a\le n)$, 뒷면이 나온 횟수를 $b\,(0\le b\le n)$이라 하면

$a+b=n$, $b-a=3$이므로

$a+(a-3)=n$, $2a-3=n$

$2a=n+3$ $\cdots\cdots$ ㉠

㉠에서 n은 홀수이어야 하므로 ㉠을 만족시키는 순서쌍 (a, n)은 $(3, 3)$, $(4, 5)$, $(5, 7)$, $(6, 9)$이다.

$\mathrm{P}_3={}_3\mathrm{C}_3\left(\dfrac{1}{2}\right)^3=\dfrac{1}{8}$

$\mathrm{P}_5={}_5\mathrm{C}_4\left(\dfrac{1}{2}\right)^5=\dfrac{5}{32}$

$\mathrm{P}_7={}_7\mathrm{C}_5\left(\dfrac{1}{2}\right)^7=\dfrac{{}_7\mathrm{C}_2}{128}=\dfrac{21}{128}$

$\mathrm{P}_9={}_9\mathrm{C}_6\left(\dfrac{1}{2}\right)^9=\dfrac{{}_9\mathrm{C}_3}{512}=\dfrac{21}{128}$

$n=4$, 6, 8, 10일 때는 ㉠을 만족시키는 정수 a의 값이 존재하지 않으므로

$\mathrm{P}_4=\mathrm{P}_6=\mathrm{P}_8=\mathrm{P}_{10}=0$

따라서

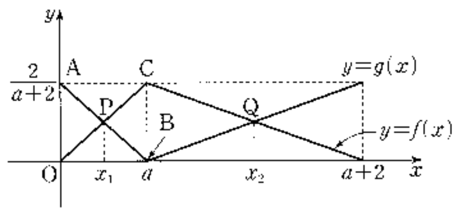
$$\sum_{k=1}^{10}\mathrm{P}_k=\mathrm{P}_3+\mathrm{P}_5+\mathrm{P}_7+\mathrm{P}_9$$

$$=\dfrac{1}{8}+\dfrac{5}{32}+\dfrac{21}{128}+\dfrac{21}{128}=\dfrac{16+20+21+21}{128}$$

$$=\dfrac{78}{128}=\dfrac{39}{64}$$

답 ⑤

29



점 $\left(0,\ \dfrac{2}{a+2}\right)$를 A, 점 $(a, 0)$을 B, 점 $\left(a,\ \dfrac{2}{a+2}\right)$를 C, 함수 $y=f(x)$의 그래프와 함수 $y=g(x)$의 그래프가 만나는 점 중 x좌표가 작은 점을 P, x좌표가 큰 점을 Q라 하고, 두 점 P, Q의 x좌표를 각각 x_1, x_2라 하자.

$0<k\le a+2$에서 $h_1(k)=\mathrm{P}(0\le X\le k)$, $h_2(k)=\mathrm{P}(0\le Y\le k)$라 하면 $h_1(k)$의 값은 $0\le x\le k$에서 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $x=k$ 및 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이와 같고, $h_2(k)$의 값은 $0\le x\le k$에서 함수 $y=g(x)$의 그래프와 직선 $x=k$ 및 x축, y축으로 둘러싸인 부분의 넓이와 같다.

$0\le x<x_1$일 때, $f(x)<g(x)$, $f(x_1)=g(x_1)$

$x_1<x<a$일 때, $f(x)>g(x)$, $h_1(a)=h_2(a)$

$a\le x<x_2$일 때, $f(x)>g(x)$, $f(x_2)=g(x_2)$

$x_2 < x \le a+2$일 때, $f(x) < g(x)$, $h_1(a+2) = h_2(a+2)$
이고 $0 < a < 2$에서 $a < (a+2) - a$이므로 삼각형 BQC의 넓이는 삼각형 OPA의 넓이보다 크다. (단, O는 원점이다.)
즉, 함수 $h(k) = |h_1(k) - h_2(k)|$는 $k = x_2$일 때 최댓값을 갖고, 최댓값은 삼각형 BQC의 넓이와 같으므로 함수 $h(k)$의 최댓값은

$$\frac{1}{2} \times \frac{2}{a+2} \times 1 = \frac{1}{a+2}$$

$\frac{1}{a+2} = \frac{5}{14}$에서

$5(a+2) = 14$, $a = \frac{4}{5}$

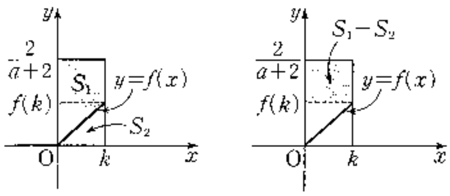
따라서 $p = 5$, $q = 4$이므로 $p + q = 5 + 4 = 9$

답 9

참고

함수 $h(k)$는 k의 값의 범위에 따라 다음과 같다.

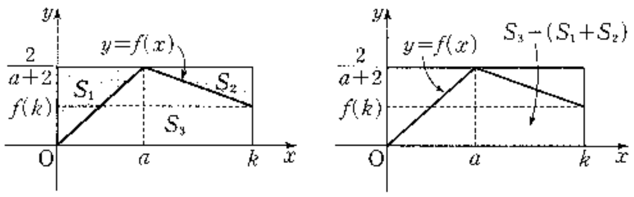
(i) $0 < k \le a$일 때



함수 $h(k)$의 값은 $S_1 - S_2$의 값과 같으므로

$$h(k) = k \times \left\{\frac{2}{a+2} - f(k)\right\}$$

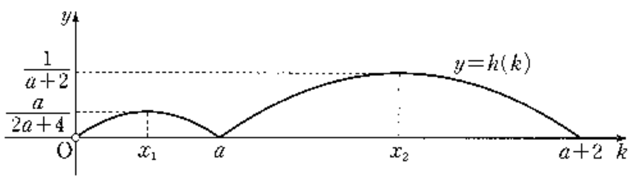
(ii) $a < k \le a+2$일 때



함수 $h(k)$의 값은 $S_3 - (S_1 + S_2)$의 값과 같으므로

$$h(k) = (k - a) \times f(k)$$

따라서 함수 $y = h(k)$의 그래프는 다음과 같다.



30

$x_3 = 0$인 사건을 A, $x_6 = 0$인 사건을 B라 하자.

(i) $x_6 = 0$인 경우

6번의 시행에서 3의 배수의 눈이 k번 나오면 $(6-k)$번은 3의 배수의 눈이 나오지 않은 것이다.
이때 점 P의 좌표는 $k - 2(6-k) = 3k - 12$
$3k - 12 = 0$에서 $k = 4$
따라서 $x_6 = 0$일 확률은

$${}_6C_4\left(\frac{1}{3}\right)^4\left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{60}{3^6} = \frac{20}{243}$$

즉, $P(B) = \frac{20}{243}$

(ii) $x_3 = 0$인 경우

처음 3번의 시행에서 3의 배수의 눈이 2번 나오는 것이므로

$${}_3C_2\left(\frac{1}{3}\right)^2\left(\frac{2}{3}\right)^1 = \frac{2}{9}$$

즉, $P(A) = \frac{2}{9}$

(iii) $x_3 = 0$이고 $x_6 = 0$인 경우

처음 3번의 시행에서 3의 배수의 눈이 2번 나오고, 나중의 3번의 시행에서도 3의 배수의 눈이 2번 나오는 것이므로

$${}_3C_2\left(\frac{1}{3}\right)^2\left(\frac{2}{3}\right)^1 \times {}_3C_2\left(\frac{1}{3}\right)^2\left(\frac{2}{3}\right)^1 = \frac{2}{9} \times \frac{2}{9} = \frac{4}{81}$$

즉, $P(A \cap B) = \frac{4}{81}$

(i), (ii), (iii)에서 구하는 확률은

$$\begin{aligned} P(A^C | B^C) &= \frac{P(A^C \cap B^C)}{P(B^C)} \\ &= \frac{1 - P(A \cup B)}{1 - P(B)} \\ &= \frac{1 - P(A) - P(B) + P(A \cap B)}{1 - P(B)} \\ &= \frac{1 - \frac{2}{9} - \frac{20}{243} + \frac{4}{81}}{1 - \frac{20}{243}} = \frac{181}{223} \end{aligned}$$

즉, $p = 223$, $q = 181$이므로 $p + q = 223 + 181 = 404$

답 404

01 ①	02 ②	03 ④	04 ⑤	05 ③
06 ③	07 ⑤	08 ①	09 ②	10 ⑤
11 ③	12 ③	13 ①	14 ③	15 ⑤
16 114	17 8	18 81	19 17	20 32
21 21	22 426	23 ②	24 ④	25 ⑤
26 ③	27 ④	28 ①	29 64	30 39

01

$4^{\frac{1}{2}}+27^{\frac{2}{3}}=(2^2)^{\frac{1}{2}}+(3^3)^{\frac{2}{3}}=2+3^2=2+9=11$

답 ①

02

$f(x)=2x^3-5x^2+3x$에서 $f(1)=2-5+3=0$이므로

$\lim_{h\to0}\frac{f(1+h)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=f'(1)$

$f'(x)=6x^2-10x+3$이므로

$f'(1)=6-10+3=-1$

답 ②

03

$a_1=a$, $a_{99}=l$이라 하면 $\sum_{k=1}^{99}a_k=297$에서

$\frac{99(a+l)}{2}=297$, $\frac{a+l}{2}=\frac{297}{99}=3$

수열 $\{a_n\}$이 등차수열이므로 수열 $\{a_{2n-1}\}$도 등차수열이다.

$a_{2\times1-1}=a_1=a$, $a_{2\times50-1}=a_{99}=l$

이므로

$\sum_{k=1}^{50}a_{2k-1}=\frac{50(a+l)}{2}=50\times3=150$

답 ④

04

$\lim_{x\to1+}f(x)=1$

$x+1=t$라 하면 $x\to0-$일 때 $t\to1-$이므로

$\lim_{x\to0-}f(x+1)=\lim_{t\to1-}f(t)=1$

따라서 $\lim_{x\to1+}f(x)+\lim_{x\to0-}f(x+1)=1+1=2$

답 ⑤

05

$a_{2n-1}=2^n$, $a_{2n}=3^n$이므로 짝수번째 항과 홀수번째 항을 나누어 생각하면

$\sum_{n=1}^{10}\log_6 a_n=\sum_{k=1}^{5}\log_6 a_{2k-1}+\sum_{k=1}^{5}\log_6 a_{2k}=\sum_{k=1}^{5}\log_6 2^k+\sum_{k=1}^{5}\log_6 3^k$

$=\sum_{k=1}^{5}k\log_6 2+\sum_{k=1}^{5}k\log_6 3=\log_6 2\times\sum_{k=1}^{5}k+\log_6 3\times\sum_{k=1}^{5}k$

$=(\log_6 2+\log_6 3)\times\frac{5\times(5+1)}{2}$

$=\log_6 6\times15=15$

답 ③

06

함수 $f(x)$는 이차함수이므로 실수 전체의 집합에서 연속이고, 함수 $g(x)$는 $x=-1$과 $x=1$에서만 불연속이다.

그러므로 함수 $f(x)g(x)$가 $x=-1$과 $x=1$에서 연속이면 실수 전체의 집합에서 연속이 된다.

함수 $f(x)g(x)$가 $x=-1$에서 연속이려면

$\lim_{x\to-1-}f(x)g(x)=\lim_{x\to-1+}f(x)g(x)=f(-1)g(-1)$이어야 한다.

$\lim_{x\to-1-}f(x)g(x)=(1-a+b)\times(-2-1)=-3(1-a+b)$

$\lim_{x\to-1+}f(x)g(x)=(1-a+b)\times1=1-a+b$

$f(-1)g(-1)=(1-a+b)\times(-2-1)=-3(1-a+b)$

이므로 $-3(1-a+b)=1-a+b$

$a-b=1$ …… ㉠

함수 $f(x)g(x)$가 $x=1$에서 연속이려면

$\lim_{x\to1-}f(x)g(x)=\lim_{x\to1+}f(x)g(x)=f(1)g(1)$이어야 한다.

$\lim_{x\to1-}f(x)g(x)=(1+a+b)\times(-1)=-(1+a+b)$

$\lim_{x\to1+}f(x)g(x)=(1+a+b)\times2=2(1+a+b)$

$f(1)g(1)=(1+a+b)\times(-1)=-(1+a+b)$

이므로 $-(1+a+b)=2(1+a+b)$

$a+b=-1$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=0$, $b=-1$이므로 $f(x)=x^2-1$

따라서 $f(2)=4-1=3$

답 ③

07

$y=\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right)\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)+\cos x-2$

$=-\sin x\times\sin x+\cos x-2=-\sin^2 x+\cos x-2$

$=\cos^2 x-1+\cos x-2=\cos^2 x+\cos x-3$

$=\left(\cos x+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{13}{4}$

$0\le x<2\pi$에서 $-1\le\cos x\le1$이므로

함수 $y=\left(\cos x+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{13}{4}$은 $\cos x=-\frac{1}{2}$일 때 최솟값 $-\frac{13}{4}$, $\cos x=1$일 때 최댓값 -1을 갖는다.

따라서 $M=-1$, $m=-\frac{13}{4}$이므로 $M-m=-1-\left(-\frac{13}{4}\right)=\frac{9}{4}$

답 ⑤

08

$2\times3^x+a\times3^{-x}\le1$에서 $2\times3^x+\frac{a}{3^x}\le1$, $2(3^x)^2+a\le3^x$

$3^x-2(3^x)^2\ge a$

$t=3^x$이라 하면 $t>0$이고 $t-2t^2\ge a$

$f(t)=t-2t^2\ (t>0)$이라 하면 $f(t)=-2\left(t-\frac{1}{4}\right)^2+\frac{1}{8}\ (t>0)$

부등식 $f(t)\ge a$의 실수인 해가 존재하려면 a는 함수 $f(t)$의 최댓값보다는 작거나 같아야 한다.

$t>0$일 때 함수 $f(t)$의 최댓값은 $f\left(\frac{1}{4}\right)=\frac{1}{8}$이므로 $a\le\frac{1}{8}$이다.

이때 $a=\frac{1}{8}$이면 $t=\frac{1}{4}=3^x$이므로 이를 만족시키는 실수인 x가 존재한다.

따라서 a의 최댓값은 $\frac{1}{8}$이다.

답 ①

09

$y=-x^3-3x^2+6$에서 $y'=-3x^2-6x$

곡선 위의 점 $(t,\ -t^3-3t^2+6)$에서의 접선의 방정식은

$y-(-t^3-3t^2+6)=(-3t^2-6t)(x-t)$

이 직선이 점 $(1,\ a)$를 지나므로

$a-(-t^3-3t^2+6)=(-3t^2-6t)(1-t)$

$2t^3-6t+6-a=0$ …… ㉠

삼차함수의 그래프에서 두 개 이상의 점에 동시에 접하는 직선은 존재하지 않으므로 방정식 ㉠이 서로 다른 세 실근을 가지면 그을 수 있는 접선의 개수가 3이 된다.

$f(t)=2t^3-6t+6-a$라 하면

$f'(t)=6t^2-6=6(t+1)(t-1)$

$f'(t)=0$에서 $t=-1$ 또는 $t=1$

함수 $f(t)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

t	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(t)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(t)$	↗	극대	↘	극소	↗

$f(-1)=-2+6+6-a=-a+10$

$f(1)=2-6+6-a=-a+2$

방정식 ㉠이 서로 다른 세 실근을 가지려면

$-a+10>0,\ -a+2<0$에서 $2<a<10$

따라서 정수 a의 개수는

$10-2-1=7$

답 ②

10

$2\int_p^x f(t)\,dt-\int_p^x \{f'(t)\}^2dt=2-3x$ …… ㉠

㉠의 양변에 $x=p$를 대입하면

$0=2-3p,\ p=\frac{2}{3}$

㉠의 양변을 x에 대하여 미분하면

$2f(x)-\{f'(x)\}^2=-3$ …… ㉡

$f'(1)=-2$에서 $f(x)$는 상수함수가 아니므로

$f(x)$의 차수를 $n\ (n\geq 1)$이라 하면 $f'(x)$의 차수는 $n-1$,

$\{f'(x)\}^2$의 차수는 $2(n-1)$이다.

㉡의 양변의 차수를 비교하면 $n=2(n-1)$에서 $n=2$

$f(x)=ax^2+bx+c$ ($a,\ b,\ c$는 상수, $a\neq 0$)이라 하면

$f'(x)=2ax+b$ …… ㉢

이므로 ㉡에서 $2(ax^2+bx+c)-(2ax+b)^2=-3$

$(2a-4a^2)x^2+(2b-4ab)x+2c-b^2=-3$

위의 등식이 모든 실수 x에 대하여 성립하므로

$2a-4a^2=0,\ 2b-4ab=0,\ 2c-b^2=-3$ …… ㉣

에서 $a=\frac{1}{2}$

$f'(1)=-2$이므로 ㉢에서

$f'(1)=2a+b=1+b=-2$

$b=-3$

㉣에서 $2c-(-3)^2=-3$

$c=3$

이므로 $f(x)=\frac{1}{2}x^2-3x+3$이고 $f(2)=2-6+3=-1$

따라서 $p+f(2)=\frac{2}{3}+(-1)=-\frac{1}{3}$

답 ⑤

11

$y=3\tan \pi x$에 $x=\frac{1}{3}$을 대입하면

$3\tan\frac{\pi}{3}=3\sqrt{3}$이므로 $\mathrm{P}\left(\frac{1}{3},\ 3\sqrt{3}\right)$

$0<x\leq 1$이고 $y=3\tan\pi x=0$에서 $\pi x=\pi,\ x=1$이므로 $\mathrm{R}(1,\ 0)$

주어진 그래프에서 $y=a\sin\frac{\pi}{b}x$의 주기가 1이므로

$\frac{2\pi}{\frac{\pi}{b}}=2b=1$에서 $b=\frac{1}{2}$

함수 $y=a\sin 2\pi x$의 그래프가 점 $\mathrm{P}\left(\frac{1}{3},\ 3\sqrt{3}\right)$을 지나므로

$a\sin\frac{2}{3}\pi=\frac{\sqrt{3}}{2}a=3\sqrt{3}$에서 $a=6$

이때 두 곡선 $y=3\tan\pi x,\ y=6\sin 2\pi x$는 점 $\left(\frac{1}{2},\ 0\right)$에 대하여 대칭이므로 사각형 OQRP는 평행사변형이다.

사각형 OQRP의 넓이는 삼각형 ORP의 넓이의 2배이므로

$S=2\times\left(\frac{1}{2}\times 1\times 3\sqrt{3}\right)=3\sqrt{3}$

따라서 $abS=6\times\frac{1}{2}\times 3\sqrt{3}=9\sqrt{3}$

답 ③

12

$f(x)=x^3-4x,\ g(x)=x^2+ax$라 하고, 점 P의 x좌표를 t라 하면

$f(t)=g(t)$이고 $f'(t)=g'(t)$이다.

$f'(x)=3x^2-4,\ g'(x)=2x+a$이므로

$t^3-4t=t^2+at$ …… ㉠

$3t^2-4=2t+a$ …… ㉡

㉡에서 $a=3t^2-2t-4$이고, 이를 ㉠에 대입하면

$t^3-4t=t^2+(3t^2-2t-4)t,\ t^2(2t-1)=0$에서 $t=0$ 또는 $t=\frac{1}{2}$

$t=0$이면 $a=-4$

$t=\frac{1}{2}$이면 $a=-\frac{17}{4}$

(i) $a=-4$일 때

$f(x)-g(x)=(x^3-4x)-(x^2-4x)$

$=x^3-x^2=x^2(x-1)$

이므로 두 곡선으로 둘러싸인 부분의 넓이는

$-\int_0^1(x^3-x^2)\,dx=-\left[\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{3}x^3\right]_0^1=-\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{12}$

(ii) $a=-\frac{17}{4}$일 때

$$f(x)-g(x)=(x^3-4x)-\left(x^2-\frac{17}{4}x\right)$$
$$=x^3-x^2+\frac{1}{4}x=x\left(x-\frac{1}{2}\right)^2$$

이므로 두 곡선으로 둘러싸인 부분의 넓이는

$$\int_0^{\frac{1}{2}}\left(x^3-x^2+\frac{1}{4}x\right)dx=\left[\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{8}x^2\right]_0^{\frac{1}{2}}$$
$$=\frac{1}{64}-\frac{1}{24}+\frac{1}{32}=\frac{1}{192}$$

따라서 $S_1=\frac{1}{12}$, $S_2=\frac{1}{192}$이므로 $\frac{S_1}{S_2}=\frac{\frac{1}{12}}{\frac{1}{192}}=\frac{192}{12}=16$

답 ③

13

$y=\log_2 4(x-5)=\log_2(x-5)+\log_2 4=\log_2(x-5)+2$

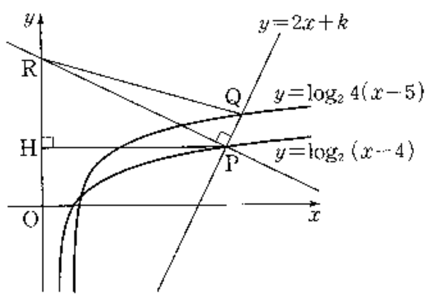
이므로 함수 $y=\log_2 4(x-5)$의 그래프는 함수 $y=\log_2(x-4)$의 그래프를 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이다.

직선 $y=2x+k$의 기울기가 2이므로 점 P를 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 점이 점 Q이다.

$\overline{\mathrm{PQ}}=\sqrt{1^2+2^2}=\sqrt{5}$이고 삼각형 PQR의 넓이가 15이므로

$\frac{1}{2}\times\sqrt{5}\times\overline{\mathrm{PR}}=15$, $\overline{\mathrm{PR}}=\frac{30}{\sqrt{5}}=6\sqrt{5}$

점 P에서 y축에 내린 수선의 발을 H라 하면 직선 PR의 기울기가 $-\frac{1}{2}$이므로 $\overline{\mathrm{RH}}:\overline{\mathrm{PH}}:\overline{\mathrm{PR}}=1:2:\sqrt{5}$이다.



$\overline{\mathrm{PR}}=6\sqrt{5}$이므로 $\overline{\mathrm{PH}}=12$

점 P의 x좌표를 p라 하면 $p=12$

점 P$(p,\ 2p+k)$, 즉 P$(12,\ 24+k)$는 곡선 $y=\log_2(x-4)$ 위의 점이므로

$24+k=\log_2 8=3$

따라서 $k=3-24=-21$

답 ①

다른 풀이

$y=\log_2 4(x-5)=\log_2(x-5)+\log_2 4=\log_2(x-5)+2$

이므로 함수 $y=\log_2 4(x-5)$의 그래프는 함수 $y=\log_2(x-4)$의 그래프를 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이다.

직선 $y=2x+k$의 기울기가 2이므로 점 P를 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 점이 점 Q이다.

$\overline{\mathrm{PQ}}=\sqrt{1^2+2^2}=\sqrt{5}$이고 삼각형 PQR의 넓이가 15이므로

$\frac{1}{2}\times\sqrt{5}\times\overline{\mathrm{PR}}=15$, $\overline{\mathrm{PR}}=\frac{30}{\sqrt{5}}=6\sqrt{5}$ …… ㉠

점 P의 x좌표를 $p\ (p>0)$이라 하면 점 P는 직선 $y=2x+k$ 위의 점이므로

P$(p,\ 2p+k)$

점 P를 지나고 직선 $y=2x+k$에 수직인 직선의 기울기는 $-\frac{1}{2}$이므로 직선 PR의 방정식은

$y-(2p+k)=-\frac{1}{2}(x-p)$, $x+2y-5p-2k=0$

$x=0$이면 $y=\frac{5p+2k}{2}$이므로 R$\left(0,\ \frac{5p+2k}{2}\right)$

$\overline{\mathrm{PR}}$는 점 R와 직선 $y=2x+k$, 즉 $2x-y+k=0$ 사이의 거리이므로

$$\overline{\mathrm{PR}}=\frac{\left|0-\frac{5p+2k}{2}+k\right|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=\frac{\frac{5}{2}p}{\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{5}}{2}p \quad \cdots\cdots ㉡$$

㉠, ㉡에서 $\frac{\sqrt{5}}{2}p=6\sqrt{5}$, $p=12$

점 P$(12,\ 24+k)$는 곡선 $y=\log_2(x-4)$ 위의 점이므로

$24+k=\log_2 8=3$

따라서 $k=3-24=-21$

14

$h(x)=x^3-3a^2x$라 하면

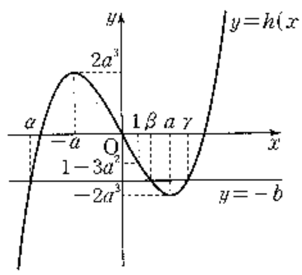
$h'(x)=3x^2-3a^2=3(x+a)(x-a)$

$h'(x)=0$에서 $x=-a$ 또는 $x=a$

함수 $h(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	$-a$	$\cdots$	a	$\cdots$
$h'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$h(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

$h(-a)=-a^3+3a^3=2a^3$, $h(a)=a^3-3a^3=-2a^3$



삼차방정식 $x^3-3a^2x+b=0$이 서로 다른 세 실근을 가지려면 $x^3-3a^2x=-b$에서 함수 $y=h(x)$의 그래프와 직선 $y=-b$가 서로 다른 세 점에서 만나야 하고, 세 근 α, β, γ $(\alpha<\beta<\gamma)$에 대하여 $\beta>1$이 성립하려면 $h(1)=1-3a^2$이므로

$-2a^3<-b<1-3a^2$, 즉 $3a^2-1<b<2a^3$

따라서 $f(a)=3a^2-1$, $g(a)=2a^3$이므로

$f(3)+g(2)=26+16=42$

답 ③

15

ㄱ. $a_1=1$

$a_2=a_1+1\times\sin\frac{\pi}{2}=a_1+1=2$

$a_3=a_2+2\times\sin\pi=a_2=2$

$a_4=a_3+3\times\sin\frac{3\pi}{2}=a_3-3=-1$

이므로 $a_1+a_2+a_3+a_4=1+2+2+(-1)=4$ (참)

ㄴ. 자연수 k에 대하여

$a_{4k+1}=a_{4k}+4k\sin\frac{4k\pi}{2}=a_{4k}$

$a_{4k+2}=a_{4k+1}+(4k+1)\sin\frac{(4k+1)\pi}{2}=a_{4k}+4k+1$

$a_{4k+3}=a_{4k+2}+(4k+2)\sin\frac{(4k+2)\pi}{2}=a_{4k+2}=a_{4k}+4k+1$

$a_{4k+4}=a_{4k+3}+(4k+3)\sin\frac{(4k+3)\pi}{2}$

$=(a_{4k}+4k+1)-(4k+3)=a_{4k}-2$

$a_{4k+5}=a_{4k+4}=a_{4k}-2=a_{4k+1}-2$

$a_{4k+6}=a_{4k+5}+(4k+5)=a_{4k}-2+(4k+5)$

$=a_{4k}+4k+3=a_{4k+2}+2$

$a_{4k+7}=a_{4k+6}=a_{4k+2}+2=a_{4k+3}+2$

이므로 수열 $\{a_{4k-3}\}$, $\{a_{4k-2}\}$, $\{a_{4k-1}\}$, $\{a_{4k}\}$는 각각 공차가 -2, 2, 2, -2인 등차수열이다.

$a_4=-1$이므로

$a_{4k}=-1+(k-1)\times(-2)=-2k+1$ (참)

ㄷ. $a_{4k-3}+a_{4k-2}+a_{4k-1}+a_{4k}=a_1+a_2+a_3+a_4=4$

이고

$a_{4k+1}+a_{4k+2}=a_{4k}+(a_{4k}+4k+1)=2a_{4k}+4k+1$

$=2(-2k+1)+4k+1=3$

따라서

$\sum_{k=1}^{50}a_k=\sum_{k=1}^{48}a_k+a_{49}+a_{50}=4\times12+3=48+3=51$ (참)

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

답 ⑤

16

$$\int_{-3}^{3}(6x^2+5x+1)\,dx=2\int_0^3(6x^2+1)\,dx$$

$$=2\Big[2x^3+x\Big]_0^3$$

$$=2(54+3)=114$$

답 114

17

등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공비를 r라 하면

$a_3a_5=2a_7$에서 $ar^2\times ar^4=2ar^6$

$a^2r^6=2ar^6$

$a\neq0$, $r\neq0$이므로 $a=2$

$a_8+a_9=6a_7$에서

$2r^7+2r^8=6\times2r^6$

$r+r^2=6$, $r^2+r-6=0$, $(r+3)(r-2)=0$

$r>0$이므로 $r=2$

즉, $a_n=2\times2^{n-1}=2^n$이므로

$a_3=2^3=8$

답 8

18

$f(x)=x^3+2ax^2+3ax-1$에서

$f'(x)=3x^2+4ax+3a$

함수 $f(x)$의 역함수가 존재하려면 $f(x)$는 실수 전체의 집합에서 증가해야 한다.

즉, 모든 실수 x에 대하여 $f'(x)\geq0$이어야 하므로 이차방정식 $f'(x)=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=4a^2-9a\leq0$, $a(4a-9)\leq0$

$0\leq a\leq\frac{9}{4}$

따라서 a의 최댓값은 $\frac{9}{4}$, 최솟값은 0이므로

$36(M+m)=36\left(\frac{9}{4}+0\right)=81$

답 81

19

삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의하여

$\cos B=\frac{5^2+4^2-7^2}{2\times5\times4}=-\frac{1}{5}$이므로

$\sin B=\sqrt{1-\left(-\frac{1}{5}\right)^2}=\sqrt{\frac{24}{25}}=\frac{2\sqrt{6}}{5}$

사각형 ABCD가 한 원에 내접하므로 마주보는 각의 크기의 합은 π이다.

즉, $B+D=\pi$이므로

$\sin D=\sin(\pi-B)=\sin B=\frac{2\sqrt{6}}{5}$ …… ㉠

$\cos D=\cos(\pi-B)=-\cos B=\frac{1}{5}$

$\overline{AD}=a$라 하면 $\overline{CD}=2a$이므로

삼각형 ACD에서 코사인법칙에 의하여

$\overline{AC}^2=a^2+(2a)^2-4a^2\cos D$이므로

$49=5a^2-4a^2\times\frac{1}{5}=\frac{21}{5}a^2$

$a^2=\frac{5}{21}\times49=\frac{35}{3}$ …… ㉡

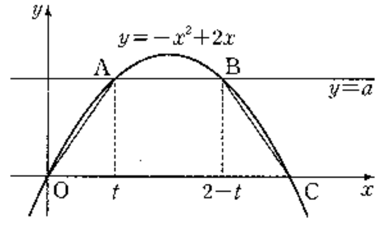
㉠, ㉡에서 삼각형 ACD의 넓이는

$\frac{1}{2}\times a\times2a\times\sin D=a^2\sin D=\frac{35}{3}\times\frac{2\sqrt{6}}{5}=\frac{14\sqrt{6}}{3}$

따라서 $p=3$, $q=14$이므로 $p+q=3+14=17$

답 17

20



점 C의 좌표는 $(2, 0)$이고, 곡선 $y=-x^2+2x$는 직선 $x=1$에 대하여 대칭이므로 점 A의 x좌표를 $t\ (0<t<1)$이라 하면 점 B의 x좌표는 $2-t$이다.

점 A의 y좌표가 $-t^2+2t$이므로 사각형 OCBA의 넓이를 $f(t)$라 하면

$f(t)=\frac{1}{2}\times\{2+(2-2t)\}\times(-t^2+2t)$

$\quad=t(t-2)^2=t(t^2-4t+4)$

$f'(t)=(t-2)^2+2t(t-2)$

$\quad=(t-2)(3t-2)$

$0<t<1$이므로 $f'(t)=0$에서 $t=\frac{2}{3}$

이때 $f(t)$는 $t=\frac{2}{3}$에서 극대이면서 최대이므로 최댓값 S는

$S=f\left(\frac{2}{3}\right)=\frac{2}{3}\times\left(\frac{2}{3}-2\right)^2=\frac{2}{3}\times\frac{16}{9}=\frac{32}{27}$

따라서 $27S=32$

답 32

21

집합 S_n의 원소는

$(-2)^0a_1+(-2)^1a_2+(-2)^2a_3+\cdots+(-2)^{n-1}a_n$

$=a_1-2a_2+2^2a_3-\cdots+(-2)^{n-1}a_n$

과 같이 나타낼 수 있다.

집합 S_3의 원소는 $a_1-2a_2+4a_3$의 꼴로 나타나고 $a_k\ (k=1,\ 2,\ 3)$의 값은 0 또는 1이다.

따라서 a_1+4a_3의 값은 0, 1, 4, 5로 4가지

$-2a_2$의 값은 -2, 0으로 2가지

경우가 될 수 있으므로

$S_3=\{-2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}$

즉, $p=8$

집합 S_n에 속하는 원소 $a_1-2a_2+2^2a_3-\cdots+(-2)^{n-1}a_n$의 값은

$a_{2i-1}=1,\ a_{2i}=0\ (i=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$

일 때 최대이다.

자연수 j에 대하여 $n=2j$라 하면 집합 S_n에 속하는 원소의 최댓값은

$a_1-2a_2+2^2a_3-\cdots+(-2)^{2j-1}a_{2j}$

$=1-0+2^2-0+\cdots+(-2)^{2j-2}-0$

$=1+2^2+\cdots+2^{2j-2}=\frac{2^{2j}-1}{4-1}=\frac{2^{2j}-1}{3}$

$n=2j+1$이라 하면

$a_1-2a_2+2^2a_3-\cdots+(-2)^{(2j+1)-1}a_{2j+1}$

$=1-0+2^2-0+\cdots+(-2)^{2j-2}-0+(-2)^{2j}$

$=1+2^2+\cdots+2^{2j-2}+2^{2j}=\frac{2^{2j+2}-1}{3}$

$\frac{2^{2j}-1}{3}\le5453\le\frac{2^{2j+2}-1}{3}$에서

$\frac{2^{12}-1}{3}=\frac{4095}{3}=1365,\ \frac{2^{14}-1}{3}=\frac{16383}{3}=5461$이고

$5453=5461-8$이므로

$5453=1+2^2+2^4+\cdots+2^{12}-2^3$

따라서 5453을 원소로 갖는 S_n 중 n의 값이 최소인 경우는

$n=2\times6+1=13$일 때이다.

그러므로 $q=13$

따라서 $p+q=8+13=21$

답 21

22

$f(x)=x^3+3x^2-3(t^2-1)x+2t^3-3t^2+1$에서

$f'(x)=3x^2+6x-3(t^2-1)$

$\quad=3x^2+6x-3(t+1)(t-1)$

$\quad=3\{x-(t-1)\}\{x+(t+1)\}$

$f'(x)=0$에서 $x=t-1$ 또는 $x=-t-1$

$t>0$이므로 $-t-1<-1<t-1$이고, 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	$-t-1$	$\cdots$	$t-1$	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

$f(t-1)=(t-1)^3+3(t-1)^2-3(t^2-1)(t-1)+2t^3-3t^2+1$

$\quad=(t-1)^3+3(t-1)^2-3(t-1)^2(t+1)+(t-1)^2(2t+1)$

$\quad=(t-1)^2\{(t-1)+3-3(t+1)+(2t+1)\}=0$

$f(-1)=-1+3+3(t^2-1)+2t^3-3t^2+1$

$\quad=2t^3$

$f(2)=8+12-6(t^2-1)+2t^3-3t^2+1$

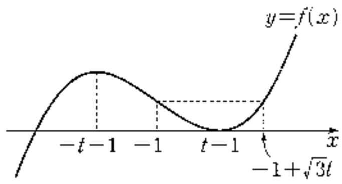
$\quad=2t^3-9t^2+27$

$f(x)=f(-1)$에서

$f(x)-2t^3=(x+1)(x^2+2x+1-3t^2)=0$이므로

$x=-1$ 또는 $x=-1\pm\sqrt{3}t$

에서 $f(-1)=f(-1+\sqrt{3}t)=2t^3$



이때 $-1+\sqrt{3}t\ge2$, 즉 $t\ge\sqrt{3}$이면 $g(t)=f(-1)=2t^3$

$0<t<\sqrt{3}$이면 $g(t)=f(2)=2t^3-9t^2+27$

한편, $t-1\ge2$, 즉 $t\ge3$이면 $h(t)=f(2)=2t^3-9t^2+27$

$0<t<3$이면 $h(t)=f(t-1)=0$

그러므로 두 함수 $g(t)$, $h(t)$는 다음과 같다.

$g(t)=\begin{cases}2t^3-9t^2+27 & (0<t<\sqrt{3})\\ 2t^3 & (t\ge\sqrt{3})\end{cases}$

$h(t)=\begin{cases}0 & (0<t<3)\\ 2t^3-9t^2+27 & (t\ge3)\end{cases}$

이때 함수 $g(t)$는 $t=\sqrt{3}$에서 미분가능하지 않으므로 $a=\sqrt{3}$이다.

$g(2a)=g(2\sqrt{3})=2\times(2\sqrt{3})^3$

$\quad=48\sqrt{3}$

$h(3a)=h(3\sqrt{3})=2(3\sqrt{3})^3-9(3\sqrt{3})^2+27$

$\quad=162\sqrt{3}-216$

따라서

$g(2a)+h(3a)=48\sqrt{3}+(162\sqrt{3}-216)$

$\quad=210\sqrt{3}-216$

즉, $p=210,\ q=-216$이므로

$p-q=210-(-216)=426$

답 426

23

${}_2\Pi_3 \times {}_2H_3 = 2^3 \times {}_4C_3 = 8 \times 4 = 32$

답 ②

24

$P(A^C) = 1 - P(A)$, $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

이므로 $P(A \cup B) = P(A) + P(A^C)P(B)$에서

$P(A) + P(B) - P(A \cap B) = P(A) + \{1 - P(A)\}P(B)$

$P(A \cap B) = P(A)P(B)$

두 사건 A, B는 서로 독립이므로 두 사건 A^C, B도 서로 독립이다.

따라서

$P(A^C | B) = P(A^C) = 1 - P(A)$

$= 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$

답 ④

25

확률변수 X가 이항분포 $B(10, p)$를 따르므로

$P(X=0) = {}_{10}C_0 p^0 (1-p)^{10}$

$= (1-p)^{10}$

$P(X=2) = {}_{10}C_2 p^2 (1-p)^8$

$= 45p^2(1-p)^8$

$P(X=2) = \frac{45}{4} P(X=0)$에서

$45p^2(1-p)^8 = \frac{45}{4}(1-p)^{10}$

$4p^2 = (1-p)^2$

$3p^2 + 2p - 1 = 0$

$(3p-1)(p+1) = 0$

$0 < p < 1$이므로 $p = \frac{1}{3}$

따라서

$V(X) = 10p(1-p)$

$= 10 \times \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{20}{9}$

답 ⑤

26

6명의 학생 중 5명을 임의로 택하는 경우의 수는

${}_6C_5 = 6$

선택된 5명이 일정한 간격을 두고 원 모양의 탁자에 모두 둘러앉는 경우의 수는

$(5-1)! = 24$

따라서 전체 경우의 수는

$6 \times 24 = 144$

선택된 5명의 학생 중 두 학생 A, B가 포함되는 경우의 수는

${}_4C_3 = 4$

두 학생 A, B를 한 사람으로 보고 선택된 나머지 3명의 학생을 포함하여 모두 4명의 학생이 원 모양의 탁자에 둘러앉는 경우의 수는

$(4-1)! = 6$

이때 두 학생 A, B가 서로 자리를 바꾸는 경우의 수는 2이므로 두 학생 A, B가 서로 이웃하게 앉는 경우의 수는

$4 \times 6 \times 2 = 48$

따라서 구하는 확률은

$\frac{48}{144} = \frac{1}{3}$

답 ③

27

표본평균 $\overline{X}$는 정규분포 $N\left(m, \frac{\sigma^2}{16}\right)$을 따르므로

$Z = \frac{\overline{X} - m}{\frac{\sigma}{4}}$으로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $N(0, 1)$을 따른다.

$P(|\overline{X} - m| \ge 2) = P\left(|Z| \ge \frac{2}{\frac{\sigma}{4}}\right) = P\left(|Z| \ge \frac{8}{\sigma}\right)$

$P(|Z| \ge 2) = 1 - 2P(0 \le Z \le 2) = 0.0456$

이므로 $P\left(|Z| \ge \frac{8}{\sigma}\right) = 0.0456$에서

$\frac{8}{\sigma} = 2$, $\sigma = 4$

이 모집단에서 크기가 64인 표본을 임의추출하여 구한 표본평균의 값을 $\overline{x}$라 하면 모평균 m에 대한 신뢰도 95 %의 신뢰구간은

$\overline{x} - 1.96 \times \frac{4}{\sqrt{64}} \le m \le \overline{x} + 1.96 \times \frac{4}{\sqrt{64}}$

따라서 $a = \overline{x} - 0.98$, $b = \overline{x} + 0.98$이므로

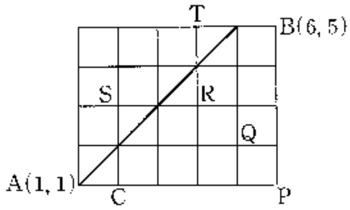
$b - a = 2 \times 0.98 = 1.96$

답 ④

28

조건 (가)에 의하여 $f(1) = 1$, $f(6) = 5$

이때 조건 (가), (나)를 만족시키는 함수 f의 개수는 그림과 같이 좌표평면 위에 나타낸 도로망을 따라 점 A(1, 1)에서 출발하여 직선 $y=x$ 위의 점 또는 직선 $y=x$의 아래쪽에 있는 점만을 지나서 점 B(6, 5)까지 최단거리로 가는 경우의 수와 같다.



도로망을 따라 A → C → P → B로 최단거리로 가는 경우의 수는

$1 \times 1 = 1$

도로망을 따라 A → C → Q → B로 최단거리로 가는 경우의 수는

$\frac{4!}{3!} \times \frac{4!}{3!} = 16$

도로망을 따라 A → C → R → B로 최단거리로 갈 때, 두 지점 S, T를 지나지 않는 경우의 수는

$\left(\frac{4!}{2! \times 2!} - 1\right) \times \left(\frac{4!}{2! \times 2!} - 1\right) = 25$

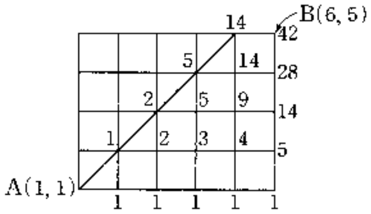
따라서 구하는 함수 f의 개수는

$1+16+25=42$

답 ①

다른 풀이

점 A에서 출발하여 점 B까지 최단거리로 가는 경우의 수를 합의 법칙을 이용하여 구하면 그림과 같다.



따라서 구하는 함수 f의 개수는 42이다.

29

조건 (가)에서

$\mathrm{P}(9\le X\le 11)-\mathrm{P}(9\le Y\le 11)$

$=\mathrm{P}(-0.5\le Z\le 0.5)-\mathrm{P}\left(-\frac{1}{\sigma}\le Z\le \frac{1}{\sigma}\right)$

$=2\times 0.1915-2\mathrm{P}\left(0\le Z\le \frac{1}{\sigma}\right)=0.1856$

즉, $\mathrm{P}\left(0\le Z\le \frac{1}{\sigma}\right)=0.0987$

$\mathrm{P}(0\le Z\le 0.25)=0.0987$에서

$\frac{1}{\sigma}=0.25$, $\sigma=4$

$\mathrm{P}(12\le Y\le a)=\mathrm{P}\left(0.5\le Z\le \frac{a-10}{4}\right)$이고

$\mathrm{P}(0.5\le Z\le 1.5)=\mathrm{P}(0\le Z\le 1.5)-\mathrm{P}(0\le Z\le 0.5)$

$=0.4332-0.1915$

$=0.2417$

이므로 $\frac{a-10}{4}=1.5$, $a=16$

따라서 $a\times\sigma=16\times 4=64$

답 64

30

$2n$개의 공이 들어 있는 주머니에서 임의로 한 개의 공을 꺼내는 시행을 2회 반복하였을 때 나올 수 있는 모든 경우의 수는 $4n^2$이다.

조건 (나)에서 a가 홀수이면 $3a+4b$의 값도 홀수이므로

$\frac{3a+4b}{6}$의 값은 자연수가 될 수 없다.

따라서 a의 값은 짝수이므로

$a=2a'$ (a'은 자연수)

로 놓을 수 있다.

조건 (가)에서 $5\le 2a'\le 2n$, 즉

$3\le a'\le n$ …… ㉠

조건 (나)에서 $\frac{3a+4b}{6}=a'+\frac{2b}{3}$의 값이 자연수이려면

$b=3b'$ $\left(b'\text{은 } 1\le b'\le \frac{2n}{3}\text{인 자연수}\right)$이어야 한다.

따라서 $\frac{3a+4b}{6}\le n$에서 $a'+2b'\le n$ …… ㉡

㉠, ㉡에서

$3\le a'\le n-2b'$ …… ㉢

이때 $n-2b'\ge 3$, 즉 $b'\le\frac{n-3}{2}$을 만족시켜야 한다.

$\frac{2n}{3}>\frac{n-3}{2}$이므로 $1\le b'\le\frac{n-3}{2}$ …… ㉣

(i) $n=2m+3$ (m은 자연수)일 때

㉣에서 $1\le b'\le m$이므로 ㉢, ㉣을 만족시키는 순서쌍 (a', b')의 개수는

$\sum_{k=1}^{m}\{(2m+3)-2k-2\}=\sum_{k=1}^{m}(2m+1-2k)$

$=m(2m+1)-m(m+1)$

$=m^2$

조건을 만족시킬 확률이 $\left(\frac{3}{13}\right)^2$이므로

$\frac{m^2}{4n^2}=\frac{m^2}{4(2m+3)^2}=\left(\frac{3}{13}\right)^2$

$\frac{m}{2(2m+3)}=\frac{3}{13}$

$13m=12m+18$에서 $m=18$

따라서 $n=2m+3=39$

(ii) $n=2m+4$ (m은 자연수)일 때

㉣에서 $1\le b'\le m+\frac{1}{2}$이므로 ㉢, ㉣을 만족시키는 순서쌍 (a', b')의 개수는

$\sum_{k=1}^{m}\{(2m+4)-2k-2\}=\sum_{k=1}^{m}(2m+2-2k)$

$=m(2m+2)-m(m+1)$

$=m^2+m$

조건을 만족시킬 확률이 $\left(\frac{3}{13}\right)^2$이므로

$\frac{m^2+m}{4n^2}=\frac{m^2+m}{4(2m+4)^2}=\left(\frac{3}{13}\right)^2$

$\sqrt{m^2+m}=\frac{12(m+2)}{13}$

이때 $\sqrt{m^2+m}$의 값은 유리수가 아니므로 등식을 만족시키는 자연수 m은 없다.

(i), (ii)에서 조건을 만족시키는 자연수 n은 39이다.

답 39